Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

ELE 2005: Análise Estratégica de Investimentos e de Decisões com Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais

Parte 4: Revisão de Opções Reais

Marco Antonio Guimarães Dias
E-mail: marcoagd@pobox.com
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 2º Semestre de 2007

Revisão de Opções Reais

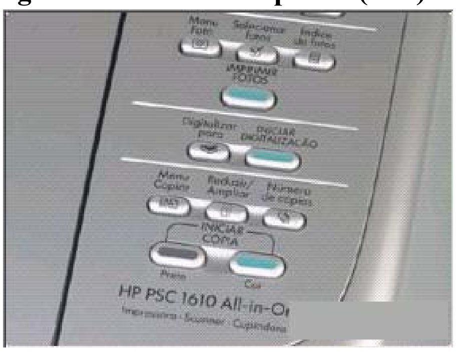
- Essa parte do curso será uma breve revisão da teoria das opções reais. Para aprofundar, ver material do curso IND2072:
  - http://www.puc-rio.br/marco.ind/ind2072.html
  - Iremos rever conceitos gerais mais usados e as ferramentas básicas (processos estocásticos, lema de Itô, *contingent claims*) que iremos precisar para montar as equações diferenciais dos jogos de opções.
- Opção é o oposto de obrigação. Opção é direito, é liberdade de decisão, é flexibilidade gerencial.
  - O investimento em geral é uma opção (e não obrigação) do investidor.
- Pequeno histórico da teoria de opções:
  - 1973: Início de negociação de opções na CBOE (Chicago); ano de publicação dos artigos seminais de Black & Scholes e de Merton.
  - 1977: Myers lança o termo "real options" para ativos reais das firmas.
  - 1979: Primeira aplicação quantitativa: tese do Tourinho em Berkeley.
  - 1997: Prêmio Nobel em Economia p/ Scholes & Merton (Black faleceu em 1995): referência explícita às aplicações em projetos.

Visão Gerencial de Opções Reais (OR)

- **OR é uma metodologia moderna para análise econômica de projetos e decisões de investimento sob incerteza**
  - **OR *complementa* (não *substitui*) as ferramentas corporativas (ainda)**
  - **Difusão corporativa de OR toma tempo e treinamento**
    - **Há uma grande demanda por bons pós-graduados que quantifiquem OR**
- **Considera as incertezas e as opções (*flexibilidades gerenciais*) relevantes e dá duas respostas:**
  - **O *valor da oportunidade de investimento* (o *valor da opção*).**
  - **A *regra de decisão ótima* (*gatilho*).**
- **Pode ser visto como um problema de otimização:**
  - **Maximizar o VPL (função objetivo típica) através do gerenciamento ótimo das opções (flexibilidades gerenciais) relevantes, sujeito a:**
  - a) **Incertezas de mercado (exs.: preço do óleo, demanda de produto);**
  - b) **Incertezas técnicas (exs.: reserva de óleo, sucesso em P&D); e**
  - c) **Incerteza nas ações de outros *players* (competição. Ex.: leilão).**

Exemplo Qualitativo: HP e Incerteza na Demanda

- **A firma HP (Hewlett-Packard) usa OR desde final dos anos 80 (fonte: conversa com executivo da HP em Chicago, em 2000).**
  - **Aqui vamos ver um caso real descrito no livro de Brigham & Ehrhardt (Financial Management, cap.12, 11º ed., 2005).**
- **A HP vende impressoras e multifuncionais no mercado global e em cada país esses produtos são customizados. Por ex.:**
  - **Leds com mensagens e os escritos do painel (foto) devem ser na língua local:**



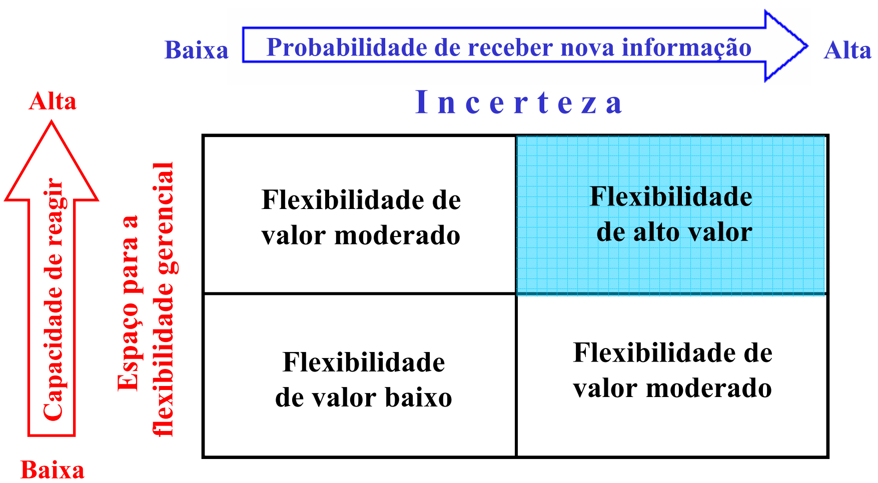
- **A HP fazia essa customização de um jeito e mudou com o conceito de OR.**

Exemplo Qualitativo: HP e Incerteza na Demanda

- **Inicialmente a HP centralizava toda a customização para diversos países e mercados em uma grande unidade fabril.**
  - **Essa era e é a solução de menor custo, dada uma demanda prevista.**
  - **O problema é que a demanda é incerta e frequentemente sobrava estoque num país e faltava produto no país vizinho.**
    - **A concorrência, agradecida, supria o mercado em falta …**
    - **O esquema centralizado de menor custo não era o mais ágil e flexível para capturar as oscilações na demanda. Novos conceitos eram necessários.**
- **A HP então *modularizou* mais seus produtos, passando a fabricar de forma *descentralizada* os *módulos customizáveis*.**
  - **Com isso impressoras *quase-prontas* na França poderiam ser enviadas rapidamente para a Alemanha onde seriam customizadas rapidamente no local, a fim de atender a demanda adicional de lá.**
  - **Antes, uma nova impressora, específica para o mercado alemão, teria de ser toda fabricada ("do zero") numa unidade fabril mais distante, mesmo que tivesse sobrando impressoras na França.**
  - **A incerteza fez a flexibilidade ser mais valiosa que o menor custo.**

