PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

ELE 2005: Análise Estratégica de Investimentos e de Decisões com Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais

Teoria dos Jogos – Parte 1.

Marco Antonio Guimarães Dias,
E-mail: marcoagd@pobox.com
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 2º Semestre de 2007

Visão Geral do Curso

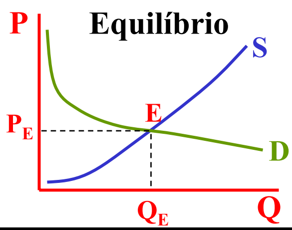
- **Terças-feiras de 18:30 às 21:00 hrs. Sala 448 L.**
- **Pasta com materiais do curso: "xerox dos homens", Pasta 72**
- **Principais tópicos do curso:**
  - **Visão geral da *teoria dos jogos* (especialmente *não-cooperativos*);**
  - **Recordação e complemento da teoria das *opções reais*; e**
  - **Teoria dos *jogos de opções reais*. Tema recente (início em 1993).**
- **Livros-texto (cobrem apenas parte da matéria):**
  - **Parte de teoria dos jogos: MWG = Mas-Colell, A. & M.D. Whinston & J.R. Green (1995): "Microeconomic Theory" (espec. caps. 7 a 9);**
  - **OR e Jogos de OR: DP = Dixit & Pindyck (1994): "Investment under Uncertainty" (dinâmica da indústria e jogos de OR: caps. 8 e 9).**
- **Avaliação e programa: ver a ementa do curso.**
- **Website: http://www.puc-rio.br/marco.ind/ele2005.html**
- **Avaliação: duas provas. Primeira prova: só teoria dos jogos (vale 10). Segunda prova: só jogos de opções reais (vale 11).**

O Que É a Teoria dos Jogos?

- **A teoria dos jogos modela decisões interdependentes entre agentes que se interagem (conflito ou cooperação).**
  - **Esses agentes podem ser firmas, instituições, grupos de pessoas (coalizões), países, pessoas, animais irracionais, etc.**
- **O *escopo* de teoria dos jogos é bem amplo, sendo usado em vários ramos das ciências sociais, como economia, mas também ciências biológicas (conflito de animais).**
  - **Tem livros só com foco em biologia, em direito, finanças, etc.**
- **Sendo nosso foco em economia/finanças, vamos discutir a interação estratégica *racional* entre firmas ou pessoas.**
  - **Não basta pensar qual a melhor decisão para você, é necessário considerar o que os outros agentes podem fazer e também que eles estão antecipando o que você pode fazer otimamente.**
    - **É necessário "*calçar os sapatos do outro jogador*", i. é, se colocar no lugar do outro, ver suas alternativas e ver o que ele sabe sobre você.**
    - **Nossa ênfase será mais *normativa*, i. é, como o jogo deve ser jogado.**

Mercado em Competição Perfeita

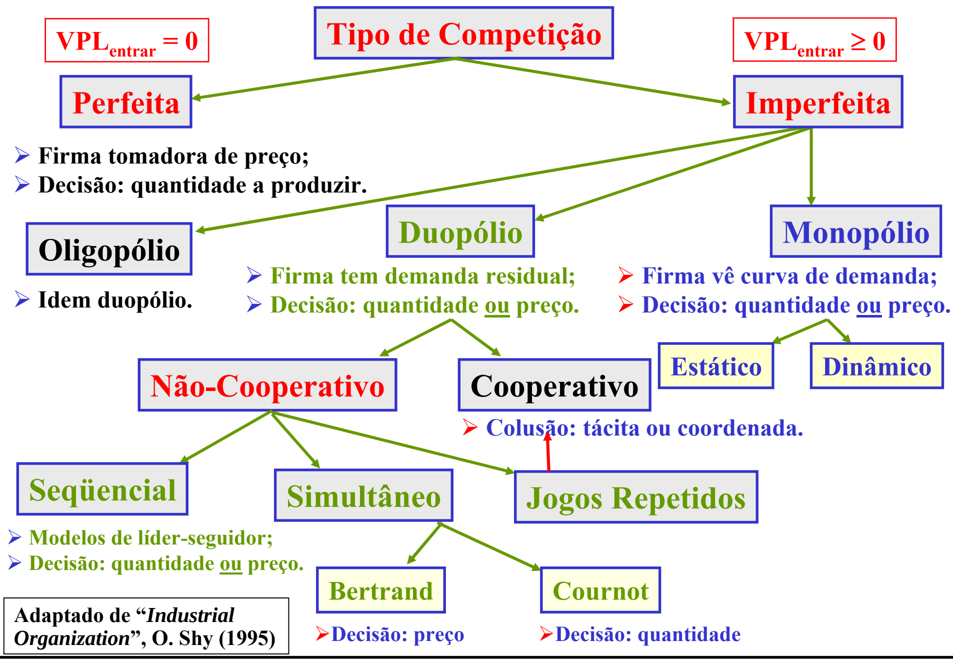
- **Num mercado em competição perfeita todas as firmas são (ou se comportam como) *tomadoras de preço* e produzem um mesmo *bem homogêneo* (commodity).**
  - **As firmas não "exergam" uma curva de demanda para maximizar o lucro ajustando quantidades. Podem produzir qualquer quantidade que o preço será o mesmo.**
    - **Para a *firma* a curva de demanda (q x P) é uma *reta horizontal* e a *elasticidade da demanda* (η) é *infinito*. O mercado tudo absorve.**
    - **As firmas não podem ajustar preços para maximizar o lucro, pois a firma nada venderia com um preço maior e um preço menor seria sub-ótimo, já que reduziria seu lucro (ou geraria prejuízo).**
  - **Já a indústria "enxerga" uma curva da demanda Q(P) ou gráfico Q x P.**
  - **É + usada a *função demanda inversa* P(Q).**
  - **O *preço de equilíbrio* num certo instante t é dado pela interseção das curvas de demanda x suprimento da indústria:**



Mercado em Competição Perfeita

- Além disso, não é permitido as firmas entrar em *colusão* p/ maximizar o lucro ajustando o nível de produção Q.
- O conceito de indústria em *competição perfeita independe do número de firmas*, pode ocorrer até com só 1 firma.
  - O resultado do *duopólio de Bertrand* equivale a comp. perfeita.
  - Mas dinamicamente uma indústria converge da competição *imperfeita* para a *perfeita*, na maioria dos casos, apenas quando o número de firmas cresce p/ uma *grande quantidade de firmas*.
- O resultado clássico (*Marshall*) mais importante p/ nós é:
  - Em competição perfeita, com livre entrada de firmas, o preço em equilíbrio é tal que o VPL da firma entrante é zero.
- O mercado em equilíbrio com preço P, é condicional ao estado da demanda e da oferta da indústria no tempo t.
  - Na parte 4, essa teoria microeconômica clássica será estendida p/ um modelo *dinâmico* de competição perfeita. As curvas de oferta e demanda podem variar e logo o *preço será estocástico*.

Estruturas de Competição num Mercado



Competição Imperfeita e Teoria dos Jogos

- **A ferramenta neo-clássica para análise de competição imperfeita é a *teoria dos jogos* ("game theory").**
  - **A teoria dos jogos ganhou o Nobel de Economia em 1994 com Nash (equilíbrio básico), Harsanyi (equilíbrio com informação incompleta) e Selten (equilíbrio perfeito em jogos dinâmicos).**
  - **Ganhou de novo em 2005 com Aumann (*jogos repetidos* e *cooperação*) e Schelling (*teoria do conflito* e do "*commitment*").**
  - **Aplicações da teoria dos jogos também ganharam o Nobel em 1996 (*teoria dos incentivos com informação assimétrica*) com Mirrlees e Vickrey; e em 2001 (*teoria dos mercados com informação assimétrica*) com Akerlof, Spence e Stiglitz.**
- **A teoria dos jogos também permite analisar interações estratégicas de *cooperação* entre as firmas.**
- **Do ponto de vista da firma, a teoria dos jogos permite *modelar de forma endógena* os efeitos da competição e das oportunidades de cooperação.**

Contribuições de Thomas Schelling

- **Prêmio Nobel de 2005, Schelling se diz só um usuário da teoria dos jogos, mas ele deu várias contribuições:**
  - **Sua obra clássica "Estratégia do Conflito" (1960) deu muita intuição sobre conflitos tais como a *guerra fria*, como em outras situações de conflito e cooperação.**
  - **O conceito de "*commitment*" críveis: atitudes aparentemente irracionais de eliminar opções para deixar claro que ele será obrigado a seguir um caminho, criando uma ameaça crível.**
    - **Ex.: caso do conquistador espanhol Cortés, que queimava os próprios navios para deixar claro ao seu pessoal e ao inimigo que a opção de recuar seria impossível. Outro ex.: queimar pontes.**
  - **Coordenação tácita com o conceito de *ponto focal*.**
    - **Ex.: um casal marca encontro em New York ao meio-dia, mas não especifica o local. Pontos focais: Empire State e Penn Station.**
  - **Deu contribuições à teoria de barganha (1956), especialmente a discussão de ameaças críveis e não-críveis (citei na minha tese).**

OR e Jogos: Teorias Complementares

- Em *jogos de opções reais*, o problema de maximização de valor da firma que analisa um investimento, deve considerar a presença de outras firmas como *jogadores*:
  - Os "players" reagem otimamente aos processos estocásticos relevantes (exógeno) e às ações das outras firmas (endógeno).
    - Onde "endógeno" significa que depende do nosso controle ótimo e "exógeno" não depende (entra como restrição na otimização).
    - A teoria dos jogos é necessária e entra nas *condições de contorno* (principalmente), com considerações sobre o *equilíbrio do jogo*.
- As teorias dos jogos e de OR são teorias *complementares*:
  - A teoria dos jogos tradicional sozinha ignora os avanços da teoria de finanças sobre risco-retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza (opções reais).
  - A teoria das opções reais tradicional sozinha ignora o fato que o exercício de opções por parte de outras firmas pode alterar o valor da sua opção real. *Conceitos de equilíbrio* são requeridos.

Teoria dos Jogos: Origens e Conceitos

- A *moderna* teoria dos jogos começa com Nash em 1950's
  - O chamado *equilíbrio de Nash* é o conceito mais importante e mais aceito da teoria dos *jogos não-cooperativos*.
    - É a base de outros equilíbrios (perfeito, Bayesiano, etc.)
    - Nash também formulou a mais importante solução em *jogos cooperativos*: a *solução de Nash para jogos de barganha*.
    - Conceitos antigos como o *minimax e maximin* (ver anexo), vem perdendo o interesse na literatura econômica.
- Algumas definições básicas de teoria dos jogos.
  - Defini-se *estratégia* s_i do *jogador* i como uma regra de decisão ou plano contingente completo que descreve as ações a serem tomadas em cada possível evolução do jogo onde o jogador i é chamado a jogar. Se a estratégia for determinística, é chamada de *estratégia pura*, se probabilística é chamada *estratégia mista*.
  - As estratégias dos *outros jogadores* são denotadas por s_{-i}.
  - Um *jogo* é descrito especificando os *jogadores*, as *regras*, os *possíveis resultados* e os *valores* ("payoffs") desses resultados.

Conceitos Básicos de Teoria dos Jogos

- **Os jogos podem ser classificados como *jogos de soma-zero* e *jogos de soma variável* (esses são mais relevantes).**
- **Regras do jogo:**
  - **Os lances dos jogadores são *simultâneos* ou *alternados*?**
  - **Quem joga e quando?**
  - **O que cada jogador sabe (conjunto de informação) na sua vez de jogar? O que os outros jogadores sabem nesse instante?**
  - **Quais as ações e planos (estratégias) possíveis?**
- **Resultados e payoffs: para cada conjunto de estratégias, qual é o resultado do jogo? Quanto vale esse resultado?**
  - **Na teoria dos jogos *tradicional*, que em muitos casos analisa as *decisões de indivíduos*, usa-se a *função utilidade esperada*.**
  - **Para *firmas*, a *moderna teoria de finanças* recomenda usar *valores de mercado* ou valores de *opções reais* (ativos reais).**
  - **Nos *jogos de opções reais* os payoffs são valores de opções reais.**

Conceitos Básicos de Teoria dos Jogos

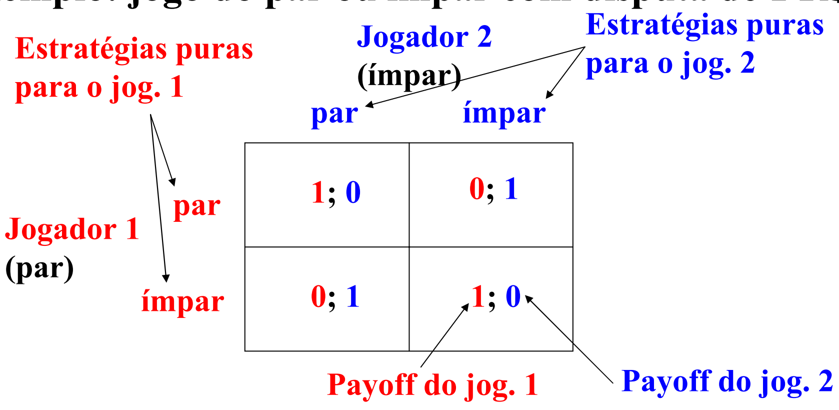
- **Um jogo pode ser *cooperativo* ou *não-cooperativo*:**
  - **No jogo cooperativo é permitido aos jogadores fazerem acordos entre si. No jogo não-cooperativo, não é permitido.**
  - **Jogos não-cooperativos são mais adequados para modelar a competição no mercado (microeconomia).**
  - **Jogos cooperativos são mais adequados para modelar contratos e acordos sociais.**
    - **Jogos cooperativos são usados para modelar a firma, por ex.**
  - **Jogos não-cooperativos usam *conceitos de equilíbrio* para prever o resultado de um jogo.**
  - **Jogos cooperativos muitas vezes usam *axiomas* para estabelecer regras de como se deve jogar.**
- **Enfocaremos mais os jogos não-cooperativos por serem muito mais usados em economia e finanças (em especial a competição) do que os jogos cooperativos.**

Representação Formal dos Jogos

- Os jogos *não-cooperativos* podem ser formalizados e apresentados em dois formatos (a serem detalhados):
  - Na *forma normal* (ou *estratégica*), denotada por Γ_N, com uma representação por matrizes para os payoffs dos jogadores;
  - Na *forma extensiva*, denotada por Γ_E, com uma *árvore de jogos*.
    - Árvore de jogos é uma *árvore de decisão generalizada* para *múltiplos* decisores (os jogadores).
- Os jogos *cooperativos* precisam de um terceiro formato:
  - É preciso considerar a possibilidade de *coalizões*, isto é, sub-conjuntos dos N jogadores. Existem $2^N - 1$ coalizões possíveis.
    - As coalizões $S \subseteq N$ jogam entre si diferentes tipos de jogos e internamente possuem uma regra de divisão do payoff ganho.
  - A *forma coalizão*, denotada por Γ_C, através da definição do par {N; C} no jogo de N jogadores e com *função característica* C(S).
    - A função característica C(S) representa as possibilidades de cooperação para a coalizão S. É a utilidade total da coalização S (ou riqueza ou poder de S) a ser transferida aos seus membros.

