Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

ELE 2005: Análise Estratégica de Investimentos e de Decisões com Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais

Teoria dos Jogos – Parte 2.

Marco Antonio Guimarães Dias,
E-mail: marcoagd@pobox.com
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 2º Semestre de 2007

Jogos Dinâmicos

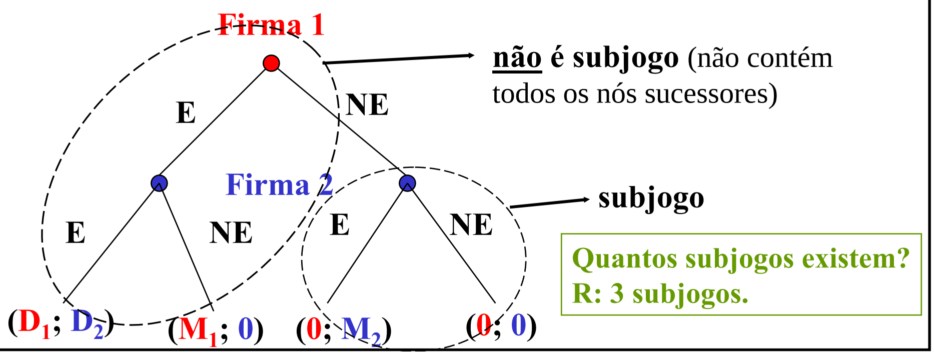
- **Até aqui vimos só jogos estáticos, onde os jogadores se encontravam uma só vez, o *tempo* não era uma variável.**
- **Agora serão vistos jogos dinâmicos onde o tempo é relevante e/ou os jogadores se encontram várias vezes.**
  - **Os jogos dinâmicos podem ser *jogos repetidos* ou *não-repetidos*.**
  - **Os jogos dinâmicos podem ser *determinísticos* ou *estocásticos*.**
- **Antes, os elementos *ação* e *estratégia* se confundiam, mas em jogos dinâmicos é necessário lembrar a diferença:**
  - **Uma *estratégia* s_i do jogador i é um *plano completo de ações* tal que especifica uma *ação* factível $a_{i,\,c}$ em cada contingência c na qual o jogador i possa ser chamado a jogar.**
    - **Cada contingência c pode ser interpretada como cada instante t.**
    - **A ação de um jogador pode ou não ser *observável* pelo(s) outro(s).**
- **Para analisar jogos dinâmicos precisamos do conceito de *Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos* (ENPS).**

Refinamentos do EN: Equilíbrio Perfeito

- **O grande problema prático do EN é que geralmente se têm <u>múltiplos</u> ENs. Isso é freqüente em jogos dinâmicos.**
  - **A pergunta natural é: qual o equilíbrio que deve prevalecer?**
- **Em jogos dinâmicos, o conceito de EN não consegue eliminar várias estratégias não-críveis. É necessário adicionar uma *racionalidade seqüencial* no caminho do equilíbrio.**
  - ***Princípio da racionalidade seqüencial*: a estratégia de um jogador deve especificar ações ótimas em todos os pontos da árvore de jogos.**
- **Selten (1965) introduziu o conceito de *equilíbrio de Nash perfeito em subjogos* (ENPS) para jogos dinâmicos.**
  - **ENPS usa o princípio da racionalidade seqüencial e o conhecido processo de otimização *backwards* (retro-indução):**
    - **Estabelece primeiro as estratégias ótimas nos nós terminais e depois vai estabelecendo as estratégias ótimas nos nós anteriores.**
    - **O precursor foi o *teorema Zermelo* (1913) que pode ser enunciado assim "todo jogo finito de informação perfeita tem um EN em estratégias puras que pode ser obtido através de retro-indução".**

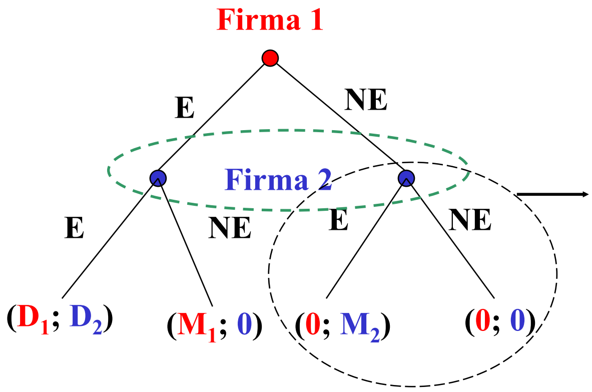
Subjogos

- **Antes de definir o ENPS é necessário definir *subjogo*:**
  - **Subjogo é um subconjunto do jogo Γ_E com as propriedades: (a) começa num conjunto de informação que contém apenas um nó de decisão e contém todos os nós sucessores; (b) não há conjuntos de informação quebrados, i. é, se o nó de decisão x está no subjogo, então cada nó x' $\in$ H(x) (i. é, o conjunto de informação onde está x) também estará no subjogo.**
  - **Todo jogo tem pelo menos um subjogo que é o próprio jogo.**



Subjogos

- Exemplo da segunda condição para ser subjogo:
  - Esse jogo só tem um único subjogo que é o próprio jogo.
    - Pode ser interpretado como um *jogo simultâneo* ou como um *jogo seqüencial* onde a ação da firma 1 não é observável.



Não é subjogo, pois não pode haver conjuntos de informação quebrados.

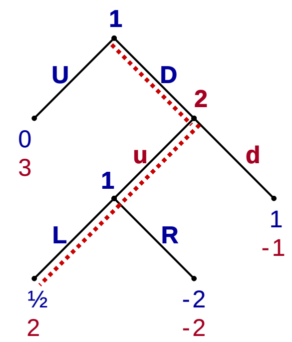
  - Informação imperfeita x incompleta.
    - Caso acima é informação imperfeita. Veremos depois o outro caso.

Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos

- O perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_J)$ no jogo na forma extensiva Γ_E é um *Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos* se ele induz um EN em cada subjogo de Γ_E.
  - No jogo finito com informação perfeita, o Teorema de Zermelo assegura que existe o ENPS. Ele pode ser obtido backwards.
  - O ENPS é *único* caso nenhum jogador tenha os *mesmos payoffs em nós terminais* quaisquer. Faremos um exemplo numérico.
  - Existe uma ligação estreita óbvia entre o conceito de ENPS e o de *programação dinâmica*: ambos usam *otimização backwards*.
    - Para determinar o ENPS inicia-se procurando o(s) EN nos nós terminais, substitui-se esse subjogo pelos payoffs do EN e analisa o sujogo predecessor, procurando o EN, etc., até chegar ao início.
    - Nos casos de jogos infinitos, a definição de ENPS permanece no sentido de que induz EN em todos os subjogos, apesar de não ter a "última data" para trabalhar backwards. Faremos um exemplo.
    - Na programação dinâmica vimos (2006.1) que trabalhar com horizonte infinito é fácil (o *tempo deixa de ser variável de estado*).

Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos

- Exemplo mostra que existem dois EN e um ENPS no jogo abaixo. Mostra ele também na forma normal.



		2: u	2: d
1	UL	0 , 3	0 , 3
	UR	0 , 3	0 , 3
	DL	½ , 2	1 , -1
	DR	-2 , -2	1 , -1

- Dois EN em estratégias puras (melhor visto na forma normal).
- Um ENPS em estratégias puras: (DL ; u). É o EN "crível".

Procedimento *Backward Induction*

- O procedimento de retro-indução (backward induction) é:

1. Começe nos nós terminais do jogo e identifique quem joga.
2. Ache a decisão ótima do jogador nos nós de decisão comparando os payoffs que os jogadores recebem em cada nó terminal.
   - Registre essa escolha, ela é parte da estratégia ótima dos jogadores.
3. Podar a árvore cortando todos os ramos que se originaram de #1. Atribuir a cada um desses novos nós terminais os payoffs obtidos quando a ação ótima é realizada nesse nó.
4. Uma nova árvore de jogo existe e é menor que a original.
5. Se não existirem mais nós de decisão, o jogo termina. Se ainda existirem nós de decisão, aplicar os passos #1 a #4 até não haver mais nós de decisão.
6. Para cada jogador, selecione as decisões ótimas em cada nó. Esse conjunto de decisões constitem as estratégias ótimas desse jogo.

- O resultado é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.
  - O ENPS pode ser único ou não (mesmo payoff em nós de decisão).

Ex: Barreira de Entrada com Excesso de Capacidade

- O caso a seguir é uma variante do *modelo de Stackelberg* de líder e seguidor (caso mais geral é visto em seguida).
- A motivação desse exemplo é um famoso caso de 1945: o processo *antitrust* contra o poder de monopólio da Alcoa, que dominava 90% do mercado de alumínio nos EUA.
  - A Alcoa foi condenada porque o juiz entendeu que o rápido acúmulo de capacidade de produção por parte da Alcoa, que excedia muito os níveis de demanda, tinha como objetivo criar uma *barreira de entrada* para inibir a entrada de competidores.
  - Veremos que a teoria dos jogos e o ENPS pode justificar a decisão do juiz americano, assim como o argumento usado.
- Suponha que duas firmas estão considerando *entrar ou não* no mercado, e também *como* (capacidade) entrar.
  - Seja P o preço de equilíbrio e Q_T a produção total da indústria que aqui é a soma das produções das duas firmas $q_1 + q_2$.

Barreira de Entrada com Excesso de Capacidade

- Seja uma curva de *demanda inversa linear* dada por:

  $P = 900 - Q_T$ ou $P = 900 - q_1 - q_2$
- Assuma que existem só duas alternativas de investimento em capacidades: pequena e grande.
  - A unidade pequena demanda um investimento I_p = US$ 50.000 e permite produzir 100 unidades.
  - A unidade grande teria de investir I_g = US$ 175.000 e permitiria produzir *qualquer* quantidade de unidades.
    - Assim, só a unidade pequena é que tem *restrição de capacidade*.
  - Suponha que em ambos os casos o *custo operacional é zero*.
- Assuma que a entrada das firmas é seqüencial:
  - Primeiro a firma 1 decide se entra e com que capacidade e depois a firma 2, observando a ação da firma 1, decide se entra ou não e com que capacidade.
- Determine o *Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos* (ENPS).

Barreira de Entrada com Excesso de Capacidade

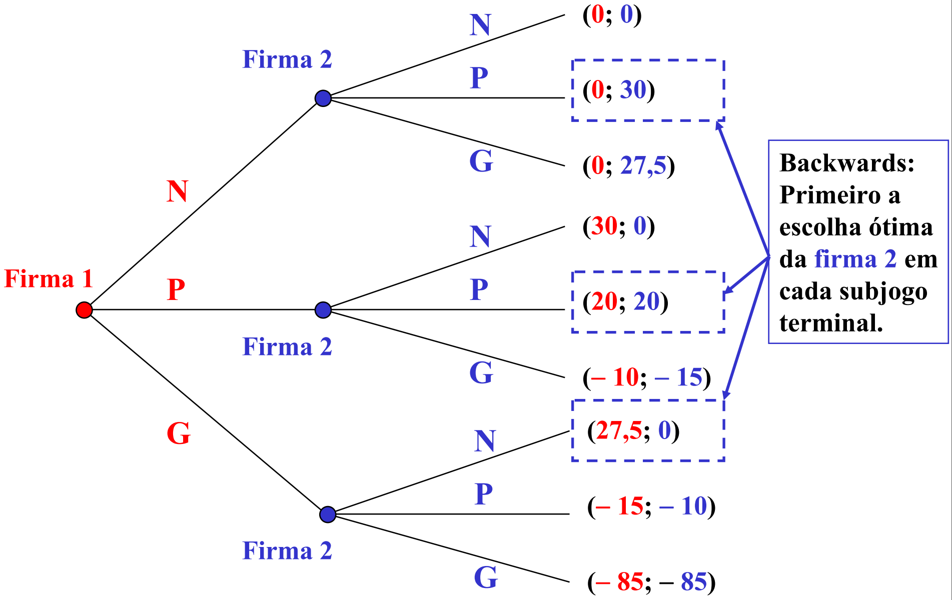
- **Para achar o ENPS, vamos fazer alguns cálculos:**
  - **Suponha que a firma i está <u>sozinha no mercado</u>. Assim, o preço duma unidade é $P = 900 - q_i$ e a receita $R_i = q_i (900 - q_i)$.**
  - **O lucro de i é maximizado escolhendo $q_i = 450$, que dá uma receita (= lucro oper., pois o custo oper. = 0) de $R^*_i = 202.500$.**
    - **Mas a firma i só produz 450 se ela investir na unidade grande.**
    - **Se ela investiu na unidade pequena, ela só produziria 100 e só obteria uma receita (lucro) de R = 80.000.**
  - **Suponha que esses valores estão todos em valor presente, de forma que os VPLs dos dois casos anteriores seriam:**
    - **Unidade grande: $VPL_g = R - I_g = 202.500 - 175.000 = \$ 27.500$.**
    - **Unidade pequena: $VPL_p = R - I_p = 80.000 - 50.000 = \$ 30.000$.**
  - **Agora suponha que <u>ambas as firmas estão no mercado</u>. Assim, a receita da firma i é $R_i = q_i (900 - q_i - q_j)$. A função melhor resposta de i é dada pela condição de primeira ordem: $\partial R_i / \partial q_i = 0 \Rightarrow q^*_i = 450 - q_j/2$. Resolvendo o sistema $q^*_1 = 450 - q^*_2/2$ e $q^*_2 = 450 - q^*_1/2$ obtemos $q^*_1 = q^*_2 = 300$.**