Quando as Opções Reais São Valiosas

- **Baseado no livro "Opções Reais" de Copeland & Antikarov**
  - **Opções reais tem valor quanto maior for a incerteza e a flexibilidade de reação**



Recordação do Fluxo de Caixa Descontado

- O método do fluxo de caixa descontado (FCD) estabelece que devemos calcular o valor presente líquido (VPL) através do desconto dos fluxos de caixa *esperados* com uma *taxa ajustada ao risco* de mercado do projeto (μ). No caso de tempo discreto:

número de períodos

valor esperado do fluxo de caixa líquido no período k

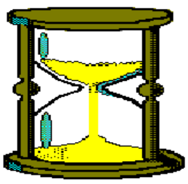
$$VPL = \sum_{K=0}^{N} \frac{E[FC_K]}{(1+\mu)^K}$$

taxa de desconto ajustada ao risco

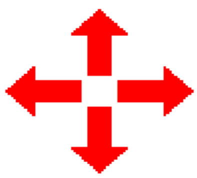
- No caso de *tempo contínuo* se trabalha com integral (em vez de somatório) e se usa $e^{-\mu k}$, em vez de $(1+\mu)^{-k}$.

  - Aqui será conveniente separar os fluxos de caixa de investimento, dos demais fluxos de caixa (receitas, custos operacionais e impostos)
  - Dessa forma, a nossa equação básica do FCD é: $VPL = V - I$, onde:
    - V = valor presente das receitas líquidas de custos operacionais e impostos.
    - I = valor presente do fluxo de investimentos líquidos de benefícios fiscais.

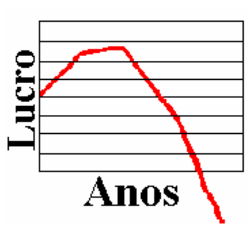
Principais Tipos de Opções Reais



- Opção de Espera (de "Timing")
  - Aguarda novas informações e aprende, antes de investir. Espera proativa.



- Opção Seqüencial e de Expansão
  - Valora o aspecto "estratégico" do projeto de forma consistente.



- Opção de Abandono
  - Gerentes não são obrigados a seguir um plano de negócios, se ele se tornar não-lucrativo.
  - O programa de investimento seqüencial pode ser abandonado se a informação gerada nesse processo for desfavorável.

Opcionalidade e Revelação de Informação

- Esse exemplo simples ilustrará os conceitos de *opcionalidade* e *revelação de informação*, que aumentam o valor de ativos reais
- O valor de um prospecto exploratório é dado pelo VME (valor monetário esperado), função do custo e do benefício esperado:

$$VME = -I_W + FC \cdot VPL$$

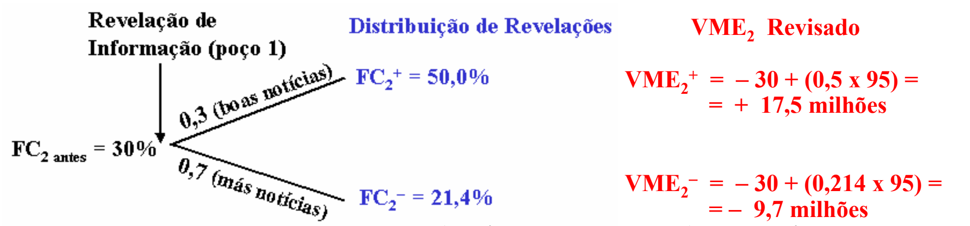
  - Onde: I_W = investimento na perfuração do poço pioneiro ("wildcat")
  - FC = fator de chance (probabilidade de sucesso)
  - VPL = *valor presente líquido* do desenvolvimento da produção
- A firma de petróleo X tem dois prospectos <u>iguais</u>, os quais são correlacionados. Os VMEs (em MM$) são negativos e iguais:

$$VME_1 = VME_2 = -30 + [30\% \times 95] = -1,5 \text{ milhões } \$$$

- Assim parece melhor não perfurar, os prospectos nada valem
  - Mas não foi considerado o fato dos prospectos serem dependentes!
  - Outra firma (Y) de petróleo oferece 2 MM$ pelos dois prospectos.
    - Deve a firma aceitar? Quanto vale o bloco com os dois prospectos?

Revelação de Informação e Fator de Chance

- No cálculo do VME não foi considerado que se o prospecto 1 for perfurado, <u>revela informação para o prospecto 2</u>, que revisa o seu fator de chance para cima em caso de boas notícias (FC_2^+) e para baixo em caso de más notícias (FC_2^-) da 1ª perfuração.
  - Considere que a dependência é tal que os cenários revelados são:



- O valor esperado do <u>bloco</u> (dois prospectos), considerando que:
  - A perfuração do poço 1, *revela informação* para o poço 2, <u>e</u>
  - A perfuração é *opcional* (é um direito, não é obrigação)

$$VME_1 + E[opção(VME_2)] = -1,5 + [(0,3 \times 17,5) + (0,7 \times zero)] = +3,75 \text{ MM\$}$$

- Por que aumentou o valor? Revelação de informação <u>e</u> opcionalidade!