Exemplo na Forma Normal ou Estratégica

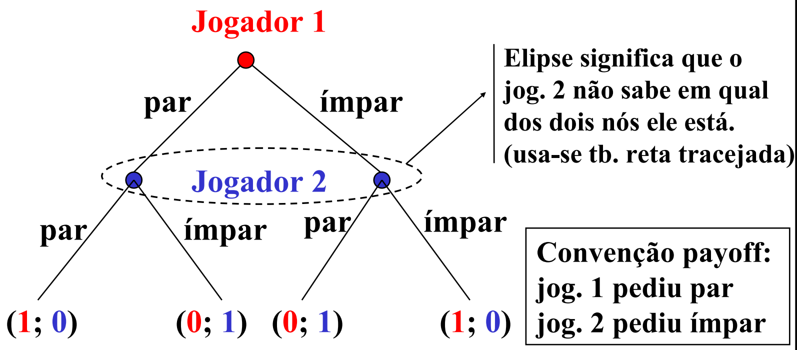
- Exemplo: jogo do par ou ímpar com disputa de 1 R$



- Veremos que o único equilíbrio do jogo do par ou ímpar é o *equilíbrio probabilístico* ou em *estratégias mistas*: cada jogador joga "par" com 50% de chance e "ímpar"com 50% chances.
- Dado um conjunto de estratégias puras $\mathcal{S}_i$, uma estratégia mista para um jogador i é uma função σ_i: $\mathcal{S}_i \to [0, 1]$, que assinala a cada estratégia pura $s_i \in \mathcal{S}_i$, uma probabilidade $\sigma_i(s_i) \geq 0$. A soma dos σ p/ todos s_i é = 1

Jogo do Par ou Ímpar na Forma Extensiva

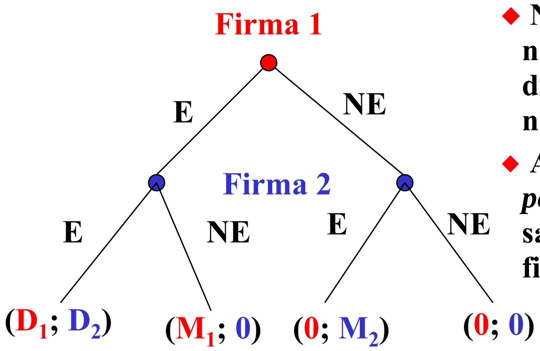
- A *forma extensiva* é mais usada para *jogos dinâmicos* e com *lances seqüenciais*. Mas pode ser usada também p/ jogos com *lances simultâneos*, como no jogo do par ou ímpar:



- Nos jogos simultâneos ou de *informação imperfeita*, usa-se uma elipse circundando os nós do mesmo *conjunto de informação*.
  - Se o jogo fosse de lances alternados, o jogador 2 saberia em que nó ele estaria e poderia ganhar $1 com a melhor resposta.

Jogos Dinâmicos de Opção

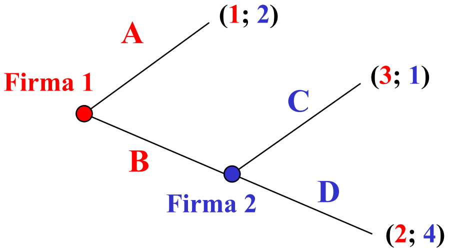
- Jogos dinâmicos envolvem seqüências de ações. Constitui a maioria dos jogos de opções reais.
- Ex.: jogo de opção real com *duas firmas*. Elas decidem de forma seqüencial se exercem (E) ou não exercem (NE) uma opção de entrar. Os payoffs são valores de opções.
  - ➡ D_i = valor em duopólio da firma i e M_i = valor em monopólio de i.



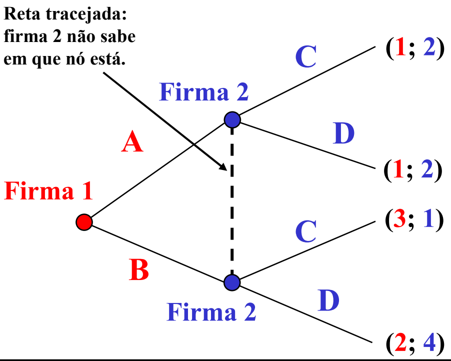
- Note que na *forma normal* não se poderia capturar a dinâmica do jogo. Por isso é necessária a *forma extensiva*.
- Aqui o jogo é de *informação perfeita*, pois a firma 2 decide sabendo o lance jogado pela firma 1.

Forma Normal x Forma Extensiva

- *Duas formas extensivas* podem ter a mesma *forma normal*. Exemplo:



	C	D
A	1; 2	1; 2
B	3; 1	2; 4



- Note que <u>*os jogos são diferentes*</u>: na árvore de cima o jogador 2 sabe o que o jogador 1 jogou. Precisamos da *forma extensiva*.
  - Na árvore de baixo eu estou usando uma *reta tracejada* para dizer que o jogador 2 não sabe em que nó está (conjunto de informação com dois nós).

Conceitos Básicos de Teoria dos Jogos

- Um jogo é dito de *informação perfeita* se cada conjunto de informação só contém um nó de decisão da árvore.
  - Caso contrário é dito de *informação imperfeita*. Ex.: pôquer.
  - Já o *jogo de xadrêz* é exemplo de jogo de informação *perfeita*.
- Algumas premissas usuais em teoria dos jogos:
  - O jogo é assumido ser de *memória perfeita* ("perfect recall"), i. é, uma jogadora nunca esquece a informação que sabia antes de chegar até aquele estágio do jogo.
  - Também se assume *conhecimento comum* ("common knowledge"), i. é, cada jogador conhece a estrutura do jogo (inclusive os valores) e sabem que os outros também conhecem, que sabem que os outros sabem que eles conhecem, etc.
- Um *perfil de estratégias puras* de um jogo com J jogadores é um vetor $s = (s_1, s_2, \dots s_J)$ em que s_i é escolhida pelo jogador i. Pode ser escrito como (s_i , s_{-i}) para ressaltar o ponto de vista de i em relação aos outros $J - 1$ jogadores.

Estratégia Dominante e o Dilema dos Prisioneiros

- *Estratégia dominante* é uma estratégia que é ótima para um jogador independentemente da(s) estratégia(s) escolhida(s) pelo(s) outro(s) jogador(es) (s_{-i}).
  - *Equilíbrio com estratégias dominantes* é quando cada jogador possui e joga a sua estratégia dominante. Ex. clássico a seguir.
- O *dilema dos prisioneiros* é um jogo clássico que ilustra a não-cooperação como equilíbrio com estratégia dominante.
  - Dois ladrões são presos e colocados em salas separadas. Para cada ladrão, o detetive propõe que ele confesse o crime e sirva de testemunha contra o outro. Se um dos ladrões confessar o crime e o outro não, aquele que confessou será posto em liberdade e o outro cumprirá pena de 10 anos. Se os dois confessarem, ambos ficarão presos por 3 anos. Se nenhum dos dois confessarem, a penalidade será de apenas um ano. Qual o resultado mais provável do jogo?
  - Note que se eles pudessem se comunicar e fazer *acordos críveis de serem cumpridos*, a estratégia cooperativa (não-confessar) seria a melhor para ambos. Sem acordo, só há o incentivo de trair o outro.

O Jogo Dilema dos Prisioneiros

- Os payoffs são "anos de cadeia" com sinal negativo. Assim, valores mais próximos de zero são os preferíveis.

		Prisioneiro 2	
		confessa (não-coopera)	não confessa (coopera)
Prisioneiro 1	confessa (não-coopera)	−3; −3	0; −10
	não confessa (coopera)	−10; 0	−1; −1

- O equilíbrio é em estratégias dominantes (um caso particular de equilíbrio de Nash) e é muito comum em várias situações sociais (ex.: a tragédia dos comuns).

Dilema dos Prisioneiros: O Jogo da Propaganda

- Um exemplo de dilema dos prisioneiros na área de decisão de investimentos é o *jogo da propaganda.*
  - Cenário: Duas firmas concorrentes, Firma 1 e Firma 2, têm de decidir quanto gastar em propaganda.
  - Estratégias: *muita propaganda*, *pouca propaganda.*
  - Os resultados são mostradas abaixo:

		Jogador 2: muita	Jogador 2: pouca
Jogador 1	muita	4; 4	10; 1
	pouca	1; 10	6; 6

- Equilíbrio em *estratégias dominantes*: Nesse jogo, ambas as firmas têm a mesma estratégia dominante. Dessa forma, o resultado do jogo é (4; 4).
- Dilema dos prisioneiros: o equilíbrio não é Pareto ótimo, não é o resultado que os jogadores escolheriam *se* eles pudessem cooperar de forma crível.

Dilema dos Prisioneiros: História e Relevância

- O dilema dos prisioneiros é talvez o jogo mais conhecido porque é uma situação que se repete muito em economia, política e em outros ramos de conhecimento.
  - Apesar de existir ganhos de cooperação, cada jogador tem um incentivo de não-cooperar para qualquer estratégia do outro.
  - Um ex. em política é a *corrida nuclear*: apesar de construir bombas ser caro, muitos países querem evitar a pior situação (menor payoff) que seria o outro país ter a bomba e ele não ter.
- O esquema dilema dos prisioneiros surgiu em jan/1950 quando os profs. M. Dresher e M. Flood usaram ele para criticar o então novo conceito de *equilíbrio de Nash* (EN).
  - Veremos que o resultado desse jogo é um *caso particular* de EN
  - Eles queriam dizer que o EN não seria um bom preditor do comportamento dos jogadores (cooperação seria mais jogada).
  - A estória original é devido a A. Tucker (1950), orientador de Nash, que usou a estória nos debates da época sobre equilíbrio.

Dilema dos Prisioneiros: Exemplos

- A <u>Tragédia dos Comuns</u> (Hume, 1739): dois pescadores e um único lago têm incentivo de fazer pesca predatória, embora o melhor para ambos (Pareto ótimo) seja a pescaria leve:

Estratégias		Pescador 2: Pescaria Leve	Pescador 2: Pescaria Intensa
Pescador 1	Pescaria Leve	32, 32	28, 35
	Pescaria Intensa	35, 28	30, 30

  - Se os cidadões responderem só a incentivos privados, os recursos públicos serão demasiadamente depletados. Além disso, os *bens públicos* não serão providos (ver a seguir) e isso justifica os *impostos*.
- <u>Bens Públicos</u>: contribuição para uma construir uma ponte: ninguém contribui se for opcional (que é pior para ambos).

Estratégias		Contribuinte 2: Contribui	Contribuinte 2: Não Contribui
Contribuinte 1	Contribui	32, 32	28, 35
	Não Contribui	35, 28	30, 30

Características e Nomes das Estratégias

Estratégias		Contribuinte 2: Contribui	Contribuinte 2: Não Contribui
Contribuinte 1	Contribui	32, 32	28, 35
	Não Contribui	35, 28	30, 30

- <u>Dominância de Pareto</u>: nenhum jogador está pior e pelo menos um está melhor. Ex.: (32, 32) Pareto domina (30, 30).
  - (35, 28) domina (30, 30)? Não, pois 28 < 30.
  - (32, 32) é dito *Pareto Ótimo*, pois só se pode melhorar o valor de um às custas do prejuízo do outro.
- <u>Free Rider (benefício grátis)</u>: No caso de (35, 28), dizemos que o contribuinte 1 está sendo um *free rider*, pois tem o benefício da ponte mas nada paga por ela.
- <u>Externalidade Negativa</u>: o jogador 1 passando de pagante para não-pagante gera uma externalidade negativa para o jogador 2, pois reduz o valor do jogador 2, que arcará com uma maior contribuição. Conflito individual x social. Sonegadores prejudicam os pagantes.