Barreira de Entrada com Excesso de Capacidade

- **Esse cálculo considera que ambas as firmas não têm restrição de capacidades (investiram em unidades grandes).**
- **Nesse caso sem restrição e com as duas firmas no mercado, as firmas teriam receitas $R_i = (900 - 300 - 300)\ 300 = 90.000$. Nesse caso os VPLs seriam negativos: $VPL_1 = VPL_2 = 90.000 - 175.000 \Rightarrow VPL_1 = VPL_2 = -85.000$.**
- **Se <u>ambas as firmas estão no mercado, mas com capacidade restrita</u>, a receita será $R_i = (900 - 100 - 100)\ 100 = 70.000$.**
  - **Logo, $VPL_1 = VPL_2 = 70.000 - 50.000 \Rightarrow VPL_1 = VPL_2 = 20.000$.**
- **Se ambas as firmas estão no mercado, uma (i) com capacidade sem restrição e a outra (j) com capacidade restrita, então a que não tem restrição produziria no ótimo $q^*_i = 450 - 100/2 = 400$.**
  - **Logo, o preço será P = 900 – 400 – 100 = 400; as receitas das duas firmas serão: $R_i = 400 \times 400 = 160.000$ e $R_i = 400 \times 100 = 40.000$.**
  - **Os VPLs serão: $VPL_i = 160.000 - 175.000 \Rightarrow VPL_i = -15.000$ e $VPL_j = 40.000 - 50.000 \Rightarrow VPL_j = -10.000$.**
- **Assim, uma análise não-estratégica recomendaria entrar com a planta pequena ou não entrar. Mas análise estratégica dará outro resultado!**

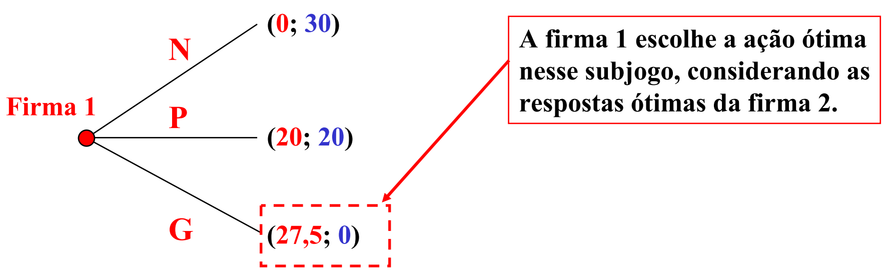
Barreira de Entrada com Excesso de Capacidade

- Esse jogo seqüencial é mostrado na forma extensiva, onde N = não-entrar; P = entrar com capacidade pequena; e G = entrar com capacidade grande.



Barreira de Entrada com Excesso de Capacidade

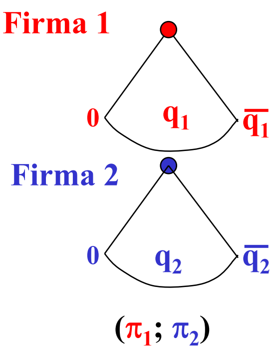
- Agora podemos substituir os subjogos terminais pelo payoff advindo da escolha ótima da firma 2. Com isso ficará claro a <u>escolha ótima da firma 1</u>.



- Assim, o único ENPS é o par de estratégias (G; N), ou seja, a firma 1 entra com capacidade grande e a firma 2 não entra no mercado. Com isso, temos um monopólio!
  - Esse resultado é interessante, já que sem competição (sem a firma 2 ameaçar entrar), o ótimo para a firma 1 seria entrar com uma capacidade pequena (VPL = 30 > 27,5).
  - Logo, <u>o excesso de capacidade inibiu a entrada do competidor</u>!

Exemplo 2: Equilíbrio de Stackelberg

- **Stackelberg: entrada em um mercado com *competição em quantidades* e com *ações seqüenciais*, i. é, primeiro entra a firma 1 (líder) com q_1 e depois, <u>observando a quantidade q_1</u>, entra a firma 2 (seguidor) com $q_2^*(q_1)$.**
  - **Firmas *iguais* com *custo marginal* c. As firmas já têm capacidades irrestritas. Demanda $p(Q) = a - b\,Q$. Determine o único ENPS.**



- **Lembrando: em jogos dinâmicos finitos busca-se o ENPS por *retro-indução* (*"backwards"*).**
- **Assim, primeiro verifica-se o q_2 ótimo para a firma 2, dado que a firma 1 já entrou com q_1.**
- **A firma 2 observou q_1 e a melhor resposta da firma 2 é a sua curva de reação $q_2^*(q_1)$.**
- **A firma 1 sabe que a firma 2 irá observar o valor q_1 e sabe que a rival irá jogar $q_2^*(q_1)$.**
- **Assim, basta a firma 1 jogar q_1^* de forma a maximizar π_1, dado que a rival joga $q_2^*(q_1)$.**

Exemplo: Equilíbrio de Stackelberg

- **Vimos que a função lucro π_1 da firma 1 e a curva de reação $q_2^*(q_1)$ da firma 2 são dadas por:**
  - $\pi_1 = q_1\,P(Q_T) - C_1(q_1) \;\Rightarrow\; \pi_1 = q_1\,(a - c_1) - q_1\,(q_1 + q_2)$

$$q_2^*(q_1) = \frac{a - c_2 - b\,q_1}{2b} \quad \text{Firmas homogêneas} \;\Rightarrow\; q_2^*(q_1) = \frac{a - c - b\,q_1}{2b}$$

- **Assim, temos um problema de maximização de π_1, escolhendo q_1 e substituindo q_2 pela função $q_2^*(q_1)$:**

$$\underset{q_1}{\text{Max}}\ P(q_1 + q_2(q_1))\,q_1 - C_1(q_1) = \underset{q_1}{\text{Max}}\ q_1\,(a - c) - b\,q_1\,\left(q_1 + \frac{a - c - b\,q_1}{2\,b}\right)$$

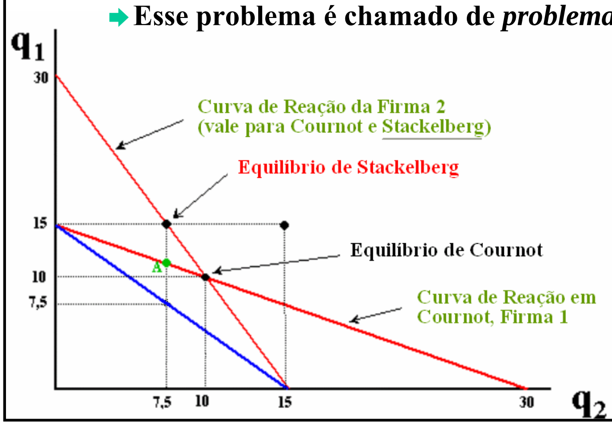
  - **Aplicando a CPO (condição de primeira ordem) $\partial\pi_1/\partial q_1 = 0$:**

$$q_1^* = \frac{(a - c)}{2\,b} \quad\Rightarrow\quad q_2^* = \frac{(a - c)}{4\,b}$$

  - **Exercício: Mostre que o lucro $\pi_1 > \pi_2$ e determine o preço P.**
- **A firma 2 tem menor lucro *por ter mais informação que a firma 1* (sabe q_1): aqui é desvantagem ser informado!**
  - **No *jogo do par-ou-ímpar*, ao contrário, ter mais informação era melhor.**

Inconsistência Temporal

- **O resultado de Stackelberg é não apenas EN como também ENPS, <u>desde que o jogo termine no 2º estágio</u>.**
  - **A figura abaixo (do exemplo da parte 1, com $P(Q) = 30 - Q$) mostra que a quantidade q_1 não é melhor resposta para q_2.**
  - **Assim, se houvesse um terceiro estágio seria ótimo para o líder reduzir a sua produção q_1 para aumentar o seu lucro π_1.**
    - **Esse problema é chamado de *problema de inconsistência temporal*.**



Stackelberg:

$$q_1^* = \frac{(a - c)}{2\,b}$$

$$q_2^* = \frac{(a - c)}{4\,b}$$

Na prática a pergunta é: Será a estratégia q_1 um compromisso crível?

Inconsistência Temporal

- **O resultado de Stackelberg é um exemplo do problema de *inconsistência temporal* (“*time inconsistency*”):**
  - **Como a quantidade q_1 de Stackelberg não é a melhor resposta para o q_2 do seguidor, se o jogo continua essas quantidades deixam de ser equilíbrio, pois existe um incentivo para o líder mudar (reduzir) o valor de q_1 num terceiro estágio do jogo.**
    - **Ver, por ex., o livro do Fudenberg & Tirole (1991, pgs. 74-77).**
- **Inconsistência temporal em geral descreve a situação onde as *preferências do decisor mudam ao longo do tempo***
  - **O que é preferido num certo instante é inconsistente com o que é preferido num outro instante do tempo. Os jogadores com freqüência “re-otimizam” no curto-prazo, abandonando o plano de longo-prazo que antes era ótimo por um que era pior.**
    - **É comum que a série de decisões “ótimas” de curto-prazo tenha resultados piores do que o *compromisso* do plano de longo-prazo.**
  - **Esse tema é relacionado com “credibilidade” e “compromisso”.**

Inconsistência Temporal e Commitment

- Esse tema ganhou popularidade após ser premiado com o Nobel de Economia de 2004 para Kydland & Prescott.
  - O paper clássico (que inaugurou um tema em macroeconomia) deles é "*Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans*", Journal of Political Economy, 1977.
    - Política monetária: Banco Central em vez de perseguir meta de longo-prazo (*commitment*) de baixa inflação, ele pode afrouxar a política devido ao *incentivo de aumentar o emprego* com emissão de moeda ("curva Phillips"). No final há desemprego e inflação!
- Essa inconsistência está muito ligada ao conceito de *compromisso* ("commitment") não-crível. Ex. na política:
  - Um governo pode anunciar que não negocia com terroristas em caso de seqüestros. Entretanto, o terrorista sabe que isso é um compromisso não-crível, vazio ("bravata"), a menos que haja uma lei com punição prevista para quem negociar.
  - Para um *compromisso ser crível* é necessário que não hajam incentivos para desviar no curto e longo-prazo.

Inconsistência Temporal e Macroeconomia

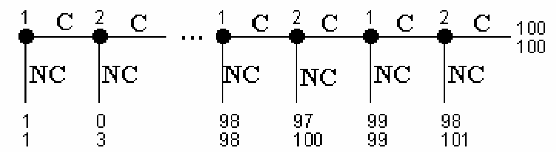
- Uma política macroeconômica tem inconsistência temporal quando o governo anuncia uma *política de longo-prazo ótima* (ex.: baixa inflação), mas de forma que há *incentivos para desviar no curto-prazo*.
  - Os agentes econômicos são racionais ⇒ consideram que o *compromisso do governo é não-crível* e reajustam os preços
- Uma maneira de conduzir uma *política monetária com consistência temporal* é dar autonomia ou independência ao Banco Central para que faça essa política de forma a cumprir uma *meta de inflação*.
  - O BC tem de ser avaliado por cumprir essa meta e não por agradar empresários ou centrais sindicais.
    - Assim o BC não terá incentivos de desviar no curto-prazo.
  - É isso que tem sido feito no Brasil e em outros países com muito sucesso. Credibilidade do BC é a palavra-chave.

