Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Defesa de Tese de Doutorado

Opções Reais Híbridas Com Aplicações Em Petróleo

Marco Antonio Guimarães Dias

Candidato a Doutor em Engenharia de Produção

Área de Finanças e Análise de Investimentos

Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de Janeiro de 2005

Visão Geral da Defesa

- Exemplos simples para motivar e conceituar:
  - Opcionalidade de ativos e revelação de informação
  - Interação estratégica não-cooperativa e cooperativa
  - Incerteza de mercado e curva de gatilhos
- Opções reais evolucionárias: alternativa para estimar gatilhos
- Valor da informação (VOI) e distribuições de revelações
- Medida de aprendizagem: axiomas e propriedades de η^2
- Exemplo: alternativa ótima de investimento em informação
- Fator de chance exploratório e processo de revelação de Bernoulli
- Teoria dos jogos e jogos de opções reais. Estratégias de gatilho.
- Exemplo: Guerra de atrito na exploração de petróleo
- Trocando o jogo para barganha cooperativa de Nash
- Conclusões

Opcionalidade e Revelação de Informação

- Esse exemplo simples ilustrará os conceitos de *opcionalidade* e *revelação de informação*, que aumentam o valor de ativos reais.
- O valor de um prospecto exploratório é dado pelo VME (valor monetário esperado), função do custo e do benefício esperado:

$$VME = -I_W + FC \cdot VPL$$

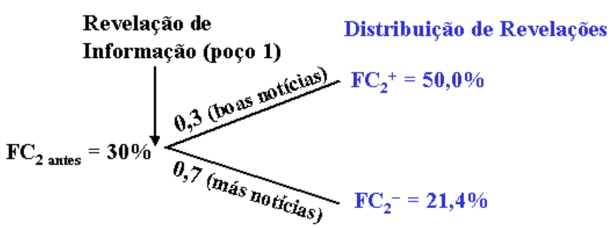
  - Onde: I_W = investimento na perfuração do poço pioneiro ("wildcat")
  - FC = fator de chance (probabilidade de sucesso)
  - VPL = *valor presente líquido* do desenvolvimento da produção
- A firma de petróleo X tem dois prospectos <u>iguais</u>, os quais são correlacionados. Os VMEs (em MM$) são negativos e iguais:

$$VME_1 = VME_2 = -30 + [30\% \times 95] = -1{,}5 \text{ milhões } \$$$

- Assim parece melhor não perfurar, os prospectos nada valem.
  - Mas não foi considerado o fato dos prospectos serem dependentes!
  - Outra firma (Y) de petróleo oferece 2 MM$ pelos dois prospectos.
    - Deve a firma aceitar? Quanto vale o bloco com os dois prospectos?

Revelação de Informação e Fator de Chance

- No cálculo do VME não foi considerado que se o prospecto 1 for perfurado, <u>revela informação para o prospecto 2</u>, que revisa o seu fator de chance para cima em caso de boas notícias (FC_2^+) e para baixo em caso de más notícias (FC_2^-) da 1ª perfuração.
  - Considere que a dependência é tal que os cenários revelados são:



$VME_2^+ = -30 + (0{,}5 \times 95) = +17{,}5$ milhões

$VME_2^- = -30 + (0{,}214 \times 95) = -9{,}7$ milhões

- O valor esperado do <u>bloco</u> (dois prospectos), considerando que:
  - A perfuração do poço 1, *revela informação* para o poço 2, <u>e</u>
  - A perfuração é *opcional* (é um direito, não é obrigação).

$$VME_1 + E[\text{opção}(VME_2)] = -1{,}5 + [(0{,}3 \times 17{,}5) + (0{,}7 \times \text{zero})] = +3{,}75 \text{ MM\$}$$

- Por que aumentou o valor? Revelação de informação <u>e</u> opcionalidade!

Negociações e Interação Estratégica

- **No exemplo, os prospectos valem mais que aparentam graças à revelação de informação e opcionalidade.**
  - **Sem a revelação o bloco valeria zero. Sem a opcionalidade, – 3 MM$**
  - **Recuse a oferta da firma Y (2 < 3,5 MM$)! Mas dê a contraproposta:**
    - **Firma Y ganha o prospecto 1 *de graça*, mas perfura logo o poço e <u>dá toda a informação</u> para firma X sobre essa perfuração. Valor para a firma X?**

Valor para Firma X = zero + [(0,3 x 17,5) + (0,7 x zero)] = + 5,25 MM$ > 3,75

  - **Logo: informação + opcionalidade = oportunidades de bons negócios!**
- **Suponha agora que cada firma tem um dos dois prospectos.**
  - **A firma X pode *esperar* a firma Y perfurar primeiro, pois ganharia 5,25 MM$. Mas a firma Y também pode esperar a firma X perfurar**
    - **Esse jogo da espera chama-se *guerra de atrito*. Pode nenhuma perfurar.**
- **A alternativa é negociar um contrato de *parceria* (ganha-ganha)**
  - **Dividir o valor U = 3,75 MM$ da união dos dois prospectos.**
    - **Esse jogo cooperativo chama-se *jogo da barganha*. Ambos ganham.**

Opcionalidade e Incerteza de Mercado

- **Seja um campo já descoberto. O VPL de desenvolvimento do campo é função do preço do petróleo (P), da qualidade (q) e do volume (B) da reserva de óleo. Seja o simples *modelo de negócios*:**

$$VPL = V(P) - I_D = q\,B\,P - I_D$$

  - **Onde I_D é o investimento no desenvolvimento (função de B)**
  - **Sejam os dados: q = 0,2 ; B = 500 (MM bbl); I_D = 1750 (MM$)**
  - **Se em t = 0, P_0 = 18 \$/bbl $\Rightarrow$ VPL = 0,2 . 500. 18 – 1750 = 50 MM$ > 0**
  - **Mas suponha que o investimento pode ser adiado por 1 ano e os <u>preços podem subir ou descer</u> 1 \$/bbl. Vale a pena esperar e ver?**

50% — **$E[P^+] = 19 \Rightarrow VPL^+ = +150$ MM \$**

$E[P_0] = 18$ /bbl
VPL(t=0) = + 50 MM \$

50% — **$E[P^-] = 17 \Rightarrow VPL^- = -50$ MM \$**
$\Rightarrow$ Não exerce! $\Rightarrow$ Max (VPL^-, 0) = zero

Logo em t = 1, o VPL esperado é: (50% x 150) + (50% x 0) = + 75 milhões \$
Se a *taxa de desconto* = 10%, o valor presente é: $VPL_{espera}(t=0) = 75/1,1 = 68,2 > 50$

Opções Maduras para o Imediato Exercício

- No exemplo anterior *a espera é mais valiosa*, mesmo com VPL positivo em t = 0. Agora suponha que em t = 0 o preço seja maior, P_0 = 19 \$/bbl ⇒ VPL = 0,2 . 500. 19 – 1750 = 150 MM\$.
  - Estará a opção madura para o imediato exercício (*deep-in-the-money*)?
  - Suponha que o preço pode subir ou descer 1 \$/bbl em t = 1 e μ = 10%

E[P_0] = 19 /bbl
VPL(t=0) = + 150 MM \$

50%: E[P^+] = 20 ⇒ VPL^+ = + 250 MM \$

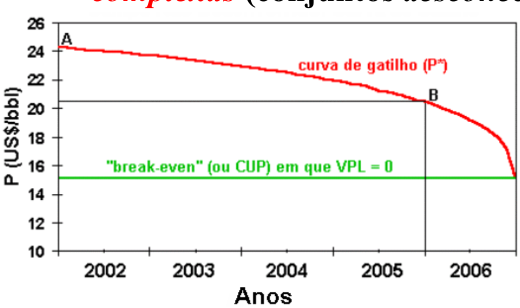
50%: E[P^-] = 18 ⇒ VPL^- = + 50 MM \$
⇒ Exerce do mesmo jeito!

