

## Capítulo 4.2 da Tese de Doutorado de Marco A. G. Dias

### Jogos de Opções Reais

#### 4.2.1 - Introdução e Estratégias de Gatilho

##### 4.2.1.1 - Histórico e Literatura de Jogos de Opções Reais

A demanda prática e teórica de modelos de opções reais considerando também a interação estratégica racional entre jogadores (firmas)<sup>1</sup>, em que o exercício da opção de um jogador altera os valores de OR de outros jogadores, levou ao nascimento da literatura dos *jogos de opções reais em tempo contínuo*<sup>2</sup>. Isso ocorreu no começo dos anos 90 com a dissertação de Smets (1993, depois de um artigo de trabalho em 1991)<sup>3</sup>. Já a literatura dos jogos de OR em tempo discreto começou com Smit & Ankum (1993), com uma abordagem intuitiva para importantes modelos de jogos de opções; e com Smit & Trigeorgis, também em 1993<sup>4</sup>, que analisaram outros aspectos.

A teoria dos jogos é uma ferramenta bem estabelecida na área de organização industrial e para modelar competição imperfeita. Entretanto, a teoria dos jogos tradicional sozinha ignora os avanços da teoria de finanças sobre risco-retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza. A teoria dos jogos e a teoria das opções são abordagens complementares, que juntas fornecem uma metodologia rigorosa com um rico potencial de aplicações.

Sobre a combinação entre a teoria das opções e a teoria dos jogos, Ziegler (1999, p.133) escreveu: *“a teoria dos jogos com análise de opções substitui a maximização da utilidade esperada encontrada nos modelos de teoria dos jogos clássica com a maximização do valor de uma opção ... a abordagem de opções tem a vantagem que automaticamente leva em conta o valor do dinheiro no tempo e o risco”*. Ele também destaca a “ligação entre mercados e organizações” com a teoria das opções determinando o valor baseado em critérios de mercado, e a teoria dos jogos levando em conta a estrutura da organização.

O primeiro *livro texto* dedicado só a jogos de opções reais foi Huisman (2001), focando em importantes modelos teóricos de jogos de OR em tempo contínuo, principalmente para aplicações de

---

<sup>1</sup> Esse item é baseado principalmente nos artigos de Dias & Teixeira (2003) e (2004).

<sup>2</sup> O termo “option games” apareceu primeiro em Lambrecht & Perraudin (1994).

<sup>3</sup> Esse modelo foi sintetizado em Dixit & Pindyck (1994, chapter 9). Esses autores tomaram o *atrativo risco* de incluir no seu livro o na época recente modelo inovador de Smets (1993). O preço foram dois erros menores de interpretação apontados por Huisman & Kort (1999).

<sup>4</sup> Esse último é bem sumarizado no livro texto do Trigeorgis (1996, chapter 9).

momento ótimo de adoção de uma nova tecnologia. Antes, Grenadier (2000a) editou uma boa seleção de artigos de jogos de opções. Dois livros recentes completam a lista de livros dedicados a jogos de OR. Primeiro, o livro texto de Smit & Trigeorgis (2004), bastante acessível e que foca principalmente modelos em tempo discreto, com vários exemplos práticos. O outro é o livro de Thijssen (2004), que segue uma linha similar à de Huisman (2001) em aplicações de adoção de tecnologia, mas com outros modelos, por ex., considerando a redução da incerteza com o tempo. Alguns modelos de Thijssen (2004) tem alguns pontos de contato com o modelo do cap. 5, e por isso ele será discutido um pouco mais abaixo.

Como será visto, em muitos casos as ferramentas de opções reais são suficientes para analisar jogos de OR, sem a necessidade de usar técnicas mais complexas tais como a busca de pontos fixos (ver Border, 1985, para uma análise detalhada desses métodos em teoria dos jogos e economia) das correspondências de melhor resposta dos jogadores. Não foi por acaso que uma extensa pesquisa bibliográfica feita pelo autor indicou que a grande maioria dos artigos de jogos de OR vem de *pesquisadores de OR e não de teoria dos jogos*. Ferramentas tais como processos estocásticos e controle ótimo estocástico são, geralmente, mais úteis do que teoremas de ponto fixo e outras ferramentas relacionadas. Mas o conhecimento adequado da teoria dos jogos é sempre necessário para o engenheiro financeiro que desenvolve modelos de jogos de opções. Além disso, um outro caminho promissor para resolver os jogos de OR vem de dois pesquisadores de teoria dos jogos, Dutta & Rustichini (1995). Eles provaram que o mapa de melhor resposta satisfaz uma condição forte de monotonicidade, a qual é usada para determinar a existência do conjunto de equilíbrios perfeitos de Markov. Esse caminho poderia ser aplicado no caso de guerra de atrito sob incerteza do cap. 5.

Além de pesquisadores de OR e de teoria dos jogos, uma terceira escola de pesquisadores podem contribuir para a literatura de jogos de OR. São pesquisadores da área de controle ótimo (pesquisa operacional) que se interessaram por teoria dos jogos, especialmente no ramo de jogos estocásticos *diferenciais*. Dois exemplos são: Basar & Olsder (1995) e Dockner et al (2000). Entretanto, a ponte entre a teoria dos jogos de opções e esse ramo da literatura de controle ótimo, ainda precisa ser construída.

Nas próximas seções serão estudados, no contexto de jogos de OR, os casos de duopólio simétrico, duopólio assimétrico e oligopólio. Em todos os casos a demanda será incerta e será discutida a literatura existente sobre esses temas. O caso de guerra de atrito e jogos com externalidade positiva,

que será desenvolvido só no cap.5, será agora objeto de uma pequena revisão sobre o que existe de relacionado na literatura de jogos de OR.

Thijssen (2004) aborda jogos de opções reais com tanto em alguns casos de competição, como em alguns casos de externalidade positiva. No caso de externalidade positiva (“spillover” em Thijssen), a abordagem difere dessa tese – explicada em boa parte pela diferença de tipo de aplicação<sup>5</sup>. Por ex., ele usa o tempo como indexador de um processo de redução de incerteza (Thijssen, 2004, p.6). Como foi visto no final do item 3.4.3, pelo menos em aplicações de exploração de petróleo, o tempo corre mais rápido na parte de cima do *processo de difusão de eventos* (sinais) da Figura 52 do que na parte de baixo. Os sinais que reduzem a incerteza são exercícios de opções. Por isso é melhor considerar o processo de revelação (redução de incerteza) como um processo de difusão de eventos e não um processo de difusão tradicional indexado pelo *tempo*.

Embora Thijssen (2004, p.9 e cap. 5) tenha abordado o jogo de guerra de atrito em opções reais, o modelo é muito diferente do modelo da tese não apenas pela questão de indexação tempo x eventos, como também por usar jogo de horizonte infinito (em E&P é finito) e por outros aspectos. Por ex., em Thijssen a firma que investir primeiro revela toda a verdade sobre o estado do projeto do outro. Já aqui existe uma revelação parcial – e mais importante – o poder dessa revelação (medida por  $\eta^2$ ) irá depender do *tipo* de jogo. Ou seja, aqui é feita uma análise bem mais rica da revelação de informações com diferentes exercícios de opções e bem diferente de Thijssen, que por sua vez foca questões que são de menor interesse para o tipo de aplicação da tese.

Assim como Thijssen (2004), Décamps & Mariotti (2004) também analisam um jogo de guerra de atrito com dois tipos de sinais: sinais de uma fonte *exógena* (chamada de “background signals”), geralmente revelados aleatoriamente segundo um processo de Poisson; e sinais de uma fonte *endógena*, geralmente mais fortes, emitidos pelos jogadores quando exercem a sua opção. Embora a aplicação do cap.5 de guerra de atrito seja focada apenas na revelação de informação endógena, poderia ser considerado também um processo exógeno de sinais mais fracos em paralelo, por ex., com a perfuração de poços mais distantes. O modelo de processo de revelação mostrado no cap. 3 pode ser usado até de uma maneira mais realista do que um processo de Poisson. O processo de revelação estudado pode ser usado para não só atualizar os fatores de chance, como para regular as probabilidades de sinais positivos e negativos, de forma que a frequência de sinais é maior no caso

---

<sup>5</sup> Thijssen está mais interessado no momento ótimo de adoção de uma tecnologia. Esse é um tema com importantes aplicações em *organização industrial* (ver Tirole, 1988).

de revelação positiva do que a negativa, refletindo o aumento da probabilidade de exercício de opções (perfurações) com as boas notícias e a redução dessa probabilidade com as más notícias. Um processo de Poisson tradicional, como usado em Thijssen (2004) e em Décamps & Mariotti (2004), não captura essas diferenças de tempo esperado de ocorrência dos sinais. O uso de duas fontes de sinais (exógeno e endógeno) no contexto de um processo de revelação, é deixado como futura extensão, pois no cap. 5 será trabalhado o caso mais simples, usando apenas o sinal endógeno, a fim de permitir uma exposição mais clara do foco principal do jogo, inclusive a possibilidade de *troca de jogo*.

O jogo de OR de Décamps & Mariotti (2004), embora também seja uma guerra de atrito envolvendo aprendizagem com o exercício da opção do jogador rival, difere em muitos outros aspectos do analisado nessa tese (especialmente a aplicação do cap. 5). Por ex., eles consideram que valor do projeto é igual para ambos os jogadores, embora desconhecido (os sinais ajudam a revisar as probabilidades sobre esse valor que é igual para ambos) e a informação é simétrica sobre esse valor (ambos os jogadores sabem que os valores do retorno do projeto são iguais para ambos os jogadores). Nessa tese, os valores dos projetos são diferentes entre os jogadores<sup>6</sup> e eventualmente existe assimetria de informação, mas sobre o *valor do projeto* do outro<sup>7</sup>. Por outro lado, em Décamps & Mariotti (2004) os custos de investimento são desiguais e a informação sobre esses custos são informações privadas de cada firma, i. é, existe informação assimétrica sobre esses custos de investimento. Já na aplicação de interesse da tese, os custos de exercício das opções não são informações privadas e geralmente são aproximadamente iguais, conforme justificado a seguir.

Em muitas indústrias, o custo é um fator estratégico que diferencia os jogadores (as firmas), pois impulsiona uma competição de preços e/ou a entrada em novos mercados (novos investimentos). Em exploração de petróleo isso não ocorre por algumas razões<sup>8</sup>. Primeiro, as companhias de petróleo (exceto OPEP) são *tomadoras de preços* e não formadoras de preços. Isso significa que *não* existe competição por *preço*. Segundo, o custo de investimento da perfuração de um poço é conhecido, pois o principal elemento de custo, a *taxa diária de sondas*, é um valor de mercado

---

<sup>6</sup> Por ex., os tamanhos das estruturas mapeadas pela sísmica são q.c. diferentes de um bloco para o outro. Geralmente ambos os jogadores têm uma idéia de quem tem a maior estrutura, pois ambos tiveram acesso aos registros sísmicos antes do leilão dos blocos.

<sup>7</sup> Eventualmente, pode existir dúvida de qual estrutura é maior, pois o registro sísmico disponível antes do leilão (de conhecimento comum) pode ser de má qualidade e geralmente as firmas ao ganharem um bloco no leilão, fazem uma sísmica mais detalhada (a sísmica 3D) antes de pensar em perfurar, o que *pode* revisar a ordem relativa de qual estrutura é maior.

<sup>8</sup> Essa explicação detalhada está sendo dada por ser uma dúvida comum. Em Montreal (2004), o autor foi questionado por um pesquisador sobre assimetria de informação no custo.

divulgado em revistas especializadas<sup>9</sup>. A grande maioria das empresas de E&P de petróleo não tem sondas próprias (ou tem numa quantidade mínima, geralmente para manutenção de poços) e contratam sondas no mercado. Mesmo que uma firma use uma sonda contratada cujo valor do contrato não tenha sido divulgado, o custo de investimento da perfuração tem de ser feito com o valor de mercado (*custo de oportunidade*) e não com o valor histórico/contábil do contrato específico de uma sonda<sup>10</sup>. A taxa diária de sondas, um valor de mercado (logo sem assimetria de informação), responde pela maior parte do custo de investimento (ou de exercício da opção de perfurar) que é o produto da taxa diária de sondas pelo número médio de dias de perfuração. Uma parcela bem menor, os custos de insumos como lama de perfuração e tubos de revestimento, também são valores de mercado conhecidos. Sendo essa sonda operado pela firma contratada (pela dona da sonda, uma terceira empresa), o número esperado de dias de perfuração não depende da eficiência da companhia de petróleo (e sim da operadora contratada) e é função principalmente da *profundidade* do objetivo a ser perfurado. Se as firmas estão perfurando em prospectos correlacionados, esses devem ter a mesma idade geológica e assim ter profundidades similares. Mas caso haja alguma diferença relevante de profundidades dos prospectos, essa informação em geral também não é assimétrica porque ambas as firmas tiveram acesso aos mesmos registros sísmicos antes do leilão e tem uma boa idéia de quem tem o objetivo mais profundo.

Assim, o mais razoável no caso específico de E&P de petróleo é considerar os custos de investimento (perfuração) como sendo aproximadamente iguais e de conhecimento comum. O que realmente é desigual – e eventualmente assimétrico, é o valor do campo em caso de descoberta. Isso porque as firmas têm prospectos com diferentes tamanhos das estruturas, geólogos com diferentes estimativas de probabilidades de sucesso, diferentes taxas de desconto corporativas, etc.

Essa diferença do que é (ou pode ser) assimétrico no problema da tese e no artigo de Décamps & Mariotti (2004) tem importantes conseqüências no *método de solução do jogo* guerra de atrito. Décamps & Mariotti (2004, p.82) não podem usar *estratégias de gatilhos* (“trigger strategy”) simples como é aqui usada, pois no modelo deles *não* existe uma correspondência 1-1 entre o que os jogadores conhecem sobre o valor do projeto e o que conhecem sobre o custo de investimento do

---

<sup>9</sup> Exs.: Petrodata Ltd; ODS-Petrodata (<http://www.ods-petrodata.com>), etc. Como mencionado no item 2.1.3, McCormack & Sick (2001) fizeram um estudo de correlação entre taxas diárias de sondas e preços do petróleo. Se as taxas diárias de sondas fossem informação privada, eles não poderiam fazer esse estudo.

<sup>10</sup> Isso é aceito rotineiramente na indústria de E&P de petróleo, não só por ser o correto em termos de análise de FCD, como para evitar distorções: se fosse usado o custo do contrato, todos os gerentes de ativos iriam querer a sonda com o contrato mais barato para reduzir seus custos ou melhorar os projetos. Na Petrobras é norma usar o valor de mercado e não o valor contratual.

rival<sup>11</sup>. Como eles mesmos reconhecem, quando o valor do projeto é desconhecido e assimétrico existe sempre uma correspondência 1-1 entre o que um jogador sabe sobre o rival e o quanto ele pode obter em média ao investir. Sob essa ótica, o problema da tese é mais simples do que o analisado em Décamps & Mariotti (2004), pois aqui é possível usar estratégias de gatilhos e no modelo deles não pode. Por outro lado, devido a essa complexidade, eles optaram por uma estrutura de informação (relação sinal com a variável de interesse) mais simples do que a desenvolvida nessa tese (cap.3).