Exercício: Equilíbrio Perfeito em Subjogos

- **Baseado na minha prova na FGV em 20/08/2001: Seja um jogo de entrada no mercado entre duas firmas iguais em que existe um custo de instalação ou entrada $K > 0$.**
  - **No primeiro estágio, as firmas decidem simultaneamente entre entrar (E) ou permanecer fora do mercado (NE). Caso a opção adotada seja a entrada, a firma incorrerá num custo $K > 0$.**
  - **No segundo estágio, a competição é por preços num modelo de Bertrand, no qual a função custo de produção é $c(q) = c\,q$. A função demanda inversa é $p(Q) = a - b\,Q$; $a > c \geq 0$ e $b > 0$.**
  - **Encontre o Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos e interprete o resultado.**

Perfeito? O Jogo do Centípede!

- **O *jogo do centípede* é a *crítica clássica ao ENPS*, pois contraria a nossa intuição do que seria o mais razoável.**
  - **Introduzido por Rosenthal (1982), o jogo é uma seqüência de 100 lances (daí o nome) de dois jogadores, em que o ganho dos jogadores aumenta linearmente se os mesmos cooperarem, continuando (C) no jogo. Podem obter o payoff (100; 100).**
  - **Mas existe a possibilidade deles não-cooperarem, i. é, não-continuarem (NC). Isso é um ex. de problema de *parada ótima*.**



  - **Trabalhando "backwards", vemos que a ação NC é ótima em todo subjogo. Assim, o único ENPS é o jogador 1 jogar NC logo no primeiro nó. Nesse caso o payoff ENPS é apenas (1; 1).**
  - **Apesar da crítica, o ENPS é de longe o equilíbrio mais usado em jogos dinâmicos, mesmo antes do prêmio Nobel de Selten.**

Jogos Repetidos

- Jogo repetido é um jogo na forma extensiva que consiste de algum número de repetições de um jogo básico chamado *estágio-jogo* (“stage-game”).
  - O estágio-jogo é geralmente um jogo bem conhecido de dois jogadores. O jogo todo é às vezes chamado de *superjogo*.
  - Os jogos repetidos podem ser finitos ou infinitos. Geralmente os equilíbrios são totalmente diferentes em cada caso.
  - Quando a ameaça de retaliação é crível, alguns resultados que não seriam EN no *stage-game* muitas vezes são sustentáveis no superjogo. Isso ocorre *principalmente* em <u>jogos infinitos</u>.
    - Mas pode ocorrer em jogos repetidos finitos, especialmente os que têm múltiplos EN no estágio-jogo. Veremos um exemplo.
- Nos jogos repetidos <u>finitos</u> de informação perfeita, se o estágio-jogo tem um <u>único EN</u> (como no *dilema dos prisioneiros*), então o <u>único ENPS</u> é sempre jogar o EN.
  - A prova (“backwards”) é óbvia.

Jogos Repetidos Finitos: Exemplo

- Quando existem múltiplos EN no estágio-jogo, então o jogo repetido finito pode ter ENPS que não corresponde aos equilíbrios do jogo de um estágio. Ex.: seja o estágio:

Jogador 2

Jogador 1		L	C	R
	U	5, 5	3, 6	0, 0
	M	6, 3	4, 4	0, 0
	D	0, 0	0, 0	1, 1

- Existem dois EN no estágio-jogo: (M;C) e (D;R).
- Entretanto, o payoff (5, 5) que Pareto domina os dois EN pode ser sustentável como equilíbrio se o jogo é repetido duas vezes (ou mais), graças a seguinte *idéia estratégica*:
  - Cooperação nos primeiros estágios do jogo pode ser premiada com o jogo do melhor EN em futuros subjogos; e
  - Desvio nos primeiros estágios do jogo pode ser punido com o jogo do pior EN em futuros subjogos.

Jogos Repetidos Finitos: Exemplo

- **Estratégias de cenoura-porrete críveis:**
  - **Jogador 1: no estágio 1, joga U. No estágio 2, joga M se (U, L) foi jogado no estágio 1; caso contrário, joga D.**
  - **Jogador 2: no estágio 1, joga L. No estágio 2, joga C se (U, L) foi jogado no estágio 1; caso contrário, joga R.**

Jogador 2

Jogador 1		L	C	R
	U	5, 5	3, 6	0, 0
	M	6, 3	4, 4	0, 0
	D	0, 0	0, 0	1, 1

- **É fácil ver que, no estágio 2, em ambos os subjogos as estratégias são EN. Veremos que o payoff total obtido nos dois estágios *no caminho do equilíbrio* é 9 (= 5+4) para ambos os jogadores, enquanto que o máximo que poderia ser obtido por qualquer outra estratégia é 7 (= 6+1).**
  - **Logo, as estratégias constituem um ENPS de todo o jogo.**

Jogos Repetidos: Conceitos e Exemplo

- **Para entender melhor, alguns conceitos e lembranças:**
  - **Em jogos repetidos, a *estratégia* dum jogador especifica a *ação* que o jogador irá fazer *em cada estágio*, *para cada possível história do jogo até o estágio anterior*.**
    - **Lembrar que estratégia é um plano contingente completo de ações. Assim, a ação a_t depende da história até t – 1, h(t – 1), i. é, a cada t a estratégia especifica ações a_t condicionais a h(t – 1).**
  - **Dado um par de estratégias, p/ testar se é EN verificamos se há incentivo para desvio *unilateral* de um jogador, i. é, mantendo a <u>*estratégia*</u> do outro jogador *fixa,* o que se ganharia desviando.**
    - **Como uma *única estratégia* prevê *ações diferentes* para diferentes histórias, se o jogador 1 desviar no estágio t o jogador 2 pode ter de *mudar a ação* no estágio t + 1 a fim de manter *fixa a estratégia*.**
    - **É o que ocorre no exemplo, pois só jogam a ação "bom" EN no estágio 2 se nenhum se desviar de (U, L) no estágio 1.**
  - **Vimos que um par de estratégia é ENPS se induz EN em *todos* os subjogos. Existem só *dois subjogos*: o estágio 2 e o *jogo-todo*.**
    - **Atenção: o estágio 1 <u>não</u> é subjogo.**

Jogos Repetidos: Exemplo (Continuação)

- A matriz de payoffs do subjogo "jogo-todo" é dada pela soma do payoff do estágio 1 com o payoff do estágio 2.
  - O payoff do estágio 2 condicional a ação jogada no estágio 1 é o de um dos dois EN. Só se tiver sido jogado (U, L) no estágio 1 é que o "bom" EN é jogado no estágio 2. Assim, esse subjogo é:

Subjogo do 2° Estágio

	L		C		R	
U	5	5	3	6	0	0
M	6	3	4	4	0	0
D	0	0	0	0	1	1

Ver planilha: Jogo_repetido_multiplos_EN.xls

Notação: célula azul é EN
EN , EN

Subjogo do Jogo-Todo, Ações do 1° Estágio Somadas ao EN Consistente do 2° Estágio

	L		C		R	
U	9	9	4	7	1	1
M	7	4	5	5	1	1
D	1	1	1	1	2	2

Estratégias
- **Jogador 1: no estágio 1, joga U.** No estágio 2, joga M se (U, L) foi jogado no estágio 1; caso contrário, joga D.
- **Jogador 2: no estágio 1, joga L.** No estágio 2, joga C se (U, L) foi jogado no estágio 1; caso contrário, joga R.

  - Se um dos jogadores desviarem unilateralmente de (U, L) no estágio 1, para *manter fixa a estratégia do outro jogador* ele mudaria a sua ação no estágio 2 como prevê sua estratégia.

Jogos Repetidos: Exemplo (Continuação)

- Sendo EN nos dois subjogos, então o par de estratégias proposto é ENPS. Além dele, existem outros ENPS (mas que são Pareto dominado pelo ENPS proposto).
  - Na planilha Jogo_repetido_multiplos_EN.xls são mostrados outros 5 ENPS, os quais são variações em que *em todo estágio se joga ações que são EN no estágio-jogo*. Pode ter mais ENPS.
- Na Pasta 72 coloquei trecho do livro do Gibbons (*Game Theory for Applied Economists*) sobre jogos repetidos finitos, com outros dois exemplos e detalhada discussão.
- Além de múltiplos EN, a cooperação em estágios iniciais pode ser alcançada em outros casos tais como:
  - Se há *informação incompleta* sobre o payoff do outro jogador.
    - Aumann et al. (1995) escreveram um livro sobre isso (com foco em aplicações tais como guerra fria e corrida nuclear).
  - Se há incerteza sobre a data de término (expiração T) do jogo.
- A literatura de jogos repetidos é vasta. Vimos só o básico.

Jogos Infinitamente Repetidos

- **Nos jogos infinitamente repetidos é mais fácil sustentar como ENPS uma ação que não é EN no estágio-jogo.**
  - **Ex.: *cooperar* no *dilema dos prisioneiros* pode ser ENPS no Γ_E^{∞}.**
- **Um dos critérios p/ comparar estratégias é o VPL (valor presente líquido) do *fluxo de lucros descontado* por $\delta < 1$.**
  - **O fator de desconto δ pode ser vista como $1/(1 + \mu)$, onde μ é a *taxa de desconto ajustada ao risco* (dada pelo CAPM, por ex.).**
  - **O lucro total (VPL) da firma i é dado por:**

$$VPL_i = \pi_{i,1} + (\pi_{i,2}\,\delta) + (\pi_{i,3}\,\delta^2) + \ldots + (\pi_{i,t}\,\delta^{t-1}) + \ldots$$

  - **Que é finito para $\pi_{i,t}$ finito, $\forall$ t. Note que a soma da PG infinita de razão menor que 1 é finita: $1 + \delta + \delta^2 + \ldots = 1/(1 - \delta)$.**
- **Outro critério relevante é o do *payoff médio por estágio*.**
  - **A vantagem desse critério é que ele é comparável de forma direta com os payoffs do estágio-jogo. Maximizar o payoff médio equivale a maximizar o VPL, p/ efeito de testar desvios.**
  - **Se $\delta < 1$ o payoff médio é dado por:** $\bar{\pi}_i = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_{i,t}$

Payoff Médio em Jogos Repetidos

- **Num jogo repetido um nº finito T de vezes, o *payoff médio* do jogador i pode ser visto como uma média ponderada dos payoffs em cada estágio $\pi_{i,t}$, onde a *ponderação* é feita com os fatores de desconto δ. Logo:**

$$\bar{\pi}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} \pi_{i,t}}{\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}}$$

- **Num jogo repetido infinitamente, o *payoff médio* do jogador i é o caso anterior no limite $T \to \infty$. Assumindo (como sempre) que $\pi_{i,t}$ são finitos, temos de distinguir os casos com $\delta < 1$ (soma é finita) do caso $\delta = 1$ (soma é ∞):**

$$\bar{\pi}_i = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_{i,t} \qquad \text{se} \quad \delta < 1$$

$$\bar{\pi}_i = \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \pi_{i,t} \qquad \text{se} \quad \delta = 1$$

lim inf: limite da menor subseqüência que converge

Teoremas Populares (Folk Theorems)

- Alguns dos teoremas de jogos repetidos são chamados de *teoremas populares* ("folk theorems"), que ressaltam o *poder da reciprocidade*: com δ perto de 1, uma infinidade de resultados podem ser sustentáveis em jogos infinitos.
- Teoremas populares são resultados conhecidos e acreditados, mas que não foram publicados e/ou sem autores conhecidos.
  - Nos anos 50 já era conhecido entre os pesquisadores de teoria dos jogos os "folk theorems" para EN com jogos repetidos infinitamente.
  - Versões modernas com ENPS: Friedman (1971) e Rubinstein (1979).
- Veremos o teorema de Friedman, que define o *conjunto de payoffs médios factíveis*, sustentáveis como ENPS, como sendo aqueles payoffs maiores que os do EN do estágio-jogo.
  - Alguns teoremas + complexos usam o *payoff minimax* em vez do EN.
  - O *payoff minimax* m_i é o menor payoff que os rivais do jogador i podem impor ao jogador i. É uma *punição mais severa do que o EN*.
    - ➡ O jogador i se defende jogando a estratégia *maximin*. Rasmusen:
  - No jogo de soma variável, *minimax* é para *sádicos* e *maximin* p/ *paranóicos*! Se for de soma zero, são *neuróticos otimistas* e *pessimistas*, respectivamente!