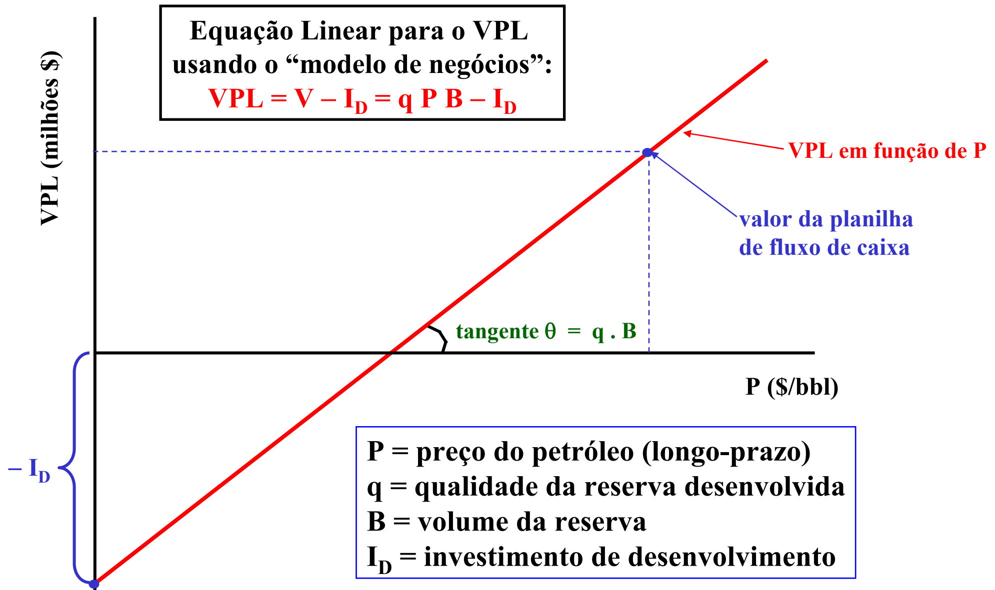
Negociações e Interação Estratégica

- No exemplo, os prospectos valem mais que aparentam graças à revelação de informação + opcionalidade.
  - Sem a revelação o bloco valeria zero. Sem a opcionalidade, – 3 MM$
  - Recuse a oferta da firma Y (2 < 3,5 MM$)! Mas dê a contraproposta:
    - Firma Y ganha o prospecto 1 *de graça*, mas perfura logo o poço e dá toda a informação para firma X sobre essa perfuração. Valor para a firma X?

Valor para Firma X = zero + [(0,3 x 17,5) + (0,7 x zero)] = + 5,25 MM$ > 3,75

  - Logo: informação + opcionalidade = oportunidades de bons negócios!
- Suponha agora que cada firma tem um dos dois prospectos
  - A firma X pode *esperar* a firma Y perfurar primeiro, pois ganharia 5,25 MM$. Mas a firma Y também pode esperar a firma X perfurar
    - Esse jogo da espera chama-se *guerra de atrito*. Pode nenhuma perfurar.
- A alternativa é negociar um contrato de *parceria* (ganha-ganha)
  - Dividir o valor U = 3,75 MM$ da união dos dois prospectos
    - Esse jogo cooperativo chama-se *jogo da barganha*. Ambos ganham.

Uma Função VPL Simples para Produção de Petróleo



Outros modelos de VPL(P): www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html

Intuição (1): Incerteza de Mercado e Valor da Opção

- Seja um campo já descoberto. O VPL de desenvolvimento do campo é dado pelo simples *modelo de negócios* visto antes:

$$VPL = V(P) - I_D = q\,B\,P - I_D$$

  - Sejam os dados: $q = 0{,}2$; $B = 500$ (MM bbl); $I_D = 2750$ (MM\$)
  - Se em $t = 0$, $P_0 = 27$ \$/bbl $\Rightarrow$ VPL = 0,2 . 500. 27 – 2750 = – 50 MM\$
  - Suponha que o investimento pode ser adiado por 1 ano e os <u>preços podem subir ou descer</u> 1 \$/bbl (pequena incerteza no preço).
  - A firma X oferece US\$ 3 milhões por esse campo de petróleo. Você venderia?

t = 0

$E[P_0] = 27$ /bbl
VPL(t=0) = – 50 MM \$

t = 1

50%: $E[P^+] = 28 \Rightarrow VPL^+ = +50$ MM \$

50%: $E[P^-] = 26 \Rightarrow VPL^- = -150$ MM \$

Gerente racional não irá exercer essa opção $\Rightarrow$ Max (VPL^-, 0) = zero

Logo em t = 1, o VPL opcional é positivo: (50% x 50) + (50% x 0) = + 25 milhões \$

Intuição (2): Opção de Timing e Valor da Espera

- Suponha o mesmo caso mas com um VPL um pouco positivo (preço inicial um pouco maior).
  - $VPL = q\,B\,P - I_D = 0{,}2 \times 500 \times 28 - 2750 = +50$ milhões \$.
  - Assuma uma taxa de desconto $\mu = 10\%$ para um período.
  - O que é melhor: desenvolver agora ou "esperar e ver"?

$E[P_0] = 28$ /bbl
VPL(t=0) = + 50 MM \$

50%: $E[P^+] = 29 \Rightarrow VPL^+ = +150$ MM \$

50%: $E[P^-] = 27 \Rightarrow VPL^- = -50$ MM \$

$\Rightarrow$ Não exerce! $\Rightarrow$ Max (VPL^-, 0) = zero

Logo em t = 1, o VPL opcional é: (50% x 150) + (50% x 0) = + 75 milhões \$
Se a *taxa de desconto* = 10%, o valor presente é: $VPL_{espera}(t{=}0) = 75/1{,}1 = 68{,}2 > 50$

Logo é melhor "esperar e ver", exercendo a opção somente no cenário favorável.
Apesar do VPL positivo, a opção em t = 0 não está madura para o exercício imediato (no jargão de opções, a opção não está "deep-in-the-money").

Intuição (3): Opções "Deep-in-the-Money"

- No exemplo anterior *a espera é mais valiosa*, mesmo com VPL positivo em t = 0. Agora suponha que em t = 0 o preço seja <u>maior</u>, P_0 = 29 \$/bbl ⇒ VPL = 0,2 . 500. 29 – 2750 = 150 MM\$
  - Estará a opção madura para o <u>imediato</u> exercício (*deep-in-the-money*)?
  - Suponha que o preço pode subir ou descer 1 \$/bbl em t = 1 e μ = 10%

E[P_0] = 29 /bbl
VPL(t=0) = + 150 MM \$

50% → E[P^+] = 30 ⇒ VPL^+ = + 250 MM \$

50% → E[P^-] = 28 ⇒ VPL^- = + 50 MM \$
⇒ Exerce do mesmo jeito!