Huisman (2001, pp.205-208) analisou jogos de externalidades positivas, mas o tipo analisado foi mais um jogo com *efeitos de rede*, onde o valor do exercício simultâneo pode ser maior que o valor do seguidor, do que o jogo guerra de atrito como definido por Fudenberg & Tirole (1991) ou Maynard Smith (1982).

#### 4.2.1.2 - Estratégias de Gatilho em Jogos de Opções Reais

Os jogos de OR em tempo contínuo, na grande maioria dos casos analisados na literatura, são resolvidos com estratégias ótimas para os jogadores que são denominadas *estratégias de gatilho simples* (“trigger strategy”), que integram a solução (equilíbrio) do jogo. Essas estratégias podem ser vistas como a ação ótima de jogadores (firmas) que *consideram as melhores respostas dos rivais* e fazem sua otimização em *retro-indução* (“backwards”) no estilo da programação dinâmica. Dessa forma, essas estratégias serão ENPS ao induzir um EN em todo o subjogo que começa num instante  $t \geq 0$  qualquer<sup>12</sup>.

Isso significa que a metodologia de OR na valoração sob incerteza é *quase* toda a solução do jogo, desde que se considerem as ações ótimas (melhor resposta) também dos *outros* jogadores de forma endógena no modelo. Isso é feito em vários artigos da literatura de jogos de OR, inclusive o modelo clássico de Smets analisado em Dixit & Pindyck.

Mas foi mencionado que nem sempre é possível usar estratégias de gatilho simples para resolver problemas de jogos de OR: Décamps & Mariotti (2004, p.82) não podem usar essas estratégias simples pois no modelo deles não existe uma correspondência 1-1 entre o que os jogadores conhecem sobre o valor do projeto e o que conhecem sobre o preço de exercício da opção. Também Murto (2002) argumenta que em alguns casos essas estratégias simples fazem desaparecer outros

---

<sup>11</sup> Ou seja, para cada cenário da distribuição de valor do projeto, existem vários possíveis custos de investimento do oponente (uma outra distribuição).

<sup>12</sup> Não se está dizendo que esse método identifica *todos* os ENPS.

ENPS e considera o caso mais complexo de conjuntos desconectados de exercício (“disconnected stopping set”). Mesmo em problemas de OR sem interação estratégica, existem casos em que não se podem usar estratégias de gatilho simples: no cap. 2, item 2.4.2 (ver Figura 17), em vez de um gatilho para investir numa alternativa, se tinha um *conjunto* (intervalo de preços do petróleo) de investimento ótimo, com regiões intermediárias de espera desconectando essas regiões de exercício ótimo. Ou seja, também é um exemplo de “disconnected stopping set” mencionado por Murto (2002), mas no contexto de OR tradicional. Em termos técnicos, em vez de um *valor* de parada ótima se tem um *conjunto(s) de parada ótima*. No entanto, Lambrecht (2001) num problema similar ao de Murto, forçou os conjuntos de exercício serem conectados e resolveu mais facilmente o problema, sendo criticado por Murto (2002) por achar apenas o principal (único) ENPS ao não considerar a possibilidade de conjuntos de exercício desconectados que gerariam ENPS menos intuitivos<sup>13</sup>.

Felizmente, a grande maioria dos problemas de OR não tem essas complicações e podem ser usadas estratégias de gatilho simples tais como “invista para  $P \geq P^*$ ” ou “abandone para  $P < P^{**}$ ”. Em termos de *jogos de parada ótima*, se diz “entre no mercado em  $t = t^*$ ”, estipulando o *tempo de parada ótima* como o primeiro instante em que uma variável estocástica atinge um certo valor de gatilho. Dessa forma, definindo o gatilho estará definido o tempo de parada ótima como o ínfimo tempo que a variável estocástica atinge o valor de gatilho.

Para essa classe de jogos de OR em tempo contínuo em que podem ser usadas estratégias simples de gatilhos é que se enunciará a seguinte proposição, a qual é a principal contribuição do cap. 4 da tese à literatura.

**Proposição 8:** Sejam os jogos de OR em tempo contínuo, sendo que as estratégias podem ser caracterizadas como estratégias de gatilho simples (“trigger strategy”). Então existem *pelo menos* dois métodos equivalentes para resolver esses jogos. O primeiro é o método diferencial e o segundo é o método integral. Em ambos, se obtém os *valores* dos jogadores executando as estratégias ótimas definidas por *gatilhos*. Com os valores e gatilhos dos jogadores, se tem os elementos para a análise de equilíbrio. Esses dois métodos são resumidos a seguir:

---

<sup>13</sup> Lambrecht (2001) assumiu como premissa (“Assumption 4”, p.771) a restrição que cada firma só usa estratégias de gatilho simples, exatamente para descartar estratégias mistas e EN não intuitivos, por ex., uma firma abandonar o mercado após uma *elevação* de preços.

(a) Método Diferencial: usa os métodos tradicionais de OR em que equações diferenciais estocásticas (ordinárias ou parciais) descrevem os valores dos jogadores. A otimização das estratégias dos jogadores, que considera as melhores respostas dos rivais de forma endógena, é feita através das condições de contorno de continuidade e de contato suave.

(b) Método Integral: usa uma soma de integrais estocásticas para descrever os valores dos jogadores, em que os limites de integração são tempos de parada ótima combinados com tempos limites triviais (0 e  $\infty$ ). Esses tempos de parada ótima são definidos como os ínfimos tempos em que a variável estocástica atinge um valor de gatilho. A otimização das estratégias dos jogadores, que considera as melhores respostas dos rivais de forma endógena, é feita através de métodos tradicionais de otimização, tais como a *condição de primeira ordem*, associado ao conceito de *valor esperado do fator de desconto estocástico*, que dá a atualização de um valor obtido pelo exercício ótimo de uma OR no tempo de parada  $T^*$ .

Prova: Será feita através de exemplos clássicos de duopólios simétricos e assimétricos nos itens 4.2.2 e 4.2.3, em que se mostrará que ambas são aplicáveis aos problemas de jogos de OR e resultam nos mesmos valores. Nesses jogos, os valores dos jogadores exercendo otimamente as opções e as suas estratégias ótimas definidas por gatilhos, serão suficientes para caracterizar equilíbrios em estratégias puras e em estratégias mistas desses jogos.

Em alguns casos da literatura, como em Dixit & Pindyck (1994, cap.9), houve uma combinação de métodos, usando o método diferencial para achar o valor e o gatilho do seguidor e o método integral para calcular o valor e o gatilho do líder<sup>14</sup>. Aqui (item 4.2.2), usando um caso simétrico um pouco mais complexo, se mostrará que se poderia usar só o método diferencial ou só o método integral para solucionar esse jogo de OR. Por ex., para calcular o valor e o gatilho do líder com o método diferencial, basta usar a equação diferencial que rege o valor do líder *durante a sua fase de monopólio*<sup>15</sup>, considerando como *condição de contorno* o instante em que existe o exercício da OR do *outro* jogador, que faz a curva de valor do líder ser côncava. Isso não foi notado antes pelos analistas desse jogo clássico de OR (Dixit & Pindyck, Huisman & Kort, Grenadier, etc.).

O método integral também pode ser usado sozinho na solução de jogos de OR, embora também venha sendo usado parcialmente. Por ex., o *valor do seguidor* em Dixit & Pindyck poderia ser

---

<sup>14</sup> Embora Dixit & Pindyck não tenham calculado explicitamente o valor do gatilho do líder, ficou claro (p. 312) que um método simples de otimização poderia calcular esse gatilho.

<sup>15</sup> E não o valor da *opção de investir e se tornar líder*, que é um valor secundário no jogo.



calculado com uma única integral estocástica, a qual é resolvida com uma simples equação do valor esperado do fator de desconto estocástico, que dá o valor do seguidor em função do gatilho do seguidor. Esse gatilho pode ser obtido com a otimização tradicional (condição de primeira ordem) e novamente com o conceito de valor esperado do fator de desconto. Em casos mais gerais, pode haver uma soma de duas integrais (como em Dixit & Pindyck para calcular o valor do líder) ou mais integrais. Isso depende dos *tempos de parada ótima* relevantes do problema que irão determinar como devem ser divididas as fases do jogo (e logo os limites de integração), fases essas marcadas por exercícios de OR. Por ex., uma fase inicial (sem exercício), uma fase em que uma firma tem monopólio (um exercício de opção) e fase em que as duas firmas produzem em duopólio (já exerceram as duas opções).

Deve-se mencionar que o método diferencial é de longe o mais usado em OR. O método integral em problemas tradicionais de OR, foi mais bem estabelecido com o artigo de Dixit & Pindyck & Sødal (1999), sendo que os casos menos favoráveis de aplicação são quando a opção tem maturidade finita, já que o método é fortemente analítico. Além disso, existem algumas situações em que um método é mais simples que o outro e vice-versa. Esses e outros pontos metodológicos serão ilustrados nos exemplos dos itens 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4. No apêndice 9.2, são discutidos tópicos úteis para o método integral, tais como o tempo esperado de toque de um processo Browniano, o fator de desconto esperado e métodos de otimização sob incerteza usado no método integral.

#### **4.2.2 - Duopólio sob Incerteza Simétrico**

A diferença básica dos modelos que serão analisados no restante desse capítulo, em relação aos modelos tradicionais, é a presença de uma demanda incerta, que flutua ao longo do tempo de forma exógena aos jogadores. Considere a seguinte função inversa da demanda genérica estocástica:

$$P(t) = Y(t) \cdot D(Q_T) \quad (269)$$

Onde  $P$  é o preço,  $D(Q_T)$  é a função (inversa) demanda,  $Q_T$  é a produção total da indústria e  $Y$  é um choque estocástico multiplicativo da demanda, sendo  $Y(t=0) = 1$  e o valor futuro  $Y(t > 0)$  é incerto e modelado com um processo estocástico. Ou seja, a eq. (265) de função demanda determinística é multiplicada por um choque estocástico e assim o preço muda não só com a produção dos jogadores, mas também pela simples passagem do tempo (evolução da economia).

Para facilitar a intuição sobre a demanda estocástica, considere o exemplo numérico com a função demanda linear:  $P = Y (500 - 25 Q_T)$ . A Figura 59 mostra a curva de demanda inicial ( $Y = 1$ ) e uma curva futura de demanda depois de choques estocásticos que aumentaram a demanda para  $Y = 2$ .

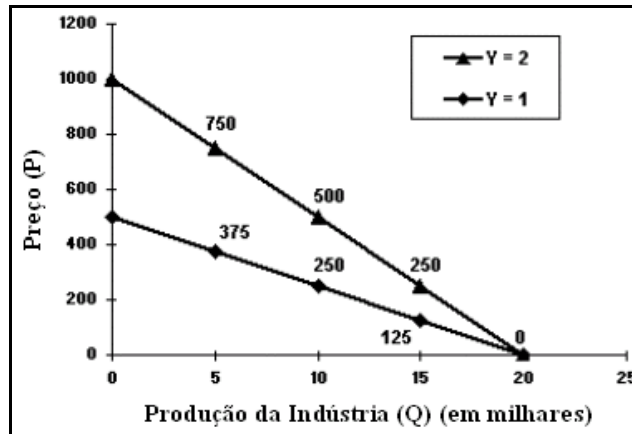


Figura 1 – Incerteza na Curva de Demanda

A Figura 59 mostra que se a produção da indústria é 10.000 unidades (por ano), o preço do produto é inicialmente de \$250 por milhar. Se a variável estocástica dobra, o mesmo ocorre com o preço (sobe para \$500/1.000 unidades).

O modelo de duopólio sob incerteza simétrico foi o primeiro modelo conhecido de jogos de OR devido a Smets (1993). Em adição à sua relevância histórica, esse modelo tem grande importância teórica – fundações dos jogos estocásticos de parada ótima em tempo contínuo – e também significado prático para duopólios quando não existe vantagem competitiva de uma firma. Na indústria do petróleo, imagine duas firmas disputando uma região no mercado de abastecimento de derivados e pensam em investir numa nova base de distribuição.

Esse item sumariza a análise profunda feita por Huisman & Kort (1999). Eles estenderam a literatura existente sobre esse modelo (Smets, Dixit & Pindyck) em várias maneiras, especialmente permitindo equilíbrios em *estratégias mistas* e analisando a possibilidade de equilíbrios em *colusão tácita* “non-binding collusion”. Em adição, eles apresentaram várias proposições que estabelecem as condições para a ocorrência de diferentes equilíbrios, de uma maneira rigorosa. Por razões de espaço, serão mostrados apenas resultados selecionados<sup>16</sup>. A explanação aqui apresenta apenas modificações menores em relação à notação original. No entanto, foram incluídos alguns tópicos não discutidos por Huisman & Kort, por ex., as *duas maneiras de se calcular os valores do líder e*

<sup>16</sup> Ver <http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly2.html>, para outros resultados e gráficos.

do seguidor (a pequena contribuição dessa tese para a literatura de jogos de OR) e algumas explicações adicionais não discutidas no artigo deles.

Esse modelo de duopólio é simétrico no sentido das firmas serem homogêneas (firmas iguais), de forma que isso sugere estratégias simétricas. Será evitado o formalismo na descrição das estratégias, dando preferência para uma completa, mas mais intuitiva abordagem. Ao longo do texto ficarão claras tanto as estratégias de exercício da opção, como as estratégias de espera, para cada estado da natureza (que muda com o tempo) e condicionais às estratégias ótimas da outra firma<sup>17</sup>.

A primeira diferença do modelo de Huisman & Kort, quando comparado com Smets ou Dixit & Pindyck, é que as duas firmas já estão ativas no mercado, produzindo uma unidade cada (por unidade de tempo) e elas estão considerando o exercício de uma (definitiva) *opção perpétua de expansão* da produção. Isso significa que a “entrada” (leia-se *expansão*) de uma firma afeta o lucro corrente da outra firma – no caso reduzindo o lucro pois aqui o modelo considera a *externalidade negativa* no preço dada pela curva de demanda. O investimento para expandir a produção (preço de exercício da OR) é o mesmo para as duas firmas e denotado por  $I$ . As firmas fazem face a uma curva (inversa) de demanda que dá o *fluxo de lucro*  $P(t)$  na venda de uma unidade e que é dada por:

$$P(t) = Y(t) \cdot D(N_i, N_j) \quad (270)$$

Onde  $Y(t)$  é um choque estocástico da demanda que segue um movimento geométrico Browniano (MGB, ver cap.2), com tendência  $\alpha$  e volatilidade  $\sigma$ ; e  $D(N_i, N_j)$  é um parâmetro de demanda determinístico *para a firma i*, o qual depende dos status das firmas  $i$  e  $j$ . Os possíveis valores para  $D(N_i, N_j)$  são:

- $D(0, 0)$  significa que ambas as firmas não investiram ainda (mas existe um fluxo de lucro  $Y D(0, 0)$  porque as firmas estão ativas no mercado);
- $D(1, 0)$  significa que a firma  $i$  investiu e é a “líder” porque a firma  $j$  ainda não investiu;
- $D(0, 1)$  significa que a firma  $i$  é a “seguidora” porque só a outra firma ( $j$ ) investiu e se tornou a líder; e
- $D(1, 1)$  significa que ambas as firmas investiram no mercado (investimento simultâneo).