Estratégias de Punição com Repetição Infinita

- Em jogos repetidos os teoremas populares usam as chamadas *estratégias de punição* ("trigger strategies") para obter certos payoffs. As três mais usadas são:
  - Estratégia "Grim" (rígida, intransigente): comece com a ação "cooperar" (C); continue com C a menos que algum jogador escolha "não-cooperar" (NC), nesse caso jogue NC p/ sempre.
    - ➡ Na repetição infinita do *dilema dos prisioneiros* pode-se sustentar a cooperação (*não-confessar*) como ENPS com essa estratégia, pois quem desvia tem um ganho imediato, mas uma perda eterna.
  - Estratégia "tit-for-tat" ("olho-por-olho…"): comece com a ação "cooperar" (C); nos outros períodos, escolha em t a ação que o outro jogador escolheu em t – 1. Desvio: ações cíclicas.
    - ➡ Não é ENPS no dilema dos prisioneiros, mas com ela Rapoport ganhou o torneio desse jogo repetido 200 vezes (Axelrod, 1984)!
  - Estratégia "minimax": Punir visando a *máxima perda* ao outro jogador, que então *minimiza a máxima perda* ele que pode ter.
    - ➡ Como na "grim", pode ser ENPS a depender do *fator de desconto*.

Exemplo Estilo Dilema dos Prisioneiros

- **Seja um jogo repetido infinitamente em que o estágio-jogo é do estilo *dilema dos prisioneiros* com os payoffs:**

		Jogador 2: Coopera	Jogador 2: Não-Coopera
Jogador 1	Coopera	3; 3	0; 5
	Não-Coopera	5; 0	1; 1

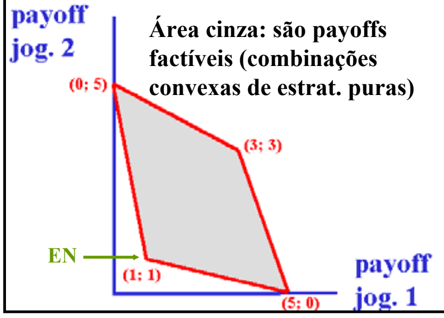
- **Com repetição infinita, note que cada subjogo é igual ao anterior com exceção talvez da sua história pregressa.**
- **Com a estratégia "grim" e o fator de desconto $\delta \in [0, 1]$, não há incentivo para desviar da estratégia *grim* se:**

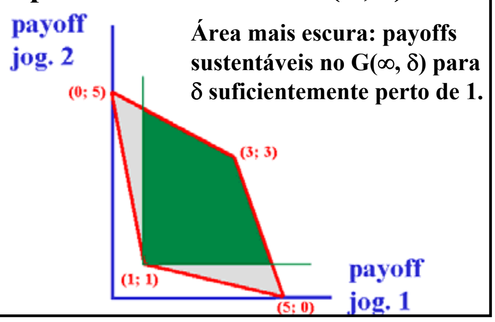
  $$3\,(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = 3 / (1 - \delta) \geq 5 + 1(\delta + \delta^2 + \ldots) = 5 + \delta / (1 - \delta)$$

  - **Algebrando se vê que isso ocorre se e somente se $\delta \geq ½$.**
    - **Esse valor limite (½) depende da estrutura de payoffs do jogo.**

"Folk" Teorema de Friedman (1971)

- **Friedman (1971) foi um dos primeiros a formalizar um dos teoremas "folk" para jogos repetidos infinitamente:**
  - **Seja o *estágio-jogo* G finito e de informação completa. Seja o perfil de payoffs $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de um EN de G e seja $(x_1, \ldots, x_n)$ qualquer outro payoff factível de G. Se $x_i > e_i$ p/ todo jogador i, e se δ é perto o suficiente de 1, então existe um ENPS do jogo infinitamente repetido $G(\infty, \delta)$ com payoff médio $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.**
  - **No exemplo anterior, o conjunto de estratégias factíveis de G e as que podem ser sustentadas para um certo δ em $G(\infty, \delta)$ são:**





Exercício de Jogos Repetidos: Cournot

- Seja o estágio-jogo G uma *competição em quantidades de Cournot*, num mercado com demanda $P(Q) = a - b\,Q$ e jogadores com os mesmos custos marginais c.
- Mostre que num jogo G repetido infinitamente, existe algum fator de desconto δ^*, tal que se $\delta \geq \delta^*$ então:
  - Pode ser sustentado num ENPS o payoff de colusão obtido com cada firma produzindo a metade da quantidade de monopólio q_M e cada firma usando a seguinte estratégia "grim":
    - *Produzir $q_M / 2$ no primeiro período. No período t continuar produzindo $q_M / 2$ se ambas as firmas tiverem produzidos $q_M / 2$ nos $t - 1$ períodos anteriores. Caso contrário produzir a quantidade do EN-Cournot q_C.*
  - Determine o valor de δ^* (o que também prova que ele existe)
- Dicas: ver ex. do dilema dos prisioneiros; calcule o máximo lucro de desvio π_D em um estágio (dado que o outro está jogando $q_M / 2$) que, somado aos lucros de Cournot π_C nos estágios *seguintes*, deve ser comparado com o lucro *eterno de* $\pi_M / 2$ se não desviar de $q_M / 2$

Exercício de Jogos Repetidos: Bertrand

- Seja um estágio-jogo em que há competição em preços (Bertrand). Calcule o valor de δ^* a partir do qual esse jogo repetido infinitamente pode sustentar a cooperação como ENPS, com preços iguais aos preços de monopólio P_M, se for usada a seguinte estratégia "grim":
    - *Ofertar o produto por P_M no primeiro período. No período t continuar com o preço P_M se ambas as firmas fizerem o mesmo nos $t - 1$ períodos anteriores. Caso contrário reduzir o preço para o EN-Bertrand, i. é, o valor $P = c$, onde c é o custo marginal.*
  - Mostre que $\delta^* = ½$.

Jogos Estocásticos Repetidos (Shapley)

- A versão clássica de jogos estocásticos é devido a Shapley (1953). Hoje existe uma nova literatura mais complexa de *jogos de opções*, que considera processos estocásticos e exercício ótimo de opções (reais ou financ.)
- A versão clássica é um jogo dinâmico repetido (finito ou infinito) em que existem probabilidades de transição de um estágio-jogo para outro estágio.
  - Assim, a cada estágio do jogo o payoff é em geral diferente, existindo probabilidades p/ cada possível estado da natureza.
  - A cada estágio os jogadores devem tomar ações que dependem não só do estado (e a matriz de payoffs) corrente, mas também dos possíveis estados nos próximos estágios do jogo.
- Jogos estocásticos clássicos são generalizações de jogos repetidos para um ambiente de payoffs estocásticos.
  - Veremos um caso simples: o jogo de cotas da OPEP em que a demanda é estocástica, mas com só dois estados da natureza.

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- Seja o jogo de quotas da OPEP, mas com *repetição infinita*. Considere dois países Arábia Saudita e Irã.
  - Ver planilha Jogos da OPEP.xls (aba "quotas_repetido_estoc")
  - O jogo é apresentado no livro do Dutta ("*Strategy and Games*", MIT Press, 1999), ver trecho do livro na Pasta 72.
- Considere que em qualquer período a demanda pode ser alta ou baixa. A função demanda é linear e dada por:
  - Demanda alta: $p_H = a_H - b_H (q_A + q_I) = 44{,}5 - 1{,}5 (q_A + q_I)$.
  - Demanda baixa: $p_L = a_L - b_L (q_A + q_I) = 22{,}5 - 0{,}5 (q_A + q_I)$.
- Sejam os custos unitários marginais $c_A = c_I = 5$ US$/bbl e cada país pode produzir o valor da quota OPEP ou não-cooperar produzindo dois milhões bbl/dia acima da cota.
  - As quotas são de 8 milhões de bbl/dia para a Arábia Saudita e de 5 milhões de bbl/dia para o Irã. Assim, as produções totais possíveis são 13 ; 15 e 17 milhões bbl/dia.

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- **Considere que caso algum país não-coopere em um estágio, a seguir haverá punição com a *estratégia "grim"*.**
  - **Se um dos países jogar "não-cooperar" (produção acima da cota) num estágio, então será jogado sempre {não-cooperar; não-cooperar} nos estágios sub-sequentes do superjogo.**
- **Determine, p/ cada país, os fatores de desconto mínimos para sustentar a cooperação (jogar as cotas) nos estados de demanda alta e fraca.**
  - **Depois considere uma probabilidade p da demanda ser alta em qualquer estágio (e, logo, 1 – p para a demanda ser fraca).**
- **Iremos considerar repetição infinita, como *aproximação razoável*. Mas alguns autores consideram que o jogo da OPEP é de repetição *finita*, pois as *reservas são finitas*.**
- **Para resolver, teremos de montar as matrizes de payoffs para os dois casos de demanda (ver próximo slide).**

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- **A *matrizes de payoffs* para os dois casos de demanda são (checar!):**

Demanda Alta:

Arábia Saudita \ Irã	Quota: 5	Quota + 2: 7,0
Quota: 8	160,0 ; 100,0 preço = 25 US$/bbl	136,0 ; 119,0 preço = 22 US$/bbl
Quota + 2: 10,0	170,0 ; 85,0 preço = 22 US$/bbl	140,0 ; 98,0 preço = 19 US$/bbl

Demanda Baixa:

Arábia Saudita \ Irã	Quota: 5	Quota + 2: 7,0
Quota: 8	88,0 ; 55,0 preço = 16 US$/bbl	80,0 ; 70,0 preço = 15 US$/bbl
Quota + 2: 10,0	100,0 ; 50,0 preço = 15 US$/bbl	90,0 ; 63,0 preço = 14 US$/bbl

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- **Observando a matriz no caso de demanda alta, temos um caso típico de dilema dos prisioneiros, onde existe ganho para ambos cooperarem.**
  - **O mesmo não ocorre para o caso de demanda fraca, onde {cooperar ; cooperar} tem um payoff somado (143) menor que o caso do EN {não-cooperar ; não-cooperar} (payoff = 153).**
    - **Isso ocorre devido aos valores adotados (não é regra geral), mas o livro usa isso p/ explicar a falta de cooperação nos anos 60, já que não-cooperar atende as *racionalidades individuais* (EN) e *coletiva*.**
- **Vejamos o caso de interesse (demanda alta). Se a Arábia tem um fator de desconto δ_A e não desviar o *payoff* será:**

$$\Pi_A(\text{coopera}) = 160 + 160\,\delta_A + 160\,\delta_A^2 + \ldots = 160 / (1 - \delta_A)$$

  - **Se ela desviar no 1º estágio, terá um ganho de curto prazo, mas será punido com o EN nos demais estágios e o payoff será:**

$$\Pi_A(\text{desvia}) = 170 + 140\,\delta_A + 140\,\delta_A^2 \ldots = 170 + [140\,\delta_A / (1 - \delta_A)]$$

  - **A cooperação ocorre se $\Pi_A(\text{coopera}) \geq \Pi_A(\text{desvia}) \Rightarrow \delta_A \geq 1/3$**

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- **Assim, para a Arábia Saudita não seria difícil cooperar com demanda alta, já que o fator de desconto mínimo (taxa de desconto máxima) é bem baixo.**
- **Para o Irã um raciocínio análogo resulta em:**

$$\Pi_I(\text{coopera}) = 100 + 100\,\delta_I + 100\,\delta_I^2 + \ldots = 100 / (1 - \delta_I)$$

  - **Se ele desviar no 1º estágio e ser punido depois, o payoff será:**

$$\Pi_I(\text{desvia}) = 119 + 98\,\delta_I + 98\,\delta_I^2 \ldots = 119 + [98\,\delta_I / (1 - \delta_I)]$$

  - **A cooperação ocorre se $\Pi_I(\text{coopera}) \geq \Pi_I(\text{desvia}) \Rightarrow \delta_I \geq 19/21$**
- **Logo, o fator de desconto mínimo do Irã é bem mais alto que o da Arábia. É bem mais difícil para o Irã cooperar.**
  - **Note que o Irã ganha mais desviando que a Arábia e a perda com a punição grim é menor para o Irã do que para a Arábia.**
- **No caso *estocástico* cada país tem *4 estratégias diferentes*:**
  - ***Sempre cooperar* [q_C; q_C]; cooperar *só se a demanda for alta* [q_C; q_N]; coop. *só se for baixa* [q_N; q_C]; *nunca cooperar* [q_N; q_N].**

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- Onde o 1º termo em [. ; .] é relativo a *demanda alta* e o 2º em relação a *demanda fraca*. A matriz de payoffs para uma probabilidade de demanda alta de p = 50% é:

Arábia Saudita \ Irã	q_{I_L}, q_{I_L} Sempre 5	q_{I_L}, q_{I_H} Ou 5 ou 7	q_{I_H}, q_{I_L} Ou 7 ou 5	q_{I_H}, q_{I_H} Sempre 7
q_{A_L}, q_{A_L} Sempre 8	124,0 ; 77,5	120,0 ; 85,0	112,0 ; 87,0	108,0 ; 94,5
q_{A_L}, q_{A_H} Ou 8 ou 10	130,0 ; 75,0	125,0 ; 81,5	118,0 ; 84,5	113,0 ; 91,0
q_{A_H}, q_{A_L} Ou 10 ou 8	129,0 ; 70,0	125,0 ; 77,5	114,0 ; 76,5	110,0 ; 84,0
q_{A_H}, q_{A_H} Sempre 10	135,0 ; 67,5	130,0 ; 74,0	120,0 ; 74,0	115,0 ; 80,5

  - Note que a estratégia de cooperação de interesse, onde a soma de payoffs é máxima, é quando *ambos* jogam *baixa produção* se a *demanda é alta* e *alta produção* se a *demanda é baixa*.
    - Mostre que esse resultado vale para qualquer probabilidade p.