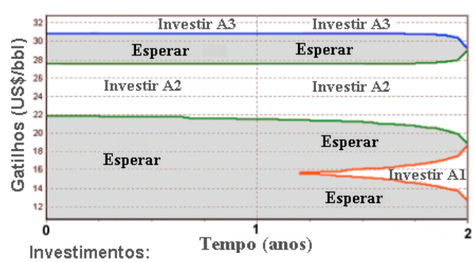
Logo, em t = 1 o VPL esperado é: (50% x 250) + (50% x 50) = 150 milhões \$
O valor presente é: $VPL_{esperar}$(t=0) = 150/1,1 = 136,4 < 150 ⇒ exercer em t = 0

- Nesse caso a opção já está madura e o exercício imediato é ótimo.
  - Logo, existe um P*(t = 0) entre 18 e 19 \$/bbl onde a opção fica madura.
    - Esse P* é chamado gatilho, que dá a *regra ótima de exercício da opção.*

Curva de Gatilhos: Tipos e Como Calcular

- A curva de gatilhos dá a regra de decisão para exercício ótimo das opções reais (OR). Ela depende da incerteza de mercado.
  - Essa regra de exercício ótimo pode ser *simples* (curva de gatilhos) ou *complexas* (conjuntos *desconectados* de exercícios):





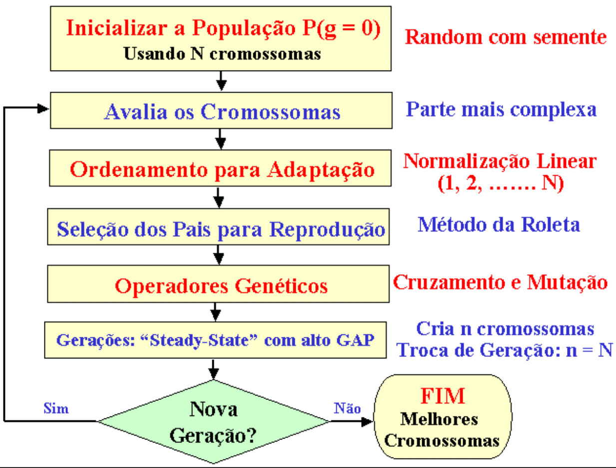
Investimentos: $I_{D3} > I_{D2} > I_{D1}$

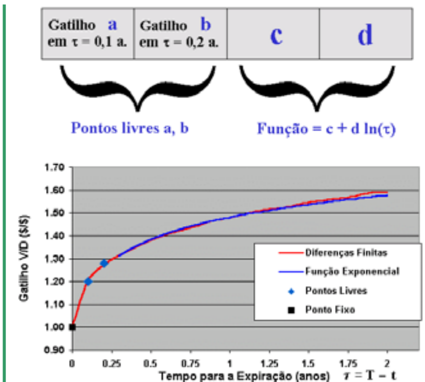
Dias & Rocha & Teixeira (2003)

- A curva ou regiões de gatilho podem ser obtidas de vários modos:
  - Tradicional: resolve um equação diferencial parcial (EDP) através de diferenças finitas ou aproximações analíticas.
  - Simulação de Monte Carlo + método tradicional de otimização.
  - Simulação de Monte Carlo + método de inteligência computacional.

Opções Reais Evolucionárias

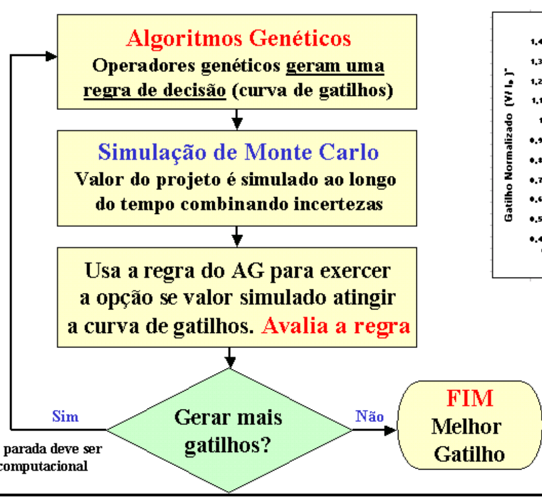
- **<u>Computação evolucionária</u>: usa idéias da teoria da evolução (Darwin) para *evoluir soluções* até chegar ao ótimo (ou perto).**
  - **<u>Algoritmos genéticos</u> (AG): usa operadores crossover, mutação, etc.**
  - **<u>Opções reais evolucionárias</u>: idéia é evoluir as curvas de gatilhos candidatas a serem a curva ótima, usando *computação evolucionária***

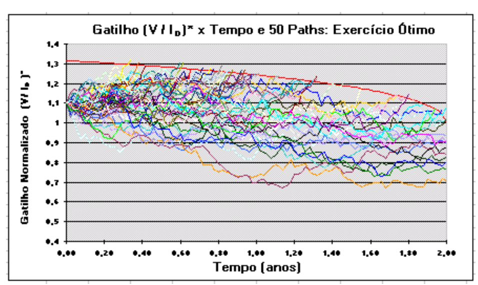




Opções Reais Evolucionárias: Valoração

- **OR evolucionárias é uma abordagem direta, para frente (não é "backwards"), mais simples em termos matemáticos, flexível.**
  - **Sua força reside na capacidade de *fugir de ótimos locais* e no elevado *paralelismo implícito*. Simplicidade pode popularizar opções reais.**

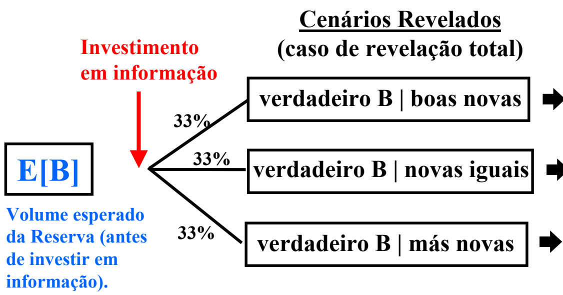




- A regra de parada deve ser por tempo computacional

Incerteza Técnica: Ameaça e Oportunidade

- **Incerteza técnica gera a ameaça de exercício sub-ótimo da opção *desenvolvimento*. Mas isso é somente *um lado da moeda*.**
- **Incerteza técnica cria também uma oportunidade: gera a *opção de investir em informação* antes da decisão de desenvolvimento (a *opção de aprendizagem* é valiosa).**