---

<sup>17</sup> Entretanto, uma descrição mais formal das estratégias do jogo de parada ótima *contínuo* que começa no instante  $t$ , requer *duas* funções para cada jogador  $i$ . Uma é  $(G_i, \alpha_i): [t, 1] \times [t, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ , onde  $G_i(\tau)$  é a função acumulada de probabilidade de exercício, e a outra é  $\alpha_i(\tau)$ , o *átomo de probabilidade* (ver discussão sobre estratégias mistas). O tempo é normalizado, de forma que um jogo de horizonte infinito com tempo  $s \in [0, \infty]$  é normalizado para  $\tau \in [0, 1]$  através da função  $\tau = s / (s + 1)$ .

Esses fatores  $D(N_i, N_j)$  são ajustados para o nível de produção. O custo operacional é zero ou já está incluído em  $D$ , de forma que  $P$  é interpretado como *fluxo de lucro* em vez de preço. Por ex., o fluxo de lucro do líder é  $Y \cdot D(1, 0)$  e esse fluxo de lucro é maior que  $Y \cdot D(0, 0)$ . Ou seja, o efeito da maior produção obtida quando se investe e se assume o papel de líder, já está incluída no valor de  $D(1, 0)$ . A mudança de status de  $D(0, 0)$  para  $D(1, 0)$  demanda um custo afundado de investimento  $I$ . Além disso, devido à simetria do problema, quando uma firma está lucrando  $Y \cdot D(1, 0)$ , a outra firma está lucrando  $Y \cdot D(0, 1)$ , etc. Para o caso que eles chamam de *modelo de mercado novo* (“new market model”), i. é, o caso original de Smets e de Dixit & Pindyck em que as firmas *não* estão ativas no mercado em  $t = 0$ , se tem o caso particular  $D(0, 0) = D(0, 1) = 0$ .

Huisman & Kort assumem que as firmas são neutras ao risco, de forma que o desconto é feito com a taxa livre de risco. Entretanto, é fácil estender o caso para firmas avessas ao risco usando o método dos *ativos contingentes* (ver cap. 2) supondo que o termo de tendência  $\alpha$  do processo estocástico real é substituído pela tendência livre de risco (ver cap. 2, a comparação das eqs. 9 e 4).

Os parâmetros de demanda determinística têm uma restrição adicional de *externalidade negativa* (o exercício da OR de uma firma reduz o valor da outra firma) dada pela desigualdade:

$$\mathbf{D(1, 0) > D(1, 1) > D(0, 0) > D(0, 1)} \quad (271)$$

A outra premissa do modelo é a *vantagem do primeiro lance* (“first mover advantage”), dada pela desigualdade:

$$\mathbf{D(1, 0) - D(0, 0) > D(1, 1) - D(0, 1)} \quad (272)$$

Essa desigualdade diz que o ganho de começar como líder é maior que o ganho de começar como seguidor (para o mesmo  $Y$  e o mesmo investimento  $I$ ).

Antes de qualquer exercício de opções (será visto que isso ocorre quando  $Y$  está abaixo do *gatilho do líder*  $Y_L$ ), o valor de cada firma é o corrente fluxo de caixa da firma em *perpetuidade*,  $Y \cdot D(0, 0) / (r - \alpha)$ , com  $r > \alpha$ , *mais o valor da opção de investimento* (exercendo como líder ou como seguidor, cada um com 50% de chances, como será visto depois) líquido de perdas competitivas devido a externalidade negativa da entrada esperada do rival.

Como é padrão em *jogos de momento ótimo*, a solução é feita em retro-indução (“backwards”). Isso significa que primeiro é necessário estimar o valor do seguidor (dado que o líder entrou antes) e então calcular o valor do líder, dado que o líder sabe que uma entrada ótima do seguidor poderá

ocorrer no futuro. Aqui se considera que qualquer firma pode se tornar a líder (os papéis *não* são atribuídos de forma exógena). Será visto as duas maneiras mencionadas de se estimar o valor do seguidor. Primeiro, usando o método diferencial, com os passos tradicionais do método dos ativos contingentes (Lema de Itô, etc., ver cap. 2), o valor do seguidor  $F$  é dado pela equação diferencial ordinária (EDO) a seguir.

$$0,5 \sigma^2 Y^2 F_{YY} + \alpha Y F_Y - r F + Y D(0, 1) = 0 \quad (273)$$

Onde os primeiros três termos correspondem à parte homogênea da EDO e o último termo no lado direito da eq. (273) é o termo não-homogêneo, também chamado de “fluxo de caixa”, pois ele é o fluxo de lucro do seguidor antes do exercício da opção. Note que esse termo de fluxo de caixa não existe no modelo de “novo mercado” do Dixit & Pindyck, enquanto que em Huisman & Kort o seguidor ganha um fluxo de caixa mesmo antes da sua opção (de expansão) ser exercida. A solução da EDO é a soma de uma parcela (solução) homogênea do tipo  $A Y^{\beta_1} + B Y^{\beta_2}$ , mais uma *solução particular*. Os parâmetros  $\beta_{1,2}$  são as raízes da equação quadrática  $0,5 \sigma^2 \beta^2 + (\alpha - 0,5 \sigma^2) \beta - r = 0$  (ver Dixit & Pindyck, cap.5). A lógica econômica impõe que a constante  $B$  no termo da raiz *negativa* ( $\beta_2$ ) seja igual a zero<sup>18</sup>. Logo, a solução da EDO, eq. (273), do seguidor é:

$$F(Y) = A Y^{\beta_1} + Y D(0, 1) / (r - \alpha) \quad , \quad \text{se } Y \leq Y_F \quad (274a)$$

$$F(Y) = Y D(1, 1) / (r - \alpha) - I \quad , \quad \text{se } Y \geq Y_F \quad (274b)$$

Onde  $Y_F$  é o gatilho do seguidor para o investimento ótimo. É necessário determinar duas incógnitas, a constante  $A$  e o gatilho  $Y_F$ . Para isso, é necessário aplicar as conhecidas (ver cap. 2 ou Dixit & Pindyck) condições de contorno de *continuidade* e de *contato suave*:

$$F(Y = Y_F) = Y_F D(1, 1) / (r - \alpha) - I \quad (275)$$

$$F_Y(Y = Y_F) = D(1, 1) / (r - \alpha) \quad (276)$$

Com o subscrito  $Y$  na eq. (275) denotando a primeira derivada em relação a  $Y$ . Derivando a eq. (274a) em  $Y = Y_F$  e igualando à eq. (276); assim como igualando a eq. (274a) em  $Y = Y_F$  à eq. (275), se obtém duas equações e duas incógnitas ( $A$  e  $Y_F$ ). Com um pouco de álgebra se chega aos seguintes valores:

---

<sup>18</sup> Pois quando (a demanda)  $Y$  tende a zero, o valor do seguidor precisa ir a zero também.

$$A = \frac{Y_F^{1-\beta_1}}{\beta_1} \frac{D(1, 1) - D(0, 1)}{(r - \alpha)} \quad (277)$$

$$Y_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha) I}{D(1, 1) - D(0, 1)} \quad (278)$$

Substituindo a constante A (eq. 277) na eq. (274a), se chega ao valor do seguidor obtido por Huisman & Kort. A eq. (278) dá o gatilho do seguidor.

O segundo caminho para achar o valor do seguidor e seu gatilho é o método integral, que é baseado no conceito de *tempo de parada* ou *tempo do primeiro toque* (“first hitting time”) e no conceito de *fator de desconto esperado* (“expected discount factor”). Seja  $T^*$  o primeiro instante que a variável estocástica toca o valor  $Y^*$  (nesse caso  $Y^* = Y_F$ ). O valor do seguidor tem dois componentes. Primeiro o fluxo de lucro antes do exercício da opção (lembrar que aqui ambas as firmas são ativas no mercado mesmo antes de exercerem as suas opções), de  $t = 0$  até  $t = T^*$  (ou  $T_F$ ). Segundo, o fluxo de lucro depois do exercício da opção em  $Y_F$ , líquido do investimento  $I$ , de  $t = T^* = T_F$  até infinito. Esse valor é dado pelas integrais abaixo<sup>19</sup>:

$$F(Y) = \underbrace{E \left[ \int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) D(0, 1) dt \right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E \left[ \int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt} Y(t) D(1, 1) dt \right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E[e^{-rT^*}] I \quad (279)$$

Note que para o modelo de *novo mercado*  $D(0, 1) = 0$  e a primeira integral é zero (caso do Dixit & Pindyck). Em  $t = T^*$  a firma obtém um fluxo de lucro em perpetuidade com valor presente em  $T^*$  de  $Y_F D(1, 1)/(r - \alpha)$ . Trazendo para valor presente, de  $T^*$  ao instante corrente ( $t = 0$ ), se obtém:

$$F(Y) = D(0, 1) E \left[ \int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) dt \right] + E[e^{-rT^*}] \left[ \frac{Y_F D(1, 1)}{r - \alpha} - I \right] \quad (280)$$

O *valor esperado do fator de desconto estocástico* depende só dos parâmetros do processo estocástico e da taxa de desconto  $r$ . Esse fator é dado pela equação simples abaixo para o tempo aleatório  $T^*$  em que uma variável  $Y$  atinge um gatilho simples  $Y^*$ :

<sup>19</sup> Note que o *valor do seguidor* assume que a outra firma entrou em  $t = 0$ . Se em vez disso se quer o valor *da firma* planejando ser seguidora, assumindo que a outra firma entrará como líder em  $T_L > 0$ , então três integrais seriam necessárias: uma de 0 a  $T_L$ , com  $D(0, 0)$ ; outra de  $T_F$  a  $T_L$ , com  $D(0, 1)$  e a última de  $T_F$  para infinito, com  $D(1, 1)$ .

$$\mathbf{E}\left[e^{-rT^*}\right] = \left(\frac{Y}{Y^*}\right)^{\beta_1} \quad (281)$$

Para a prova, ver o apêndice 9.3. O valor do primeiro valor esperado da eq. (280) é dado por:

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) dt\right] = \frac{Y}{r - \alpha} \left[1 - \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1 - 1}\right] \quad (282)$$

Para a prova desse valor esperado, ver também o apêndice 9.3<sup>20</sup>. Substituindo as eqs. (281) e (282) na eq. (280), pode-se verificar que o resultado encontrado para o seguidor é o mesmo do obtido com o primeiro método, i. é, as eqs. (274a, b) com as eq. (277). Para o caso mais comum de modelo de mercado novo, esse segundo método é mais fácil porque a equação do fator de desconto esperado é fácil de lembrar e a primeira integral é zero.

Entretanto, como calcular o valor do *gatilho* com o segundo método? Será apresentado um método simples usando uma abordagem de *otimização padrão* para a decisão de investimento (para detalhes desse método, ver Dixit & Pindyck & Sødal, 1999).

Seja o *valor presente líquido* do exercício da opção ser  $VPL_F = V(Y) - I$ . A maximização do valor do projeto é balanço (“trade-off”) entre a espera por um valor maior do projeto  $V(Y)$  e o fator de desconto (maior, quanto mais cedo a opção for exercida). Em caso de espera por um valor demasiadamente alto de  $V(Y)$ , se pode esperar demasiadamente e o fator de desconto ficaria muito pequeno. Logo, nesse balanço do custo-benefício da política de espera, existe um valor ótimo para  $Y$  que maximiza o valor presente do VPL esperado obtido com o exercício da opção, i. é, a função  $G(Y)$  abaixo:

$$G(Y) = \mathbf{Max}_Y \mathbf{E}\left[e^{-rT^*}\right] \cdot [V(Y) - I] \quad (283)$$

O benefício do exercício da opção é  $V(Y) = Y [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha)$ . Denote o fator de desconto esperado por  $R(Y_0, Y_F)$ , i. é (para simplicidade de notação, faça  $Y_0 = Y$ ):

$$R(Y, Y_F) = \mathbf{E}[\exp(-rT^*)] = (Y/Y_F)^{\beta_1} \quad (284)$$

Logo, o problema de maximização da eq. (283) se torna:

$$G(Y) = \mathbf{Max}\{ R(Y, Y_F) \cdot (\{ Y [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha) \} - I) \} \quad (285)$$

---

<sup>20</sup> Apesar dessas provas serem apresentadas em Dixit & Pindyck (chapter 9, appendix), a prova aqui mostra alguns passos intermediários não apresentados naquele livro texto.

A condição de primeira ordem para maximizar a eq. (285) determina que se tome a derivada parcial de G em relação à variável de controle estocástico  $Y_F$  e iguale a zero. Assim, se obtém:

$$\mathbf{R}(Y, Y_F) \cdot [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha) + \mathbf{R}_{Y_F}(Y, Y_F) \cdot Y_F [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha) = \mathbf{R}_{Y_F}(Y, Y_F) \cdot I \quad (286)$$

O valor da derivada do fator de desconto esperado em relação a  $Y_F$  é:

$$\mathbf{R}_{Y_F}(Y, Y_F) = -\beta_1 Y^{\beta_1} / [Y_F^{(\beta_1 + 1)}] \quad (287)$$

Substituindo as eqs. (287) e (284) na eq. (286), rapidamente se conclui que a equação resultante para o gatilho é a mesma obtida com o primeiro método, i. é, a eq. (278). Como antes, esse segundo método (integral) parece mais simples para o caso de novo mercado, mas não tinha sido usado antes para resolver esse jogo de OR.

Para o valor do líder  $L(Y)$  se pode também aplicar qualquer um dos dois métodos. Por exemplo, o valor do líder é dado pela soma das integrais líquida do custo de investimento  $I$ :

$$L(Y) = \underbrace{\mathbf{E} \left[ \int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) D(1, 0) dt \right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{\mathbf{E} \left[ \int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt} Y(t) D(1, 1) dt \right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I \quad (288)$$

Ou seja, entrando como líder a firma experimenta uma fase como monopolista com fluxo de lucro  $Y D(1, 0)$  e, quando o seguidor entra (em  $t = T^* = T_F$ ), o fluxo de lucro cai para  $Y D(1, 1)$ . Pode-se seguir os passos do caso do valor do seguidor (segundo método) para calcular o valor do líder. Entretanto, talvez seja mais fácil aqui o primeiro método, i. é, o método da equação diferencial para o valor do líder durante a fase de monopólio<sup>21</sup>, denotado por  $V(Y) = L(Y) + I$ . Esse valor  $V(Y)$  precisa ser igual (continuidade) ao valor do investimento simultâneo (valor do seguidor) no ponto da condição de contorno em  $Y = Y_F$ . A equação diferencial para  $V(Y)$  é dada por:

$$0,5 \sigma^2 Y^2 V_{YY} + \alpha Y V_Y - r V + Y D(1, 0) = 0 \quad (289)$$

O último termo (parte não-homogênea) é o fluxo de caixa representado pelo fluxo de lucro durante a *fase monopolista*. Outra vez, a solução da EDO é dada pela soma da solução geral (da parte homogênea) mais a solução particular relacionada ao fluxo de caixa.