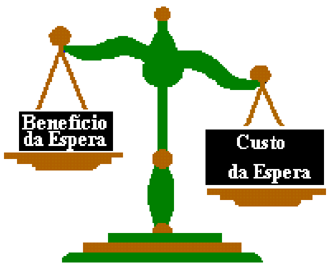
Logo, em t = 1 o VPL esperado é: (50% x 250) + (50% x 50) = 150 milhões \$
O valor presente é: $VPL_{esperar}$(t=0) = 150/1,1 = 136,4 < 150 ⇒ exercer em t = 0

- Nesse caso a opção já está madura e o exercício imediato é ótimo
  - Logo, existe um P*(t = 0) entre 28 e 29 \$/bbl onde a opção fica madura
    - Esse P* é chamado gatilho, que dá a *regra ótima de exercício da opção*

Opção Real "Deep-in-the-Money" e Gatilho

- Para que valor do preço de longo-prazo P* se ficaria <u>indiferente entre esperar e investir</u> no exemplo anterior?
  - Esse preço P* é chamado de gatilho ou valor crítico da opção.
- Ver planilha Excel <u>gatilho.xls</u>. Usar a função "atingir metas".
  - O gatilho nesse exemplo é P* = 28,33 \$/bbl (já o preço de "break-even", que zera o VPL é 27,5 \$/bbl).
    - No exemplo a incerteza é particularmente pequena. Mas a idéia de gatilho para exercício da opção é um conceito geral.
    - A diferença entre o gatilho da opção e o preço de "break-even" (regra do VPL) é maior quanto maior for a incerteza.
- Note que o valor da opção e a regra de decisão (gatilho) estão ligados.
  - Quando a opção está "deep-in-the-money" (P ≥ P*), o valor da opção é igual ao VPL do imediato exercício. Caso contrário, é o valor presente esperado da alternativa "esperar".
- <u>Exercício</u>: O que ocorre com o gatilho se aumentarmos a incerteza? Na planilha, aumente a variação de preços de ± 1 para ± 2 \$/bbl.

O Balanço Custo-Benefício da Espera



Projeto "deep in the money"

Projeto "in the money" ou "out of money"

- **O benefício da espera é maior, quanto maior for a incerteza econômica e a liberdade de timing (tempo de expiração).**
- **Quanto maior o VPL do projeto em relação ao investimento (mais "deep in the money"), menor o benefício da espera.**

As Regras do FCD e as Opções Reais

- **O Fluxo de Caixa Descontado (FCD) estabelece:**
  - **Investir em todos os projetos com VPL > 0.**
    - **Opções: Investir só quando o projeto está "deep in the money"**
  - **Rejeitar projetos com VPL < 0.**
    - **Opções: Pode recomendar projetos "estratégicos" (ex: com opção de expansão) e iniciar investimentos em projetos seqüenciais que *revelem informações* (incerteza técnica).**
  - **Entre dois projetos mutuamente exclusivos, escolher o de maior VPL.**
    - **Opções: Muitas vezes escolhe projetos menores mas que estão "deep in the money" ou que tem *maior flexibilidade.***
- ***"A verdadeira dificuldade está não em aceitar idéias novas, mas em livrar-se das idéias antigas".***

John Maynard Keynes (1883-1946), famoso economista.

Conceitos Básicos de Derivativos Financeiros

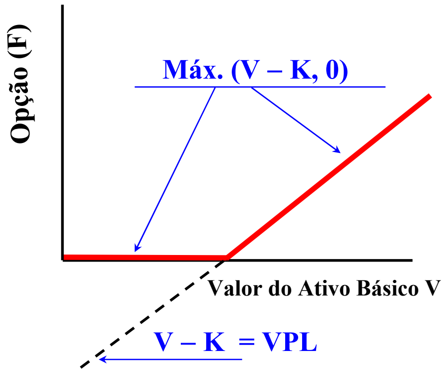
- **Ativo derivativo é aquele cujo fluxo de caixa depende funcionalmente de um outro ativo, chamado de ativo básico. Exemplos de derivativos:**
  - ***Opções*, *contratos a termo*, *contratos futuros* e *swaps.***
- **Diferença entre ativos contingentes e derivativos:**
  - **O primeiro é mais abrangente, ativos que depende de qualquer variável (ex: índice de inflação) ativo ou não.**
- **Opções: direito de comprar ou vender um ativo V, por um certo valor K, até uma certa data T.**
  - **Opção Européia : só pode exercer a opção na data de expiração (valor é menor ou igual a opção Americana).**
  - **Opção Americana: permite o exercício antecipado, além de também poder exercer na data de expiração.**

Assimetria de Valor e Tipos de Opção

- **Sendo a opção um direito de comprar ou vender um ativo por um certo preço em (ou até) uma certa data, cria a assimetria no valor da opção:**
  - **Direito de exercer sem a contrapartida simétrica da obrigação de exercer, beneficia o detentor da opção.**
    - **Investidor racional só exercerá a opção se o preço do ativo básico evoluir favoravelmente para esse exercício.**
- **Opção de Compra ("call"): direito de *comprar* o ativo básico (V) pelo preço de exercício (K).**
  - **O preço de exercício em opções reais é o investimento no projeto.**
- **Opção de Venda ("put"): direito de *vender* o ativo básico (V) pelo preço de exercício (K).**
- **Ativo Básico: pode ser ações de firmas, contrato futuro, outra opção, imóveis, um projeto, etc.**