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- Note que o único EN é *produção alta para ambos* os países. Esse par de estratégias é EN para qualquer p e é EN único para qualquer p não trivial, i. é, p ≠ 0 e p ≠ 1.
- A cooperação baseada na estratégia de punição grim é:
  - Cooperar enquanto o ambos cooperam, sendo cooperar é quando ambos jogam baixa produção se a demanda é alta e alta produção se a demanda é baixa.
  - Se algum país não cooperar, então será jogado o único EN (ambos produzindo o máximo) em todos os estágios futuros.
- Imagine que a demanda é alta, de forma que existe um ganho de curto prazo desviando da cooperação.
  - Quais os fatores de desconto mínimos p/ sustentar a cooperação?
- Considere primeiro o caso da Arábia. Se ela nunca trair:

$\Pi_A(\text{coop.}) = 160 + [160\, p + (1 - p)\, 90]\, \delta_A + [160\, p + (1 - p)\, 90]\, \delta_A^2$ $+ \ldots \Rightarrow \Pi_A(\text{coop.}) = 160 + \{[160\, p + (1 - p)\, 90]\, \delta_A / (1 - \delta_A)\}$

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- **Caso a Arábia desvie no 1º período, seu payoff ficaria:**

Π_A(não-coop.) = 170 + [140 p + (1 - p) 90] δ_A + [140 p + (1 - p) 90] δ_A^2 + ... ⇒ Π_A(não-coop.) = 170 + {[140 p + (1 – p) 90] δ_A / (1 – δ_A)}

- **Não haverá incentivo para trair se Π_A(não-coop.) ≥ Π_A(coop.):**

160 + {[160 p + (1 – p) 90] δ_A / (1 – δ_A)} ≥ 170 + {[140 p + (1 – p) 90] δ_A / (1 – δ_A)}

⇒ $\delta_A \geq 1 / (1 + 2\ p)$ para a Arábia cooperar.

- **Considere agora o caso do Irã. Se ele nunca trair:**

Π_I(coop.) = 100 + [100 p + (1 – p) 63] δ_I + [100 p + (1 – p) 63] δ_I^2 + ... ⇒ Π_I(coop.) = 100 + {[100 p + (1 – p) 63] δ_I / (1 – δ_I)}

- **Caso o Irã desvie no 1º período, seu payoff ficaria:**

Π_I(não-coop.) = 119 + [98 p + (1 - p) 63] δ_I + [98 p + (1 - p) 63] δ_I^2 + ... ⇒ Π_I(não-coop.) = 119 + {[98 p + (1 – p) 63] δ_I / (1 – δ_I)}

- **Não haverá incentivo para trair se Π_I(não-coop.) ≥ Π_I(coop.):**

100 + {[100 p + (1 – p) 63] δ_I / (1 – δ_I)} ≥ 119 + {[98 p + (1 – p) 63] δ_I / (1 – δ_I)}

⇒ $\delta_I \geq 19 / (19 + 2\ p)$ para o Irã cooperar.

Cotas da OPEP com Repetição Infinita

- **A não ser no caso trivial de p = 0, o fator de desconto mínimo requerido para o Irã é maior (ou bem maior) que o requerido para a Arábia.**
  - **Logo, é relativamente fácil para a Arábia cooperar sempre, mas é geralmente difícil para o Irã cooperar.**
    - **Essa é uma conclusão consistente com a realidade observada, conforme o autor (Dutta) argumenta.**
    - **Note que usamos os mesmo custos unitários, apenas as capacidades de produção desses países é que são diferentes.**
  - **A tabela abaixo mostra a sensibilidade com a probabilidade p:**

	Fatores de Desconto		Taxas de Desconto	
Probab. Demanda Alta	$\delta_A \geq$	$\delta_I \geq$	$\mu_A \leq$	$\mu_I \leq$
0,1%	0,998	0,99989	0,20%	0,01%
25%	0,667	0,974	50%	2,63%
50%	0,500	0,950	100%	5,26%
75%	0,400	0,927	150%	7,89%
100%	0,333	0,905	200%	10,53%

Jogos de Barganha

- Barganha é a característica básica da interação social e de grande importância empresarial (contratos, etc.)
- Barganha é caracterizada por duas propriedades:
  - O payoff total para as partes em concordância é maior que a soma dos payoffs individuais sem acordo.
    - Se não houvesse ganho ("surplus") o jogo não teria muito sentido
  - A barganha é um jogo ganha-ganha (não é jogo de soma zero).
    - Quando existe um surplus, a negociação é como dividí-lo.
- A literatura da *teoria de jogos de barganha* divide-se em:
  - Jogos de barganha não-cooperativos: modelo de Rubinstein (1982), com ofertas alternadas. Acha-se um único ENPS.
  - Jogos de barganha cooperativos: solução de Nash (1950, 1953) é a mais popular. Usa-se axiomas para determinar a solução.
  - Jogos de barganha evolucionários: é mais recente e baseada na teoria dos jogos evolucionários. Busca equilíbrios estáveis ESS.

Barganha Não-Cooperativa Finita

- Sejam dois jogadores que barganham a divisão de um ativo de valor v. O jogador 1 joga primeiro.
  - No período 1 ele oferece um acordo de divisão de v ao jog. 2.
    - A oferta é sempre um número real entre 0 e v.
  - Se o jogador 2 recusa, passa-se um intervalo de tempo até o período 2. Invertem-se os papéis e agora quem faz a oferta é o jogador 2. O jogador 1 pode aceitar ou rejeitar, etc.
  - O número máximo de períodos T é finito e o fator de desconto δ pode ser igual para ambos os jogadores ou diferentes.
  - Se até o instante T a barganha não acabar com um acordo, então ambos os jogadores recebem payoffs iguais a zero.
  - Tendo uma última data T, se pode achar o ENPS por *backward-induction*. Indiferença é igual a aceitar.
  - Como o jogador 1 oferta nos períodos ímpares e o jogador 2 oferta nos pares, temos de especificar se T é par ou ímpar.
  - O modelo é devido a Stahl (1972). A maneira aqui resolvida (Rubinstein) será um pouco diferente do livro do Mas-Colell.

Barganha Não-Cooperativa Finita

- Stahl (1972) mostrou que há um único ENPS nesse jogo. Como sempre em jogos finitos, trabalha-se "*backwards*".
  - Seja T ímpar (jogador 1 oferta em todo t ímpar) e considere o caso mais geral com fatores de desconto diferentes δ_1 e δ_2.
  - Na última data T, o jogador 1 teria vantagem: ele ofertaria 0 (zero) p/ o jogador 2, ficando com v (= v – 0): $payoff_T = (v\ ;\ 0)$.
    - O jogador 2 aceita a oferta (pois ficaria indiferente).
  - Na penúltima data (T – 1), o jogador 2 ofertaria só o suficiente para o jogador 1 ficar indiferente entre aceitar e recusar.
    - O jogador 2 ofertaria em T – 1 ao rival δ_1 v, pois o jogador 1 é indiferente entre δ_1 v em T – 1 e v em T: $payoff_{T-1} = (\delta_1 v\ ;\ v - \delta_1 v)$
  - Na data (T – 2), o jogador 1 ofertaria tb. só o suficiente para a indiferença do rival: $payoff_{T-2} = (v - \delta_2\,[v - \delta_1 v]\ ;\ \delta_2\,[v - \delta_1 v])$.
  - Isso continuaria até o instante t = 1, em que o jogador 1 faria a oferta (pois T é ímpar) o suficiente para o jogador aceitar.
    - Assim, o jogador 1 faz uma proposta em t = 1 e o rival aceitaria.

Barganha Não-Cooperativa Finita

- Assim, prova-se que o único ENPS com T ímpar é em t = 1 o jogador 1 propor a divisão abaixo e o jogador 2 aceitar.

$$payoff_{t=1} = \left(v - \frac{\delta_2 (1-\delta_1)\,[1-(\delta_1\delta_2)^{\frac{T-1}{2}}]\,v}{1-\delta_1\delta_2}\ ;\ \frac{\delta_2 (1-\delta_1)\,[1-(\delta_1\delta_2)^{\frac{T-1}{2}}]\,v}{1-\delta_1\delta_2} \right)$$

- A tabela abaixo demonstra esse resultado (T ímpar).

Data	Oferta	Payoff do Jogador 1	Payoff do Jogador 2
T	Jog. 1	v	0
T - 1	Jog. 2	δ_1 v	v – δ_1 v
T - 2	Jog. 1	v – δ_2 v + δ_1 δ_2 v	δ_2 v – δ_1 δ_2 v
T - 3	Jog. 2	δ_1 [v - δ_2 v + δ_1 δ_2 v]	v – δ_1 v + δ_1 δ_2 v – δ_1^2 δ_2 v
t = 1	Jog. 1	v – oferta ao lado	$\delta_2 v\{1 - \delta_1 + \delta_1\delta_2 - \delta_1^2\delta_2 + ... - \delta_1^{(T-1)/2}\,\delta_2^{(T-3)/2}\}$

Algebrismo e Exercícios

- Para chegar ao resultado mostrado a partir da última linha da tabela, é só um algebrismo. Note que:

  $[1 - \delta_1] + [\delta_1\delta_2 - \delta_1^2\,\delta_2] \ +...- \delta_1^{(T-1)/2}\,\delta_2^{(T-3)/2} =$

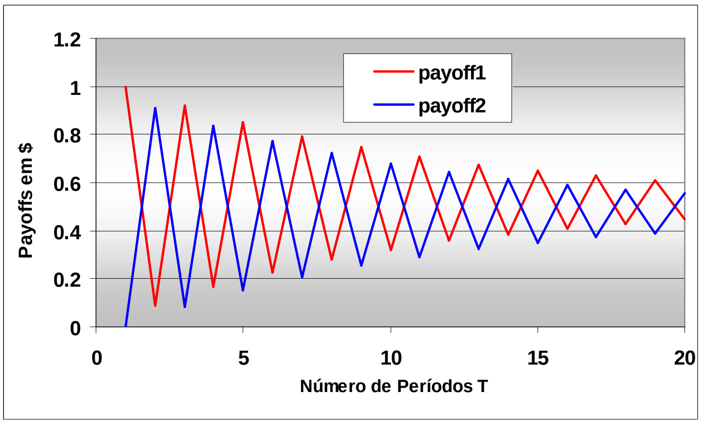
  $= (1 - \delta_1)\,[(\delta_1\delta_2)^0 + (\delta_1\delta_2)^1 +...+ (\delta_1\delta_2)^{(T-3)/2}] = (1 - \delta_1)$ [soma PG finita]

  $= (1 - \delta_1)\,[1 - (\delta_1\delta_2)^{(T-1)/2}] / (1 - \delta_1\delta_2)$

- Verificar no resultado de equilíbrio em t = 1 (slide anterior) que quanto mais paciente for o jogador 1 (maior for δ_1), menos ele oferece ao jogador 2 (e mais a sí mesmo).
- Verificar que quanto mais paciente for o jogador 2 (maior for δ_2), mais o jogador 1 terá de oferecer ao jogador 2.
- EXERCÍCIO 1: Faça o mesmo problema, mas com T par e determine o único ENPS em que a proposta do jogador 1 em t = 1 é aceita pelo jogador 2. Resposta: anexo.
- EXERCÍCIO 2: suponha que o jogador 1 só faça oferta em t = 1 e o rival faz oferta em todos os t > 1. Qual o ENPS?

Barganha Finita e o Efeito de T

- Só o jogador 1 tem a vantagem da 1ª movida. Mas c/ T par a vantagem da última movida é maior que a da 1ª movida se $\delta_1 = \delta_2$ e p/ T não muito grande ($< -[\ln 2 - \ln(1-\delta)]/\ln\delta$).
  - Se T ímpar a vantagem da última movida é do jogador 1; se T é par a vantagem da última movida é do jogador 2.