Estratégia de Melhor Resposta

- Seja $V_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ o valor da estratégia mista σ_i para o jogador i quando os demais jogam as estratégias mistas σ_{-i}. A estratégia σ_i é a ***melhor resposta*** de i para o perfil σ_{-i} de J – 1 estratégias mistas dos outros jogadores se:

$$V_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq V_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \ , \text{ para qualquer } \sigma_i' \in \Delta(\mathcal{S}_i)$$

  - $\Delta(\mathcal{S}_i)$ é o ***conjunto simplex*** do conjunto das estratégias puras $\mathcal{S}_i$. O simplex é uma extensão do conjunto de estratégias puras $\mathcal{S}_i$ que assinala probabilidades a todas as M estratégias puras disponíveis para o jogador i.
  - A definição de estratégia ***pura*** de ***melhor resposta*** é similar.
  - A estratégia pura pode ser vista como uma estratégia mista ***degenerada*** (prob. = 1 p/ uma estratégia e zero para as demais)
- O conceito de melhor resposta é importante, pois será visto que o equilíbrio de Nash pode ser visto como um ***ponto fixo*** de ***estratégias de melhor resposta simultânea***.

Equilíbrio de Nash (1950)

- O perfil de estratégias $s = (s_1, s_2, \ldots s_J)$ é um ***equilíbrio de Nash*** (EN) em estratégias puras de um jogo se, para ***todo*** jogador i = 1, 2, …, J, vale a desigualdade:

$$V_i(s_i, s_{-i}) \geq V_i(s_i', s_{-i}) \ , \text{ para qualquer } s_i' \in \mathcal{S}_i$$

  - O EN implica que as estratégias que fazem parte desse equilíbrio são simultaneamente as ***melhores respostas*** para todos os jogadores. Esse é um resultado fundamental.
  - Dessa forma, não há incentivo para nenhum jogador desviar desse equilíbrio, unilateralmente. Ex.: dilema dos prisioneiros.
  - Para saber se é equilíbrio de Nash, basta fazer a seguinte pergunta ***a cada*** jogador separadamente: mudando a sua estratégia você ficaria melhor (aumentaria V_i)? Se as respostas de ***todos*** os jogadores forem negativas, então é um EN.
  - A definição de EN para estratégias ***mistas*** é similar à apresentada.
  - Para se testar se o perfil σ é EN, basta testar desvios de σ para as estratégias ***puras*** s. Se não houver incentivo para desviar, σ é EN.

Equil. de Nash: Jogo Batalha dos Sexos

- Uma versão do jogo clássico da batalha dos sexos é:
  - Um casal tem de decidir o que fazer na sexta-feira à noite.
  - Eles concordam em ir ao cinema, mas ele prefere assistir um filme de ação e ela prefere assistir um romance.
  - Ir ao cinema sozinho é o pior resultado (menor utilidade).
  - As utilidades são mostradas abaixo. Quais os EN do jogo?
    - Dica: ver as melhores respostas simultâneas dos jogadores.

		ELA: Ação	ELA: Romance
ELE	Ação	$\underline{2}; \overline{1}$	0; 0
	Romance	0; 0	$\underline{1}; \overline{2}$

Resposta:
Os EN em estratégias puras são dois: {ação; ação} e {romance; romance}. Tem um EN em estratég. mistas que é jogar uma estratégia com probabilidade de 2/3 e a outra com prob. 1/3. Ver slides seguintes.

Batalha dos Sexos: Solução em Est. Mistas

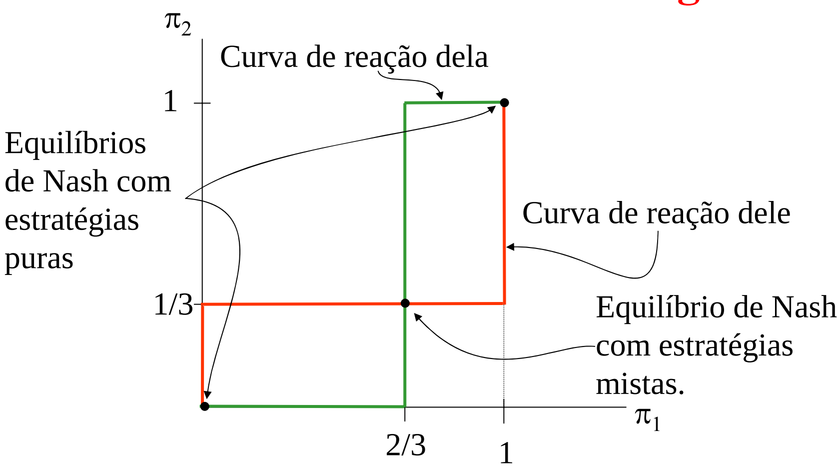
- Sejam π_1 e π_2 as probabilidades com que ele e ela, respectivamente, escolhem "filme de ação".
- O payoff esperado dele ($Payoff_1$) será dado por:
  $2\,\pi_1\,\pi_2 + (1 - \pi_1)\,(1 - \pi_2) = \pi_1(3\,\pi_2 - 1) + 1 - \pi_2$
- O payoff esperado dela ($Payoff_2$) será dado por:
  $\pi_1\,\pi_2 + 2\,(1 - \pi_1)\,(1 - \pi_2) = \pi_2\,(3\,\pi_1 - 2) + 2\,(1 - \pi_1)$
- Curvas de reação das firmas 1 e 2 (deriva e faz = 0):

- $\partial Payoff_1/\partial\,\pi_1 = 0 = 3\,\pi_2 - 1 \Rightarrow \pi_2 = 1/3 \Rightarrow$ qualquer π_1 é ótimo se $\pi_2 = 1/3$
- Se ela joga $\pi_2 < 1/3$, por ex. $\pi_2 = 0$, $Payoff_1 = 1 - \pi_1 \Rightarrow$ ótimo: $\pi_1 = 0$;
- Se ela joga $\pi_2 > 1/3$, por ex. $\pi_2 = 1$, $Payoff_1 = 2\,\pi_1 \Rightarrow$ ótimo$_1$: $\pi_1 = 1$, etc.

$$\pi_1 = \begin{cases} 0 \text{ caso } \pi_2 < \frac{1}{3} \\ \text{qualquer valor entre 0 e 1 caso } \pi_2 = \frac{1}{3} \\ 1 \text{ caso } \pi_2 > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\pi_2 = \begin{cases} 0 \text{ caso } \pi_1 < \frac{2}{3} \\ \text{qualquer valor entre 0 e 1 caso } \pi_1 = \frac{2}{3} \\ 1 \text{ caso } \pi_1 > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Batalha dos Sexos: EN em Estratégias Mistas



- **Equilíbrios em estratégias mistas: três, sendo um não-degenerado, que é ele jogar "ação" com 2/3 de probabilidade; e ela jogar "ação" com 1/3 de probabilidade (⇒ ela joga "romance" com 2/3).**
- **Esse caso resulta: {ação; ação} tem probab. 2/3 x 1/3 = 2/9 de ocorrer; {romance; romance} tem 1/3 x 2/3 = 2/9; e irem sozinhos, probab. = 5/9.**

Tópicos em EN em Estratégias Mistas

- **O valor de uma estratégia mista é o valor esperado dos "payoffs" das relevantes *estratégias puras randomizadas*.**
  - **As *probabilidades das estratégias mistas* são <u>resultados da análise de equilíbrio</u>. Elas *não são exógenas* (estimativas de estados da natureza) e *nem advindas de preferências* dos jogadores.**
    - **Elas foram calculadas *maximizando payoffs simultaneamente*.**
    - **Essas probabs. são tais que <u>fazem o outro jogador ficar indiferente entre jogar as suas diferentes estratégias puras relevantes</u>.**
  - **Nem sempre as probabilidades de estratégias mistas são intuitivas já que *não* refletem características individuais e sim estratégicas.**
  - **A análise *gráfica* anterior é viável para o caso de dois jogadores com duas estratégias cada. Mas pode-se usar métodos analítico ou numéricos p/ obter os *pontos fixos* de melhor resposta simultânea.**
  - **Se há múltiplos EN em estrat. puras ⇒ há EN em estrat. mistas com a randomização dos EN em estratégias puras.**
- **Nesse exemplo tivemos três equilíbrios de Nash (EN).**
  - **Múltiplos EN: qual deles é o mais provável ou recomendável?**
  - **Veremos alguns *refinamentos de EN* que reduz o nº de equilíbrios.**

Exercício sobre Estratégias Mistas

- Mostre que o jogo do par ou ímpar com disputa de 1 R$ (ver início da parte 1) tem apenas um único EN em estratégias mistas que é jogar $\sigma^* = (1/2 \; ; \; 1/2)$, onde o 1º termo é a probabilidade do 1º jogador jogar um nº par e o 2º termo é a probabilidade do 2º jogador jogar nº par.
  - Verifique que o EN em estratégias mistas não-degeneradas tem a propriedade de fazer o outro jogador ficar indiferente entre o que jogar.
  - Dica: sigua os passos do jogo Batalha dos Sexos. Verificar que só existe um ponto de cruzamento nas correspondências de melhor resposta (cruzamento = simultaneamente melhor resp.)
- Mostre que o EN seria exatamente o mesmo (1/2 ; 1/2) se em vez de "*disputa por R$ 1*" fosse "*aposta de R$ 1*", i. é, se nos payoffs onde está "zero" fosse "– 1".
  - Nesse formato, o jogo do par-ou-ímpar corresponde ao jogo de soma zero "matching pennies" dos livros da língua inglesa.

Competição Internacional e Subsídios

- Embraer x Bombadier no mercado de jatos executivos
  - Suponha que sem subsídios para a Bombadier, a matriz de payoffs para a fabricação de um novo modelo de jato é:

		Bombadier	
		Desenvolve	Não Desenvolve
Embraer	Desenvolve	–10; –10	100; $\overline{0}$
	Não Desenvolve	0 ; $\overline{100}$	0; 0

- Ou seja, dois EN em estratégias puras (e um EN em estratégias mistas). Na prática, existem os riscos de ambos desenvolverem o jato e terem prejuízo, ou não investirem.

Mercado de Jatos Executivos com Subsídios

- **Agora suponha que o governo do Canadá dá $ 20 de subsídio para a Bombadier para desenvolver jatos executivos (ex.: taxas de juros abaixo do mercado).**
  - **A nova matriz de payoffs mostra a mudança do EN:**

		Bombadier: Desenvolve	Bombadier: Não Desenvolve
Embraer	Desenvolve	−10; +10	100; 0
	Não Desenvolve	0; 120	0; 0

- **Ou seja, o subsídio fez com que a estratégia investir (desenvolver o projeto de jato executivo) se tornasse estratégia dominante para a Bombadier. O único EN é a Bombadier sozinha no mercado.**

Competição com Projetos de P&D

- **Mesmo com apenas duas firmas no mercado (duopólio), a competição pode ser muito intensa.**
- **Em indústrias maduras, é freqüente a *competição em preços* através de *inovações de redução de custo*.**
  - **O gasto em P&D para reduzir custos pode não ser *Pareto ótimo* para as firmas, mas freqüentemente é a estratégia dominante para ambas as firmas (*dilema dos prisioneiros*):**

		Firma 2: P&D	Firma 2: Não-P&D
Firma 1	P&D	20 ; 10	40 ; −10
	Não-P&D	−10 ; 30	30 ; 20

- **A estratégia de P&D nesse contexto cria *barreiras de entrada* para novas firmas interessadas nesse mercado.**
- **Ocorre mais se a *demanda é mais elástica* com o preço.**
- **Uma alternativa ao P&D (não analisada) é reduzir custos com *ganhos de escala*.**

Jogos Repetidos: Cooperação é Possível

- No dilema dos prisioneiros foi visto que {cooperar; cooperar}, mesmo sendo Pareto ótimo, não é equilíbrio.
  - No entanto, foi assumido que o jogo é jogado apenas uma vez.
- Existem casos em que o jogo pode ser *repetido* pelas firmas e o resultado {cooperar; cooperar} pode ser EN.
  - Com a repetição, cada firma pode criar *reputação* sobre o seu comportamento e aprender sobre o comportamento dos rivais.
    - Ocorre no caso de poucas firmas, com demanda e custos estáveis.
- Estudos experimentais tais como "*torneios de repetidos dilema de prisioneiros*", mostra que a estratégia "*tit-for-tat*" (retribuição/retaliação) pode sustentar a cooperação
  - Tit-for tat: estratégia é cooperar no instante inicial e continuar cooperando enquanto o outro coopera. Retaliar (não cooperar) se o outro não-coopera. Voltar a cooperar se o outro o fizer.
  - Teoremas populares ("folk theorems") para jogos repetidos infinitamente, mostram que a cooperação pode ser EN.

Equilíbrio de Nash (EN): Notas

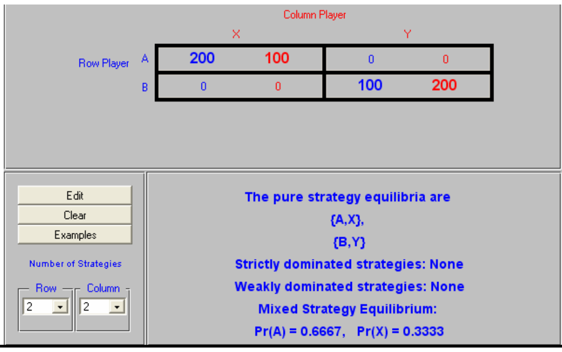
- O conceito de equilíbrio de Nash (EN) pode ser intepretado e usado de várias maneiras:
  - Normativo: aconselhar todos os jogadores. O conselho tem de ser equilíbrio no sentido de ter relativa estabilidade, não sendo ótimo para um jogador ganhar mais ao não seguir o conselho.
    - EN é melhor resposta simultânea e não há incentivo em desviar.
  - Predição: Num processo dinâmico de ajustes, o EN pode ser interpretado como um *ponto estável*. Muito usado em biologia.
  - Sustentabilidade: é um acordo "self-enforcing" (de auto-cumprimento), pois não precisa de ajuda externa para manter ao ser do próprio interesse de cada jogador seguir o EN.
- O conceito de EN ajudou a deixar claro a distinção entre jogos não-cooperativos e jogos cooperativos:
  - Em jogos cooperativos há acordos que podem ser forçados (em tribunais, contratos, etc.) Em *jogos não-cooperativos* não há tais mecanismos $\Rightarrow$ só resultados de equilíbrios são sustentáveis.