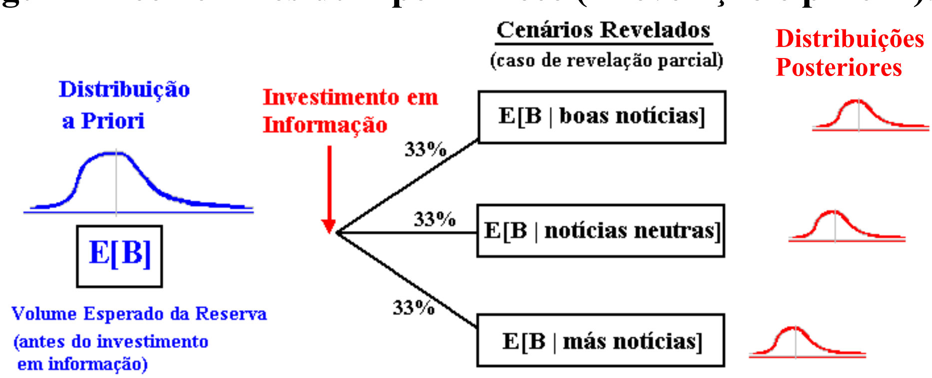
Decisão com a informação	VPL de Desenvolvimento: Com Informação		VPL de Desenvolvimento: Sem Informação usa E[B] no dimens.
Investimento grande	200 MM$	>	150 MM$
Investimento pequeno	100 MM$	=	100 MM$
Não investir	0	>	– 70 MM$
VPL Esperado	100 MM$	>	60 MM$

Valor da informação perfeita = 40 MM$

- O valor *dinâmico* da informação será capturado pelo modelo de *opções reais*
- Será usada uma equação $I_D(B)$ para o *investimento ótimo* de desenvolvimento

Informação Imperfeita ou Revelação Parcial

- **Nova informação reduz a incerteza técnica mas usualmente alguma incerteza residual permanece (a revelação é parcial).**



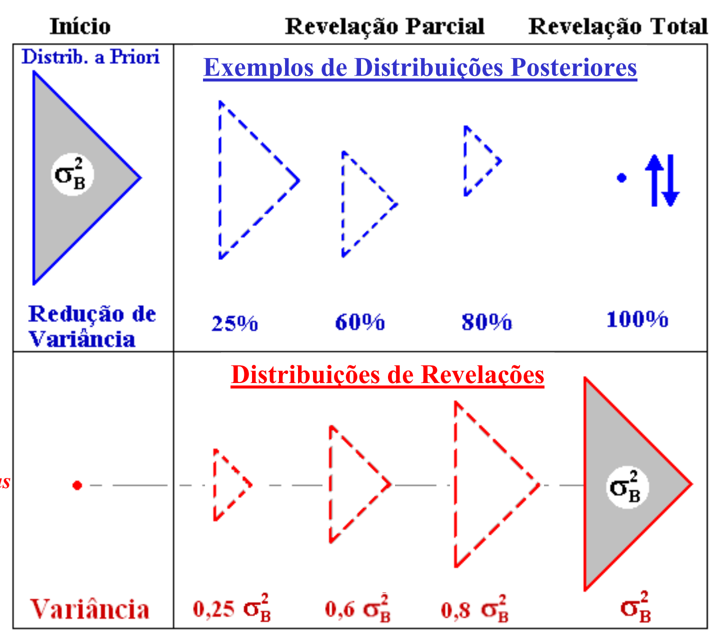
- **Aqui existem três distribuições *posteriores*. Para o caso de *cenários contínuos* da informação (ou sinal S), existiriam *infinitas* distribuições posteriores!**
  - **É muito mais simples trabalhar com a única *distribuição de expectativas condicionais* (que será chamada de *distribuição de revelações*).**
  - **A palavra "revelação" sugere um processo em direção à *verdade* (de B).**

Distribuições de Revelações: Teorema 1

- *Ex-ante* (antes da informação), E[X | S] é uma *variável aleatória.*
  - *Distribuição de revelações* é a distribuição de $R_X(S) = E[X \mid S]$
    - A distribuição de revelações será usada em simulações de Monte Carlo, numa abordagem *neutra ao risco*, combinando várias fontes de incerteza
    - E[X | S] é o melhor estimador em econometria. Uso natural em finanças.
- Teorema 1: principais propriedades da distribuição de revelações.
  - <u>Limite</u>: em caso de *revelação total*, a distribuição de revelações é <u>igual a distribuição a priori</u> da variável com inc. técnica (X).
  - <u>Média</u>: é igual a média original da distribuição a priori, i. é,
    - $E[E[X \mid S]] = E[R_X] = E[X]$ (chamada de *lei das expectativas iteradas*).
  - <u>Variância</u>: é igual a *redução esperada de variância* devido a S.
    - $Var[E[X \mid S]] = Var[R_X] = Var[X] - E[Var[X \mid S]]$ (= redução de variância)
  - <u>Martingale</u>: a seqüência de sinais $\{S_k\}$ gera um *processo de revelação* $\{R_{X,1}, R_{X,2}, R_{X,3}, \dots\}$ que é um <u>*martingale*</u> (v.a. com mesmas médias).
    - A seqüência $\{S_k\}$ é uma seqüência de *exercícios de opções de aprendizagem*

Distribuições Posteriores x Distribuição de Revelações

- Maior volatilidade, maior valor da opção. Por que investir para reduzir a incerteza?



Distribuições de *expectativas condicionais*

Por que aprender?

Redução de incerteza técnica

$\Downarrow$

Aumenta a variância da distribuição de revelações (e, logo, o *valor da opção*)

Medida de Aprendizagem η^2 e Propriedades

- **A medida de aprendizagem proposta é a *redução percentual esperada de variância* η^2, que também é a *variância normalizada da distribuição de revelações* de X dado o sinal S:**

$$\eta^2(X \mid S) = \frac{Var[X] - E[\,Var[\,X \mid S\,]\,]}{Var[X]} = \frac{Var[\,E[\,X \mid S]\,]}{Var[X]} = \frac{Var[R_X]}{Var[X]}$$