Barganha Não-Cooperativa Infinita

- Rubinstein (1982) mostrou que há um único ENPS no jogo *infinito* de ofertas alternadas. Se os dois jogadores têm fatores de desconto iguais (δ). Esse ENPS é:
  - Jog. 1 oferece em t = 1 e o jog. 2 aceita, a divisão de v abaixo:

$$\left(\frac{v}{1+\delta}\ ;\ \frac{\delta\, v}{1+\delta}\right)$$

- Note que existe a *vantagem da primeira oferta*, já que o jogador 1 tem um fatia maior de v se assumir que $\delta < 1$.
- O limite do jogo finito com $T \to \infty$ converge para o resultado acima (provar assumindo $\delta_1 = \delta_2$).
- Para provar isso, seguiremos o livro MGW (p.298-299):
  - Note que o jogo é estacionário: o subjogo que começa em t = 2 é exatamente o mesmo subjogo que começou em t = 1, mas com os jogadores tendo papéis invertidos.
  - Seja v_1^* o maior payoff que o jog. 1 obtém em qualquer ENPS.

Barganha Não-Cooperativa Infinita

- Esse payoff também é o maior que o jogador 2 obtém no jogo que começa após uma rejeição da oferta do jog. 1.
  - Logo, o jog. 2 aceitaria antes uma oferta de $\delta\, v_1^*$.
- Assim, o menor payoff que o jog. 1 aceitaria em qualquer ENPS não poderia ser menor que $v_1^{**} = v - \delta\, v_1^*$.
  - Senão seria razoável oferecer ao jogador 2 um pouco mais que $\delta\, v_1^*$ (mas vimos que o jogador 2 já aceitaria $\delta\, v_1^*$).
- Mas v_1^* também não pode ser maior que $v - \delta\, v_1^{**}$, pois o jogador 2 não aceitaria nada menor que $\delta\, v_1^{**}$. Logo, o jog. 1 não pode fazer nada melhor do que obter o payoff $v - \delta\, v_1^{**}$. Logo, $v_1^* \le v - \delta\, v_1^{**} = (v_1^{**} + \delta\, v_1^*) - \delta\, v_1^{**}$.
  - $v_1^*\ (1 - \delta) \le\ v_1^{**}\ (1 - \delta) \Rightarrow v_1^* =\ v_1^{**} = v_1^0$.
  - $v_1^0\ = v - \delta\, v_1^0\ \Rightarrow$ acha v_1^0 que é o resultado do slide anterior para o jogador 1 e $v - v_1^0$ a parte do jog. 2. cqd.
- Note que todos os resultados de barganha são eficientes no sentido que se obtém acordo logo no instante inicial (t = 1)

Barganha Não-Cooperativa Infinita

- **Exercício: considere o caso de fatores de desconto δ_1 e δ_2 diferentes para cada jogador numa barganha infinita.**
  - **Pode refletir níveis de paciência diferentes e/ou poderes de barganha em geral diferentes.**
  - **Podem ser firmas com diferentes custos de capital (postergar um benefício, um projeto, gera impactos diferentes nos VPLs).**
- **Mostre que é ENPS o jogador 1 propor e o jogador 2 aceitar no instante inicial a seguinte proposta:**

$$\left(\frac{v\,(1-\delta_2)}{1-\delta_1\,\delta_2} \; ; \; \frac{v\,(\delta_2-\delta_1\,\delta_2)}{1-\delta_1\,\delta_2} \right)$$

Solução na Pasta 72

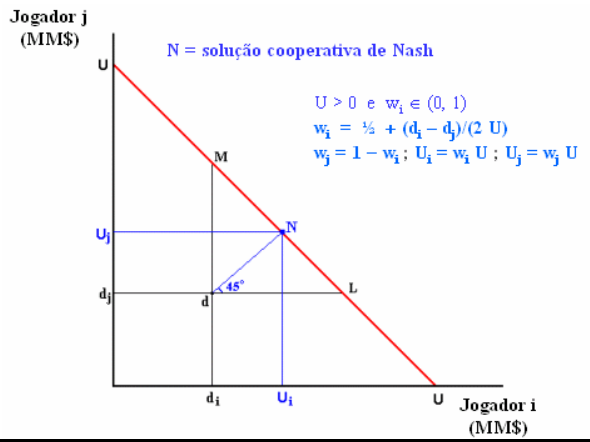
  - **Note que se usar o resultado mostrado para o caso de barganha finita e fizer o limite de $T \to \infty$, então se obtém o resultado acima. Mas quero outra solução, pois o limite do jogo finito nem sempre é o resultado do jogo infinito (mas ter essa propriedade é bom, reforçaria a solução infinita).**

Barganha Cooperativa x Não-Cooperativa

- **Enquanto a barganha não-cooperativa especifica os detalhes do *processo* de barganha, a solução cooperativa é mais simples e independe do processo de negociação.**
  - **No entanto, se for permitido um pequeno risco de desistência da negociação ("breakdown") depois da rejeição de qualquer oferta, *a solução de barganha não-cooperativa* de Rubinstein (ENPS) *converge para a solução cooperativa de Nash* quando a probabilidade de desistência vai para zero (Binmore, 1987).**
- **O *jogo cooperativo de barganha* é definido pelo *par* (*S*, d), onde *S* é o *conjunto factível* de resultados da barganha e d é o *ponto de desacordo* (*disagreement point*).**
  - **Se as firmas não conseguirem chegar a um acordo, se teria um *desacordo* e as firmas voltariam a jogar o jogo não-cooperativo**
  - **Esse seria o ponto de status-quo da negociação. Na minha tese, $d = \{d_i, d_j\}$ é um ENPS de uma guerra de atrito com 2 players.**
- **Veremos agora a solução de Nash p/ o caso de 2 players.**

Barganha Cooperativa: Solução de Nash

- Sejam 2 firmas i e j, cuja união de ativos é U, que barganham as participações (*working interests*) w_i e w_j:
  - Os valores das firmas são $U_i = w_i\ U$ e $U_j = w_j\ U$
  - A solução de Nash $\{w_i\ ;\ w_j\}$ dá a partilha de U, com $w_j = 1 - w_i$. Usa 4 axiomas que dá solução única: $w_i\ =\ ½\ + (d_i - d_j)/(2\ U)$



Axiomas da Solução de Nash

- Os 4 axiomas que a solução de Nash obedece são:

1. *Invariância* em relação a transformações lineares ⇒ solução não depende da escala de payoffs;
2. Resultado *Pareto ótimo* (linha vermelha) ⇒ *todo* o ganho mútuo é explotado, a solução é eficiente;
3. *Independência de contração* ⇒ a solução não varia se remover resultados irrelevantes;
4. *Simetria* (linha de 45º) ⇒ se permutar os jogadores a solução não muda (a habilidade de negociar não conta).

- Matematicamente a solução de Nash (U_i, U_j) é a *única* do seguinte problema de *maximização do produto* das diferenças das utilidades em relação a seus pontos d:

$$N(S, d) = \text{argmax}\{(U_i - d_i)\ (U_j - d_j)\ |\ (U_i, U_j) \in S,\ U_i \geq d_i,\ U_j \geq d_j\}$$

  - Note que a maximização da *soma* daria *infinitas* soluções Pareto ótimo.

Solução de Nash: Exemplo Numérico

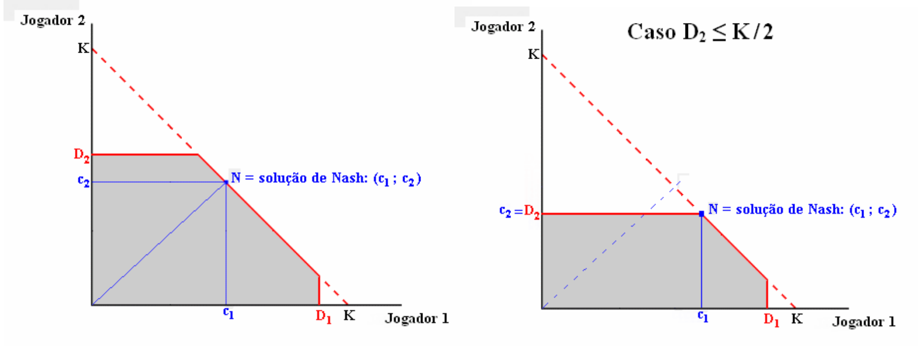
- Veremos um exemplo com assimetria no ponto d.
- Sejam dois campos de petróleo descobertos em blocos vizinhos, de firmas diferentes.
  - Se eles se associarem para fazer um desenvolvimento conjunto, haverá um ganho de escala compartilhando infraestrutura (oleodutos, gasodutos, planta de produção).
  - A firma 1 possui um ativo que se desenvolvido teria um VPL positivo: $VPL_1 = 40$ MM\$ ($\Rightarrow d_1 = 40$). Já a firma 2 possui um campo que se desenvolvido teria VPL negativo.
    - Sozinha a firma 2 não desenvolveria o campo ($\Rightarrow d_2 = 0$).
  - O VPL conjunto é $VPL_{1+2} = 100$ MM\$ (sinergia).
- Qual a solução de Nash (u_1; u_2) para essa parceria?
  - $u_1 = 100$ [½ + (40 – 0)/200] $\Rightarrow$ $u_1 = 70$ MM\$; $u_2 = 30$ MM\$
    - I. é, se divide por igual o excesso de payoff em relação a d.
    - A firma 1 poderia tentar comprar o campo 2 por < 30 MM\$

Crítica à Solução de Nash: Jogo da Bancarrota

- Veremos agora que a solução de Nash não é tão razoável quando o *conjunto de utilidades* é assimétrico.
  - Veremos que no *jogo da bancarrota* o axioma de simetria não é tão bom e é preferível usar a *solução de Kalai & Smorodinsky*.
  - Na bancarrota, o valor dos ativos (K) da firma falida é menor do que o valor das dívidas e obrigações (ΣD_i) de i credores.
- Seja o seguinte *jogo da bancarrota*: uma firma cujo valor dos ativos caiu para o valor K, tem dois credores aos quais deve D_1 e D_2. A firma está insolvente: $K < D_1 + D_2$.
  - Se $D_1 > D_2$, como deve ser a divisão dos ativos que valem K?
- É justo supor que o credor que tem o maior valor a receber receba mais, mas <u>a solução de Nash não será justa, ex., aponta divisão igual de K entre os 2 credores</u>.
  - Para ver isso, assuma que caso os credores não cheguem a um acordo, eles nada ganham e o ponto de desacordo é $d = \{0; 0\}$; e o máximo que cada um pode ganhar é sua dívida (D_1 ou D_2).

Jogo da Bancarrota: Exemplo

- Limitando o conjunto factível com a restrição de que nenhum jogador pode levar mais que a dívida original, o gráfico da solução de Nash aparece abaixo.



  - Como o ponto de desacordo d está na origem (ambos perdem tudo em caso de desacordo), o jogador com a maior dívida recebe o mesmo ($c_1 = c_2$) que o de menor dívida. É justo?
  - Se o valor $D_2 \leq K/2$, então <u>o jogador 2 receberia tudo que ele teria direito</u>, mas não o jogador 1, que só receberia $K - D_2 < D_1$

Jogo da Bancarrota: Exemplo Numérico

- Considere os valores numéricos: ativos da firma em falência K = \$ 1 milhão; dívidas: D_1 = \$ 1 milhão e D_2 = \$ 500 mil. Quanto cada credor deve receber (c_1 e c_2)?
  - Parece ser mais justo dividir os ativos na proporção da dívida que cada credor tem (c_1 = 666 mil e c_2 = 333 mil).
  - Mas a solução de Nash daria $c_1 = c_2$ = 500 mil, pois:

  $c_1 = [½ + (d_1 - d_2)/(2 K)] K = [0,5 + (0 - 0)/2.000.000]\ 1.000.000$

  $\Rightarrow c_1 = 500.000$; o valor de c_2 pode sair por diferença.
  - Nesse caso, o jogador 2 teve todo o seu capital de volta, mas o jogador 1 só teve a metade.
- O problema está na condição de simetria de Nash.
  - Se substituirmos a condição de simetria por uma condição de *monotonicidade*, chegaremos a uma solução mais razoável.
  - Monotonicidade considera a *expansão do conjunto de barganha* e que as utilidades no conjunto expandido não podem ser menores que no problema original. Veremos isso a seguir.