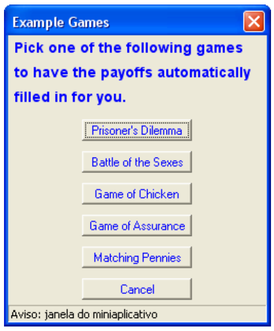
Software Para Jogos na Forma Normal

- Um dos programas disponíveis na internet para resolver jogos na forma normal é um *applet Java* que fica em:

http://www.gametheory.net/Mike/applets/NormalForm/NormalForm.html

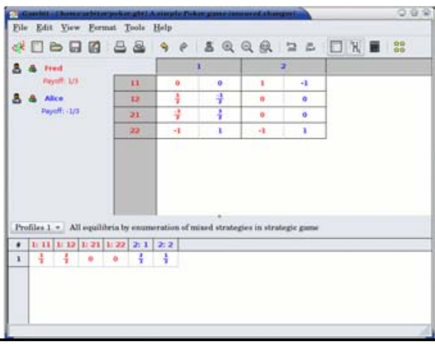
  - Existe também uma versão em português (link na pág. acima).
  - O applet acha os equilíbrios para jogos de 2 jogadoras com até 4 estratégias puras (matrizes até 4 x 4) e estratégias mistas só para o caso de matriz 2 x 2. Ver abaixo o ex. *batalha dos sexos*.
  - Ele permite carregar alguns exemplos clássicos já prontos:

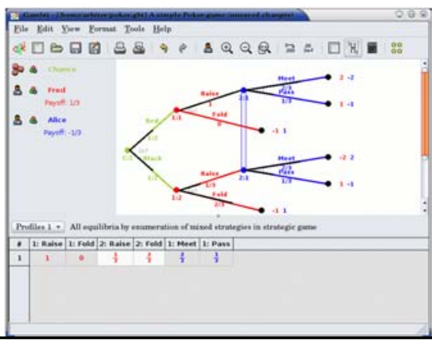




Software Mais Geral de Teoria dos Jogos

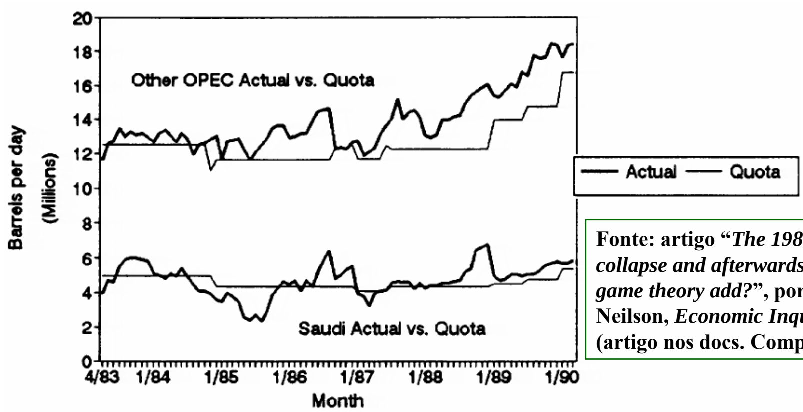
- O software Gambit é um software mais geral que resolve jogos na forma normal e na forma extensiva.
  - Mesmo na forma normal, permite mais de dois jogadores e é menos limitado que o anterior. Escrito em C++, tem interface amigável para Windows. Última versão jan/2007.
  - Webpage do Gambit: http://econweb.tamu.edu/gambit/
    - Inclui links para download e documentação (com arquivos de exemplos). Exs. de janelas (formas normal e extensiva):





Jogo Interno de Quotas na OPEP

- Na planilha [jogos da OPEP.xls] (aba "quotas") podemos analisar o caso do jogo interno de quotas na OPEP.
  - A OPEP estabelece quotas de produção máxima para seus membros de forma a que os preços fiquem num certo range.
  - Com exceção da Arábia Saudita, frequentemente os membros da OPEP derespeitam essas cotas. O gráfico ilustra isso:



Fonte: artigo "*The 1985-86 oil price collapse and afterwards: What does game theory add?*", por Griffin & Neilson, *Economic Inquiry*, Out/94. (artigo nos docs. Complementares)

Jogo Interno de Quotas na OPEP

- No artigo do gráfico anterior, os autores argumentam que a Arábia Saudita tem um comportamento de "*produtor swing*", absorvendo as variações de demanda.
  - Mas em 1986 ela inundou de petróleo o mercado, usando as quantidades de *Cournot como estratégia de punição* aos países que vinham derespeitando as cotas (desviando da cooperação).
    - Veremos que em *jogos repetidos*, as estratégias de punição podem ser usadas para sustentar um equilíbrio cooperativo.
- Dados mais recentes também mostram que só a Arábia Saudita não está produzindo acima de sua cota.
  - Os outros países estão produzindo no limite (ou muito perto) da sua capacidade de produção. Só a Arábia estaria abaixo.
- Por que os outros países teriam incentivo para desviar da cooperação (desrespeito às quotas)?
  - Veremos que (sem punição), cooperar não é equilíbrio de Nash (EN); desviar é que é EN no jogo estático simultâneo.

Jogo Interno de Quotas na OPEP

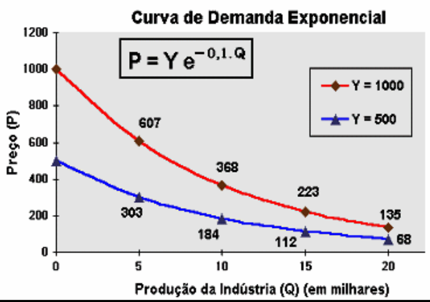
- **Imagine que um dos países da OPEP (que não a Arábia Saudita) está analisando se vale a pena produzir acima da sua cota (de forma discreta, sem anunciar isso).**
  - **Podemos imaginar um jogo simultâneo entre esse país versus os outros países da OPEP, ilustrado na forma normal abaixo:**

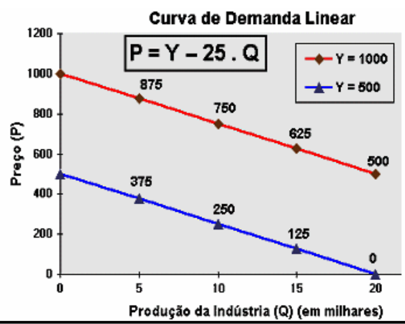
		Demais Países da OPEP	
		Produção = Quota	**Produção > Quota**
Um país da OPEP	**Produção = Quota**	Lucro normal ; Lucro normal	Lucro muito menor ; Lucro um pouco acima do normal(?)
	Produção > Quota	Lucro bem alto ; Lucro um pouco abaixo do normal	Lucro abaixo do normal ; Lucro abaixo do normal

- **Assim, o único EN nesse jogo é um país desrespeitar as cotas e os demais cumprirem as cotas. Ver planilha p/ o exemplo numérico.**

Preços e Curva de Demanda Inversa

- **A curva de demanda de um produto relaciona preços com a demanda. Preço mais baixo tem maior demanda e preço alto tem menor demanda.**
- **No duopólio, as firmas têm como dado uma função demanda inversa $p = f(Q_T)$: o preço do produto é função da produção da indústria $Q_T = q_1 + q_2$. As estratégias das firmas são q_1 e q_2.**
- **Ver os gráficos das curvas de demanda exponencial e linear (planilha).**
- **Nas figuras aparecem duas curvas de demanda, uma delas elevada refletindo uma economia aquecida (vermelha) e a outra mais baixa, refletindo um desaquecimento do consumo (curva azul).**





Jogo de Cotas da OPEP com Dois Países

- **Em muitos casos podemos analisar o conflito de dois competidores usando análise simplificada.**
- **Imagine o mercado de petróleo com os produtores sendo a firma 1, a firma 2 e o resto do mundo.**
  - **Assim, a produção da indústria é $Q_T = q_1 + q_2 + q_{resto}$.**
- **Seja uma curva de demanda linear dada por:**

$$p(Q_T) = a - b\,(Q_T) = a - b\,(q_1 + q_2 + q_{resto}).$$

  - **Que pode ser re-escrito como:**

$$p(Q_T) = (a - b\,q_{resto}) - b\,(q_1 + q_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(Q_T) = a' - b\,(q_1 + q_2)$$

  - **Assim, desde que se mantenha a produção do resto do mundo constante, bastaria ajustar o parâmetro a da função demanda. Mas essa é um *abordagem simplificada*.**
    - **A rigor, se mudar q_1 e/ou q_2, q_{resto} poderia se ajustar otimamente.**

Jogo de Cotas da OPEP com Dois Países

- **Seja o seguinte jogo de quotas da OPEP (planilha jogos da OPEP.xls , aba "quotas") com demanda linear residual dada por $p = \alpha - \beta\,(q_A + q_V)$, onde:**
  - **$\alpha = 100$; $\beta = 5$; as produções são q_A (Arábia) e q_V (Venezuela), que podem produzir só as cotas ou acima. Sejam os custos unitários $c_A = 12$ \$/bbl (Arábia) e $c_V = 20$ \$/bbl (Venezuela).**
  - **As cotas estabelecidas são 8 milhões de bbl/dia para a Arábia Saudita e 2 milhões de bbl/dia para a Venezuela.**
  - **Caso esses países não respeitem as quotas, eles iriam produzir um montante 25% acima das quotas: 10 MM bbl/d para a Arábia Saudita e 2,5 MM bbl/d para a Venezuela.**
- **Calcule o EN desse jogo considerando que a escolha da quantidade produzida pelos países é simultânea.**
  - **Calcule também os preços do petróleo em cada possível resultado.**
- **Se o mercado ficar mais aquecido e a demanda subir (fazendo $\alpha = 120$). Qual o novo EN? Por que mudou?**

Jogo de Cotas da OPEP com Dois Países

- **No primeiro caso, a planilha destaca o EN e mostra os resultados de payoffs (em milhões US$/dia), preços:**

		Venezuela: Quota: 2	Venezuela: Quota + 0,5: 2,5
Arábia Saudita	Quota: 8	304,0 ; 60,0 preço = 50 US$/bbl	284,0 ; 68,8 preço = 47,5 US$/bbl
Arábia Saudita	Quota + 2: 10,0	280,0 ; 40,0 preço = 40 US$/bbl	255,0 ; 43,8 preço = 37,5 US$/bbl

Convenção na Matriz Acima: ▢ = Equilíbrio de Nash

- **Analisando o jogo vemos que <u>ambos os países têm uma estratégia dominante</u>. A estratégia da Arábia Saudita é sempre cooperar (produzir só as cotas) e a da Venezuela é sempre trair a OPEP (produzir acima das cotas).**
  - **Aqui a Arábia sempre coopera por puro interesse próprio!**

Jogo de Cotas da OPEP com Dois Países

- **No exemplo numérico anterior os preços estiveram na faixa de 37,5 a 50 US$/bbl. Veremos agora o que ocorre se a *demanda estiver mais aquecida* (α = 120):**

		Venezuela: Quota: 2	Venezuela: Quota + 0,5: 2,5
Arábia Saudita	Quota: 8	464,0 ; 100,0 preço = 70 US$/bbl	444,0 ; 118,8 preço = 67,5 US$/bbl
Arábia Saudita	Quota + 2: 10,0	480,0 ; 80,0 preço = 60 US$/bbl	455,0 ; 93,8 preço = 57,5 US$/bbl

Convenção na Matriz Acima: ▢ = Equilíbrio de Nash

- **Vemos que *ambos os países têm estratégias dominantes*, mas agora para ambos os países essa estratégia é sempre não-cooperar (produzir acima das cotas).**
  - **Note que obtemos um esquema de *dilema dos prisioneiros*: o melhor para ambos (Pareto ótimo) seria obedecer as quotas!**

Jogo de Cotas da OPEP com Dois Países

- A mudança de EN ocorreu porque agora, com a maior demanda ($\alpha = 120$), a produção extra obtém preços maiores e a Arábia passa a ter incentivo de não-cooperar.
  - Como é praxe de jogos não-cooperativos, a cooperação pode emergir como resultado apenas se for equilíbrio.
  - Em jogos repetidos, a cooperação da OPEP pode emergir se os membros usarem estratégias de punição (será visto).
- Exercício 1: mostre que para uma demanda intermediária com $\alpha = 114{,}5$ existem dois EN em estratégias puras.
- Exercício 2: seja o caso original (com $\alpha = 100$, etc.), mas tendo a Venezuela um custo bem maior $c_V = 38$ \$/bbl.
  - Mostre que nesse caso o único EN é {cooperar ; cooperar} e esse equilíbrio também é em estratégias dominantes p/ ambos.

⇒ O resultado desse jogo *depende da demanda, custos, etc.*
  - Discutiremos agora modelos de escolha ótima de quantidades (Cournot) de um *range contínuo* de possíveis quantidades.

Competição por Quantidades em Duopólio

- Duas firmas dividem um mercado geográfico de um produto.
- Equilíbrio de Cournot (1838): *simultaneamente* e de forma independente os jogadores escolhem as quantidades, e o preço é tal que o total ofertado é igual a demanda.
  - Veremos que o resultado de Cournot é um EN único para esse jogo em que as estratégias são quantidades escolhidas simultaneamente.
  - Curva de reação de Cournot: especifica a produção ótima de uma firma em função das possíveis produções da outra firma.
- Equilíbrio de Stackelberg: *sequencialmente*, em dois estágios, uma firma (líder) estabelece sua produção e depois a outra firma (seguidor), observando o líder, estabelece a sua própria produção.
  - A produção e o lucro no modelo de Stackelberg são maiores para o líder e menores para o seguidor (vantagem de jogar primeiro). O líder maximiza o lucro dado a curva de reação do seguidor.
  - Iremos ver depois que esse resultado é um *EN perfeito em subjogos* para o jogo seqüencial em que as estratégias são quantidades. Mas ele tem problemas de *consistência temporal*: não é EN se o jogo continuar após a entrada do seguidor (há incentivo p/ desviar).