<sup>21</sup> O “truque” é trabalhar a EDO de  $V(Y)$  e não de  $L(Y)$  ou da opção de ser líder.



$$V(Y) = B Y^{\beta_1} + \frac{Y D(1, 0)}{r - \alpha} \quad (290)$$

A constante B é o parâmetro a ser calculado, requerendo apenas uma condição para isso. A maior diferença comparada com a constante A (eq. 277) do valor do seguidor é que a constante B é negativa, refletindo no valor (esperado) do líder, as perdas devido ao possível futuro exercício da opção de investimento do seguidor. Isso é mostrado matematicamente abaixo. A condição de contorno relevante aqui é a condição de continuidade (“value-matching”) no ponto que o seguidor entra (em  $Y_F$ ). A condição de suavidade não é aplicável aqui, pois esse ponto não é derivado do controle ótimo do líder, ele é derivado de um problema de otimização, mas do *outro* jogador. Essa condição de contorno é:

$$V(Y_F) = Y_F D(1, 1) / (r - \alpha) \quad (291)$$

O valor do líder durante a fase monopolista é igual ao valor do investimento simultâneo em  $Y_F$ . Igualando as eqs. (290) e (291), se obtém o valor da constante B em função de  $Y_F$ .

$$B = \frac{Y_F [D(1, 1) - D(1, 0)]}{Y_F^{\beta_1} (r - \alpha)} \quad (292)$$

Note que o valor da constante é negativo pois  $D(1, 1) < D(1, 0)$ . Isso significa que o efeito da entrada do seguidor é diminuir o valor do líder, como era de se esperar pela intuição econômica nesse duopólio. O valor negativo da constante significa que a função valor do líder é côncava.

O valor do líder na fase de monopólio  $V(Y)$  é obtido substituindo a constante (eq. 292) na eq. (290) do valor do líder. Com  $V(Y)$ , se pode descobrir o *valor de estar se tornando líder*,  $L = V - I$ , que para  $Y < Y_F$  é dado por:

$$L(Y) = \frac{Y D(1, 0)}{r - \alpha} + \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1} \frac{Y_F [D(1, 1) - D(1, 0)]}{r - \alpha} - I \quad (293)$$

Pode-se verificar que esse valor é o mesmo que poderia ser obtido usando o (segundo) método baseado no valor esperado das integrais. Se  $Y \geq Y_F$ , o valor de estar se tornando líder é igual ao o valor de estar se tornando seguidor que é igual ao valor do exercício simultâneo  $S(Y)$ :

$$L(Y) = S(Y) = \frac{Y D(1, 1)}{r - \alpha} - I \quad (294)$$

O valor do exercício (investimento) simultâneo é também importante porque é necessário responder questões fundamentais tais como: (a) o que ocorre se uma firma desviar da estratégia de seguidora, investindo? e (b) uma firma quer se tornar líder, mas o que ocorre se o rival tem a mesma idéia ao mesmo tempo e ambos investem simultaneamente? Em outras palavras, é necessário verificar se a estratégia de seguidor é EN e o valor esperado (ou perdas esperadas) se por “erro” ambos investem ao mesmo tempo. Isso será útil para o cálculo do equilíbrio em estratégias mistas. Note que o investimento simultâneo pode ser ótimo para ambos os jogadores se o estado da demanda for tão alto que  $Y \geq Y_F$ , mas é um erro no caso da demanda ser tal que  $Y < Y_F$ .

Só falta agora calcular o gatilho do líder. Sem a ameaça de preempção, a firma irá investir otimamente no gatilho do monopolista  $Y_M$ . Entretanto, devido à ameaça de preempção, as firmas não podem esperar tanto para investir. Se uma firma esperar até  $Y = Y_M$ , a outra firma pode investir em  $Y_M - \varepsilon$ , mas a primeira firma poderia se antecipar ao rival investindo antes, em  $Y = Y_M - 2\varepsilon$ , etc. Esse processo pára quando uma firma não tem mais incentivo para se antecipar ao rival. A firma 1 tem incentivo para se tornar líder se  $L_1 > F_1$  e, mais importante para a decisão da firma 1, a firma 1 sabe que a rival tem também o incentivo para se tornar líder quando  $L_2 > F_2$ . Assim, a estratégia da firma 1 para se tornar líder é investir quando  $L_2 = F_2$ . No entanto, devido à simetria do problema,  $L_1 = L_2$  e  $F_1 = F_2$  para todo  $Y$ , e assim o líder do gatilho é definido como sendo o  $Y$  no intervalo  $0 < Y < Y_F$  tal que os valores do líder e do seguidor são iguais, i. é:

$$Y_L := \{ 0 < Y < Y_F \mid L(Y) = F(Y) \} \quad (295)$$

O qual pode ser calculado facilmente com um algoritmo simples, dada as curvas dos valores do líder e seguidor em função da demanda  $Y$ .

Existe uma proposição em Huisman & Kort mostrando que o gatilho do líder  $Y_L$  é *único*. Devido à simetria, esse gatilho é igual para as duas firmas.

A Figura 60 mostra os valores do líder e do seguidor, além das entradas ótimas como líder e como seguidor. Os dados de entrada são os mesmos usados por Huisman & Kort (1999), i. é, o caso base é dado por:  $\alpha = 5\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 10\%$ ,  $Y(t = 0) = 1$ ,  $I = 20$  (para cada firma) e os fatores determinísticos da demanda são  $D(0, 1) = 1$ ,  $D(0, 0) = 2$ ,  $D(1, 1) = 2.5$  e  $D(1, 0) = 4$ .

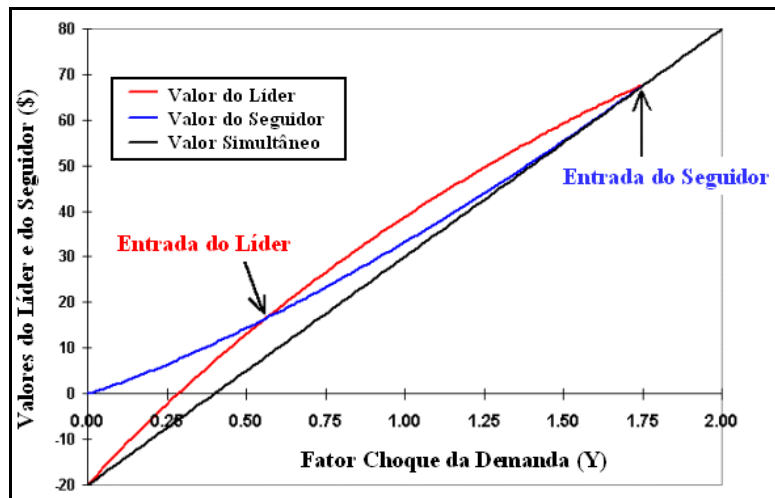


Figura 2 – Entradas do Líder e Seguidor no Duopólio Simétrico

Outra extensão interessante de Huisman & Kort é que eles consideraram a possibilidade de equilíbrios de colusão sem um contrato efetivo (formal) entre as firmas, i. é, sem comunicação entre os jogadores. Eles analisaram em que medida uma política tácita de “esperar e ver” pode ser equilíbrio. Firms poderiam calcular se “esperar e ver” é a melhor estratégia (ou não) até o nível de gatilho de colusão  $Y = Y_C$ , quando ambas investiriam simultaneamente (ou uma firma investiria e a outra investiria *imediatamente* após).

Colusão tácita (ou não forçada, ou informal) será um EN somente se não existir incentivo para desviar dessa estratégia. Desvio aqui significa ganhar o lucro do líder com a outra escolhendo investir mais tarde como seguidora. Denotando o valor em colusão de cada firma por  $C(Y, Y_C)$ , a colusão será ENPS somente se  $C(Y, Y_C) \geq L(Y)$  para, pelo menos, todos os  $Y$  *no intervalo*  $(0, Y_F)$ . Se isso ocorre, existem infinitas possibilidades de colusão como EN. Desses equilíbrios, o que é Pareto ótimo é investir no gatilho de colusão  $Y_C$  dado por:

$$Y_C = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha) I}{D(1, 1) - D(0, 0)} \quad (296)$$

A Figura 61 apresenta os valores do líder, seguidor e *em colusão* como funções do choque estocástico da demanda  $Y$ . Os parâmetros usados foram os mesmos da Figura 60. Note que o valor em colusão é sempre maior do que o valor do líder, de forma que o equilíbrio em colusão é factível (as firmas em colusão não têm incentivos de desvio). Para os dados de entrada do caso base, a curva do valor da colusão tem um *contato suave* na linha de valor de exercício simultâneo em  $Y_C = 5,29$ , um valor muito alto que está fora do gráfico.

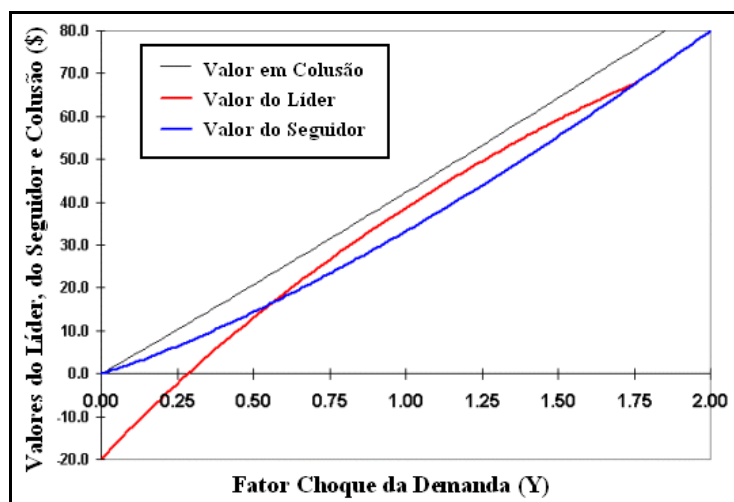


Figura 3 – Valor em Colusão como Estratégia Dominante

Se a *vantagem de ser líder* for *suficientemente grande*, a colusão pode ser destruída por preempção de uma das firmas. A Figura 62 ilustra esse ponto, quando se eleva essa vantagem de ser líder fazendo  $D(1, 0) = 5$ .

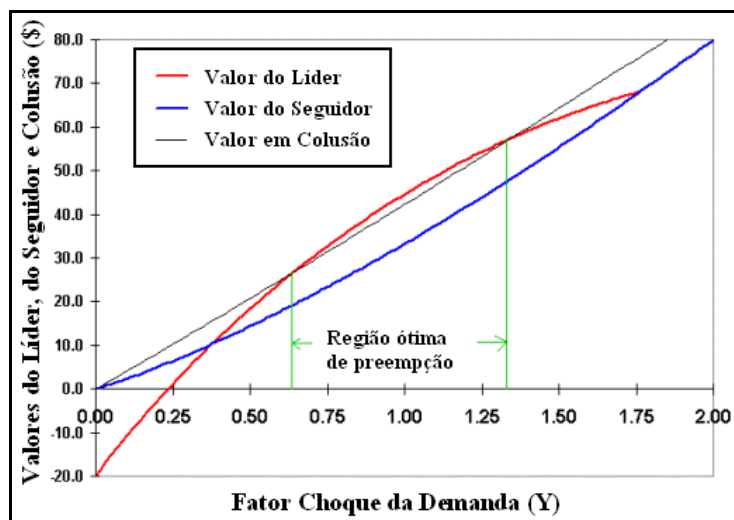


Figura 4 – Região de Preempção Destruindo a Colusão

Na Figura 62 existe uma região onde a preempção é ótima devido ao maior valor para o papel de líder quando comparado com o valor em colusão. Logo, nesse caso as firmas em colusão têm incentivo para trair e assim a colusão nesse caso não é ENPS. Além disso, conforme apontam Huisman & Kort (1999), no modelo de “novo mercado” a colusão tácita nunca é EN.

Agora imagine que o estado inicial da demanda está entre  $Y_L$  e  $Y_F$ . Ambas as firmas têm incentivo para se tornar líder pois  $L > F$  (ver a Figura 60 para ficar claro). Não há lógica em imaginar que, sem

qualquer comunicação, uma firma irá deixar a outra firma se tornar líder, i. é, não há lógica em imaginar que a probabilidade de investimento simultâneo seja zero. Ambas as firmas irão desejar ter o lucro do líder, mas ambas as firmas têm medo da possibilidade de ficar pior com o investimento simultâneo (um “equivoco”), já que o valor do investimento simultâneo é o menor valor (seria melhor até ser o seguidor). Assumindo que não existe comunicação entre os jogadores, o único caminho racional para tratar esse problema na teoria dos jogos é permitindo *estratégias mistas*<sup>22</sup>.

Com estratégias mistas as firmas irão racionalmente calcular a probabilidade ótima de exercer a opção de investimento visando o valor do líder, mas considerando a probabilidade positiva de investimento simultâneo. As firmas irão jogar um *jogo simultâneo* (possivelmente com infinitas rodadas) onde a firma  $i$  pode escolher investir com probabilidade  $p_i$  e não investir com probabilidade igual a  $1 - p_i$ ; jogadores  $i = 1$  ou  $2$ .

A análise de estratégias mistas em tempo contínuo deve ser feita com cuidado e usando ferramentas especiais. A passagem de tempo discreto para tempo contínuo apresenta problemas quando se usa a consideração tradicional de limite. Fudenberg & Tirole (1985) reportou que os métodos usuais apresentam “perda de informação” nessa passagem, com o caso contínuo não representando o limite do caso discreto. Em adição, com as ferramentas tradicionais, várias estratégias convergem com probabilidade 1 para serem jogadas no instante  $t = 0$ , um resultado não-consistente.

Para determinar as estratégias mistas simétricas, Huisman & Kort usaram a mesma ferramenta usada em Fudenberg & Tirole (1985): eles especificaram “probabilidades” chamadas de “átomos”  $p(\tau)$  que, se positivo, indicam que a *probabilidade acumulada de exercício*  $G_i(\tau)$  é igual a 1. Logo,  $\tau$  é definido como o primeiro instante que algum jogador exercerá a opção, dado que ninguém exerceu antes. Esse tipo de recurso é tomado da literatura de *controle ótimo estocástico* (ver, por ex., Birge & Louveaux, 1997, p.289).

A idéia fundamental é que *controle não toma tempo*. Usando essa analogia, o controle aqui é o resultado de um jogo simultâneo que pode ser repetido. Isso é como um otimizador automático instantâneo. Dessa forma, o jogo simultâneo com dois jogadores, *mesmo se repetido infinitas vezes*, é jogado *instantaneamente* (não há consumo de tempo). Esse método determinará as probabilidades

---

<sup>22</sup> Quando a comunicação é permitida, como sugerido em Joaquin & Buttlar (2000), existe a alternativa do jogo de barganha para dividir a diferença  $L - F$  com a concordância de que apenas uma das companhias se tornaria a líder, evitando o equivoco do exercício simultâneo. Entretanto, nessa aplicação o acordo é ilegal, já que o preço ao consumidor é elevado (ou deixa de cair).

das estratégias mistas e, segundo Huisman & Kort, pode ser provado que é o verdadeiro limite do jogo equivalente em tempo discreto.