Assimetria na Opção de Compra

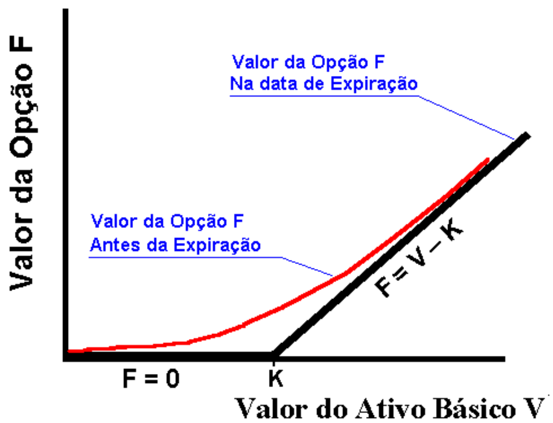
- Na expiração a opção (F) só deve ser exercida se V > K.
- A opção cria uma assimetria, pois as *perdas são limitadas* ao valor de aquisição da opção e o *upside* é teoricamente ilimitado. Quanto mais incerto for o valor futuro do ativo V, mais vale a assimetria.
  - Na expiração (T):



- Em projetos de investimento, V – K é o VPL e assim pode-se pensar no valor da opção como F(t = T) = Máx. (VPL, 0)

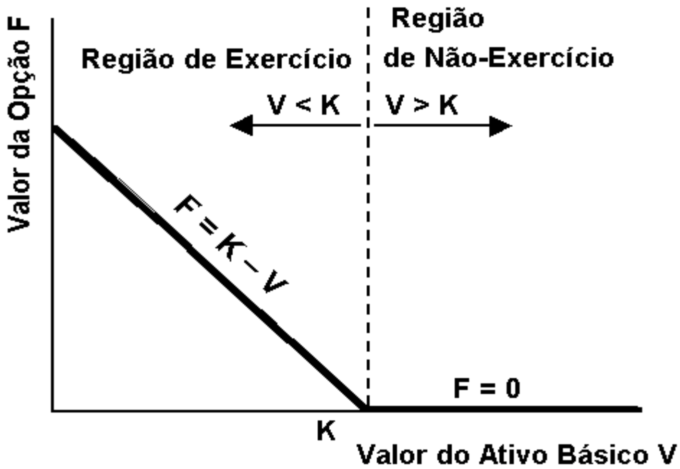
Opção de Compra Antes da Expiração

- <u>Antes da expiração</u> a opção tem valor positivo (> 0) mesmo que o preço do ativo básico V seja menor que o preço de exercício da opção K.
  - Isso ocorre devido à <u>incerteza</u> do valor V na data de vencimento: valor positivo reflete a chance de essa opção se tornar valiosa.



Opção de Venda: Valor no Vencimento

- Na expiração, a opção de venda ("put") sobre um ativo que vale V e com preço de exercício K valerá:
  - Put(t = T) = Máx. [0 , K – V] ou seja, só exerce a opção se $V \leq K$.



Fatos Sobre Opções Americanas

- Numa opção *americana* pode haver o <u>exercício antecipado</u>. O exercício ótimo é dado pelo *gatilho* V*:
  - Exerce a opção de *compra* se $V \geq V^*$ (opção *deep-in-the-money*)
  - Exerce a opção de *venda* se $V \leq V^*$ (opção *deep-in-the-money*)
  - Gatilho é o nível de exercício que maximiza o valor da opção
  - Na expiração é como no caso da opção européia ($V^* = K$)
- Opções americanas são em geral resolvidas numericamente (EDP) ou em aproximações analíticas usando relações como:

  opção americana = opção européia + prêmio de exercício antecipado

  - ➡ Valor da opção americana ≥ valor da opção européia
  - ➡ Se $\delta = 0 \Rightarrow$ valor da opção de compra americana = opção européia
- Opção de *compra* americana: uma <u>condição necessária</u> para ser ótimo o exercício antecipado é $\delta > 0$, onde δ = *dividend yield*.
  - ➡ Essa propriedade é <u>muito importante em opções reais</u>.

Investimento

- Definição de investimento (Dixit & Pindyck):
  É o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios.
- Retorno do Investimento = Ganho de Capital + Dividendos
  - Taxa de retorno total = taxa de ganho de capital + taxa de dividendos

$$\mu = \alpha + \delta$$

- Pelo CAPM, retorno total esperado = taxa ajustada ao risco, é:

$$\mu = r + \beta\,(r_m - r)$$

prêmio de risco (π)

Onde: r = taxa livre de risco; r_m = retorno do mercado
β = "beta" do projeto (ou do ativo) = medida de covariância

Uma Importante Relação

- Igualando as duas equações para o retorno total μ, obtém-se a seguinte importante relação:

$$\alpha - \pi = r - \delta$$

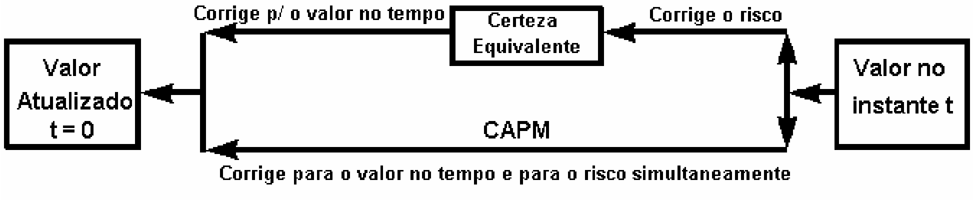
- Em palavras, a tendência α penalizada pelo prêmio de risco π é igual à taxa livre de risco r menos a taxa de dividendos δ.
  - Essa tendência $\alpha - \pi$ é chamada *tendência neutra ao risco*
  - Assim, $r - \delta$ também é uma *tendência neutra ao risco*
  - Essa relação será muito usada para o caso em tempo contínuo e em simulações de Monte Carlo.
    - Veremos que no caso mais comum de incerteza modelada como um movimento geométrico Browniano, irá aparecer o *drift neutro ao risco* $r - \delta$, mas não a *taxa ajustada ao risco* μ.

Qual a Taxa de Desconto da Opção?