Monopólio com Demanda Linear

- **Dada a relação 1-1 entre *preço* e *quantidade* estabelecida na curva de demanda, um monopolista pode escolher <u>ou</u> preço <u>ou</u> quantidade a produzir, mas não ambas.**
- **O monopolista irá *maximizar o lucro* seja usando o preço ou usando a quantidade como *variável de controle*.**
- **Seja uma curva de demanda linear (a mais usada) dada por $p = a - b\,Q$. Assuma que o custo fixo do monopolista é zero e o custo variável é c. O lucro do monopolista é:**
  - $\pi_M = p\,Q - c\,Q \Rightarrow \pi_M = (a - b\,Q)\,Q - c\,Q = (a - c)\,Q - b\,Q^2$
- **Para maximizar o lucro usa-se a condição de 1ª ordem (CPO): $\partial\pi_M/\partial Q = 0$ (checar a de 2ª ordem: $\partial^2\pi_M/\partial Q^2 < 0$).**
  - **Os valores obtidos (quantidade, preço e lucro, respectiv.) são:**

$$q_M = \frac{a - c}{2b} \quad \Big| \quad p_M = \frac{a + c}{2} \quad \Big| \quad \pi_M = \frac{(a - c)^2}{4b}$$

Duopólio com Competição de Cournot

- **Agora considere o <u>duopólio</u>. Se o custo operacional (fixo + variável) de cada firma é $C_i(q_i)$, as funções lucros são:**

$$\pi_1 = q_1\,p(Q_T) - C_1(q_1) \quad \text{e} \quad \pi_2 = q_2\,p(Q_T) - C_2(q_2)$$

- **Seja uma curva inversa de <u>demanda linear</u> (por ser mais simples, é a mais usada), onde os preços são dados por:**

$$p(Q_T) = a - b\,Q_T \Rightarrow p(Q_T) = a - b\,(q_1 + q_2)\,,$$

com $q_1 \geq 0$; $q_2 \geq 0$; e a e b tal que $p > 0$

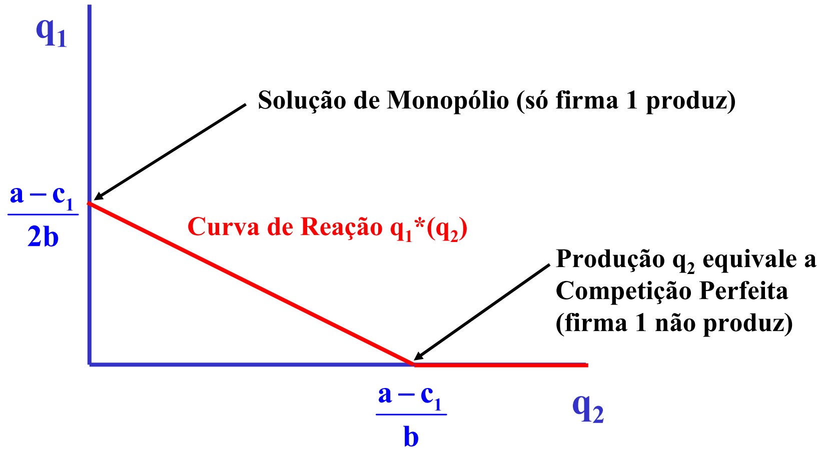
- **Se o *custo fixo é zero*, a função lucro da firma i (1 ou 2) é:**

$$\pi_i = q_i\,a - q_i\,b\,(q_1 + q_2) - c_i\,q_i = q_i\,(a - c_i) - q_i\,b\,(q_1 + q_2)$$

  - **Onde c_i é chamado de custo operacional *variável* da firma i.**
- **Define-se *curva de reação* da firma 1 em relação a produção da firma 2, $q_1^*(q_2)$, como a *correspondência de melhor resposta* da firma 1 para cada estratégia q_2.**
  - **A <u>interseção das duas curvas de reação</u>, $q_1^*(q_2)$ e $q_2^*(q_1)$, é o ponto em que temos melhor resposta simultânea ⇒ é EN!**

Curvas de Reação em Cournot

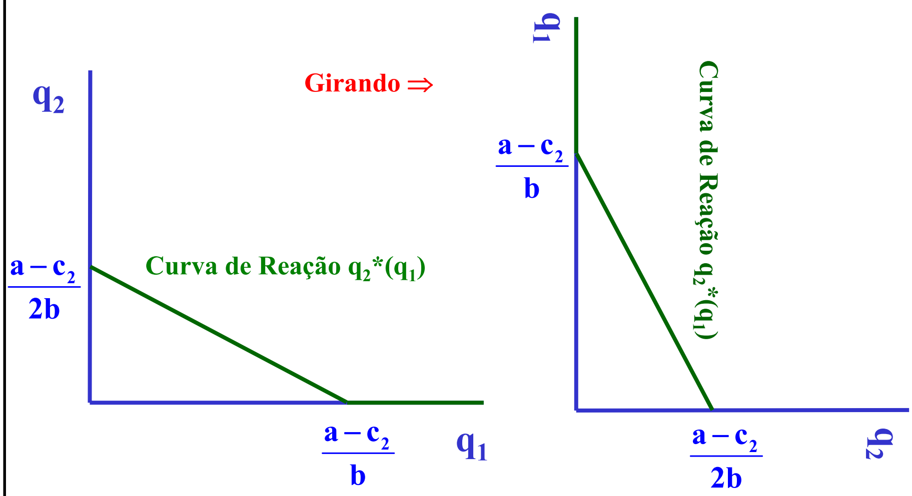
- A curva de reação da firma (jogador) 1 dá a melhor resposta q_1 a cada possível estratégia q_2 da firma 2.



- A curva de reação da firma 2 é similar (troca os eixos dos X com os dos Y). Girando um dos gráficos (para que os eixos coincidam) poderemos ver o cruzamentos das curvas (= EN), ver slides:

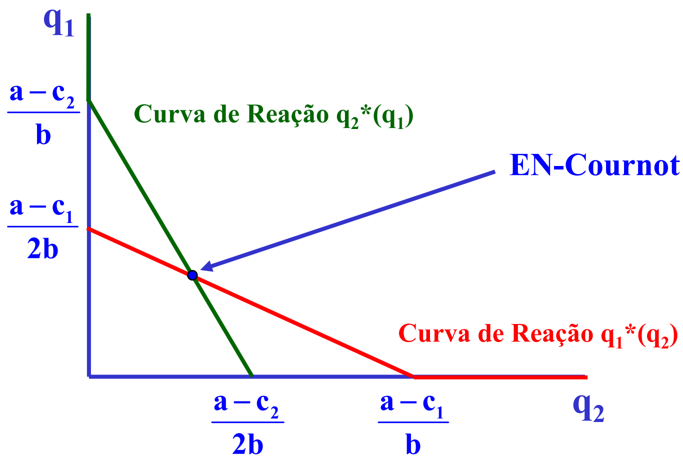
Curvas de Reação em Cournot

- A curva de reação da firma (jogador) 2 dá a melhor resposta q_2 a cada possível estratégia q_1 da firma 1.



Curvas de Reação e EN em Cournot

- O cruzamento das curvas de reação é o ponto em que temos melhor resposta simultânea $\Rightarrow$ EN.



Competição de Cournot em Duopólios

- Seja a função demanda linear: $p(Q_T) = a - b\,Q_T$
- Para calcular a *curva de reação* (*melhor resposta*) de cada firma, temos um *problema simples de otimização*, que usa a condição de 1ª ordem (CPO): $\partial\pi_i/\partial q_i = 0$.
  - Seja o caso geral de custo operacional $C_i(q_i)$. Por simplicidade assuma que $\partial^2 C_i/\partial q_i^2 = 0$ (função linear, tem custo variável e um custo fixo constante) e $\partial C_i/\partial q_j = 0$ p/ $i \neq j$ (a produção da firma i não influencia o custo da firma j). A CPO é dada por:

$$\frac{\partial\left(a - b(q_1 + q_2)\right)}{\partial q_i}.q_i + a - b(q_1 + q_2) - \frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow\ q_1^* = \frac{a - bq_2 - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}}{2b} \qquad\qquad q_2^* = \frac{a - bq_1 - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{2b}$$

- Para obter as quantidades em equilíbrio (EN-Cournot), basta *substituir a curva de melhor resposta* de uma na da outra, i.é, obter $q_1^*(q_2^*)$ e $q_2^*(q_1^*)$. O par $\{q_1^*(q_2^*);\ q_2^*(q_1^*)\}$ é EN (próx. slide):

Competição de Cournot em Duopólios

- O EN-Cournot é o par $\{q_1^*(q_2^*);\ q_2^*(q_1^*)\}$ dado por:

$$\Rightarrow\ q_1^*(q_2^*) = \frac{a + \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} - 2\frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}}{3b} \qquad q_2^*(q_1^*) = \frac{a + \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} - 2\frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}}{3b}$$

- Seja o caso com <u>custo fixo igual a zero</u>. As funções reação, os lucros, preços e as quantidades em EN são:

Funções melhor resposta (reação): $q_1(q_2) = \frac{a - c_1 - b\,q_2}{2b}$ $\quad q_2(q_1) = \frac{a - c_2 - b\,q_1}{2b}$

Funções Lucro em EN-Cournot: $\pi_1 = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b}$ $\quad \pi_2 = \frac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9b}$

Preço em EN-Cournot: $p_{EN\text{-}C} = a - b\,Q_T^{EN\text{-}C} = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$

Quantidades em EN (estratégias em EN): $q_1^*(q_2^*) = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$ $\quad q_2^*(q_1^*) = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$

- ➨ Assim, quanto menor o seu próprio custo e maior o custo do oponente, maior o seu lucro e a sua produção no EN-Cournot (como esperado).
- ➨ Como $a > c_i$, o preço em EN é maior que o custo médio das firmas.

Exercícios sobre EN-Cournot

- O que ocorre se uma das firmas investe em P&D para reduzir custo para ter maior competitividade em quantidades (Cournot)?
  - Diga o que ocorreria na curva de reação, no lucro de cada firma, nas quantidades em equilíbrio e no preço.
- Resolva o problema anterior (sem custo fixo), mas com custo variável quadrático: $c_i(q_i) = q_i^2$.
- Resolva agora com o custo variável linear anterior, mas com custo fixo $f_i > 0$ e com $q_i > 0$.

Exemplo Numérico: Competição por Quantidades

- Considere uma curva de demanda inversa linear, dada pela equação: $p = 30 - Q_T$ (ver planilha duopolio_sob_certeza.xls)
  - Por simplicidade, seja o custo variável igual a zero, ou, de forma alternativa, considere p a *margem* de lucro operacional.
- A função lucro π_i da firma i é a margem vezes as vendas:

$$\pi_i = p\, q_i = (30 - Q_T)\, q_i$$

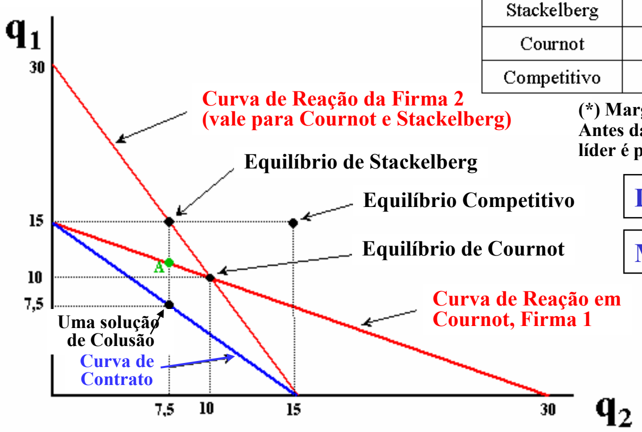
  - Na *competição perfeita*, as firmas irão produzir até a margem p cair a zero (logo, produzirão $q_1 = q_2 = 15 \Rightarrow Q_T = 30 \Rightarrow p = 0$);
  - No *monopólio*, a única firma escolhe Q_T p/ maximizar o lucro (derivada do lucro π em relação à produção = 0 $\Rightarrow Q_T = 15$); e
  - *Colusão* é quando as firmas se juntam e agem como monopólio
- Vimos que no duopólio onde as estratégias simultâneas são quantidades, o equilíbrio de Cournot é o EN do jogo.
  - A curva de reação da firma i é obtida pela maximização $\partial\pi_i / \partial q_i = 0$, que dá as curvas de melhor resposta $q_i = f(q_j)$ p/ cada jogador.
  - O cruzamento dessas curvas é o EN de Cournot (ponto fixo).

Duopólio: Vários Possíveis Resultados

- Para entender os possíveis equilíbrios, serão plotadas as *curvas de reação* das duas firmas, i. é, as *funções melhor resposta* dos dois jogadores dada as estratégias das outras firmas.

Equilíbrios	Lucros		Margem
	Firma 1	Firma 2	Unitária P
Colusão	112,5	112,5	15
Stackelberg	112,5	56,25	7,5 (*)
Cournot	100	100	10
Competitivo	0	0	0

(*) Margem depois da entrada do seguidor. Antes da entrada do seguidor a margem do líder é p = 30 – 15 = 15 = margem da colusão.