O jogo simultâneo, o qual pode ser repetido infinitas vezes, exatamente no instante em que um (ou ambos) jogador exercerá a opção (i.é, em  $t = \tau$ ), é mostrado na forma estratégica (normal) na Figura 63, junto com as probabilidades de exercício das opções.

|                |                 |                       |                       |
|----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
|                |                 | <b>Firma 2</b>        |                       |
|                |                 | $p_2(\tau)$           | $1 - p_2(\tau)$       |
| <b>Firma 1</b> | $p_1(\tau)$     | $S(Y(t))$ , $S(Y(t))$ | $L(Y(t))$ , $F(Y(t))$ |
|                | $1 - p_1(\tau)$ | $F(Y(t))$ , $L(Y(t))$ | <b>Repete o jogo</b>  |

Figura 5 – Jogo Simultâneo em  $t = \tau$

O valor da firma 1,  $V_1$  (ainda não otimizado) é dado por:

$$V_1 = p_1 p_2 S + p_1 (1 - p_2) L + (1 - p_1) p_2 F + (1 - p_1) (1 - p_2) V_1 \quad (297)$$

O último termo significa que em caso de repetição, se obtém o valor  $V_1$  devido à definição de  $\tau$ : quando esse jogo é jogado (em  $\tau$ , com talvez infinitas rodadas) é certo que algum jogador (ou ambos) exercerão a opção. Uma forma alternativa e equivalente (talvez mais intuitiva) de obter  $V_1$  é dada abaixo:

$$V_1 = [ p_1 p_2 S + p_1 (1 - p_2) L + (1 - p_1) p_2 F ] \cdot [ 1 + (1 - p_1) (1 - p_2) + (1 - p_1)^2 (1 - p_2)^2 + \dots ] \quad (298)$$

O somatório entre os primeiros colchetes é o valor esperado obtido numa rodada em caso de definição nessa rodada (investimento de um ou dois jogadores). O segundo somatório entre colchetes é multiplicado pelo valor esperado, considerando o caso de definição na primeira rodada (multiplicando por um), na segunda rodada [multiplicando por  $(1 - p_1) (1 - p_2)$ ] e etc., até infinito. O somatório do segundo colchetes é simplesmente a soma infinita (convergente) de uma progressão geométrica, de forma que é fácil de calcular. Logo, a equação para o valor (não otimizado) do jogo simultâneo para a firma  $i$ ,  $V_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , é:

$$V_i = \frac{p_i p_j S + p_i (1 - p_j) L + (1 - p_i) p_j F}{1 - [(1 - p_i) (1 - p_j)]} \quad (299)$$

Agora os jogadores irão calcular as probabilidades ótimas para exercício da opção, i. é, a probabilidade que maximiza o valor esperado  $V_i$ . A *condição de primeira ordem* para esse problema de otimização é  $\partial V_1 / \partial p_1 = 0$ , para a firma 1, dado que o rival está planejando exercer a opção com probabilidade  $p_2$ . A condição de segunda ordem indica que esse problema é de maximização. Note também que, devido à simetria do problema, as probabilidades ótimas devem ser iguais, i. é,  $p_1 = p_2 = p^*$ . Isso permite uma simplificação adicional. Usando a condição de primeira ordem e a propriedade de simetria, depois de alguma álgebra se obtém a seguinte equação simples para a probabilidade ótima de investir em estratégias mistas:

$$p^* = \frac{L - F}{L - S} \quad (300)$$

A Figura 64 dá uma *interpretação geométrica* para a probabilidade ótima de exercício  $p^*$  em estratégias mistas. Pense as curvas como os valores do outro jogador, embora nesse caso simétrico os valores dos dois jogadores sejam iguais.

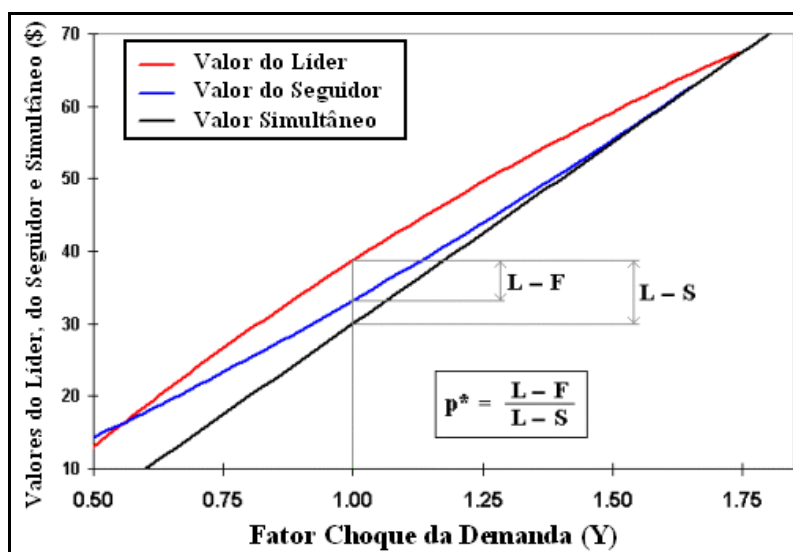


Figura 6 – Interpretação Geométrica da Probabilidade em Estratégias Mistas

Na Figura 64 é fácil ver que quando  $L = F$  e  $L > S$ , se tem  $p^* = 0$ . Quando  $L$  tende para  $F$  (e  $S$ ), se o limite  $p^* = 1$ . No equilíbrio em estratégias mistas, a probabilidade  $p^*$  pode ser interpretada como sendo igual à razão entre o benefício advindo da preempção ( $L - F$ ) e o intervalo de variação total possível ( $L - S$ ). Note que  $L - S = [(L - F) + (F - S)]$ .

Para concluir esse exemplo, será calculada a *probabilidade de somente uma das firmas exercer a opção* e também a *probabilidade de exercício simultâneo* da opção. Para isso, considere de novo o

jogo simultâneo na forma estratégica da Figura 63. Usando um raciocínio similar ao usado para calcular os valores (eq. 297 ou a eq. 298), se pode escrever que a probabilidade  $\Pr(\text{um} = i)$  que somente a firma  $i$  estará investindo em  $\tau$  é dada por:

$$\Pr(\text{um} = i) = p(\tau) (1 - p(\tau)) + (1 - p(\tau)) \cdot (1 - p(\tau)) \cdot \Pr(\text{um} = i) \quad (301)$$

Logo, a probabilidade  $\Pr(\text{um} = i)$  é dada por:

$$\Pr(\text{um} = i) = \frac{1 - p(\tau)}{2 - p(\tau)} \quad (302)$$

Naturalmente, a probabilidade  $\Pr(\text{um} = j)$  de somente a firma  $j$  investir nesse jogo simultâneo em  $\tau$  é exatamente a mesma devido a simetria. Já a *probabilidade de exercício simultâneo* (ou probabilidade de “equivoco”, se  $Y < Y_F$ ), denotado por  $\Pr(\text{dois})$ , usando um raciocínio similar, é dada por:

$$\Pr(\text{dois}) = \frac{p(\tau)}{2 - p(\tau)} \quad (303)$$

Note que as três probabilidades somam um, i. é,  $\Pr(\text{um} = i) + \Pr(\text{um} = j) + \Pr(\text{dois}) = 1$ . Isso é por causa de que não existe possibilidade de não haver exercício nesse jogo simultâneo, devido a definição de  $\tau$ . Agora pode-se usar o valor ótimo achado para a probabilidade  $p(\tau)$ , eq. (300), para estimar as probabilidades de cada firma investir sozinha e a probabilidade de investimento simultâneo. Por ex., em  $Y_L$  se sabe que  $L = F$  e  $L > S$ . Logo,  $p(\tau) = 0$ . Nesse caso,  $\Pr(\text{dois}) = 0$  e  $\Pr(\text{um} = i) = \Pr(\text{um} = j) = \frac{1}{2}$ . Note também que  $\Pr(\text{dois})$  é consistente com os limites quando  $Y$  tende para  $Y_F$  ou  $Y_L$ , respectivamente 1 e 0.

Portanto, quando o mercado começa com  $Y < Y_L$  (demanda ainda incipiente) existem 50% de chances de cada firma se tornar a líder e probabilidade zero de “equivoco” quando  $Y$  alcançar  $Y_L$ . Essa conclusão de Dixit & Pindyck (1994, cap. 9) sobre as estratégias mistas nesse jogo é correta somente nesse caso. Caso a demanda comece aquecida, de forma que  $Y(t = 0) \in (Y_L, Y_F)$ , então existirá uma probabilidade estritamente positiva de “equivoco” (exercício simultâneo indesejável).

#### 4.2.3 - Duopólio Sob Incerteza Assimétrico

O modelo assimétrico para o duopólio é uma hipótese mais realista na maioria das indústrias. Aqui as firmas são não-homogêneas já que, para o mesmo investimento, uma firma tem *menor custo*



*operacional* do que a outra. Isso significa que uma firma tem vantagem competitiva sobre a rival. No exemplo da indústria do petróleo, com duas firmas que disputam uma área geográfica para distribuição de derivados de petróleo, uma firma pode ter menor custo operacional por trabalhar numa escala maior que a rival, de forma que os custos fixos são mais diluídos devido à escala. Ou pode-se pensar que a refinaria de uma firma é mais moderna e tem menores custos operacionais do que a outra. Assim, esse tópico pode ser útil em várias aplicações da indústria de petróleo (mas não apenas).

Aqui é sumarizado e estendido o conhecido modelo de Joaquin & Buttler (2000)<sup>23</sup>. Seguindo esses autores, é assumida a *função demanda inversa linear*, com as quantidades determinadas pela competição de Cournot. Ambas as firmas são baseadas no mesmo país e ambas estão considerando um investimento no mesmo país vizinho. A função demanda em Joaquin & Buttler é *determinística* e constante ao longo do tempo. Entretanto, a taxa de câmbio  $X(t)$  é incerta e evolui segundo um processo estocástico modelado como MGB (ver cap. 2), com parâmetros do processo livre de risco igual a  $\delta$  (taxa de dividendos),  $\sigma$  (volatilidade) e taxa livre de risco  $r$ . Em termos matemáticos, isso é equivalente a considerar um choque estocástico multiplicativo  $Y(t)$ , como antes<sup>24</sup>. A função demanda inversa linear determinística é:

$$P = a - b Q_T, \text{ com } a > 0, b > 0, a > b Q_T \quad (304)$$

Onde  $P(Q_T)$  é o preço do produto *em moeda estrangeira*, o qual é função da produção (oferta) total nesse mercado  $Q_T$ . Para o preço *em moeda local*, basta multiplicar a eq. (304) pela taxa de câmbio  $X(t)$ .

No caso de exercício da opção de investimento, existe um *custo operacional variável*  $c_i$  para a firma  $i$ , onde  $i$  pode ser "l" ou "h", para as firmas de baixo custo ("low-cost") e de alto custo ("high-cost"), respectivamente. A vantagem competitiva da firma de baixo custo é expressa pela inequação  $c_l < c_h$ . A função *fluxo de lucro*  $\pi_i(Q_i)$  para a firma  $i$  *em moeda estrangeira* é:

$$\pi_i(Q_i) = Q_i [ a - b Q_T - c_i ] \quad (305)$$

Usando o método dos ativos contingentes e considerando que a taxa de dividendos  $\delta > 0$  é interpretada como a *taxa de juros em moeda estrangeira*, o *valor presente* de um fluxo *perpétuo* de

<sup>23</sup> Esse item, assim como o anterior, é baseado no artigo de Dias & Teixeira (2003).

<sup>24</sup> A extensão para o caso de demanda estocástica, mas sem taxa de câmbio estocástica, é bastante direta.

lucro é dado pela divisão da eq. (305) por  $\delta$ . O fluxo de lucro ótimo do monopolista e os fluxos de lucro em equilíbrio do duopólio de Cournot são, respectivamente:

$$\pi_{M_i} = \frac{(a - c_i)^2}{4b} \quad (306)$$

$$\pi_l = \frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9b} \quad \Bigg| \quad \pi_h = \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \quad (307)$$

Aqui serão colocados diretamente os resultados<sup>25</sup>, os quais podem ser obtidos com qualquer um dos dois métodos apresentados antes, sendo que aqui o modelo é de “novo mercado” (facilitando os cálculos). O valor de seguidor para a firma de alto custo é  $F_h(X)$ , que exerce sua opção como seguidora no gatilho  $X^*_{Fh}$ , é dado pela equação abaixo (para o caso menos provável da firma de baixo custo como seguidora, basta inverter “l” e “h”).

$$F_h(X) = \begin{cases} \left[ \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \frac{X^*_{Fh}}{\delta} - I \right] \left( \frac{X}{X^*_{Fh}} \right)^{\beta_1} & , \text{ se } X < X^*_{Fh} \\ \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \frac{X}{\delta} - I & , \text{ se } X \geq X^*_{Fh} \end{cases} \quad (308)$$

Onde  $\beta_1$  é a raiz positiva ( $e > 1$ ) da equação quadrática  $0,5 \sigma^2 \beta^2 + (r - \delta - 0,5 \sigma^2) \beta - r = 0$ . O formato da equação do valor do seguidor quando a taxa de câmbio é menor do que o gatilho, tem uma interpretação natural. O primeiro termo (entre colchetes) é o VPL do exercício da opção em  $X^*_{Fh}$ . O segundo termo (multiplicativo) é o valor esperado do fator de desconto estocástico, rever a eq. (281), para o tempo aleatório de exercício do seguidor  $T^*_{Fh}$ . A segunda linha da eq. (308) é também o valor de exercício simultâneo para qualquer  $X$  (mas para o caso de  $X < X^*_{Fh}$ , esse seria o valor de “equivoco”).

O gatilho para a firma de alto custo como seguidora é:

$$X^*_{Fh} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{9b \delta I}{(a - 2c_h + c_l)^2} \quad (309)$$

O valor do líder para a firma de baixo custo  $L_l$  (de novo, para o caso menos provável da firma de alto custo ser a líder, basta permutar “l” e “h”), se  $X < X^*_{Fh}$ , é dado pela equação abaixo:

<sup>25</sup> Ver <http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly3.html> para detalhes e discussão adicional.

$$L_1 = \frac{(a - c_1)^2}{4b} \frac{X}{\delta} + \left[ \frac{(a - 2c_1 + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_1)^2}{4b} \right] \frac{X_{Fh}^*}{\delta} \left( \frac{X}{X_{Fh}^*} \right)^{\beta_1} - I \quad (310)$$

O formato da eq. (310) também permite uma explanação intuitiva. O primeiro termo do lado direito é o lucro de monopólio em perpetuidade da firma líder. O termo do meio é o valor presente esperado das perdas competitivas (i. é, o termo entre colchetes é negativo), o qual ocorre a partir da entrada do seguidor (diminuindo o lucro de monopólio em perpetuidade). O último termo é o investimento requerido para exercer a opção. Se  $X \geq X_{Fh}^*$ , o valor do líder é igual ao valor de investimento *simultâneo*.