- A teoria tradicional (ex.: CAPM) permite calcular o prêmio de risco de um ativo de risco V e logo uma taxa de desconto ajustada ao risco de V.
  - Uma opção F(V) sobre esse ativo V, também é um ativo de risco. Sendo uma função de V, o risco desse ativo F está *vinculado* ao de V, mas o risco de F(V) é *diferente* do risco de V.
  - Em resumo, a taxa de desconto da opção F(V) NÃO é igual à taxa de desconto de V.
    - Esse foi um erro comum antes de Black & Scholes e Merton em 1973.
  - A taxa de desconto da opção é um problema difícil, mas pode-se "by-passar" esse problema através dos métodos:
    - Construção de um portfólio sem risco, formado pelo ativo básico V e por n unidades do derivativo F, onde n é tal que o portfólio é sem risco.
      - Se o portfólio é sem risco, a taxa de desconto adequada é a livre de risco.
    - Método da neutralidade ao risco: penaliza-se o valor esperado futuro de V *subtraindo-se um prêmio de risco* de sua tendência (certeza equivalente).
      - Prova-se que assim pode-se usar a taxa de desconto livre de risco para F(V).

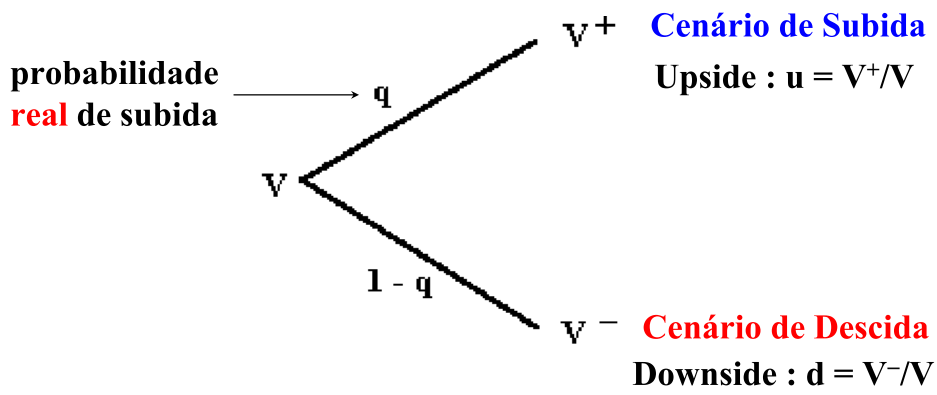
Valor Presente e Taxas de Desconto: O Método da Neutralidade ao Risco

- Duas maneiras equivalentes de calcular valor presente:
  - Pode-se descontar com a taxa ajustada ao risco (CAPM), usando probabilidades reais, ou
  - Descontar com a taxa livre de risco, usando certezas equivalentes (método da *neutralidade ao risco*), obtidas com um artifício matemático: a *medida equivalente de martingale* como probabilidade artificial (ou probabilidade neutra ao risco).



Método da Neutralidade ao Risco

- **Como calcular a probabilidade artificial de martingale, para poder usar a taxa livre de risco?**
- **Considere um caso mais simples, em que o valor V de um projeto no instante posterior t = 1 pode assumir apenas dois valores V^+ e V^- :**



Probabilidade Real e Taxa Ajustada ao Risco

- **Pode-se calcular o valor presente usando a *taxa ajustada ao risco* μ para descontar o *valor esperado* de V em t = 1 (ou seja E [V(t = 1)]). Nesse cálculo, usa-se probabilidades <u>reais</u>.**

$$V = \frac{E\,[\,V(t=1)\,]}{1+\mu} = \frac{p\,V^{+} + (1-p)\,V^{-}}{1+\mu}$$

- **Pode-se tirar o valor da taxa ajustada ao risco em função da probabilidade real p, já que μ também é a taxa de retorno esperada do ativo de risco (CAPM):**

$$\mu = \frac{E\,[\,V(t=1)\,]}{V} - 1 = \frac{p\,V^{+} + (1-p)\,V^{-}}{V} - 1$$

Probabilidade Artificial e Taxa Livre de Risco

- A pergunta é: <u>sob que probabilidades o retorno desse ativo seria igual à taxa livre de risco</u>?
- Seja q essa probabilidade *artificial* neutra ao risco do cenário V^+ tal que o retorno seja livre de risco:

Taxa Livre de Risco (r_f): $$r_f = \frac{E^Q[\,V(t=1)\,]}{V} - 1$$

OBS: E^Q é um operador de valor esperado sob probabilidades artificiais neutras ao risco q e $(1-q)$

$$\Rightarrow r_f = \frac{q\,V^+ + (1-q)\,V^-}{V} - 1$$

fazendo $u = V^+/V$, $d = V^-/V$ e tirando o valor de q $\Rightarrow$

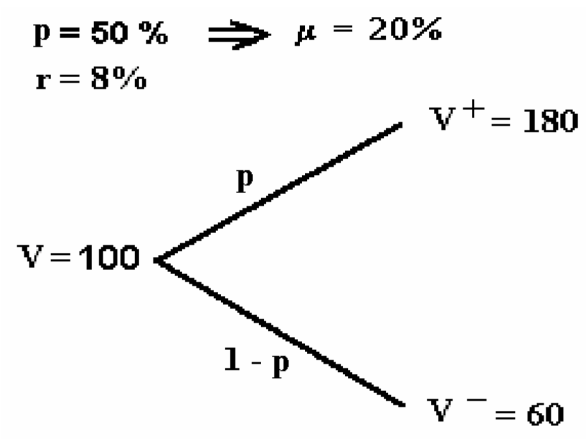
$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

Medida equivalente de martingale
q = probabilidade artificial neutra ao risco de V subir

Aplicação em Derivativos: Valor do Seguro

- Considere o processo de incerteza de V com dois cenários V^+ e V^- em $t = 1$. Seja p a probabilidade real e μ a taxa ajustada ao risco de V:

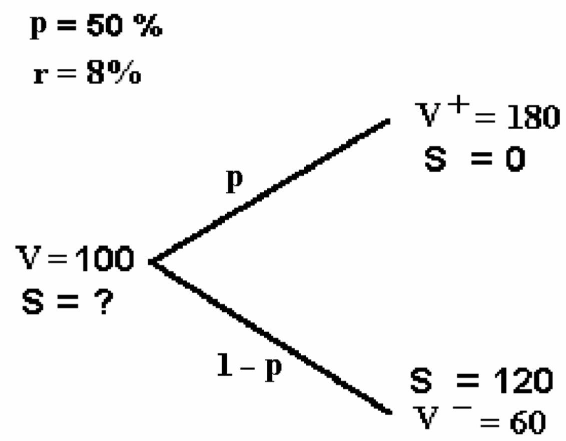
r = taxa livre de risco
p = probabilidade real de subir de V para V^+
μ = taxa ajustada ao risco de V = retorno total esperado de V.