- **Proposição 6: propriedades da medida de aprendizagem η^2**
  - **a)** $\eta^2(X \mid S)$ **<u>existe</u> sempre que Var[X] > 0 (não-trivial) e Var[X] for finito;**
  - **b)** **Essa medida é, em geral, <u>assimétrica</u>,** $\eta^2(X \mid S) \neq \eta^2(S \mid X)$;
  - **c)** **Ela é definida no <u>intervalo unitário</u>, i. é,** $0 \leq \eta^2 \leq 1$;
  - **d)** **Se X e S são *independentes*** $\Rightarrow \eta^2(X \mid S) = \eta^2(S \mid X) = 0$; **em adição, vale a expressão:** $\eta^2(X \mid S) = 0 \Leftrightarrow Var[R_X(S)] = 0$;
  - **e)** $\eta^2(X \mid S) = 1 \Leftrightarrow$ **<u>dependência funcional</u>, i. é, $\exists$ v.a. g(S), tal que X = g(S);**
  - **f)** **Ela é <u>invariante sob transformações lineares de X</u>, i. é, se a e b são números reais, com a $\neq$ 0,** $\eta^2(a\,X + b \mid S) = \eta^2(X \mid S)$;
  - **g)** **Ela é <u>invariante sob transformações lineares e não-lineares de S</u> se g(S) for uma função 1-1, i. é,** $\eta^2(X \mid g(S)) = \eta^2(X \mid S)$, **se g(s) é função 1-1;**
  - **h)** **Se as v.a. Z_1, Z_2,…são iid e $S = Z_1 + \ldots + Z_j$ e $X = Z_1 + \ldots + Z_{j+k}$** $\Rightarrow \eta^2(X \mid S) = \frac{j}{j+k}$

Axiomas para Medidas de Aprendizagem

- **Inspirado nos axiomas para medidas de dependência entre v.a., sejam os axiomas para uma medida de aprendizagem $M(X \mid S)$:**
  - **A.** **M(X | S) deve <u>existir</u> pelo menos para v.a. não triviais e com Var[X] finita;**
  - **B.** **M(X | S) deve, em geral, ser <u>assimétrica</u> p/ capturar eventuais assimetrias de aprendizagem entre X e S (X pode aprender muito com S, mas não vice-versa);**
  - **C.** **M(X | S) deve ser <u>normalizada no intervalo unitário</u>, i. é,** $0 \leq M(X \mid S) \leq 1$;
  - **D.** **M(X | S) = 0 $\Rightarrow$ <u>não haver aprendizagem</u> (incluindo se X e S independentes);**
  - **E.** **Se a medida é máxima, M(X | S) = 1 $\Rightarrow$ <u>aprendizagem é máxima</u> (em caso de <u>dependência funcional</u> a medida deve ser máxima:** $X = f(S) \Rightarrow M(X \mid S) = 1$);
  - **F.** **M(X | S) deve ser invariante a mudanças de escala da v.a. X ou da v.a. S, i. é,** $M(a\,X + b \mid S) = M(X \mid S)$ **e** $M(X \mid S) = M(X \mid a\,S + b)$;
  - **G.** **M(X | S) deve ser <u>prática</u>, i. é, *fácil interpretação* e *fácil de ser quantificada*;**
  - **H.** **M(X | S) deve ser <u>aditiva</u>, i. é, caso S possa ser decomposto numa soma de n fatores <u>independentes</u> $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, que dê uma <u>aprendizagem máxima</u>, então:** $M(X \mid S_1) + M(X \mid S_2) + \ldots + M(X \mid S_n) = 1$
- **Teorema 2: a medida de aprendizagem η^2 atende aos axiomas**
  - **Em geral de forma ainda mais forte. Os 2 últimos axiomas serão vistos a seguir.**

Medida η^2 e Decomposição da Aprendizagem

- **O axioma G pede que uma medida de aprendizagem seja *prática*, i. é, de fácil interpretação e fácil de ser quantificada.**
  - **A medida η^2 é intuitiva, pois é interpretada como uma redução esperada da incerteza (medida pela % da variância inicial);**
  - **A medida η^2 é fácil de ser estimada por métodos *não-paramétricos* (pois envolve só variâncias, não o tipo de distribuição) e por *métodos paramétricos populares*, como a regressão (linear ou não) e ANOVA**
    - **Se a regressão linear é correta (ex.: X e S v.a. normais) então η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ^2. Se uma regressão não-linear é a correta, então η^2 é igual ao coeficiente da regressão R^2.**
    - **ANOVA: η^2 é calculada diretamente (é uma razão de soma de quadrados)**
- **Axioma H: o Teorema 3 mostra que a aditividade é ainda mais forte do que o exigido, pois vale para funções reais quaisquer.**
  - **Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$, v.a. *independentes* e X uma soma de funções reais quaisquer desses sinais, $X = f(S_1) + g(S_2) + \ldots + h(S_n)$, então:**
    $\eta^2(X \mid S_1, \ldots, S_n) \;=\; \eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) + \ldots + \eta^2(X \mid S_n) \;=\; 1$
    (decomposição da aprendizagem)

Alternativas de Investimento em Informação

- **Aplicação: considere um campo de petróleo já descoberto, com alguma incerteza técnica em q e B. Sejam K alternativas mutuamente exclusivas de investimento em informação.**
  - **Qual a melhor alternativa? Quanto vale o campo não-desenvolvido?**
- **Métodos tradicionais de valor da informação (VOI), são limitados:**
  - **Consideram apenas alguns poucos cenários (típico = 3) revelados;**
  - **Muitas vezes assumem informação perfeita (revelação total com S_k);**
  - **Não comparam alternativas de investimento em informação com *diferentes custos e diferentes potenciais de aprendizagem*;**
  - **Não consideram as interações das incertezas técnicas com as de mercado, apesar de ambas afetarem o valor econômico da reserva;**
  - **Ignoram o tempo legal de expiração dos direitos e o *tempo de aprender***
- **A solução aqui irá considerar 5 variáveis de estado: tempo (existe uma expiração de direitos); 2 processos estocásticos correlacionados (MGB), o preço do petróleo P e o investimento no desenvolvimento I_D (que será função de B); e as v.a. com incerteza técnica q e B.**
  - **Dados: distribuições a priori de q e B e as medidas $\eta^2(q \mid S_k)$ e $\eta^2(B \mid S_k)$.**
  - **Nesse contexto, o valor da informação é dinâmico (considera o tempo).**

Alternativa Ótima de Aprendizagem

- **Proposição 9: incluindo a alternativa k = 0 (= não investir em informação), a melhor alternativa de aprendizagem é:**

$$k^* = \underset{k \in \{0, 1, 2, \ldots, K\}}{\arg\max}\ W_k$$

- **Onde W_k é o valor da reserva não-desenvolvida (OR) usando a alt. k, que tem custo C_k e tempo t_k de aprendizagem, dado por:**

$$W_k = -C_k + E\left[\max_{t \in [t_k, T]} \left\{E^Q\left[e^{-rt}\,(\tilde{q}\,\tilde{B}\,P(t) - I_D(\tilde{B}, t))\right]\right\} \mid S_k\right]$$

- **Onde E^Q significa *medida neutra ao risco* e t* é o *tempo ótimo de exercício*:**