Para obter o valor do líder, foi achada a *mesma* constante  $A_1$  usada em Joaquin & Buttler (eq.16.6e), mas num formato mais heurístico que permite uma rápida extensão para outras curvas de demanda, é mostrada a seguir.

$$A_1 = \left[ \frac{(a - 2c_1 + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_1)^2}{4b} \right] \frac{(X_{Fh}^*)^{1 - \beta_1}}{\delta} \quad (311)$$

Pode-se identificar no termo entre colchetes um formato de diferença de fluxos de lucro: o fluxo de lucro do duopólio menos o fluxo de lucro do monopólio. Dessa forma é fácil concluir que essa constante é negativa, já que o fluxo de lucro na fase de duopólio é menor do que na fase de monopólio. O valor negativo da constante significa que a função valor do líder é côncava, refletindo o efeito da entrada futura do seguidor que diminui o valor do líder, como esperado pela intuição. A Figura 65 mostra os valores do líder, do seguidor e de investimento simultâneo, para os mesmo dados de entrada usados no exemplo original de Joaquin & Buttler.

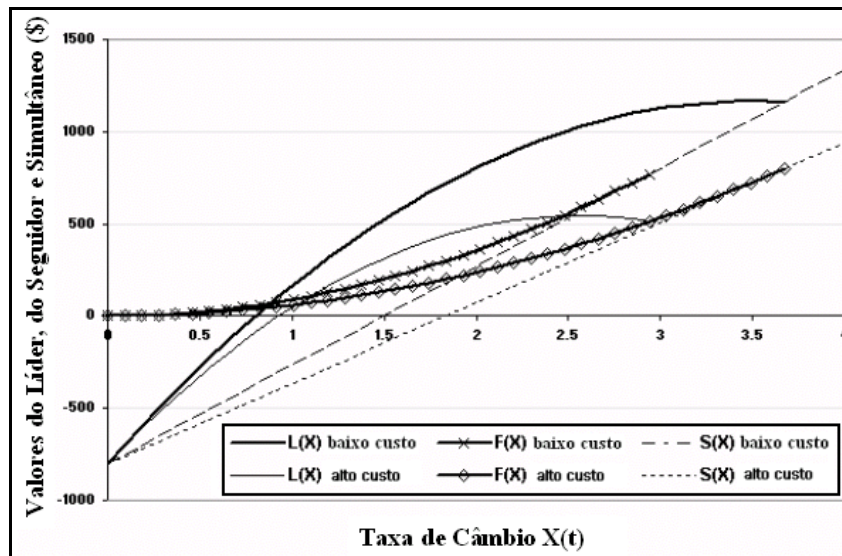


Figura 7 – Valores do Líder, Seguidor e Simultâneo em Duopólio Assimétrico

Como estimar o gatilho do líder? A resposta precisa de algumas considerações adicionais quando comparada com o caso simétrico do item 4.2.2. Sem a ameaça de preempção, a firma de baixo custo iria investir otimamente no gatilho monopolista  $X_{MI}$ . Entretanto, devido à ameaça de preempção, as firmas não podem esperar tanto tempo para investir. Se uma firma espera até  $X = X_M$ , em alguns casos a outra firma pode se antecipar investindo em  $X_M - \epsilon$ , etc. Esse processo termina quando uma das firmas não tem mais incentivo para se antecipar ao rival. A Figura 66 mostra isso, através de uma ampliação (“zoom”) de uma região da Figura 65, mostrando apenas os valores do líder e do seguidor.

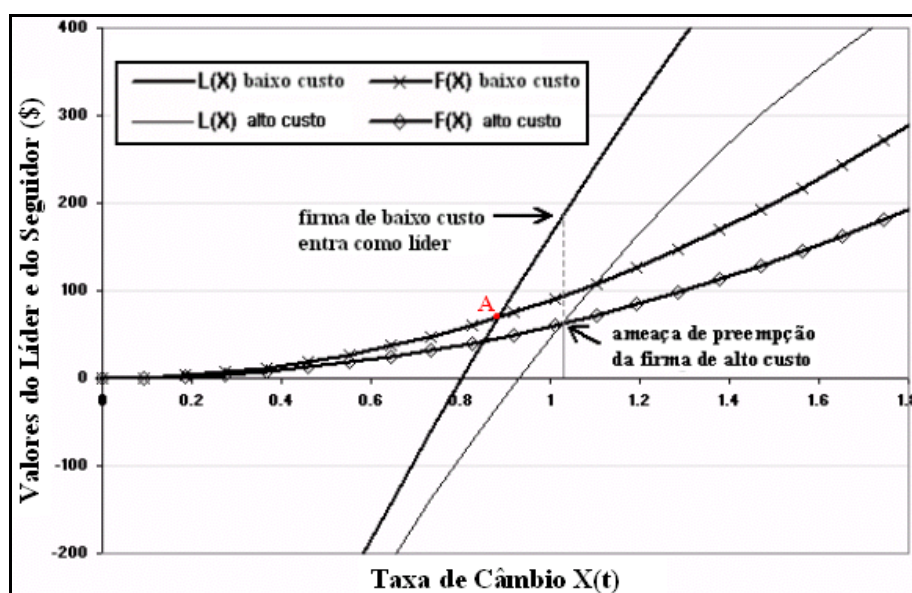


Figura 8 – Gatilho do Líder Determinado pela Ameaça de Preempção do Rival

A firma l (baixo custo) tem incentivo para se tornar líder se  $L_l \geq F_l$  (ponto A da Figura 66) mas não é necessário investir nesse ponto, pois a firma de baixo custo sabe que a firma de alto custo somente terá incentivo para se tornar líder se  $L_h \geq F_h$ . Logo, a estratégia da firma de baixo custo para se tornar líder é investir quando  $L_h = F_h$  (ou um valor infinitesimal menor).

Nesse caso  $X_{Ll}$  é o valor da taxa de câmbio onde  $L_h(X_{Ll}) = F_h(X_{Ll})$  sendo que  $X_{Ll} < X_{Fh}$ . Nos outros casos, dependendo principalmente da diferença entre os custos operacionais  $c_l$  e  $c_h$ , a vantagem competitiva pode ser maior, desaparecendo a ameaça de preempção antes do exercício monopolista ótimo em  $X = X_{Ml}$ . Nesse caso, a vantagem competitiva é tão alta que a firma de baixo custo ignora a competição investindo no gatilho monopolista  $X_{Ml}$ . Como exemplo, aumentando  $c_h$  (de \$21, usado em Joaquin & Buttler, para \$23,5) os valores do líder e do seguidor para a firma de alto custo mostram que essa firma nunca irá querer ser líder, conforme indicada pela Figura 67. Pode-se observar que  $F_h > L_h \forall X$ , i. é, a curva do seguidor está sempre acima do valor do líder para a firma de (muito) alto custo. Nesse caso, é sempre melhor para a firma de alto custo ser a seguidora, esperando por uma taxa de câmbio muito favorável, nesse exemplo  $X_{Fh} = 5,44$ .

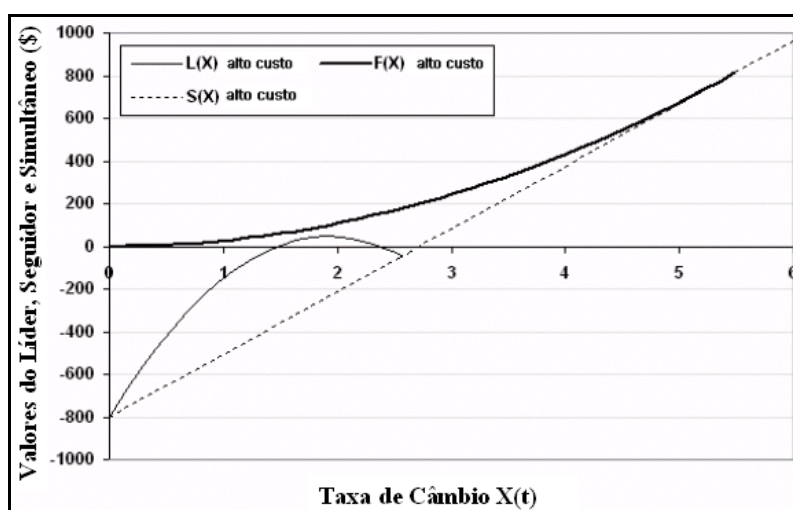


Figura 9 – Caso Sem Perigo de Preempção da Firma de Alto Custo

Para a rival firma de baixo custo, o caso da Figura 67 significa que não haverá ameaça de preempção, de forma que a firma de baixo custo pode ignorar a competição e investir no gatilho monopolista  $X_{MI}$ . Logo, o valor do gatilho do líder é o mínimo entre o seu gatilho de monopólio e o menor valor da outra firma em que essa rival teria incentivo para se tornar líder. Esse é, essencialmente, o “Result 3” do artigo de Joaquin & Buttler (2000).

Como foi visto no item 4.2.2, para o modelo de “novo mercado” (que é o caso aqui) a colusão tácita nunca é EN. Com firmas assimétricas, essa conclusão é ainda mais forte.

Agora, imagine que o estado inicial da taxa de câmbio é tal que ambas as firmas tem incentivo para se tornarem líder. Isso ocorre quando existe uma região de taxas de câmbio em que  $L > F$  para ambas as firmas. Entretanto, *ambas as firmas estariam piores em caso de exercício simultâneo da opção*, pois os valores das firmas com o investimento simultâneo são ainda menores do que os valores de seguidores para essas firmas, i. é,  $S < F$  para ambas as firmas. Assim, é óbvio que, *sem comunicação* entre as firmas, existe uma probabilidade positiva de “equivoco” com o investimento simultâneo. A Figura 68 mostra essa região, que no exemplo fica compreendida entre 1,03 e  $\sim 2,94$ , i. é, entre  $X_{L1}$  e  $X_{Ph}$ , onde  $X_{Ph}$  é o limite superior de preempção da firma de alto custo, nessa região de preempção mostrada na Figura 68.

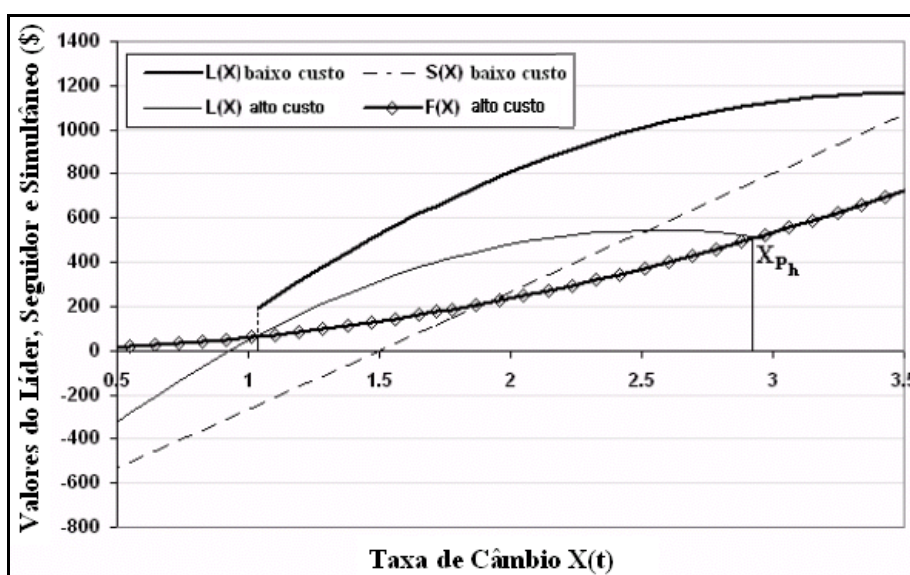


Figura 10 – Região de Preempção da Firma de Alto Custo

Note que se a firma de alto custo tem incentivos para se tornar a líder (caso da Figura 68), o mesmo ocorre com a firma de baixo custo. Entretanto, foi visto que o inverso não é necessariamente válido. Denote a região mostrada na Figura 68 de região de preempção da firma de alto custo. A existência dessa região depende dos parâmetros, especialmente da diferença entre os custos (do grau de vantagem competitiva). No caso base de Joaquin & Buttlar essa região existe. Isso significa que a firma de baixo custo nessa região sofre o risco de obter o valor do exercício simultâneo (“equivoco”) em vez do “lógico” ou “natural” valor de líder quando investindo. Esse risco deve ser considerado quando se analisa esse jogo. A ameaça de exercício da firma de alto custo é crível, pois se ela investir antes, o melhor que a firma de baixo custo pode fazer é se resignar a esperar (papel de seguidora), a menos que  $X \geq X_{Fh}$ . Em realidade, a firma de alto custo como líder e a firma de baixo custo como seguidora, também é ENPS, mesmo sendo uma estratégia menos provável de ocorrer.

A Figura 69 mostra o mais provável ou principal ENPS com a firma de baixo custo entrando como líder e a firma de alto custo entrando como seguidora. Nessa figura aparece uma nova função valor: o valor da opção de se tornar líder. Essa função valor é calculada com o gatilho de líder  $X_{LI}$ , usando o *valor esperado do fator de desconto estocástico* (a muito útil eq. 281) para o tempo aleatório em que a variável  $X(t)$  alcança  $X_{LI}$ , vezes o valor do líder para a firma de baixo custo.



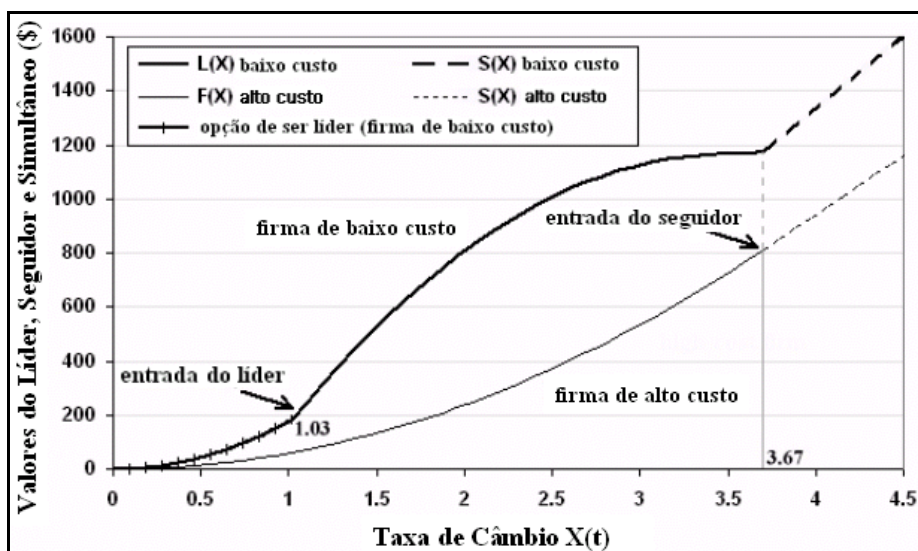


Figura 11 – Principal Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos no Duopólio Assimétrico

A Figura 70 mostra o menos provável e secundário ENPS, com a firma de alto custo entrando como líder e a firma de baixo custo entrando como seguidora.