Solução de Kalai & Smorodinsky e Exemplo

- A solução assimétrica que usa o *axioma da monotonicidade* foi introduzida por Kalai & Smorodinsky (K&S) em 1975.
- Dado o jogo de barganha $\mathcal{B} = \{\mathcal{S}, (c_1, d_1), (c_2, d_2)\}$, iremos precisar dos valores (utilidades) máximos m_1 e m_2 que os jogadores poderiam obter no jogo de barganha expandido.
  - No exemplo anterior, seriam $m_1 = D_1$ e $m_2 = D_2$.
- A solução de K&S preconiza que, além de ser eficiente no sentido de explotar todo o ganho disponível ($c_1 + c_2 = K$ no exemplo), ela deve obedecer a seguinte equação da reta:

$$c_2 - d_2 = k\,(c_1 - d_1)$$

, onde a inclinação k é dada por: $k = \dfrac{m_2 - d_2}{m_1 - d_1}$

- No exemplo numérico, a solução de K&S seria:
  - $m_1 = 1.000.000$; $m_2 = 500.000$; $k = 500.000/1.000.000 = ½$; logo, $c_2 - 0 = ½\,(c_1 - 0) \Rightarrow c_1 = 2\,c_2 \Rightarrow c_1 = \$\ 666.666$ e $c_2 = \$\ 333.333$, ou seja, a solução K&S é mais razoável nesse caso assimétrico.

Equilíbrio de Markov

- Em jogos estocásticos em geral e em jogos de opções, em particular, a introdução de uma variável de estado seguindo um processo estocástico nos faz ficar interessados num tipo de ENPS: o *equilíbrio de Markov*.
  - Esse tipo de equilíbrio é função apenas do estado corrente (ex., preço atual do petróleo) o qual segue um processo de Markov.
    - Em jogos de opções, usaremos processos estocásticos de Markov.
  - Esse estado corrente sumariza o efeito do passado no jogo. O equilíbrio não depende diretamente da história do jogo.
  - É também chamado de *equilíbrio espaço-estado* ("state-space equilibrium") e de *equilíbrio perfeito de Markov* (EPM).
  - Equilíbrios de Markov são também perfeitos em subjogos.
  - É um equilíbrio adequado para os complexos *jogos estocásticos* onde o payoff em um dado instante depende desse estado e das ações que podem ser tomadas nesse instante.
  - EPM existe em jogos estocásticos com nº finitos de ações e estados

Jogos Evolucionários e Equilíbrios Estáveis

- **A *teoria dos jogos evolucionários* nasceu na biologia para modelar o comportamento dos animais em conflito e, em especial, a *evolução das espécies* como *jogos repetidos*.**
- **Uma *estratégia evolucionária estável* ("evolutionary stable strategy", ESS) é:**
  - **Uma estratégia tal que, se todos os membros da população adotá-la, nenhuma estratégia mutante pode invadí-la.**
  - **Tem sido usado em economia para selecionar o melhor ENPS**
    - **Por serem *dinamicamente estáveis*, são os resultados (equilíbrios) mais prováveis no *longo prazo*.**
  - **No dilema dos prisioneiros repetidos, a estratégia "sempre cooperar" não é ESS, pois uma estratégia mutante de não cooperar estaria em vantagem e se proliferaria no jogo.**
    - **Já "nunca cooperar" é ESS nesse jogo repetido, pois um "cooperador mutante" sozinho não teria vantagem.**

Estratégia Evolucionária Estável

- **Definição: Uma estratégia mista σ é ESS se e somente se:**
  - **a) É a melhor resposta para si mesma; e**
  - **b) Para qualquer estratégia alternativa (*mutante*) melhor resposta σ' para σ, ela é melhor do que σ' é contra si mesma, i.é., para todas as estratégias disponíveis $\sigma' \neq \sigma$ com lucros (ou payoffs) $\pi_1(\sigma', \sigma) = \pi_1(\sigma, \sigma)$, deve-se ter $\pi_1(\sigma, \sigma') > \pi_1(\sigma', \sigma')$.**
  - **A condição (a) só diz que um ESS tem de ser EN consigo mesmo (par de estratégias simétricas é EN); e (b) é a *condição de estabilidade* contra a invasão de *estratégias mutantes*.**
- **Nos jogos com dois jogadores, o ESS é também um *equilíbrio perfeito em subjogos* (ENPS).**
  - **Mas mesmo em jogos finitos a existência de um ESS não é garantida (enquanto que sempre existe um ENPS).**
  - **ESS é uma condição mais robusta que o ENPS.**
- **Da literatura de biologia advém dois importantes jogos: o *jogo do medroso* ("chicken") e a *guerra de atrito* ("war of attrition").**

Jogos de Espera: o Jogo do Medroso

- O *jogo do medroso* ("chicken", ou *galinha*) é uma variante estática do jogo de espera "guerra de atrito".
  - Uma versão do "chicken" é: Dois adolescentes dirigem os seus carros em direção do outro. O primeiro a desviar (impedindo a colisão) é o "medroso" e perde o jogo. Ganha o mais *paciente*.
    - Outra versão similar: filme "Rebel without cause" c/ James Dean
  - O primeiro a exercer a opção é chamado de *líder* (L), que aqui perde o jogo. Esperar para ser *seguidor* (F) aqui é mais valioso. Seja S o payoff de exercício simultâneo e W da espera simultânea.

		Jogador 2: p_2 exercer	Jogador 2: $1 - p_2$ esperar
Jogador 1	p_1 exercer	S_1; S_2	L_1; F_2
Jogador 1	$1 - p_1$ esperar	F_1; L_2	W_1; W_2

$F_i > S_i \geq L_i > W_i$; $i = 1, 2$

= Eq. Nash

- Existem dois EN em estratégias puras e um EN em estratégias mistas.
- O único ESS é o EN em estratégias mistas, com p_i:

$$p_i = \frac{L_j - W_j}{L_j - W_j + F_j - S_j}$$

Notas Sobre o Jogo do Medroso (Chicken)

- Exercício: prove a equação anterior. Dica: use o método de est. mistas visto em "Batalha dos Sexos".
- Notas sobre o jogo do medroso (chicken):
  - Ele é também conhecido por jogo do *Falcão-Pombo* ("Hawk-Dove") na literatura evolucionária em biologia.
  - Alguns autores (ex.: Montet & Serra) argumentam que as interações entre países em política ambiental (coalizão signatária x coalizão não-signatária de acordos de redução de emissões) parecem mais um jogo de chicken do que um dilema dos prisioneiros.
  - Esse jogo também é classificado como um jogo de "coordenação impura", pois os jogadores escolhem ações diferentes para se coordenar em equilíbrio.
    - Coordenção pura: jogadores escolhem as mesmas ações.
  - Ver também: http://en.wikipedia.org/wiki/Game_of_chicken

Guerra de Atrito: Jogo Dinâmico da Espera

- **O jogo de guerra de atrito foi introduzido na literatura de jogos por Maynard Smith (1974), num jogo em que animais lutam por um prêmio (território ou caça).**
  - **Existe um custo de permanecer lutando e esse custo é crescente com duração do jogo. Se for para parar, é melhor parar logo.**
  - **Se um animal "parar" ele concede o prêmio ao outro, gerando uma *externalidade positiva* p/ o outro ("*prêmio da espera*").**
  - **A guerra de atrito pertence à classe de *jogos de momento* ("*timing games*") ou *jogos de parada ótima*. É o *jogo da espera*.**
- **Guerra de atrito tem muitas aplicações em economia:**
  - **Em economia industrial, um exemplo é o exercício da *opção de abandono* em duopólios de *indústrias declinantes*. Nesse tipo de indústria, a saída (ou abandono) de uma firma beneficia a outra firma, pois a firma remanescente torna-se *monopolista*.**
  - **Em exploração de petróleo, companhias de petróleo esperam as outras perfurarem primeiro p/ obterem informações grátis.**

Jogo de Guerra de Atrito: Definição

- **Seja o caso de maior interesse de apenas dois jogadores.**
- **As estratégias puras são mapas do conjunto de datas t da ação {parar}, i.é, são *tempos de parada* (ou tempos t* de exercício de uma opção real).**
  - **As estratégias mistas são distribuições acumuladas de probabilidade sobre as estratégias puras, i.é, $G_i(t)$ para $t \in [0, \infty)$ (p/ jogo infinito)**
    - **⇒ $G_i(t)$ é a probabilidade do jogador i parar antes ou exatamente em t**
- **Sejam os valores de ser líder $L_i(t)$, de ser seguidor $F_i(t)$, e o de exercício simultâneo $S_i(t)$, conforme o *tempo de parada* t_i**
  - **Valor do jogador i = $L_i(t_i)$ se $t_i < t_j$ (j é o outro jogador)**
  - **Valor do jogador i = $F_i(t_i)$ se $t_i > t_j$**
  - **Valor do jogador i = $S_i(t_i)$ se $t_i = t_j$**
- **As seguintes premissas caracterizam a guerra de atrito:**
  - **$F_i(t) > L_i(t)$ para $t \in (0, T)$, sendo T a expiração da opção**
  - **$F_i(t) > S_i(t)$ para $t \in [0, T)$ (exclui *efeitos de rede* de Huisman)**
  - **$L_i(t)$ é estritamente decrescente em $t \in [0, T)$**

Saída de Firmas em Indústrias Declinantes

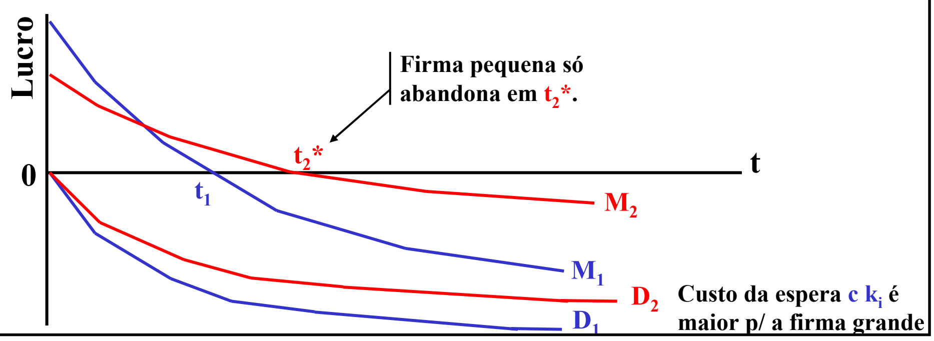
- Resumiremos o modelo de duopólio numa indústria com demanda declinante, modelado como guerra de atrito.
  - Ver na Pasta 72, trecho do livro "Games Businesses Play" do P. Ghemawat, com mais detalhes sobre essa aplicação.
- Nesse modelo duas firmas com capacidades diferentes irão começar a ter prejuízo se continuar o duopólio (D_i).
  - Se uma abandonar, haverá uma *externalidade positiva*, pois a firma que ficar terá um monopólio (M_i) e voltará a ter lucro.
  - A figura ilustra os dois EN em um instante t qualquer do jogo.

		Firma 2: Espera	Firma 2: Abandono
Firma 1	Espera	D_1 ; D_2	M_1 ; 0
Firma 1	Abandona	0 ; M_2	0 ; 0

Payoffs:
D_1 e $D_2 < 0$
$M_1 > 0 > D_1$
$M_2 > 0 > D_2$

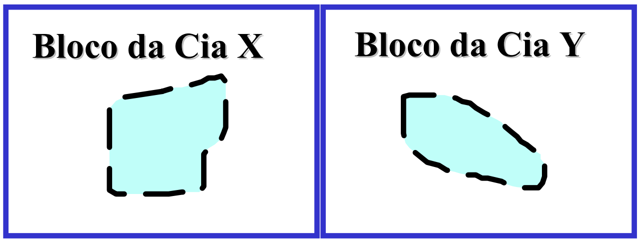
Saída de Firmas em Indústrias Declinantes

- Imagine que a firma 1 tem uma maior capacidade que a firma 2, $k_1 > k_2$. Mas os custos unitários são iguais (c).
  - Qual firma abandonará primeiro, a grande ou a pequena?
  - O modelo chega à conclusão que o único ENPS (EN perfeito em subjogos) é a firma 1 (grande) sair imediatamente e a firma pequena só sair quando o monopólio começar a dar prejuízo, t_2*.
    - Pode surpreender a *vitória do pequeno*, mas ocorre com freqüência!
  - A figura ilustra o caso de forma estilizada, para dar a intuição.