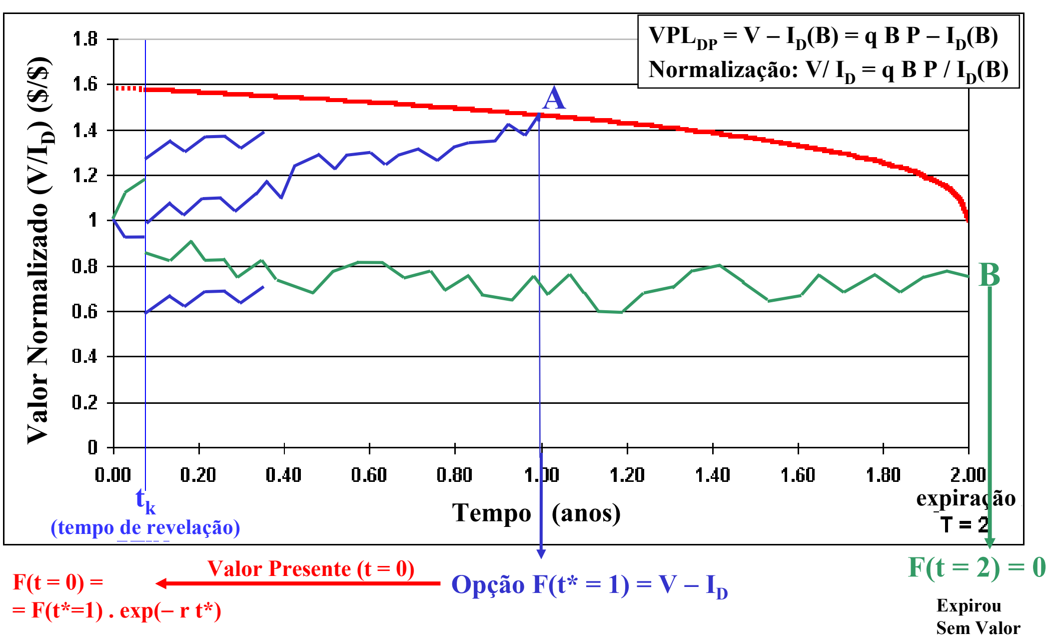
$$t^* = \inf\left\{t \in [t_k, T]: \frac{q\,B\,P(t)}{I_D(B, t)} \geq \left(\frac{V}{I_D}\right)^*(t)\right\}$$

- **Sendo que W_k pode ser aproximado de uma forma simples, através de simulação de Monte Carlo, usando distribuições de revelações para q e B e um fator para trabalhar como se q e B fossem independentes:**

$$W_k = -C_k + E\left[\max_{t \in [t_k, T]} \left\{E^Q\left[e^{-rt}\,(E[q|S_k]\,E[B|S_k]\,P(t) - I_D(E[B|S_k], t))\right]\right\}\right]\psi_{F|S_k}$$

Combinação de Incertezas, VOI e Opção Real W_k

- **O momento ótimo de exercício t* é quando o valor simulado de V/I_D alcança o gatilho $(V/I_D)^*$**



Opção de Aprendizagem: Exemplo Numérico

- **Parâmetros gerais: $P(t = 0) = 20$ \$/bbl; $r = 6\%$ p.a.; $\delta = 6\%$ p.a.; $\sigma = 20\%$ p.a.; I_D (MM\$) = 310 + (2,1 x E[B]).**
- **Distribuições a priori de q e B: B ~ Triang(300; 600; 900) em MM de bbl; e q ~ Triang(8%; 15%; 22%).**
- **<u>Alternativa 1</u>: perfurar um poço *vertical*. C_1 = US\$ 10 MM e leva t_1 = 45 dias para aprender. $\eta^2(q \mid S_1) = 40\%$ e $\eta^2(B \mid S_1) = 50\%$.**
- **<u>Alternativa 2</u>: perfurar um poço *horizontal*. C_2 = US\$ 15 MM e t_2 = 60 dias para aprender. $\eta^2(q \mid S_2) = 60\%$ e $\eta^2(B \mid S_2) = 75\%$.**

Alternativas	S_1	S_2
(1) VPL sem incerteza técnica	230	230
(2) OR sem incerteza técnica	302,1	302,1
(3) VPL com incerteza técnica	178,5	178,3
(4) OR com incerteza técnica mas sem informação	264,2	263,7
(5) OR com incerteza técnica e com informação (W_k)	285,2	298,8
(6) Valor dinâmico líquido da informação [(5) – (4)]	21,0	35,1

Momento Ótimo de Investimento em Informação

- **No exemplo anterior foi considerado que o investimento em informação é feito em t = 0. Adiar o aprendizado tem valor?**
  - **Como o custo de adquirir informação (C_k) é ~100 vezes menor que o custo de desenvolvimento I_D, a opção de adiar C_k não é tão valiosa.**
  - **O problema pode ser resolvido de forma similar, mas testando o momento ótimo t** de investir em informação na fórmula de W_k:**

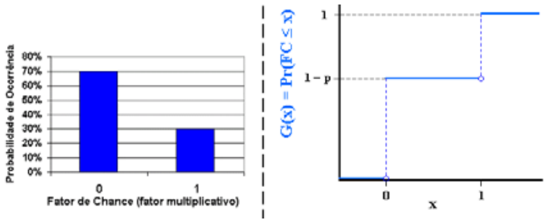
$$W_k = \max_{t^{**} \in [0,\, T - t_k]} E\left[e^{-r t^{**}} \left[E\left[\max_{t^* \in [t^{**} + t_k,\, T]} \left\{ E^Q\left[e^{-r(t^* - t^{**})} \left(\tilde{q}\, \tilde{B}\, P(t^*) - I_D(\tilde{B}, t^*) \right) \right] \right\} \middle| S_k \right] - C_k \right] \right]$$

- **No exemplo numérico anterior, o imediato investimento seria melhor para as duas alternativas de investimento em informação**

Alternativas	S_1	S_2
OR sem informação (sem aprendizagem)	267,9	263,3
OR com aprendizagem imediata	298,4	307,0
OR com aprendizagem adiada de 6 meses	293,9	305,9
OR com aprendizagem adiada de 1 ano	291,2	299,7

Fator de Chance e Distribuição de Bernoulli

- Foi visto que o *fator de chance* dá a probabilidade de sucesso de um prospecto e é usada no cálculo: $VME = -I_W + FC \cdot VPL$
  - FC tem distribuição de Bernoulli, um parâmetro e dois cenários (0 e 1).



  - FC é função (produto) de seis fatores: probabilidades de existência de rocha geradora, migração, rocha reservatório, trapa geométrica, retenção (rocha selante + preservação) e sincronismo geológico.
- Aqui a v.a. técnica de interesse é o FC de um prospecto e o sinal S é o FC de outro prospecto, também v.a. de Bernoulli (0 ou 1).
  - Se o sinal $S_k = 1$, então revisa p/ FC^+, se $S_k = 0$, então revisa p/ FC^-.
  - Logo, para estudar o poder de revelação de um sinal em relação a FC é necessário estudar a *distribuição bivariada de Bernoulli.*

Valores Revisados de FC e Medida η^2

- Teorema 4: dado as v.a. $FC \sim Be(FC_0)$ e $S \sim Be(q)$, não triviais
  - As probabilidades de sucesso reveladas por S, i. é, FC^+ e FC^- são:

$$FC^+ = FC_0 + \sqrt{\frac{1-q}{q}}\,\sqrt{FC_0\,(1-FC_0)}\,\sqrt{\eta^2(FC\,|\,S)}$$

$$FC^- = FC_0 - \sqrt{\frac{q}{1-q}}\,\sqrt{FC_0\,(1-FC_0)}\,\sqrt{\eta^2(FC\,|\,S)}$$