$\text{Lucro} = \pi_i = (30 - Q_T)\, q_i$

$\text{Margem} = p = 30 - Q_T$

Cournot em Oligopólios: N Firmas

- Seja o caso de oligopólio com N firmas (N > 1) com decisão simultânea competindo em quantidades (Cournot). Considere as N *firmas homogêneas* (mesmo custo unitário c) e demanda linear (custo fixo = 0).
  - A produção de cada firma e a produção total da indústria em EN-Cournot é (basta resolver para 1 firma homogênea):

$$q_i = q = \frac{a - c}{(N+1)\,b} \quad \Rightarrow Q_T = \sum q_i = N\,q = \frac{N\,(a - c)}{(N+1)\,b}$$

  - O preço de equilíbrio no mercado ("market clearing price") é:

$$p = \frac{a + N\,c}{N + 1}$$

Já o lucro de cada firma é: $\pi_i = \dfrac{(a - c)^2}{(N + 1)^2\,b} = b\,q_i^2$

  - Agora podemos ver o que ocorre no mercado quando $N \to \infty$:

$$\lim_{N \to \infty} Q_T = \frac{a - c}{b} \qquad \Big| \qquad \lim_{N \to \infty} p = c$$

  - Que são os resultados do caso de *competição perfeita* sem custo de entrada *para produção e preço* (= custo marginal; lucro = 0).

Oligopólio de Cournot em Fusões & Aquisições

- Para ilustrar o caso de N firmas em Cournot, imagine um mercado petroquímico com 4 firmas homogêneas.
- Uma onda de fusões e aquisições fez com que o mercado fosse reduzido de 4 para 2 firmas, também homogêneas.
  - Assuma que existam barreiras de entrada de produtos de firmas estrangeiras devido a custos de transporte e tarifas alfandegárias, de forma que só essas firmas competem.
    - Isso é realista no Brasil apenas dentro de certos limites de preços.
- Assuma que a curva de demanda do mix de produtos é linear e dada por $p = 180 - 8\,Q_T$, onde p = preço do mix de produtos e o custo médio unitário é c = 70 $/unidade.
  - Determine os preços, quantidades e lucros em equil. de Nash-Cournot antes e depois das fusões. Quem ganha e quem perde?
  - Agora considere que as fusões permitiram uma redução de custo unitário para c´ = 60 $/unidade. Quais são os novos preços, quantidades e lucros? Use a planilha oligopolio.xls.

Oligopólio de Cournot em Fusões & Aquisições

- **Os resultados do caso de fusões sem reduzir custos são:**

	Indústria			Cada Firma	
	Preço	Q_T	π_T	q_i	π_i
Antes	92,0	11,00	242,00	2,75	60,50
Depois	106,7	9,17	336,11	4,58	168,06

- **Assim, as firmas ganharam com as fusões, mas em detrimento da renda dos consumidores (maiores preços).**
- **Os resultados do caso de fusões com redução de custos são:**

	Indústria			Cada Firma	
	Preço	Q_T	π_T	q_i	π_i
Antes	92,0	11,00	242,00	2,75	60,50
Depois	100,0	10,00	400,00	5,00	200,00

  - **Ainda assim os preços subiram, embora menos que o caso anterior.**
- **Qual seria a redução de custo necessária para que os preços ao consumidor não aumentem? R: c´ = 48 $/unid.**

Análise de Fusões e Aquisições e Exercícios

- **O caso anterior não é nenhuma crítica ao caso recente no Brasil, já que o próprio governo pode ter interesse nas fusões para viabilizar a *sobrevivência a longo-prazo da indústria petroquímica nacional* (emprego, impostos).**
- **Na pasta 72 coloquei uma lista de três exercícios resolvidos do curso de microeconomia da PUC-Rio do Prof. João Manoel Pinho de Mello.**
  - **Os exercícios são também sobre análise de fusões usando conceitos da teoria dos jogos.**
  - **Material tem também no site do Prof. João Mello em: http://www.econ.puc-rio.br/jmpm/cursos/MicroII.html**
  - **Nessa lista, a função custo não é linear e sim quadrática.**
- **Procurar resolver os exercícios sem ver as respostas!**
  - **No exercício 3 você notará que o custo das firmas em fusão tb. teriam de ser muito reduzidos para o consumidor não perder.**

Competição de Curto-Prazo: Quantidade x Preços

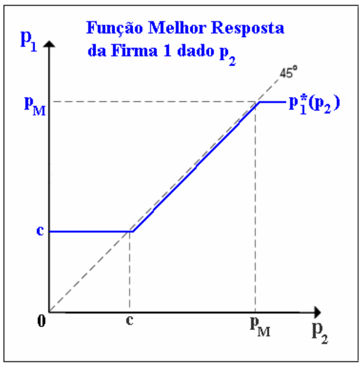
- A competição de *curto-prazo* com quantidades (Cournot) supõe que o preço resulta do balanço oferta x demanda.
  - É como se existe um leilão do produto. Mas quem é o *leiloeiro*?
  - Parece mais natural as firmas escolherem *preços* no curto-prazo.
- A primeira tentativa de modelar a competição por preços foi de Bertrand (1883), na crítica ao livro de Cournot.
  - Ele argumentou que seria mais provável que a competição entre as firmas fossem em preços e não em quantidades.
  - Mas quando uma firma pensa em reajustar preços, deve levar em conta que a outra firma também pode reajustar o preço.
    - Ex.: a IBM tem de decidir que preço cobrar de seus "personal computers", levando em conta a reação das rivais Dell e HP.
    - O que diferencia a *competição de preços* dos casos de *monopólio e competição perfeita*, em que essa interação estratégica não existe.
  - Veremos o modelo clássico de Bertrand de duopólio simétrico.
    - Esse modelo de duopólio leva a *resultados* de *competição perfeita*.

Duopólio de Preços de Bertrand

- Como em Cournot é um *jogo simultâneo* de curto-prazo, mas as *estratégias* de Bertrand são *preços* $p_i \in S_i = [0, \infty)$.
  - Encontraremos um equilíbrio de Nash totalmente diferente!
- As *premissas* fundamentais do duopólio de Bertrand são:
  1) As firmas vendem o mesmo produto (*produto homogêneo*) e só têm *custos variáveis* que são *iguais* $c_1 = c_2$ (*firmas homogêneas*);
  2) Se uma firma cobrar um preço menor que a rival, ela obterá *toda* a demanda do produto *e terá capacidade de atendê-la*; e
  3) Cobrando preços iguais, cada firma leva a *metade da demanda*.
  - A premissa crítica é a segunda, pois supõe *não haver restrição de capacidade*, podendo uma só firma atender *todo* o mercado.
- Para calcular o(s) EN-Bertrand do jogo, note que numa competição "guerra de preços", o preço tem dois limites:
  - Limite *inferior* é o *custo* c: não é ótimo p < c (teria prejuízo); e
  - Limite *superior* é o *preço de monopólio* p_M: ótimo p/ 1 firma.
    - Pois é razoável supor que os lucros são tais que $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq \pi_M$.

Duopólio de Preços de Bertrand

- Para determinar o EN temos de traçar as *curvas de reação* das duas firmas, pois o preço ótimo da firma 1 depende do preço cobrado pela firma 2 (ver gráfico):



Demanda da firma 1 (descontínua):

$$q_1(p_1,\ p_2)\ =\ \begin{cases} Q(p_1) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \dfrac{Q(p_1)}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

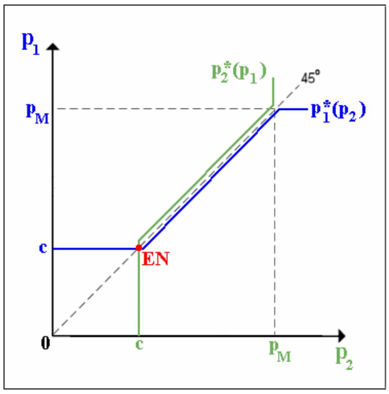
Problema:

$$\underset{p_1}{\text{Máx}}\ \pi_1\ =\ (p_1 - c)\ \ q_1(p_1,\ p_2)$$

- Se a firma 2 joga $p_2 \leq c$, a melhor resposta da firma 1 é $p_1 = c$.
  - Preços menores dariam prejuízo e preços maiores não venderiam nada.
- Se a firma 2 jogar $p_2 \in (c,\ p_M]$, o melhor é jogar p_1 apenas *um pouco menor* que p_2 e ter *todo* o mercado.
  - Preços iguais dividiriam o mercado e preços maiores não venderiam nada.
- Se a firma 2 jogar $p_2 > p_M$, o melhor é jogar $p_1 = p_M$ e ter todo mercado.
  - Preço p_1 tal que $p_M < p_1 < p_2$ teria *todo* o mercado tb., mas com *menor lucro.*

Duopólio de Preços de Bertrand

- Como as firmas são homogêneas, o problema é simétrico em relação à reta de 45º. Assim, plotando no mesmo gráfico a *curva de melhor resposta da firma 2*, $p_2^*(p_1)$:



- O único ponto de cruzamento, i. é, *melhor resposta simultânea*, é o ponto $\{p_1 = c;\ p_2 = c\}$, que é o único EN-Bertrand.
- Assim, o único equilíbrio de Nash é cada firma escolher um <u>preço igual ao custo marginal</u>.
  - Logo, no EN-Bertrand o <u>lucro operacional de cada firma é zero</u>.
  - O resultado equivale ao do obtido no caso de *mercado perfeito*, mas com apenas duas firmas!

Os Paradoxos de Bertrand

- **O fato da presença de apenas mais uma única firma ser suficiente para passar de *monopólio* para *competição perfeita* com firmas tendo *lucro zero* é difícil de acreditar.**
  - **Isso é chamado de paradoxo (clássico) de Bertrand.**
- **Um outro paradoxo é por que uma firma entraria nessa indústria se o lucro operacional é igual a zero?**
  - **Além disso, suponha que existe algum custo fixo de entrar no mercado ou produzir. Então se uma firma entrar (monopólio) a outra firma não irá entrar (pois não pagaria o custo fixo).**
    - **Logo, mesmo um pequeno custo fixo (de produção ou de entrada) é barreira suficiente para o mercado ser um provável monopólio!**
- **Um paradoxo relacionado ao clássico é que o *preço de equilíbrio independe da quantidade de firmas no mercado*.**
  - **No caso de N > 2 firmas homogêneas competindo em preços (Bertrand), mostra-se que o único EN é todos jogarem $p_i = c$.**

Soluções dos Paradoxos de Bertrand

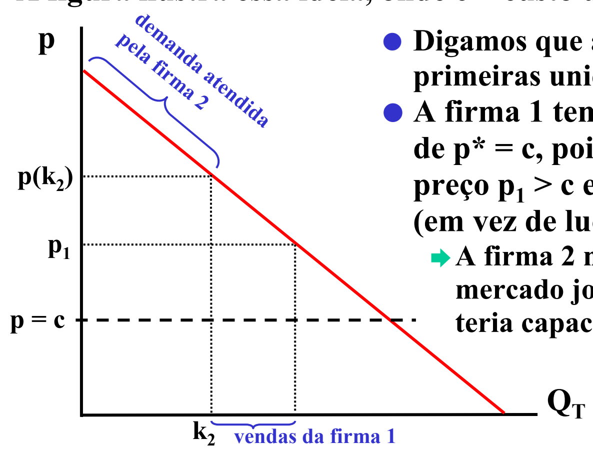
- **A 1ª proposta de solução p/ o paradoxo de Bertrand foi de colocar restrições de capacidades (Edgeworth, 1897).**
  - **A premissa de que reduzindo um pouco o preço se obtém todo o mercado é muito forte na maioria dos casos. Exemplo:**
    - **Imagine uma pequena cidade com dois hotéis. Como o número de quartos é fixo por hotel, uma guerra de preços não teria lógica pois um hotel não poderia absorver toda a demanda.**
    - **Com restrição de capacidades, passa a ser ótimo um preço $p_i > c$.**
- **Produtos diferenciados: outra solução é que os produtos das firmas geralmente não são totalmente homogêneos.**
  - **Por ex., a firma que vende um software não tem restrição de capacidades, mas geralmente tem alguma diferenciação: $p_i \neq p_j$**
- **Dinâmica da competição e/ou incerteza na demanda.**
  - **As firmas geralmente não se encontram apenas uma vez no mercado, como assume o modelo. Elas jogam *jogos repetidos* e existe a *ameaça de punição* que pode levar a cooperação $p_i > c$.**
    - **Incerteza na demanda também pode levar a $p_i > c$ (livro do Shy).**

Dois Estágios: Cournot + Bertrand = Cournot

- O paper clássico de Kreps & Scheinkman (1983) mostra o caso em dois estágios em que as firmas escolhem capacidade (Cournot) no primeiro estágio e então seguem uma competição de preços de Bertrand.
  - O primeiro estágio pode tanto ser visto como o de investimento em capacidades como o de acúmulo de estoques.
    - Em muitos casos é um estágio *necessário antes* de ir ao mercado.
  - No segundo estágio as quantidades não podem alteradas (logo, restrição de capacidade) e as firmas escolhem preços.
- Eles mostram que o resultante equilíbrio de Nash (*perfeito em subjogos*, a ser visto) é os jogadores escolherem as quantidades e os preços iguais ao de Cournot em 1 estágio!
  - Os autores concluem que "*Com premissas brandas sobre a demanda, o único equilíbrio resultante é o de Cournot*".
- Modelos de Cournot, Bertrand, etc., são mais detalhados em bons livros de *organização industrial* (Tirole, Shy, etc.)