Jogo da Espera na Perfuração

- **Exploração de petróleo: com duas ou poucas companhias explorando uma bacia é um caso clássico de guerra de atrito.**
  - **Analisado principalmente por Hendricks (na visão tradicional) e no contexto de jogos de opções reais foi analisado primeiro por Dias (1997)**
  - **Duas companias X e Y com blocos vizinhos e prospectos de petróleo correlacionados: perfuração de um revela informação para o outro.**
    - **Se Y perfura e descobre petróleo, o fator de chance FC de X aumenta para FC^+. Se o prospecto Y se revelar seco, X revisa para FC^-, etc.**
    - **Nesse caso a presença do competidor *aumenta* o valor da espera.**
    - ***Informação incompleta* sobre como a outra firma avalia os prospectos.**
    - **Exercício simultâneo não é vantajoso pois a informação revelada não muda a decisão. Diferente do livro do Huisman que considera os "efeitos de rede".**

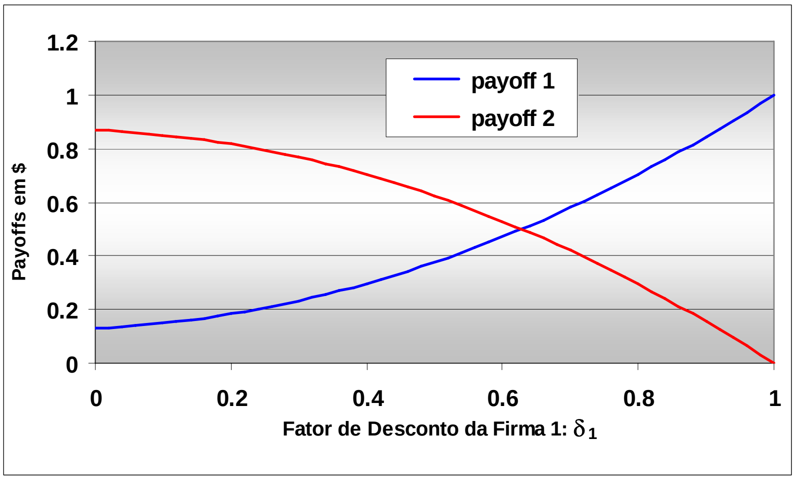


MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e/ou apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

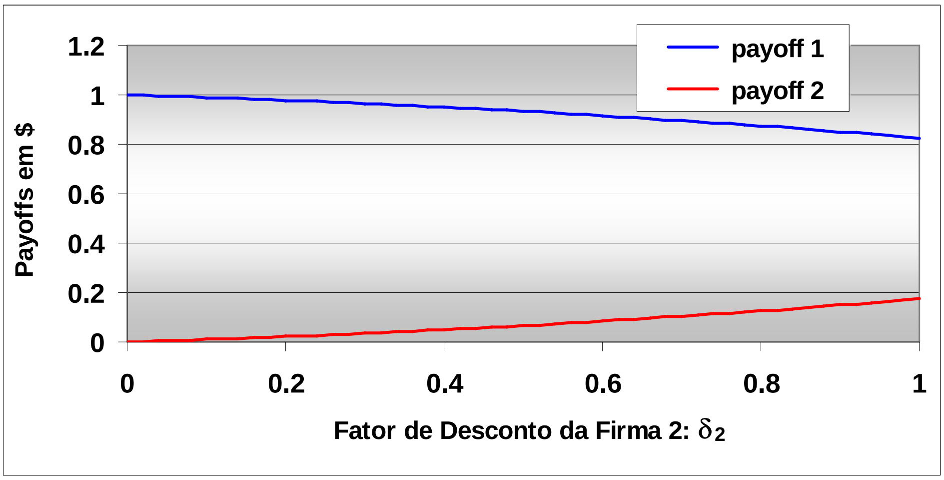
Barganha Finita: Sensibilidade dos δ

- **Os gráficos abaixo mostram a sensibilidade dos payoffs para o fator de desconto, com T = 5. Ver planilha barganha.xls.**
- **Como esperado, o payoff do jogador 1 aumenta com o seu fator de desconto δ_1. O fator δ_2 está fixo aqui em 0,870.**



Barganha Finita: Sensibilidade dos δ

- **O payoff do jogador 2 também aumenta com o seu fator de desconto δ_2, mas a *vantagem de jogar por último e primeiro*, fez o payoff do jogador 1 ser sempre maior que o do player 2.**
  - **O fator δ_1 está fixo aqui em 0,909 e T = 5 (ímpar).**



Barganha Finita: Miscelânea

- Para o caso da barganha finita com dois jogadores, mas com T par, se obtém com passos similares o resultado:

$$\text{payoff}_{t=1} = \left(v \left[\frac{(1-\delta_2)\,[1-(\delta_1\delta_2)^{\frac{T}{2}}]}{1 - \delta_1\delta_2} \right] ;\; v - v \left[\frac{(1-\delta_2)\,[1-(\delta_1\delta_2)^{\frac{T}{2}}]}{1 - \delta_1\delta_2} \right] \right)$$

- Independente se T é ímpar ou é par, podemos escrever o único ENPS da barganha finita de conjunto de períodos $T = \{0, \ldots, t-1\}$, $t \geq 1$ como $\{v\,x^*;\ v\,(1 - x^*)\}$ onde x^* é:

$$x^*(t, \delta_1, \delta_2) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor} (\delta_1\ \delta_2)^n - \delta_2 \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t-2}{2} \right\rfloor} (\delta_1\ \delta_2)^n$$

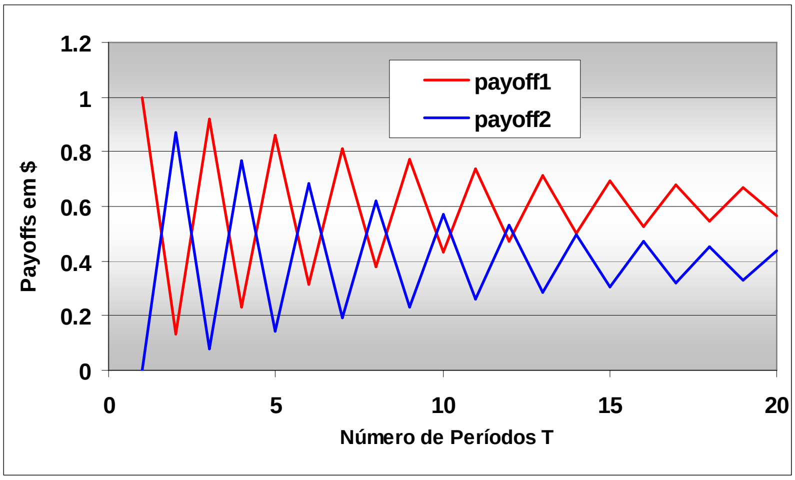
  - Para denotar o *maior inteiro menor ou igual a y* foi usada a notação: $\lfloor y \rfloor$
  - Além disso, se fizermos $v = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, podemos destacar dois aspectos: a vantagem da 1ª movida e a da última movida (Napel, 2002):

$$x^*(t, \delta, \delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{(-\delta)^t}{1+\delta} \right)$$

voltar

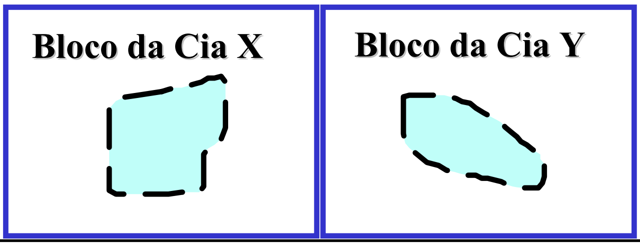
Barganha Finita e o Efeito de T

- Mas se $\delta_1 > \delta_2$ a vantagem da 1ª movida pode superar a vantagem da 2ª movida para T não tão grande.
  - Quando T é grande a vantagem da última movida diminui mais que a vantagem da primeira movida.



Jogo da Espera na Perfuração Exploratória

- **Exploração de petróleo: com duas ou poucas companhias explorando uma bacia é um caso clássico de guerra de atrito.**
- **Analisado principalmente por Hendricks (visão tradicional). Na visão de jogos de opções reais o 1º a analisar foi Dias (1997).**
- **Duas companias X e Y com blocos vizinhos têm prospectos de petróleo que são correlacionados: a perfuração de um revela informação relevante sobre a existência de petróleo nessa área.**
  - **Se a firma Y perfura e descobre petróleo, o fator de chance FC da firma X *aumenta* para FC^{+}. Se o prospecto Y se revelar seco, X revisa FC *p/ baixo*, FC^{-}, podendo nesse caso não ser ótimo perfurar o poço.**
    - **⇒ Ter essa informação sobre Y *antes*, pode mudar a decisão ótima de X.**



Jogo da Espera na Perfuração Exploratória

- **Note que o exercício simultâneo não é vantajoso pois a informação revelada não poderia usada na decisão.**
  - **Dias (1997) considerou que existe *informação incompleta* sobre como a outra firma avalia os prospectos (+ realista), mas aqui não vamos considerar essa complicação.**
  - **Vamos considerar um exemplo numérico para ver a relevância do jogo em termos de usar essa informação.**
- **O valor de um prospecto exploratório é dado pelo VME (*valor monetário esperado*, o "VPL da exploração"), que é função do custo e do benefício esperado:**

$$VME = -I_W + FC \cdot VPL$$

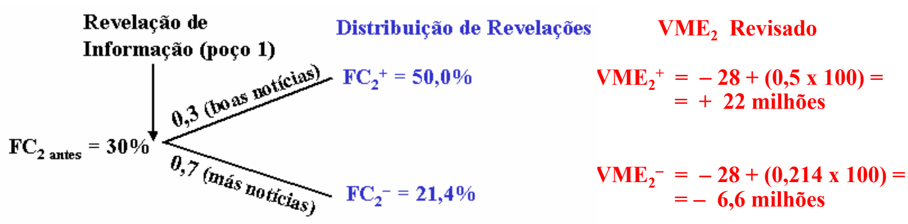
  - **Onde: I_W = investimento na perfuração do poço pioneiro ("wildcat").**
  - **FC = fator de chance (probabilidade de sucesso) → *v.a. de Bernoulli*.**
  - **VPL = *valor presente líquido* do desenvolvimento da produção.**
- **Vamos assumir que os prospectos são iguais e com VME > 0:**

Jogo da Espera na Perfuração Exploratória

- **Imagine que I_W = 25 milhões \$; $FC_1 = FC_2$ = 30% e, em caso de sucesso, $VPL_1 = VPL_2$ = 100 milhões. Logo:**

  $VME_1 = VME_2 = -28 + [30\% \times 100] = 2$ milhões \$

  - **A teoria tradicional do fluxo de caixa descontado aponta que existe um custo de postergar um projeto de VME positivo.**
    - **Esse custo é função da taxa de desconto (paciência).**
  - **Mas se a firma 2 esperar e a firma 1 perfurar primeiro, revela informações que permitem rever os fatores de chance.**
    - **Considere que a dependência é tal que os cenários revelados são (aqui assumo coeficiente de correlação = 28,6%, detalhes no curso de OR):**



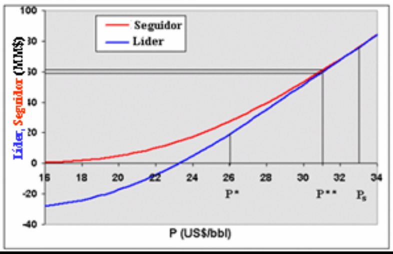
Jogo da Espera na Perfuração Exploratória

- **Em caso de VME negativo a firma 2 não exerce a opção de perfurar o poço ⇒ valor é zero se a notícia for ruim.**
- **Logo, o VME do prospecto 2 usando a informação é:**

  $VME_2^{informado} = FC_1 \cdot Máx(0, VME_2^+) + [(1 - FC_1) \cdot Máx(0, VME_2^-)]$

  $\Rightarrow VME_2^{informado} = [(30\% \times 22) + (70\% \times 0)] = +\ \$\ 6{,}6$ milhões

  - **Que é maior que o VME sem informação (6,6 > 2). Assim, existe um incentivo para a espera. Mas também existe o custo da espera, já que o VME sem informação é positivo.**
  - **A planilha war_attrition.xls resolve o jogo p/ o caso + complexo em que são usados os valores de opções reais em vez do VME.**



Valores em MM\$ para P = 31 \$/bbl

Firma i \ Firma j	Esperar	Investir
Esperar	59.3 , 59.3	seguidor líder 60.7 , 59.6
Investir	líder seguidor 59.6 , 60.7	simultâneo 59.6 , 59.6

Convenção: (sombreado) = Equilíbrio de Nash