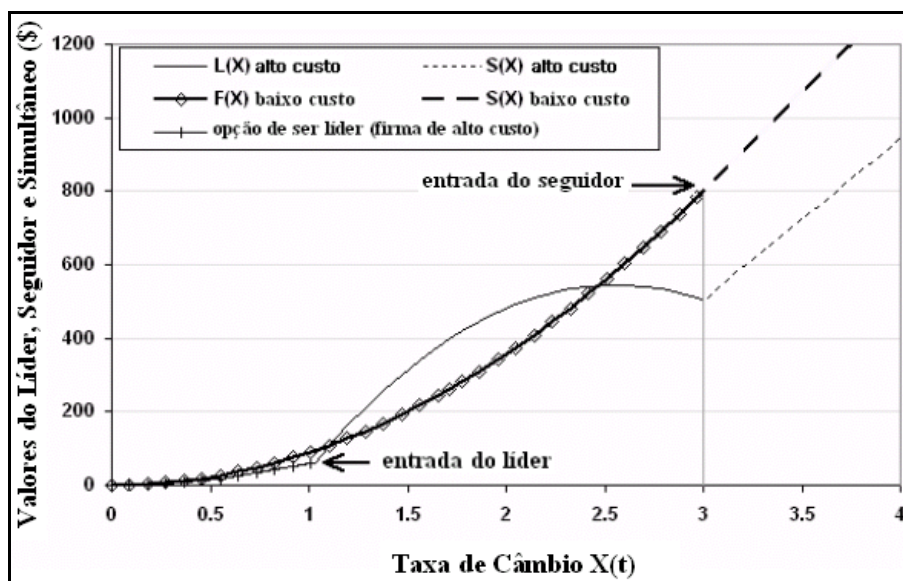


Figura 12 – ENPS Secundário no Duopólio Assimétrico

O cálculo das probabilidades ótimas para exercício das opções considerando que o rival está fazendo o mesmo, segue passos similares aos do item 4.2.2 e pode ser visto em Dias & Teixeira (2003). Aqui serão dadas só algumas conclusões gerais sobre essas estratégias mistas. Se o jogo começar com uma taxa de câmbio  $X(t=0) < X_L$ , então a probabilidade de ocorrer o ENPS secundário é zero, i. é, com probabilidade 1 a firma de menor custo será a líder. Entretanto, essa a probabilidade de ocorrer



o ENPS secundário é estritamente positiva se  $X$  começar ( $t = 0$ ) dentro da chamada *região de preempção para a firma de alto custo*.

Além disso, dependendo dos parâmetros, existe a possibilidade de “equivoco”, i. é, o exercício simultâneo quando o ótimo seria apenas uma firma estar ativa no mercado. Lembrar que se esse “equivoco” ocorrer, o desvio não é possível, pois o investimento é irreversível.

No item 4.2.4 será mostrada uma *variação do método diferencial* para resolver problemas de oligopólio sob incerteza, com a introdução de alguns novos conceitos que ajudarão a resolver não só esse problema, como a enriquecer o conjunto de métodos de solução de jogos de OR em geral.

#### **4.2.4 - Oligopólio sob Incerteza**

Esse item apresenta principalmente o modelo de oligopólio sob incerteza baseado no artigo de Grenadier (2002). Por razões de espaço, serão apresentados apenas resultados selecionados, mas com algumas simulações e gráficos não mostrados naquele artigo. Essas adições são feitas para destacar importantes conceitos tais como a comparação entre monopólio, duopólio e oligopólio em termos de produção resultante para o mesmo choque de demanda. Também será destacado o conceito de *barreira refletora superior* limitando os preços máximos em oligopólio devido ao (mesmo imperfeito) efeito da competição.

Grenadier (2002) tem pelo menos duas contribuições importantes para a literatura de jogos de OR:

- Extensão do *princípio do comportamento míope ótimo* (“principle of optimality of myopic behavior”) de Leahy para o caso de oligopólio; e
- A determinação das estratégias de exercício em oligopólio usando uma indústria “artificial” em competição perfeita, através de uma *função demanda modificada*.

Os dois “truques” simplificam a solução dos problemas porque “*o jogo de exercício pode ser resolvido como um problema de otimização de um único agente*”, de forma que novamente podem ser aplicadas as ferramentas usuais de OR em tempo contínuo. Ou seja, novamente não são necessárias técnicas mais complexas de busca de pontos-fixos de correspondências de melhor resposta dos jogadores. Se pode até mesmo usar a simulação de Monte Carlo para resolver esse modelo simulando a demanda estocástica, como será visto.

Na primeira contribuição conceitual, a firma míope (denotada por  $i$ ) é uma firma que, ao considerar a sua entrada ótima no mercado, assume que toda a produção das outras firmas (denotada por  $Q_{-i}$ )

permanecerão constante para sempre. Como mencionado por Dixit & Pindyck (1994, p.291), “*cada firma pode fazer a sua decisão de entrada ... como se fosse a última firma que entraria nessa indústria e então faria o cálculo padrão do valor da opção*” e “*ela pode ser totalmente míope em relação às decisões de entrada das outras firmas*”. A memorável propriedade do comportamento míope ótimo foi descoberta por Leahy (1993) e tem sido usado e estendido em várias maneiras. Ver também Baldursson & Karatzas (1997).

O artigo de Grenadier é relacionado estreitamente a Dixit & Pindyck (1994, principalmente cap. 9, seção 1; mas também os caps. 8 e 11). Em Dixit & Pindyck (cap. 9) cada firma produz só uma unidade, de forma que a produção total da indústria é igual ao número de firmas, enquanto que no modelo de Grenadier o número de firmas é fixo ( $n$ ) mas cada firma pode adicionar mais que uma unidade de produção. Talvez o caminho de Grenadier para modelar o oligopólio seja mais útil e realista (uma melhora sobre Dixit & Pindyck), por ex., monopólio, duopólio e competição perfeita são casos particulares respectivamente para  $n = 1, 2, \text{ e } \infty$ . Entretanto, para o caso de firmas assimétricas, o método de firmas com produção unitária de Dixit & Pindyck tem vantagens sobre o caminho de Grenadier, pois seria apenas um problema de ordenação (as firmas de baixo custo seriam as primeiras a entrar).

No entanto, em ambos os casos é necessário assumir a premissa de que o *investimento é infinitamente divisível* (firma  $i$  pode adicionar uma capacidade infinitesimal  $dq$  com um investimento infinitesimal  $dI$ ). Apesar de ser mais realista uma premissa de adições de tamanho discreto na capacidade pelas firmas, essa abordagem pode ser uma aproximação razoável em muitas indústrias (ex., quando o novo investimento é uma fração pequena da atual capacidade instalada da indústria), especialmente para *estudos de equilíbrio da indústria*. Mas o modelo é menos realista para o *nível da decisão da firma*. Essa aproximação é necessária para permitir a extensão do princípio do comportamento míope ótimo de Leahy, o qual simplifica bastante a solução do problema. Entretanto, essa premissa não é necessária para o *caso perfeitamente competitivo* de Leahy (ver a excelente explanação de Dixit & Pindyck, cap. 8, section 2), onde a firma competitiva analisa de forma míope um investimento *discreto* (“lump-sum”) para entrar na indústria competitiva.

A segunda contribuição de Grenadier permite a aplicação de importantes resultados obtidos para os casos de competição perfeita para os aparentemente mais complexos casos de competição imperfeita de oligopólios dinâmicos sob incerteza. Como exemplo, Grenadier apresenta uma extensão de seu artigo prévio no mercado imobiliário (“real-estate”) que considera o efeito do *tempo de construção*

numa indústria perfeitamente competitiva (Grenadier, 2000b). Ele obtém soluções analíticas explícitas, simples, para as estratégias de investimento em equilíbrio, usando esse artifício esperto. Outros resultados obtidos para mercados perfeitamente competitivos poderiam também ser facilmente estendidos para o caso de oligopólio. Exemplos são os resultados de Lucas & Prescott (1971) sobre equilíbrio em expectativas racionais, Dixit (1989b) sobre modelos de histerese e Dixit (1991) para modelos de tetos (limites superiores) de preços, dentre outros resultados conhecidos.

O modelo é descrito da seguinte forma. Assuma que cada firma de um oligopólio de n-firmas tem uma seqüência de oportunidades de investimento que são como opções de compra americanas perpétuas, como o ativo básico sendo o valor de um projeto de adição de capacidade. A primeira premissa é que todas as firmas são iguais, com tecnologia para produzir um produto específico. A produção é infinitamente divisível e a unidade de preço desse produto é  $P(t)$ . Esse preço muda com o tempo porque a *demanda*  $D[X(t), Q(t)]$  evolui segundo um processo estocástico contínuo. Assuma *ou* que as firmas são neutras ao risco *ou* que o processo estocástico  $X(t)$  é neutro ao risco (i. é, a tendência neutra ao risco é a tendência real menos o prêmio de risco, ver cap. 2).

Inicialmente, como no artigo de Grenadier, considere um processo de difusão estocástico mais geral dos que os mostrados no cap. 2 (ex., eq. 4):

$$dX = \alpha(X) dt + \sigma(X) dz \quad (312)$$

Considere também uma função demanda inversa mais geral do que as anteriores (mais geral, por ex., do que a eq. 265):

$$P(t) = D[X(t), Q(t)] \quad (313)$$

Para o caso do popular movimento geométrico Browniano (MGB, eq. 4), é só fazer  $\alpha(X) = \alpha \cdot X$ ; e  $\sigma(X) = \sigma \cdot X$ . Como antes,  $\alpha$  é a tendência (real),  $\sigma$  é a volatilidade e  $dz$  é o incremento de Wiener.

No equilíbrio perfeito de Cournot-Nash, as estratégias são quantidades e o mercado indica o preço de balanço oferta-demanda para cada estado da demanda ao longo do tempo. As firmas escolhem quantidades  $q_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , maximizando seus lucros e considerando as melhores respostas dos competidores, que são as quantidades  $q_{-i}^*$ .

Com a premissa simplificadora de firmas iguais, a conseqüência é a escolha de EN simétricos, i. é,  $q_i^*(t) = q_j^*(t)$  para todo  $i, j$ . Denote a produção total da indústria *em equilíbrio* por  $Q^*(t)$ . A produção ótima de cada firma nesse oligopólio simétrico de n-firmas em EN é:

$$q_i^*(t) = Q^*(t) / n \quad (314)$$

O preço de exercício da opção de adicionar a capacidade  $dq$  é o investimento  $(I \cdot dq)$ , onde  $I$  é o custo unitário de investimento, que é igual para todas as firmas. A opção de adicionar capacidade é exercida pela firma  $i$  quando o choque da demanda  $X(t)$  alcança o nível de gatilho  $X_i^*(q_i, Q_{-i})$ .

Grenadier sumariza o equilíbrio na sua “Proposition 1”, usando o método diferencial, especificamente uma equação diferencial parcial (EDP) e três condições de contorno. A EDP é obtida usando o método de OR tradicional (Lema de Itô, portfólio livre de risco, etc.). Como usual em problemas de OR, as duas primeiras condições de contorno são as condições de continuidade e de contato suave (ver cap. 2). Entretanto, a terceira condição de contorno é uma condição de interação estratégica, requerendo que cada firma  $i$  maximize o seu valor  $V_i(X, q_i, Q_{-i})$  dada as estratégias dos competidores (gatilhos).

A terceira condição de contorno é também uma *condição de continuidade, mas no gatilho dos competidores*<sup>26</sup>  $X_{-i}(q_i, Q_{-i})^*$ , a qual é igual a  $X_i(q_i, Q_{-i})^*$  devido ao equilíbrio simétrico. A terceira condição pode ser vista também como uma busca de *pontos fixos* nos mapas de melhor resposta. Entretanto, essa condição não será necessária, conforme a “Proposition 2” de Grenadier, que estende o conceito de miopia ótima para o caso de oligopólios. Essa proposição assume que o *investimento é infinitamente divisível* (ver discussão acima) e diz que o gatilho míope da firma é igual ao gatilho estratégico da firma (ENPS em Cournot). Assim, Grenadier consegue estabelecer os principais elementos para o equilíbrio com apenas duas condições de contorno (“Proposition 3” de Grenadier).

Denote o valor da firma míope por  $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ . Seja o valor marginal da produção da firma míope  $m^i(X, q_i, Q_{-i})$  definido por:

$$m^i(X, q_i, Q_{-i}) = \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) / \partial q_i \quad (315)$$

Dada a simetria, se pode escrever  $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$ , pois  $q_i = Q/n$  e também  $Q_{-i} = (n - 1) \cdot Q / n$ . A “Proposition 3” de Grenadier estabelece o EN simétrico: cada firma exercerá sua opção de investimento assim que  $X(t)$  suba para o nível de gatilho  $X^*(Q)$ . Seja  $m(X, Q)$  o *valor marginal do investimento da firma míope*. A seguinte EDO e as duas condições de contorno determinam ambas  $X^*(Q)$  e  $m(X, Q)$ :

$$\frac{1}{2} \sigma(X)^2 m_{XX} + \alpha(X) m_X - r m + D(X, Q) + (Q / n) D_Q(X, Q) = 0 \quad (316)$$

---

<sup>26</sup> Similar ao caso discutido no item 4.2.2, para a determinação da constante da eq. (290), que resultou na eq. (291), usando a condição de continuidade no ponto ótimo dos rivais.

Sujeito a :

$$m[X^*(Q), Q] = I \quad (317)$$

$$\partial m[X^*(Q), Q] / \partial X = 0 \quad (318)$$

Onde os subscritos da eq. (316) denotando derivadas parciais. A eq. (317) é a condição de continuidade em  $X^*(Q)$  e a eq. (318) é a condição de suavidade. Os últimos dois termos do lado direito da eq. (316) compreende a parte não-homogênea da EDO, os chamados “termos de fluxo de caixa”. Essa parte não-homogênea jogará um papel especial no modelo de Grenadier, pois ela é a *função demanda modificada* mencionada antes. Os primeiros três termos da EDO compreendem a parte homogênea da EDO, como antes.

A beleza do modelo é que somente duas condições de contorno “de opções reais” no gatilho comum  $X^*(Q)$  são *suficientes* para determinar a estratégia de exercício ótimo da opção, provada pela “Proposition 2” de Grenadier, a qual diz que o gatilho da firma míope é igual ao gatilho estratégico da firma.

Grenadier (“section 5”) mostra que, além dos casos de monopólio e de indústria perfeitamente competitiva, também é possível resolver o caso de oligopólio como um problema de otimização de um único agente (“single agent optimization problem”). O procedimento é apenas “fingir” que a indústria é perfeitamente competitiva, maximizando uma função objetivo “fictícia”. Essa função objetivo “fictícia” usa uma função demanda artificial definida por:

$$D'(X, Q) = D(X, Q) + (Q / n) D_Q(X, Q) \quad (319)$$

Como mencionado no início desse item, esse resultado é muito importante por permitir a extensão de conhecidos (ou de fácil obtenção) resultados do caso de competição perfeita para o caso de oligopólio. Aqui será focado o caso da seção 3 do artigo de Grenadier, mas com algumas simulações adicionais não mostradas naquele artigo.