Bertrand com Restrição de Capacidade

- Considere que as firmas têm capacidade limitada, de forma que no máximo produzem $q_{1máx} = k_1$ e $q_{2máx} = k_2$.
  - Para a firma 1, se ela jogar os preços para baixo, não irá obter todo o mercado e sim k_1. Se ela jogar os preços acima, $p_1 > p_2$, ela não perde todo o mercado, pois a firma 2 no máximo produz k_2.
  - A figura ilustra essa idéia, onde c = custo unitário marginal:



- Digamos que a firma 2 atenda as k_2 primeiras unidades demandadas.
- A firma 1 tem incentivo p/ desviar de p* = c, pois poderia jogar um preço $p_1 > c$ e obter lucro positivo (em vez de lucro = 0 com p = c)
  - A firma 2 não pode "roubar" o mercado jogando p = c, pois não teria capacidade de atendê-lo.

Cournot + Bertrand = Cournot

- **A demonstração do modelo de Kreps & Scheinkman não é simples e envolve conceitos ainda a serem vistos.**
  - **Entretanto iremos mostrar a idéia com um exemplo simples.**
  - **Seja um curva de demanda dada por $p = 10 - Q_T$ e $c_1 = c_2 = 1$.**
  - **Usando as equações vistas, a produção em Cournot é $q_1 = q_2 = 3$.**
- **No primeiro estágio as firmas investem em capacidades.**
  - **Suponha que por algum motivo tenham escolhidos investir numa capacidade de produzir a quantidade de Cournot $q^* = 3$.**
  - **No segundo estágio do jogo as firmas irão escolher preços, mas com restrição de capacidade. Vimos que nesse caso as firmas têm incentivos para desviar da escolha clássica de $p_{Bertrand} = c$.**
  - **Iremos mostrar que eles escolherão $p = p(k_1 + k_2)$ como EN, onde $k_1 = k_2 = 3$ (= q^*), devido à restrição de capacidade.**
  - **Se no 2º estágio é ótimo jogar um preço $p(k_1 + k_2)$, então temos de verificar qual o ótimo no 1º estágio em que se escolhe a quantidade. Mas isso é exatamente o problema de Cournot já visto, i. é, de maximização de lucro escolhendo quantidades!**

Cournot + Bertrand = Cournot

- **Provaremos que a escolha ótima de preços no 2º estágio é $p_1 = p_2 = p_{Cournot} = \$\ 4$ [pois $p_{Cournot} = 10 - (3 + 3)$].**
  - **Se a firma 1 atende os 1ºˢ três consumidores, então a curva de *demanda residual* p/ a firma 2 (após a produção da firma 1) é:**

  $p = 10 - (q_1 + q_2) \Rightarrow p = 10 - (3 + q_2) \Rightarrow p = 7 - q_2$. Ou $q_2 = 7 - p$.
  - **Só será ótimo a firma 2 desviar na escolha de preço se isso aumentar o lucro dela. Sua função lucro $\Pi_2(p_2)$ é dada por:**
  - **$\Pi_2(p_2) = p_2\, q_2 - c_2\, q_2 \Rightarrow \Pi_2(p_2) = p_2\,(7 - p_2) - 1.(7 - p_2) \Rightarrow$**

  $\Rightarrow \Pi_2(p_2) = 7\, p_2 - p_2^2 - 7 + p_2 \Rightarrow \Pi_2(p_2) = 8\, p_2 - p_2^2 - 7$
  - **Usa-se a CPO p/ *maximizar o lucro escolhendo p*, $\partial\Pi_2 / \partial p_2 = 0$:**
  - **$\partial\Pi_2 / \partial p_2 = 0 \Rightarrow 8 - 2\, p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 4$, que é exatamente o preço obtido quando se joga a quantidade de Cournot!**
    - **Por simetria, o mesmo vale para a firma 1 (não é ótimo desviar).**
    - **Intuição: preços menores não aumenta as vendas, só obtém menos receita p/ o mesmo q. Preços maiores diminui a demanda e mesmo com maior margem, o lucro por vender menos é menor.**

Existência de Equilíbrio de Nash

- <u>Existência de EN</u>: todo jogo tem pelo menos um EN se:

1) Puder jogar *estratégias mistas* e se há um *número finito* de estratégias puras no conjunto de estratégias de cada jogador
   - Senão, o *jogo do par ou ímpar* e outros tais como o *leilão que todos pagam* ("all-pay auction" a ser visto) não teriam equilíbrio.
2) Caso o jogo só permita *estratégias puras*, a existência de EN só é garantida em certas condições.
   - ➡ Por ex., com conjuntos S_i, $\forall$i, tendo um *contínuo de estratégias* (infinitas estratégias, ex.: quantidades no modelo de Cournot).

- Mais precisamente, EN em estratégias puras existe se para todos os jogadores i, o conjunto de estratégias S_i é *não-vazio, convexo e compacto* e a função payoff $v_i(s_1, \dots s_I)$ é contínua em $(s_1, \dots s_I)$ e quase-concava em s_i.
   - ➡ São condições *suficientes* (garante EN), mas <u>não</u> *necessárias*.
   - ➡ Ver *apêndices matemáticos* do livro MWG: M.C.3 (p. 933, função quase-concava); M.F (p.943, conjunto compacto = conjunto limitado e fechado); M.G (p.946, conjunto convexo).

Existência de Equilíbrio de Nash

- Para provar isso veremos uma definição alternativa de EN usando o conceito de *ponto fixo* de uma *correspondência*.
   - *Correspondência*: conceito generalizado de função. Associa a cada ponto x um *conjunto* de pontos e não um único ponto y. MWG: p. 949
   - *Ponto fixo*: Dada uma função ou correspondência f: A → A (conjunto A nele mesmo), o vetor $x \in A$ é ponto fixo de f(.) se:
   - $x = f(x)$ em caso de função e $x \in f(x)$ em caso de correspondência.
      - ➡ Ver apêndice matemático M.I, do livro MGW, p. 952.

- Teorema do *ponto fixo de Brouwer*:
   - Seja f: S → S uma função *contínua* de um conjunto não-vazio, compacto e convexo $S \subset \Re^n$ nele mesmo. Então existe um $x^* \in S$ tal que $x^* = f(x^*)$, i. é, existe um ponto fixo x* da função f.
   - Figura: S é o intervalo [0, 1], por ex., probabilidades de estratégias mistas. Tem 3 pontos fixos (corta reta f(x) = x)

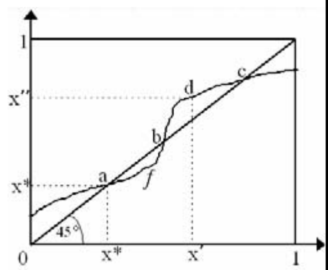


Figura: Wikipedia

Existência de Equilíbrio de Nash

- No caso mais geral temos correspondências e usa-se o teorema do ponto fixo de Kakutani:
  - Seja $\varphi : S \to S$ uma *correspondência superior hemi-contínua* de um conjunto não-vazio, compacto e convexo $S \subset \Re^n$ nele mesmo tal que para todo $x \in S$, o conjunto $\varphi(x)$ é convexo e não-vazio. Então existe um x^* tal que $x^* \in \varphi(x^*)$, i. é, existe um ponto fixo x^* pertencente à correspondência $\varphi(.)$.

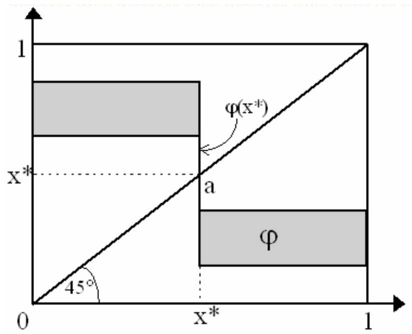


Figura: cepa.newschool.edu

EN como Ponto Fixo de Correspondência

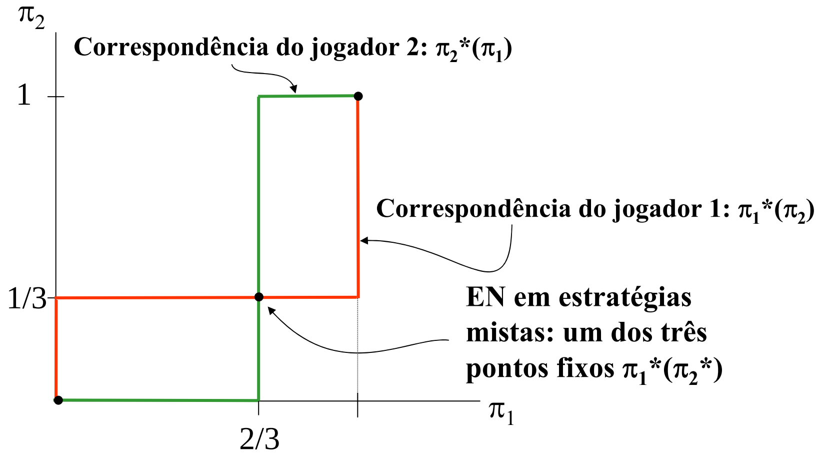
- EN são matematicamente equivalentes aos chamados *pontos fixos das correspondências de melhor resposta*.
  - No caso do EN-Cournot, vimos que $q_1^* = f(q_2^*)$ e $q_2^* = g(q_1^*)$. Logo, temos um *ponto fixo* no EN: $q_1^* = f(g(q_1^*)) = h(q_1^*)$.
  - No caso mais geral usa-se *correspondência*, pois mais de uma estratégia pode ser melhor resposta a uma certa estratégia.
- Assim, podemos definir o EN também como ponto fixo:
  - Seja $R_i(s_1, s_2, \ldots s_N)$ a correspondência de melhor resposta do jogador i contra s_{-i}. O perfil de estratégias $s = (s_1, s_2, \ldots s_N)$ é *equilíbrio de Nash* de um jogo se, p/ *todo* jogador i = 1, …, N:

$$s_i^* = R_i(s_1^*, s_2^*, \ldots s_N^*)$$

  - A equação acima deixa claro que um EN é um ponto fixo dessa correspondência de melhor resposta. Uma intuição:
    - Se iniciarmos com um perfil de estratégias que seja um EN e aplicarmos na correspondência de melhor resposta para todo i, então permaneceremos fixos nesse ponto (obtém o mesmo perfil).

Exemplo de Ponto Fixo de Correspondência

- **No jogo "batalha dos sexos" foi contruído um gráfico para determinar o equilíbrio em estratégias mistas que ilustra o EN como ponto fixo de correspondências de melhor resposta.**



Pasta 72: Ponto Fixo e Cournot

- **Na pasta 72 foi deixado material sobre *função hemi-contínua* e *teorema do ponto fixo para correspondências*, com várias figuras ilustrando as condições do teorema.**
  - **Trecho do livro "Game Theory for Economists", J. Eichberger.**
- **Também foi deixado uma nota de Bergstrom & Varian (1985) duas análises do equilíbrio de Cournot-Nash:**
  - **O efeito da taxação nas firmas nos resultados do EN-Cournot, podendo ter um imposto diferente t_i p/ cada uma das N firmas:**
    - **O efeito é equivalente a aumentar o custo variável c_i;**
    - **No EN-Cournot, o preço, o lucro e a produção da indústria são independentes da distribuição dos impostos entre as firmas;**
    - **Mas a arrecadação de impostos varia. Por ex.: ela é maximizada se t_i é o mesmo $\forall$ i (distribuição uniforme), o que parece intuitivo.**
  - **O efeito do número de firmas na função bem-estar da sociedade e na maximização de lucro das firmas.**
    - **Com poucas firmas o lucro das firmas tem mais peso; com muitas firmas o *bem-estar social* (*excesso do consumidor*) tem mais peso.**

Equilíbrio Correlacionado (Aumann)

- *Equilíbrio correlacionado* (Aumann, 1974) é um conceito mais geral que o EN, pois o seu conjunto de equilíbrios contém o conjunto de EN em estratégias mistas.
  - A definição é similar à de estratégias mistas, mas inclui como parte do equilíbrio (não é exógeno) o *espaço de probabilidades* (espaço amostral Ω + medida de probabilidade) e os *conjuntos de informação* de cada jogador (uma partição $\mathcal{P}_i$ de Ω).
    - Nessas condições são especificadas *distribuições de probabilidades* de *sinais* externos que são correlacionados com as estratégias e que servem para coordenar estratégias dos jogadores.
    - Esse equilíbrio é um caso especial de EN Bayesiano (a ser visto).
  - A idéia é que existem sinais públicos que são observados por ambas as jogadoras e isso permite que elas se coordenem: se uma segue o sinal público, então é ótimo p/ a outra tb. seguir.
  - Permitir tal correlação pode ser importante na prática pois os agentes econômicos observam vários sinais públicos.