  - η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ:

$$\eta^2(FC\,|\,S) = \rho^2(FC, S) = \frac{(p_{11} - FC_0\,q)^2}{FC_0\,(1-FC_0)\,q\,(1-q)}$$

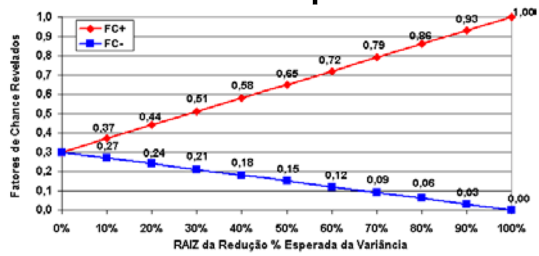
  - Aqui η^2 é simétrica: X e S ~ Bernoulli $\Rightarrow \eta^2(FC\,|\,S) = \eta^2(S\,|\,FC)$
  - $\eta^2(FC\,|\,S) = 0 \Leftrightarrow$ FC e S são independentes
  - Os limites de Fréchet-Hoeffding p/ existir a dist. bivar. de Bernoulli:

$$0 \le \eta^2 \le \operatorname{Max}\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Max}\left\{\dfrac{FC_0\,q}{(1-FC_0)\,(1-q)}, \dfrac{(1-FC_0)\,(1-q)}{FC_0\,q}\right\}, \\ , \dfrac{\operatorname{Min}\{FC_0, q\}\,(1-\operatorname{Max}\{FC_0, q\})}{\operatorname{Max}\{FC_0, q\}\,(1-\operatorname{Min}\{FC_0, q\})} \end{array} \right\}$$

Distribuições de Bernoulli Intercambiáveis

- **Uma simplificação importante é quando as v.a. FC ~ Be(FC_0) e S ~ Be(q) são *intercambiáveis* (aqui $p_{01} = p_{10}$). Proposição 7:**
  - **FC e S intercambiáveis $\Leftrightarrow$ $FC_0 = q$**
  - **O limite de Fréchet-Hoeffding deixa de ser restrição: $0 \leq \eta^2 \leq 1$**
  - **As probabilidades de sucesso FC^+ e FC^- reveladas pelo sinal S são:**

$$FC^+ = FC_0 + (1 - FC_0)\,\eta$$
$$FC^- = FC_0 - FC_0\,\eta$$
$$\Rightarrow FC^+ - FC^- = \eta$$

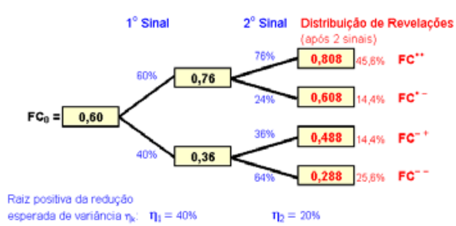


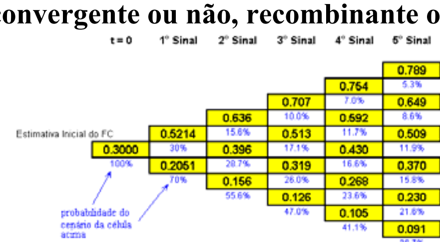
- **Lema 7. A <u>condição necessária</u> para haver revelação total (ou aprendizagem máxima) é que FC e S sejam intercambiáveis:**

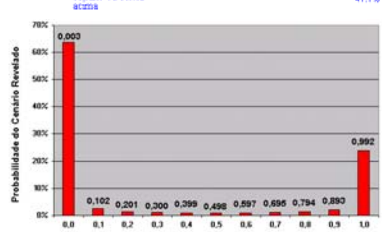
$$\eta^2(FC \mid S) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{FC e S v.a. intercambiáveis}$$

Processos de Revelação de Bernoulli

- **<u>Processo de revelação de Bernoulli</u> é uma seqüência de *distribuições bivariadas de Bernoulli* gerada pela interação de uma seqüência de sinais S com o FC do prospecto de interesse.**
  - **Se existe um seqüência de sinais (poços correlacionados sendo perfurados, sísmica) então existe um *processo de revelação* do FC.**
    - **O processo pode ser totalmente convergente ou não, recombinante ou não**







- **Como esses processos podem convergir para uma distribuição com apenas dois cenários (Teorema 1 a)?**

Teoria dos Jogos & Jogos de Opções Reais

- **A teoria dos jogos é combinada com a teoria de opções reais de forma a considerar a interação estratégica entre firmas.**
  - **Serão vistos dois jogos integrados, a *guerra de atrito* e a *barganha cooperativa* no contexto de <u>duas firmas com prospectos vizinhos</u>.**
  - **Serão usados principalmente os *equilíbrios de Nash perfeito em subjogos* (ENPS) que são também *equilíbrios de Markov* (EM).**
    - **EM é função apenas do estado corrente (ex., P), não da história do jogo**
- **Nos jogos de OR serão consideradas apenas as *estratégias simples de gatilhos*, que darão os *tempos ótimos de exercício* das OR.**
  - **<u>Proposição 8</u>: seja um jogo de OR em tempo contínuo com ENPS dado por estratégias de gatilhos, então existem pelo menos dois métodos de solução, o método *diferencial* e o método *integral.***

$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,0)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I$$

$$F(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(0,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

Guerra de Atrito na Exploração de Petróleo

- **Duas companhias de petróleo tem prospectos correlacionados em blocos vizinhos, com direitos que expiram na mesma data T.**
  - **O resultado da perfuração (descoberta ou não) é uma <u>informação</u> (sinal) <u>pública</u> e afeta o FC do prospecto vizinho para FC^{+} ou FC^{-}**
  - **Assim, existe um incentivo adicional p/ a espera: obter informação grátis ("*free rider*") para decidir se perfura, ou não, o seu prospecto.**
    - **Prêmio da espera é <u>maior</u> que no caso de OR tradicionais.**
    - **A firma que perfura primeiro é chamada de *líder* (L), exercendo em t_L, e a firma que exerce a OR em $t_F > t_L$ é chamada *seguidora* (F). Aqui F > L.**
    - **Em caso de firmas assimétricas, a firma mais *paciente* é a mais forte.**
    - **Existe um tempo de expiração T e o preço do petróleo segue um MGB.**
  - **Existem *<u>opções reais compostas</u>*: a *opção exploratória* E(P, t; FC) com preço de exercício I_W (custo de perfuração) que, se exercida com sucesso, obtém a *opção de desenvolvimento* R(P, t), com preço de exercício I_D.**
    - **O exercício de R(P, t) dá o VPL de desenvolvimento = $q\,B\,P - I_D$**
  - **A solução do jogo de OR é feita "backwards", calcula-se primeiro o valor do seguidor e depois o valor do líder. Será usado o *método diferencial*.**