Considere um processo estocástico específico, no caso o MGB (eq. 4) para o choque da demanda  $X(t)$ . Considere também uma função demanda inversa específica, no caso uma curva com elasticidade da demanda constante, dada por:

$$P(t) = X(t) \cdot Q(t)^{-1/\gamma} \quad (320)$$

Onde  $\gamma > 1/n$  assegura que os lucros marginais são decrescentes em  $X$ . Assuma também que a taxa de desconto livre de risco  $r$  é estritamente maior que o parâmetro de tendência<sup>27</sup>  $\alpha$ . O gatilho ótimo  $X^*(Q)$  é dado por:

$$X^*(Q) = v_n \cdot Q^{1/\gamma} \quad (321)$$

Onde  $v_n$  é uma barreira refletora superior, i. é, é o *preço máximo* que o produto pode alcançar no mercado oligopolista. Quando o preço alcança esse nível, as firmas adicionam capacidade numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional (exercícios de OR).

Para esse choque multiplicativo da demanda, enquanto  $X(t)$  segue um MGB não-restrito, o preço  $P(t)$  segue um MGB restrito pela barreira refletora superior  $v_n$ , dada por:

$$v_n = \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \right) \left( \frac{1}{1 - 1/n\gamma} \right) (r - \alpha) I \quad (322)$$

Onde  $\beta_1 > 1$  é a conhecida raiz positiva da equação quadrática, que aqui é:  $\frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + \alpha \beta - r = 0$ . Note que o gatilho  $X^*(Q)$  é decrescente com a quantidade de firmas no oligopólio ( $n$ ), o que parece bem intuitivo. Esse é um efeito competitivo de intensidade  $n$ , que aqui reduz o gatilho de entrada.

Para manter o preço num valor igual ou menor que  $v_n$ , a adição de capacidade  $dQ$  ( $= n dq$ ) quando  $X(t) > X^*(Q)$ , com custo  $I dQ$ , terá de ser maior, quanto maior for a diferença  $X(t) - X^*(Q)$ . Em outras palavras, se  $X(t) > X^*(Q)$ , então  $Q(t) = (X(t) / v_n)^\gamma$ .

Qual o *prêmio da opção* quando se exerce essa opção estratégica no oligopólio de  $n$ -firmas? Grenadier define esse prêmio de opção como o VPL em  $X^*$  por unidade de investimento  $I$ , denotado por  $OP(n)$  e dado por:

$$OP(n) = 1 / [(n\gamma) - 1] \quad (323)$$

Logo, quando  $n$  tende a infinito o prêmio da opção  $OP(n)$  tende a zero, um resultado consistente com a literatura de competição perfeita (ver Dixit & Pindyck, 1994, chapter 8, que o VPL é zero para o caso de competição perfeita). Para um valor finito de  $n$  o VPL é positivo, mas cada vez menor quando aumenta o número de firmas ( $n$ ) no mercado, i. é, com a intensidade da competição. No modelo do item 4.2.2 (Huisman & Kort), existe um caso especial em que o VPL de exercício de uma opção de expansão pode ser (em si) negativo, a fim de evitar a entrada do competidor que poderia

<sup>27</sup> Equivale a assumir  $\delta > 0$  no caso de tendência neutra ao risco (no MGB é  $\alpha' = r - \delta$ ).

ser ainda pior para as operações correntes da firma<sup>28</sup>. No caso da guerra de atrito (ver cap. 5) se vê o oposto: o prêmio da OR de firmas em guerra de atrito quando exercendo a sua opção como líder, pode ser maior que o tradicional (monopolista) prêmio de OR, pois existe um incentivo adicional para a espera, que é a espera pela revelação de informação.

Serão realizados alguns cálculos numéricos a fim de mostrar o poder dos conceitos acima na compreensão do equilíbrio do oligopólio sob incerteza. Serão usados os mesmos dados de entrada do artigo de Grenadier (“section 3” para a sua “Figure 1”, exceto onde indicado). Os valores são:  $\alpha = 0,02$  p.a.;  $r = 0,05$  p.a.;  $\sigma = 0,175$  p.a.;  $\gamma = 1,5$ ;  $n = 10$  firmas;  $I = 1$  \$;  $Q(0) = 100$  unidades; e  $X(0) = 1,74$  \$/unidade.

Um aspecto interessante e prático do *princípio do gatilho míope ótimo* é que se pode usar a simulação de Monte Carlo para resolver o modelo. Não é necessário trabalhar em retro-indução (“backwards”) porque se sabe o gatilho (“míope”)  $X^*(Q(t))$  antecipadamente. Logo, se esse gatilho é atingido por um caminho simulado da demanda  $X(t)$ , haverá adição de nova capacidade pelas firmas oligopolistas. Assim é fácil estudar muitas propriedades advindas do exercício estratégico das OR em oligopólios e o comportamento agregado da indústria no longo prazo. Por exs., a produção da indústria  $Q(t)$ , os investimentos ao longo dos anos, a evolução dos preços, etc. A Figura 71 mostra algumas dessas propriedades para o caso de oligopólio com 10-firmas, mostrando uma amostra de caminho (“sample-path”) da demanda  $X(t)$  num horizonte de 10 anos.

---

<sup>28</sup> Isso só ocorre quando as firmas já estão operando no mercado. No caso do “modelo de mercado novo”, isso nunca ocorre.

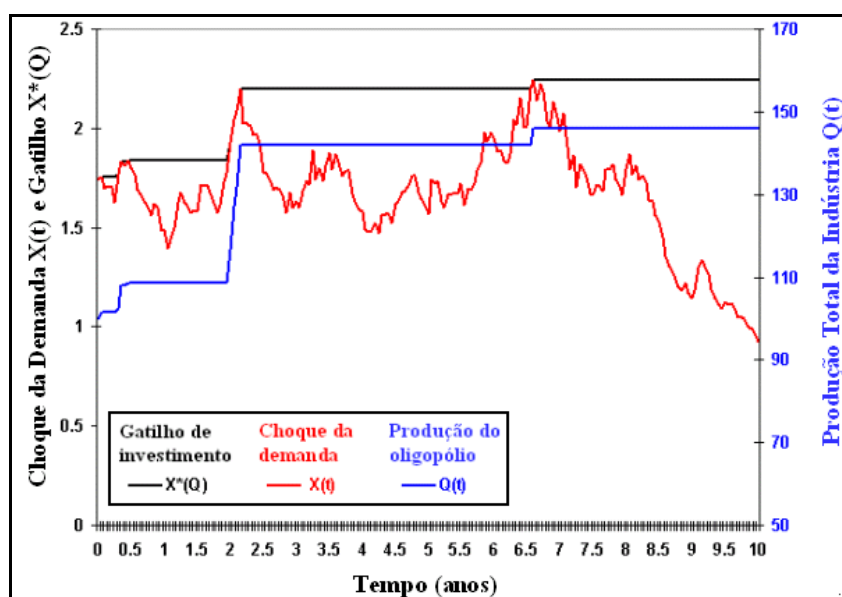


Figura 13 – Amostra da Demanda e Exercício Estratégico no Oligopólio de 10-Firmas

Na Figura 71, quando a demanda sobe até o nível de gatilho, todas as 10 firmas exercem as suas opções de expandir capacidade, aumentando a produção agregada da indústria. Nesse modelo, a adição de capacidade das firmas é proporcional à diferença entre o choque da demanda  $X(t)$  e o nível de gatilho  $X^*(Q(t))$ , se positivo. No caso de demanda abaixo do gatilho  $X^*$ , nenhum investimento é feito (e nenhum abandono também nesse modelo). No modelo de Grenadier as firmas são iguais, de forma que no caso de oligopólio de 10-firmas, cada firma adiciona  $1/10$  da nova capacidade  $Q(t) - Q(t - dt)$  em caso de choque positivo em  $t$  e se  $X(t) \geq X^*(Q(t - dt))$ .

A Figura 71 também mostra que, para essa específica amostra de caminho, depois do ano 8 a demanda cai a níveis bem menores do que em  $t = 0$ , mas a produção total da indústria permanece (de forma que os preços caem). Esse modelo não considera a redução da produção da indústria devido ao estado de baixa demanda. Um melhoramento possível desse modelo é considerar outras opções tais como a opção de parada temporária (a um certo custo) e a opção de abandono (ou pelo menos a opção de contração).

A Figura 72 mostra, para uma amostra de caminho da evolução da demanda, que a produção total da indústria  $Q(t)$  é muito maior para o caso de oligopólio com 10-firmas ( $n = 10$ ) do que para o caso de duopólio ( $n = 2$ ), que por sua vez é maior do que o caso de monopólio ( $n = 1$ ).



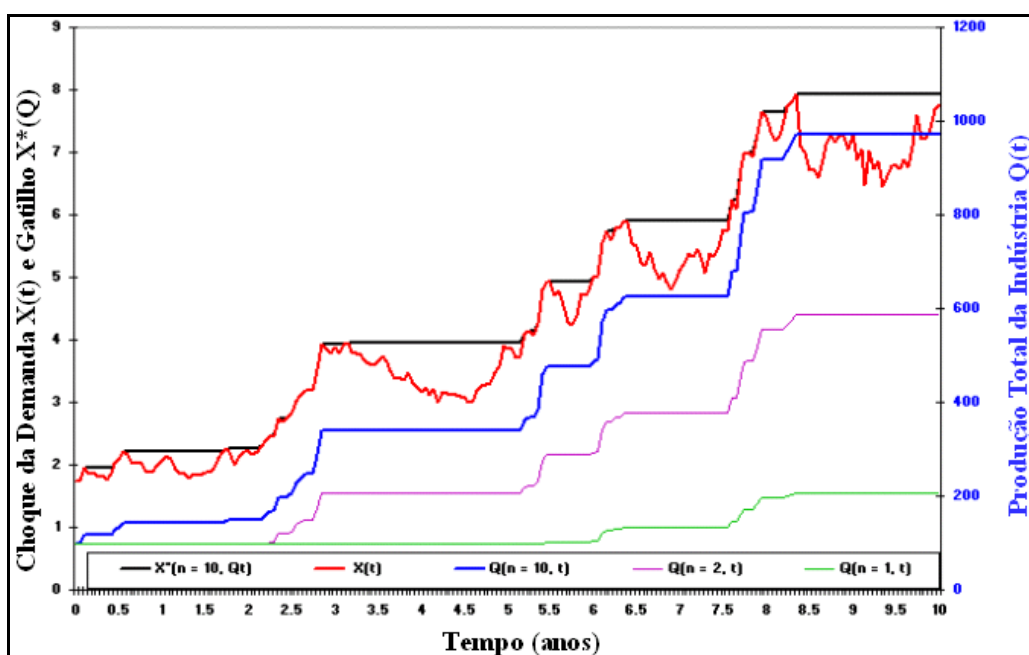


Figura 14 – Produção da Indústria sob Monopólio, Duopólio e Oligopólio (10-Firmas)

A Figura 72 mostra que, para a mesma evolução da demanda, depois de 10 anos o oligopólio com 10 firmas produz conjuntamente perto de 1000 unidades, o duopólio produz cerca de 600 unidades e o monopólio produz apenas 200 unidades (1/5 da produção do oligopólio de 10-firmas).

A Figura 73 a seguir mostra a evolução dos preços, considerando uma possível evolução da demanda com a respectiva evolução da produção do oligopólio. Note que existe uma barreira refletora superior para esses preços em  $0,8081/10$  unidades, de forma que quando existe um choque positivo da demanda que faz o preço subir de forma a alcançar essa barreira refletora, a adição de capacidade do oligopólio é alta o suficiente para o preço ou se manter nesse nível (se a demanda permanecer subindo) ou ser refletido para baixo.

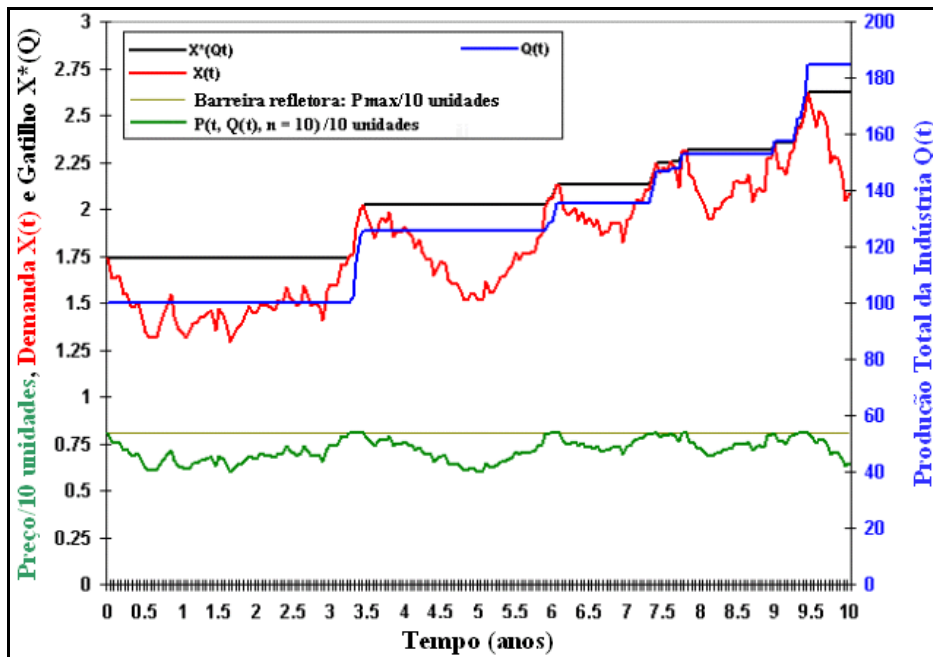


Figura 15 – Evolução de Preços e Barreira Refletora no Oligopólio de 10-Firmas

Todas as figuras apresentadas nesse item foram facilmente obtidas com as equações apresentadas e com a simulação de uma possível evolução da demanda incerta. Uma simulação de Monte Carlo mais completa daria as distribuições de probabilidades da produção, dos preços, dos investimentos na indústria, etc., para qualquer instante futuro  $t$ . Isso permitiria fazer um estudo mais realista dos oligopólios, do que é feito com a abordagem tradicional, que ignora a incerteza dinâmica da demanda.

Nesse capítulo foi visto que, em geral, existem pelo menos dois métodos para resolver os jogos de OR quando os mesmos podem ser caracterizados por estratégias simples de gatilho, o método diferencial e o integral. Isso foi mostrado na Proposição 8, que indica alguns caminhos não observados na literatura e principalmente sistematiza um conjunto de modelos de jogos de OR.

Nesse capítulo foi dada visão geral da teoria dos jogos tradicional, assim como os principais modelos analisados na literatura recente de jogos de OR. O efeito da interação estratégica pode tanto reduzir o prêmio exigido para o exercício da OR (até torná-lo negativo num caso especial), como em Grenadier, mas pode também aumentar o prêmio da espera. Esse último caso será visto numa aplicação de guerra de atrito sob incerteza que será mostrada no cap. 5.