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e/ou apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

História Resumida da Teoria dos Jogos

- **Veremos de forma resumida os principais fatos históricos.**
  - **Em 1913, Zermelo estabelece o 1º teorema da teoria dos jogos;**
  - **Década de 20: Borel deu a 1ª formulação moderna para estratégias mistas e achou a solução minimax; von Neumann provou o famoso teorema minimax usando o teorema da separação do hiperplano.**
  - **1944: von Neumann & Morgenstern publicam o 1º livro de T. dos J.**
  - **1950-1953: Nash publica seus famosos papers, com os conceitos de equilíbrio de Nash em jogos não-cooperativos e a solução de Nash em jogos cooper. de barganha. Inicia a era moderna da teoria dos jogos.**
  - **1960: Schelling publica seu famoso livro "The Strategy of Conflict".**
  - **1965: Selten publica o paper sobre equilíbrio perfeito em sub-jogos.**
  - **1967-68: Harsanyi publica papers sobre equilíbrio Nash-Bayesiano.**
  - **1972: Maynard Smith publica paper sobre eq. evolucionário estável.**
  - **1994: Prêmio Nobel em Economia para Nash, Selten e Harsanyi.**
  - **2004: Prêmio Nobel em Economia para Aumann e Schelling.**
  - **Para muito mais detalhes históricos, ver na internet:**
    - **http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm**

Exemplo de Cournot: OPEP x Não-OPEP

- **Esse exemplo (e outro da OPEP a ser visto) é retirado do livro do Dutta (*Strategy and Games*), publicado em 1999.**
  - **Assim, a análise foi feita no contexto de baixos preços do petróleo na *década de 90*, quando *sobrava petróleo no mercado*.**
- **Considere o jogo de quantidades no mercado de petróleo em que temos dois jogadores: OPEP e Não-OPEP.**
  - **É uma aplicação do resultado de Cournot. Assuma a seguinte curva de demanda linear: $P(Q_T) = a - b\,(Q_T) = a - b\,(q_O + q_N)$**
    - **Onde q_O e q_N são as produções da OPEP e Não-OPEP, respectivamente.**
    - **Note que o parâmetro "a" dá o *preço máximo* dessa função. No livro o autor colocou $a = 65$ (\$/bbl) refletindo os baixos preços da época (em dez/98 o petróleo chegou a ficar abaixo de 10 \$/bbl).**
    - **Ele usou b = 1/3, de forma que a demanda é: $P = 65 - 1/3\,(q_O + q_N)$.**
  - **Assuma que (naquela época) os *custos unitários de produção* da OPEP e Não-OPEP são, respectivamente de 5 e 10 US\$/bbl.**
    - **Hoje esses custos seriam bem maiores. Depois iremos colocar valores mais representativos da atualidade para ver o que ocorre.**

Exemplo de Cournot: OPEP x Não-OPEP

- Os lucros dos dois jogadores (receita – custos oper.) são:
  - O lucro da OPEP é: $\pi_O = q_O\,[65 - 1/3\,(q_O + q_N)] - 5\,q_O$;
  - O lucro Não-OPEP é: $\pi_N = q_N\,[65 - 1/3\,(q_O + q_N)] - 10\,q_N$
- As *curvas de reação* (*melhor resposta*) são obtidas com a CPO ($\partial\pi_O/\partial q_O = 0$; e $\partial\pi_N/\partial q_N = 0$) p/ maximizar esses lucros e são:

$$q_O^*(q_N) = \frac{180 - q_N}{2} \quad \text{se } q_N \leq 180 \quad \text{(e zero caso contrário)}$$

$$q_N^*(q_O) = \frac{165 - q_O}{2} \quad \text{se } q_O \leq 165 \quad \text{(e zero caso contrário)}$$

- O cruzamento dessas curvas (retas) – ou substituindo uma na outra – chega na solução de Nash-Cournot.
  - Com a solução q^*_O e q^*_N, é fácil obter o preço e os lucros:

	Quantidades	Preço (US$/bbl)	Lucro (MM $/d)
OPEP	65 (MM bbl/d)	26,67	1.408,3
Não-OPEP	50 (MM bbl/d)	26,67	833,3

Exemplo de Cournot: OPEP x Não-OPEP

- A planilha jogos da OPEP.xls permite (re)calcular o jogo.
  - Sabemos hoje que os custos subiram muito em relação à década de 90 (~ 2 a 3 vezes), principalmente os não-OPEP.
  - Além disso, a curva de demanda é muito mais alta e por isso o preço máximo está muito acima de 65 (já bateu em 79).
  - Vamos re-calcular o jogo usando os dados: $a = 130$; $b = 1$; e custos marginais unitários $c_O = 12$ \$/bbl e $c_N = 30$ \$/bbl:

	Quantidades	Preço (US$/bbl)	Lucro (MM $/d)
OPEP	45,3 (MM bbl/d)	57,33	2.055
Não-OPEP	27,3 (MM bbl/d)	57,33	747

- Embora a soma das produções estejam próximas do ano de 2007 (~ 72,4 MM bbl/d), estão ~ invertidas as produções.
  - Existem restrições de capacidade não-consideradas aqui. Além disso, só a OPEP tem algum *comportamento estratégico*. Os países Não-OPEP se comportam como *tomadores de preços*.
    - ➡ O modelo de Cournot não se adapta bem nesse caso.

Forma de Coalizão & Jogos Cooperativos

- **Coalizão é quando um grupo de jogadores se coordenam em torno dum objetivo comum visando ter maior poder.**
  - **Quando são firmas que deviam competir na economia, é ilegal ou anti-ético e a coalizão é chamada de *colusão coordenada*.**
  - **Em outros contextos (ex.: partidos políticos numa eleição ou votando uma lei) não é ilegal e (geralmente) nem anti-ético.**
- **Jogos cooperativos em forma de coalizão se dividem em:**
  - **Jogos com *utilidade transferível* (TU), em que existe uma regra simples *qualquer* de divisão da utilidade em cada coalizão S.**
    - **Também são chamados de *jogos com "side payments"* (pagamentos laterais) e são mais simples e mais analisados do que os jogos NTUs:**
  - **Jogos com *utilidade não-transferível* (NTU), em que não existe uma regra simples de divisão da utilidade e sim p/ cada S um vetor s_j-dimensional de funções payoff p/ cada S com s_j players.**
- **Veremos um exemplo simples de jogo TU: votação com N = 3 jogadores (= eleitores), para ilustrar a forma de coalizão.**

Jogos Cooperativos TU. Ex: Votação

- **Seja um jogo eleitoral (cooperat. TU) em que os *eleitores* (*jogadores*) têm várias possibilidades (*candidatos a votar*).**
  - **Os eleitores podem se associar, i.é, formar coalizões (em torno dum candidato). Ganha a eleição a coalizão S que tem mais eleitores. Seja uma eleição com N = 3 eleitores (jogadores).**
  - **Seja a *função característica* C(S), com a normalização:**
    - **"Grande coalizão" C(N) = 1. Para cada jogador i, C({i}) = 0.**
    - **Além disso, C(S) = 1 se a coalizão S vencer e C(S) = 0 se S perder.**
  - **A forma de coalizão no jogo TU especifica {N = 3; C(S)}, onde:**

$$C(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \#S < 2 \\ 1 & \text{se } \#S \geq 2 \end{cases}$$

- **Esse tipo de jogo tem grande relevância em sociologia, mas menos importância em economia.**
- **Em termos de jogos cooperativos, os mais importantes p/ a economia são os *jogos de barganha cooperativa*.**

Jogos Estritamente Competitivos & Soma Zero

- Jogos de *soma fixa* (de payoffs) são chamados de *jogos estritamente competitivos*, pois um jogador só aumenta o seu payoff se houver uma redução no payoff de outro.
  - O resultado desses jogos são sempre *Pareto eficiente*, pois só se pode melhorar o payoff dum jogador se piorar o de outro.
  - Uma classe particular é a classe dos *jogos de soma zero*. Mas muitos autores chamam os jogos de soma fixa de jogos de soma zero. Aqui usaremos os dois termos de forma intercambiável.
- Jogos estritamente competitivos se tem um "vencedor" e um "perdedor". Exs.: xadrêz, pôquer, futebol, etc.
  - Esses jogos tem pouca importância em economia, já que a maioria dos jogos na economia são jogos de soma variável.
- *Minimax* (ou minmax) é um método da teoria da decisão tradicional para *minimizar a máxima perda possível*.
  - Também pode ser visto como a estratégia de punir um outro jogador, minimizando o máximo que o outro pode obter.

Jogos de Soma Zero, Maximin e Minimax

- Em jogos estritamente competitivos com 2-jogadores, minimizar o payoff adversário equivale a maximizar o seu próprio payoff. Assim, a matriz de jogos pode ter *apenas uma entrada de payoff* (do jogador 1), em que:
  - O jogador 1 tenta maximizar o seu payoff e o jogador 2 tenta minimizar esse payoff (⇒ maximizando o seu próprio payoff).
  - Dado o que o adversário está fazendo, *a estratégia de segurança* do jogador 1 é maximizar o conjunto de seus payoff mínimos (estratégia maximin), enquanto que para o jogador 2 ela é a de minimizar o conjunto de máximos de 1 (estratégia minimax).
- Assim, podemos definir estratégias maximin e minimax:

$$\underset{s_1 \in S_1}{\text{Máx}} \ \underset{s_2 \in S_2}{\text{Mín}} \ v_1(s_1, s_2)$$

$$\underset{s_2 \in S_2}{\text{Mín}} \ \underset{s_1 \in S_1}{\text{Máx}} \ v_1(s_1, s_2)$$

- O equilíbrio do jogo (s*1; s*2) é obtido resolvendo o problema:

$$\underset{s_1 \in S_1}{\text{Máximo}} \ v_1(s_1, s_2^*)$$

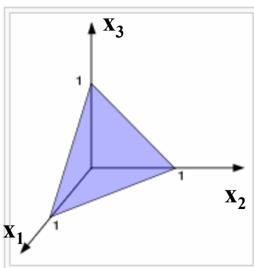
$$\underset{s_2 \in S_2}{\text{Mínimo}} \ v_1(s_1^*, s_2)$$

Estratégias MiniMax & Maximin

- **O *teorema minimax de John von Neumann* (1928) diz:**
  - ***Admitindo estratégias mistas, a estratégia minimax sempre existe em jogos de soma zero com dois jogadores e é única*.**
- **As estratégias minimax e maximin surgiram na análise de *jogos de soma fixa*, mas podem ser usadas em jogos de soma variável. Mas o eq. de Nash é *muito* mais aceito.**
  - **Nos jogos de soma variável, em economia, estrat. minimax só tem algum interesse como *estratégias de punição* em *jogos repetidos*, a fim de forçar a cooperação dos jogadores.**
  - **O *payoff minimax* m_i é o menor payoff que os rivais do jogador i podem impor ao jogador i. É uma *punição mais severa do que o EN*.**
    - **O jogador i se defende jogando a estratégia *maximin*.**
- **Como observa Rasmusen no seu livro de teoria dos jogos:**
  - **Nos jogos de soma variável, a estratégia *minimax* é para *sádicos* e a estratégia *maximin* é para *paranóicos*!**
  - **Em jogos de soma zero, a estratégia *minimax* é p/ *neuróticos otimistas* e a estratégia *maximin* p/ *neuróticos pessimistas*!**

Simplex de Três Jogadores

- **Em topologia, simplex é um invólucro convexo no R^n.**
  - **No caso de 3 estratégias puras ele é um tetraedro no $\mathbb{R}^3$ com 4 pontos: (0, 0, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 0) e (0, 0, 1). Ver a figura.**
  - **Os valores são normalizados: os valores do gráfico podem ser interpretados como percentagens. Assim é usado para estratégias mistas (probabilidades alocadas p/ cada estratégia).**
  - **Em muitas aplicações só interessa o plano eficiente que dá o payoff máximo: plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.**
    - **Por isso pode-se trabalhar no R^2 com esse *triângulo eficiente*.**

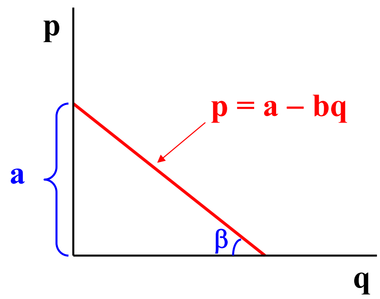


Um 3-simplex.

Fonte: Wikipedia

Curva de Demanda Linear e Lucro

- O mercado de um produto qualquer tem uma curva de demanda $p = f(q)$, onde p é o preço e q a quantidade total demandada. Suponha uma curva de demanda linear.



- Assuma que $a = 16 + c$, onde c é o custo unitário do produto ($\Rightarrow$ margem $= p - c$) e suponha $b = 1$ ($\Rightarrow \beta = 45^0$)
- Função lucro π é a margem vezes as vendas: $\pi = (p - c)\, q$
  Logo, $\pi = (a - bq - c)\, q = (16 - q)\, q \Rightarrow \boxed{\pi = 16\, q - q^2}$

Competição Perfeita e Monopólio

- Na <u>competição perfeita</u>, as firmas são tomadoras de preço e irão produzir com <u>margem igual a zero</u>, isto é, $p = c$. Logo, a quantidade produzida em competição perfeita será:

$$c = a - bq \;\Rightarrow\; a - c = bq \;\Rightarrow\; 16 = 1 \,.\, q \;\Rightarrow\; \boxed{q = 16}$$

- No caso de <u>monopólio</u>, isto é, com apenas uma firma no mercado, o monopolista irá produzir de forma a <u>maximizar o lucro</u>. Logo a quantidade produzida em monopólio será tal que maximiza o lucro $\pi = 16\, q - q^2$:

Condições de maximização: $\dfrac{\partial \pi}{\partial q} = 0$; e $\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} < 0$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 16 - 2q = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{q = 8}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -2 < 0 \quad \text{(logo é um máximo)}$$

<u>Conclusão</u>
Competição produz 16
Monopólio produz 8

Competição por Quantidades

- Para uma curva de demanda inversa genérica $p(Q)$ com $N \geq 1$ firmas de mesmo custo variável c e custo fixo = 0, a condição de primeira ordem (CPO) é dada por:

$$p'(Q^*)\,(Q^*/N) \;+\; p(Q^*) \;=\; c$$

  - Para N = 1 temos o caso de monopólio.
  - Quando $N \rightarrow \infty$ temos o caso de competição perfeita com $p = c$.
  - Além da CPO, depois deve-se verificar a existência ou não de *solução de canto*, i. é, com $q_i = 0$.
- Cournot permite também ser visto de forma dinâmica:
  - Se um par de estratégias iniciais não é EN, então os desvios seqüenciais de cada jogador para a sua curva de melhor resposta dado o que o outro jogou, converge para o único EN-Cournot.