Guerra de Atrito: Equações Diferenciais Parciais

- As OR de *desenvolvimento* R(P, t), com gatilho P*, e a *exploratória* E(P, t; FC), com gatilho P**, são dadas pelas EDPs e suas c.c.:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r-\delta) P \frac{\partial R}{\partial P} - r R + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

$$R(0, t) = 0 \quad , \quad \text{se } P = 0$$

$$R(P, T) = \max(q\,B\,P - I_D, 0) \quad , \quad \text{se } t = T$$

$$R(P^*, t) = q\,B\,P^* - I_D \quad , \quad \text{se } P = P^*$$

$$\frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q\,B \quad , \quad \text{se } P = P^*$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r-\delta) P \frac{\partial E}{\partial P} - r E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$E(0, t) = 0 \quad , \quad \text{se } P = 0$$

$$E(P, T) = \max[-I_W + FC\,(q\,B\,P - I_D), 0] \quad , \quad \text{se } t = T$$

$$E(P^{**}, t) = -I_W + FC\,(q\,B\,P^{**} - I_D) \quad , \quad \text{se } P = P^{**}$$

$$\frac{\partial E(P^{**}, t)}{\partial P} = FC\;q\,B \quad , \quad \text{se } P = P^{**}$$

- O valor de líder para a firma i é o VME, mas com R(.) em vez do VPL

$$L_i(P, t) = -I_W + FC_i \,.\, R_i(P, t; FC)$$

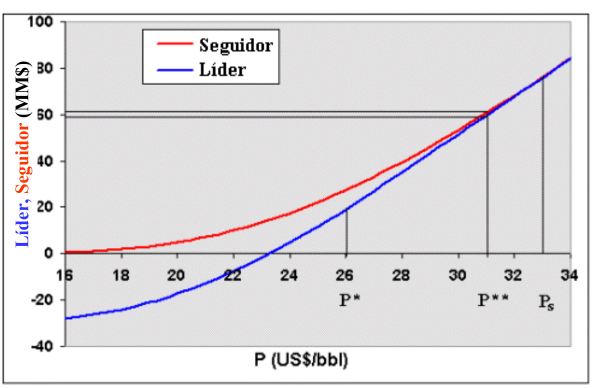
- O valor de seguidor p/ a firma i é um valor esperado considerando FC^- e FC^+

$$F_i(P, t) = FC_j \,.\, E_i(P, t; FC_i^+) + (1 - FC_j) \,.\, E_i(P, t; FC_i^-)$$

- O gatilho do líder $P_L \geq P^{**}$, pois L teria incentivo a esperar mais que P**
  - Mas, se for para ser líder, é melhor sem custo extra de espera ⇒ $P_L = P^{**}$
  - O exercício simultâneo só é ótimo para P muito grande, se $P \geq P_S$

Guerra de Atrito: Gatilhos e Valores

- Os gatilhos relevantes para os preços do petróleo são:
  - P*: a opção de desenvolvimento do campo torna-se "deep-in-the-money".
  - P**: a opção exploratória do prospecto torna-se "deep-in-the-money".
  - P_F: gatilho da opção exploratória *depois* da revelação de informação.
  - P_S: limite superior para a interação estratégica, i. é, firmas exercem suas opções, não importa a firma rival: $P_S(t) = \inf\{ P(t) > 0 \mid L(P, t) = F(P, t)\}$



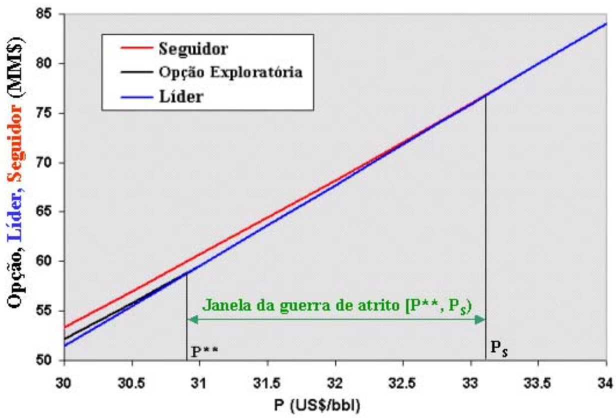
Valores em MM$ para P = 31 $/bbl

		Firma j: Esperar	Firma j: Investir
Firma i	Esperar	59.3 , 59.3	seguidor líder 60.7 , 59.6
Firma i	Investir	líder seguidor 59.6 , 60.7	simultâneo 59.6 , 59.6

Convenção:
= Equilíbrio de Nash

Intervalo de Preços Onde o Jogo É Relevante

- O jogo guerra de atrito <u>não</u> é relevante para preços abaixo de P**, pois a política de espera é ótima de qualquer modo pela *teoria de OR*
- Para preços $P \geq P_S$, o jogo também é irrelevante, pois o valor do seguidor é igual ao valor do líder. Nesse caso, o exercício da opção é ótimo para *qualquer* estratégia do outro jogador.
  - Logo, existe uma janela $[P^{**}, P_S)$ em que o jogo é realmente relevante.



Nesse exemplo:

$[P^{**}, P_S) = [30{,}89 , 33{,}12)$

Esse intervalo é maior se for maior $\eta^2(FC_i \mid FC_j)$

(aqui foi usado $\eta^2 = 10\%$)

Equilíbrios da Guerra de Atrito

- O líder escolherá exercer a opção em $t_L = \inf \{ t \mid P \geq P^{**} \}$. Já o seguidor irá exercer a opção em $t_F = \inf \{ t \mid P \geq P_F \}$
- Para a guerra de atrito *simétrica*, existem dois equilíbrios em estratégias puras: firma i como seguidora e firma j como líder; e vice-versa. Em termos de *tempos de parada*: (t_{Fi}, t_{Lj}) e (t_{Li}, t_{Fj})
- Para a guerra de atrito *assimétrica*, o <u>único</u> equilíbrio em estratégias puras é o jogador *mais forte* como seguidor e o *mais fraco* como líder
  - O jogador *mais forte* é o mais *paciente*, que é o jogador com maior P_S
  - Qualquer assimetria pequena é decisiva para definir esse equilíbrio.
    - O equilíbrio paradoxal com o jogador fraco sendo seguidor, *talvez* ocorra se considerar *regiões desconectadas de exercício* (múltiplas regiões de P_S).
  - Equilíbrio em estratégias mistas: não existe (degenerado) no caso de jogadores assimétricos e jogo finito. Trivial (50%) no caso simétrico.
  - Mas existe uma alternativa que pode dominar *qualquer* desses equilíbrios.

Trocando o Jogo: Barganha Cooperativa

- **Aqui se segue o conselho de Brandenburger & Nalebuff (1996): "*mudar de jogo é a essência da estratégia de negócios*".**
  - **Será visto a troca do jogo de guerra de atrito para a barganha (parceria).**
  - **Uma motivação é que a *informação pública* do jogo não-cooperativo é menos detalhada que a *informação privada* da parceria $\Rightarrow \eta^* > \eta$**
  - **A união dos dois ativos tem valor U, com cada firma tendo uma participação (w_i, w_j). Os valores das firmas são $U_i = w_i\ U$ e $U_j = w_j\ U$**
    - **Essas participações serão dadas pela *solução de Nash* para a barganha.**
    - **A solução de Nash para a barganha cooperativa é a mais popular.**

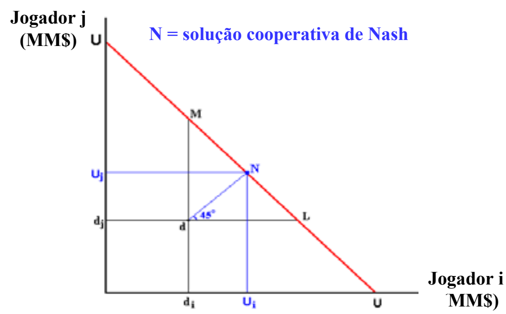
$w_i = ½ + (d_i - d_j)/(2\ U)$

$w_j = 1 - w_i$

$U_i = w_i\ U$; $U_j = w_j\ U$

$U > 0$ e $w_i \in (0, 1)$

d = *ponto de desacordo* ("disagreement point") e aqui é o <u>ENPS da guerra de atrito</u> (novidade teórica).

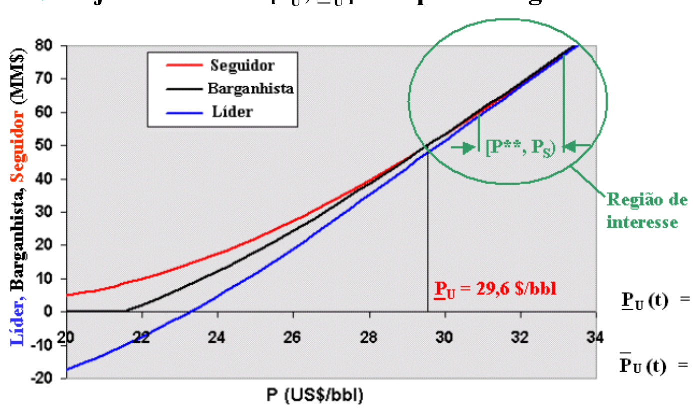


Barganha Cooperativa e Guerra de Atrito

- **O valor da união de ativos no jogo de OR exploratório é:**

$$U = \max\{0, VME_j + [FC_j \,.\, E_i(P, t; FC_i^+)] + [(1 - FC_j) \,.\, E_i(P, t; FC_i^-)]\}$$

- **Mas agora usa $\eta^* > \eta$ para calcular FC^+ e FC^-, uma importante diferença.**
- **Para os pesos w_i e w_j, pode-se usar um valor fictício máximo da guerra de atrito ($d_i = F_i$ e $d_j = F_j$) para ver se a barganha domina *qualquer* GA.**
- **Seja o intervalo $[\overline{P}_U, \underline{P}_U]$ em que a barganha domina qualquer guerra de atrito**

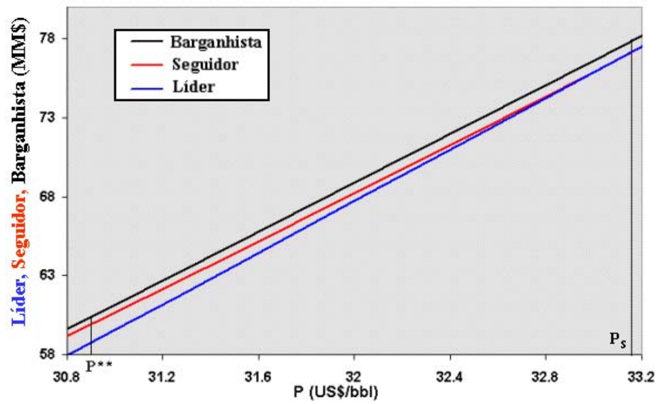


$$\underline{P}_U(t) = \inf\{P(t) \mid U_i(P, t) > 0,\ U_i(P, t) \ge F_i(P, t)\}$$

$$\overline{P}_U(t) = \sup\{P(t) \mid U_i(P, t) > 0,\ U_i(P, t) > F_i(P, t)\}$$

Dominância da Barganha Cooperativa

- **A figura abaixo é um "zoom" da anterior no intervalo em que a guerra de atrito é relevante: $[P^{**}, P_S) = [30{,}89\ ,\ 33{,}12)$.**
  - **Nesse exemplo a barganha domina a guerra de atrito em <u>todo o intervalo</u> onde existiria interesse na guerra de atrito.**
    - **$[P^{**}, P_S) \subset (\underline{P}_U, \overline{P}_U) = (29{,}6\ ,\ 36{,}7)$. Logo, nesse caso, troque de jogo!**



Conclusões

- **A combinação de teorias permitiu que as *opções reais híbridas* abordassem problemas complexos de decisões de investimento, com múltiplas fontes e tipos de incerteza e interação estratégica.**
- **As *opções reais evolucionárias*, tem grande potencial para resolver problemas complexos de *otimização sob incerteza.***
  - **É um método direto, de uso geral, simples e flexível. Pode ajudar a popularizar o uso de opções reais com software de uso geral.**
  - **Pode ser usado para buscar *regras ótimas de exercício* de opções (curvas ou regiões de <u>gatilhos</u>) através de *algoritmos genéticos.***
    - **Usa simulação de MC, motivando o uso de *distribuições de revelações.***
- **A tese apresentou algumas <u>novas contribuições</u> à teoria das OR.**
  - **A maioria foi relativa à modelagem da <u>incerteza técnica</u>, com uma teoria, ligada ao conceito de *expectativas condicionais*, sobre <u>distribuições e processos de revelações</u>, cuja característica é a redução esperada da incerteza medida pela variância.**
    - **A *filtração* nesses processos é gerada por sinais que são *exercícios de opções.***
  - **Foi apresentada uma nova teoria sobre *medidas de aprendizagem*.**

Conclusões

- **Foi feita uma lista de *axiomas* para as propriedades desejadas para uma medida de aprendizagem probabilística.**
- **Foi proposta uma medida η^2 que atende aos axiomas de forma mais forte e que é a variância normalizada da distribuição de revelações.**
  - **A medida η^2 apresentou diversas propriedades matemáticas favoráveis, é intuitiva (redução % de variância) e fácil de ser estimada (regressão, etc.)**
- **A teoria dos *processos de revelação de Bernoulli* permite abordar de forma mais consistente problemas de <u>fator de chance exploratório</u>.**
  - **Foi usada em aplicações de jogos de opções reais, mas pode ser usada em análise de portfólio exploratório e valoração de longo-prazo de regiões.**
- **A tese mostrou dois métodos equivalentes (*diferencial e integral*) para resolver jogos de OR com estratégias simples de gatilhos.**

◆ **A teoria apresentada ajudou a resolver problemas complexos.**

- **Seleção de *alternativas de investimento em informação*, considerando o custo e o tempo de aprender, com 5 variáveis de estado (P, I_D, q, B, t).**
- **Jogos de OR com *opções compostas* e com o equilíbrio de um jogo não cooperativo servindo de "input" do jogo de barganha cooperativa.**

MUITO OBRIGADO!