- *Quanto vale o prêmio por um seguro total* que me permita ter no futuro um valor de <u>180 em qualquer cenário</u>?

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Qual o valor do prêmio para ter um seguro total? Ou seja, qual o prêmio a pagar para obter 180 em qualquer cenário?



→ S = *put* = 180 – 180 = 0

→ S = *put* = 180 – 60 = 120

- Esse seguro é análogo a uma opção de venda (*put*) com preço de exercício de 180 (se V cai para 60, a opção é exercida, caso contrário é indiferente entre exercer ou não).

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Trigeorgis mostra que o uso da taxa ajustada ao risco do ativo básico (μ = 20%) para calcular o seguro é um erro:
  - S = (0,5 x 0 + 0,5 x 120)/ (1 + 0,20) = 50 (valor errado, ver adiante)
- Para vermos que esse valor de S está errado, considere a carteira *ativo básico* + *seguro* (V + S):
  - Essa carteira é totalmente sem risco, pois o resultado é o mesmo (= 180) para qualquer cenário.
  - Se a carteira (V + S) é sem risco, então o retorno dessa carteira terá de ser a taxa livre de risco.
    - Caso contrário o seguro estará ou muito caro ou muito barato, permitindo ganhos por *arbitragem*. Como?
    - Se V + S estiver barato, eu empresto dinheiro na taxa r para comprar V + S. Na data T eu vendo V + S, pago o empréstimo e ainda sobra $.

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Se o retorno da carteira V + S é sem risco, então a taxa de desconto apropriada é a taxa livre de risco.
- Usando probabilidades reais e taxa sem risco (8%):

  $V + S = (0{,}5 \times 180 + 0{,}5 \times 180) / (1 + 0{,}08) = 166{,}7$
- Como sabemos que V = 100 (no instante zero), então o valor de S sai por diferença:

  $\Rightarrow\ S = 166{,}7 - V = 166{,}7 - 100 \ \Rightarrow\ S = 66{,}7$
- E não o valor de 50 calculado usando $\mu = 20\%$, que subestimou o valor do prêmio do seguro.
  - Vimos que achar a taxa ajustada ao risco da opção é complicado.
- Agora usaremos um método alternativo para calcular o seguro que também dá o valor correto: as *probabilidades neutras ao risco* ou *medida equivalente de martingale.*

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Veremos que com o método da neutralidade ao risco (transformando probabilidades), se consegue obter o valor correto para o derivativo (o mesmo valor obtido com o método do portfólio sem risco).
  - A probabilidade artificial neutra ao risco (ou medida de martingale) é:

$$\boxed{q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

r_f = taxa sem risco (aqui = 8%)
u = "up" = V^+/V (aqui 180/100 = 1,8)
d = "down" = V^-/V (aqui 60/100 = 0,6)

$\Rightarrow\ q = (1 + 0{,}08 - 0{,}6) / (1{,}8 - 0{,}6) \Rightarrow\ p = 0{,}4 = 40\%$

S = ? — q → $S^+ = 0$; 1 – q → $S^- = 120$

$$S = \frac{(0{,}4 \times 0 + 0{,}6 \times 120)}{1 + 0{,}08}$$

Logo, $S = 66{,}7$

- Que é o valor correto, igual ao calculado antes, em que foi usado o conceito que um portfólio livre de risco (V + S) tem retorno igual a r_f

Exemplo do Seguro e a Composição do Portfólio

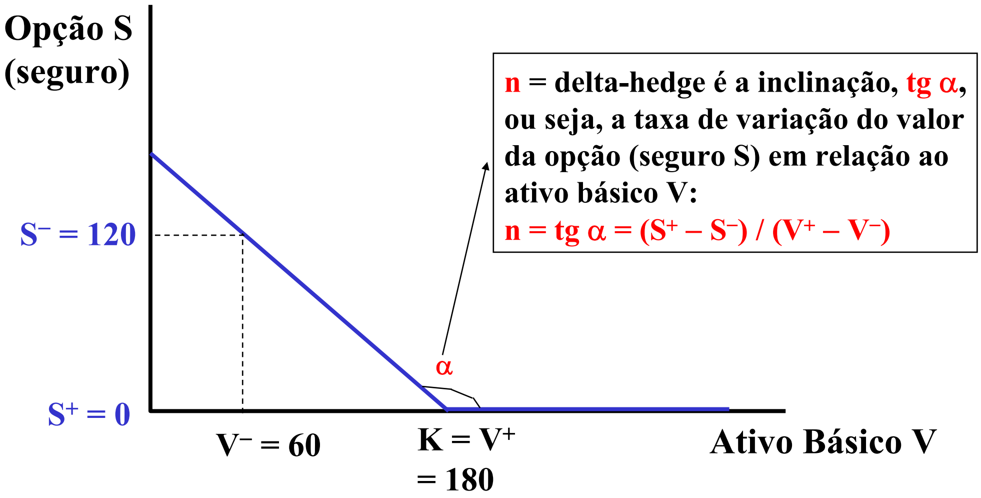
- Foi visto que o valor do seguro foi calculado sabendo apenas o valor corrente e a dinâmica de V, além da taxa sem risco r_f.
- Para isso, no primeiro método se montou um portfólio sem risco. Iremos usar esse portfólio sem risco também quando trabalharmos em tempo contínuo. Teremos de saber montá-lo!
- Note nesse exemplo do seguro (put) que se o portfólio Φ for escrito da seguinte conveniente forma:

$$\Phi = S - n\,V$$

  - Então, no nosso exemplo esse valor seria $n = -1$ para não ter risco.
- Veremos que n é o chamado "delta hedge" e é igual à derivada da opção em relação ao ativo básico, $\partial S/\partial V \cong \Delta S/\Delta V$ em $t = 1$.
  - Na data t = 1 a variação da put S é 0 – 120 e a variação do ativo básico V é 180 – 60. Logo, $\Delta S/\Delta V = -120 / 120 = -1$.
  - Veremos que a escolha de $n = \partial F/\partial V$ (onde F é uma opção qualquer) é sempre usada para obter um porfólio livre de risco.

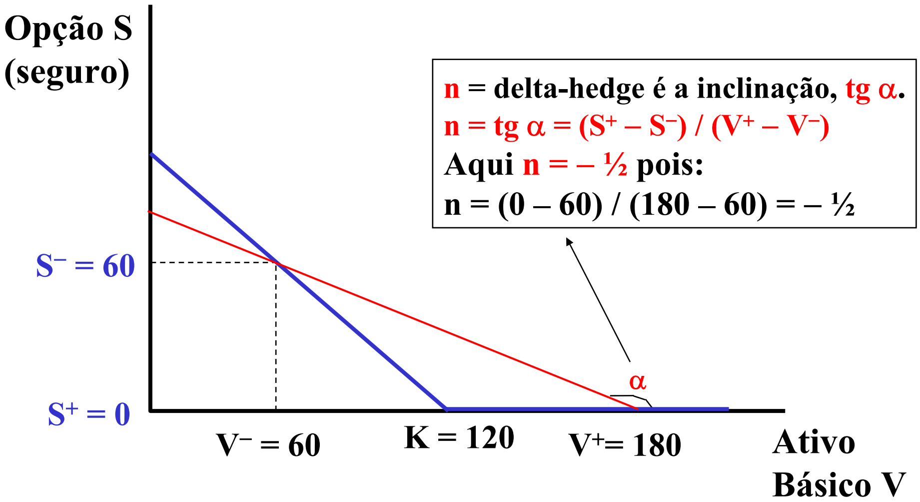
Delta Hedge do Exemplo e o Gráfico da Put

- O gráfico da opção de venda (put) mostra que o delta hedge pode ser visto como a inclinação do valor da opção (aqui seguro S) no gráfico S x V:



Delta Hedge e Seguro Parcial

- Agora imagine que o seguro é parcial, garante-se só o valor = \$ 120. Logo temos uma put com preço de exercício K = 120, i. é, se V cair para $V^- = 60 \Rightarrow S^- = 120 - 60 = 60$. Calcule o valor do seguro em t = 0. Note que o gráfico da put agora seria:



Delta Hedge e o Valor do Seguro Parcial

- Note que novamente temos um portfólio sem risco, só que agora o portfólio = $\Phi = S - n\,V = S - (-½)\,V \Rightarrow \Phi = S + V/2$:

$V^+ = 180$
$S^+ = \max[120 - 180;\ 0] = 0$
$\Phi^+ = 0 + 180/2 = 90$

$\Phi(t{=}0) = S(t{=}0) + 100/2$
$\Rightarrow \Phi(t{=}0) = S(t{=}0) + 50$

mesmos valores

$V^- = 60$
$S^- = \max[120 - 60;\ 0] = 60$
$\Phi^- = 60 + 60/2 = 90$

- Mesmo com seguro parcial, temos um portfólio sem risco.
- Valor do prêmio do seguro, S(t = 0), pode ser obtido como antes: $S(t{=}0) + 50 = 90/(1 + 0{,}08) \Rightarrow S(t = 0) = \$\ 33{,}33$.

Observação e Exercício

- **Note que nessa solução não foi usada diretamente nenhuma probabilidade para os cenários V^+ e V^-!**
  - **Mas indiretamente podemos dizer que elas foram usadas, pois usamos V(t=0), V^+ e V^- e podemos dizer que:**

$$V(t = 0) = E[V(t = 1)]/(1 + \mu) = [p\, V^+ + (1 - p)\, V^-]/(1 + \mu)$$

    - **Ou, se tiver V(t = 0) e a taxa μ, dado os dois cenários V^+ e V^-, a probabilidade p do cenário V^+ está determinada.**
- **Exercício: Resolva o exemplo anterior do seguro parcial usando o método da neutralidade ao risco (medida equivalente de martingale).**
  - **Responda também a pergunta: foi assumida alguma preferência para o investidor (neutro ao risco, por ex.)?**

Arbitragem

- **Definição de oportunidade de arbitragem:**
  - ***É um plano de consumo que tem custo inicial não-positivo* e que *é sempre não-negativo e estritamente positivo em pelo menos um cenário* (Huang & Litzemberger, 1988, p.226).**
    - **Ex.: em t = 0 fazer um investimento líquido igual a zero e em t = 1 não ter risco de perder em nenhum cenário, mas *podendo ganhar* em algum.**
- **Conceito muito usado em cálculo de opções/derivativos e na análise de equilíbrio do mercado.**
  - **Num mercado competitivo os preços dos ativos são tais que:**
    - **Se existir uma oportunidade de arbitragem, ela logo desaparecerá: devido a pressão de compra do ativo barato e a pressão de venda do ativo caro, os preços desses ativos retornariam ao equilíbrio.**
  - **O preço justo da opção não permite ganhos de arbitragem (idéia básica do Black-Scholes-Merton). Para isso se constrói um portfólio sem risco, composto de opções e do ativo básico.**
    - **O retorno desse portfólio sem risco tem de ser a taxa livre de risco.**

Principais Características de uma Decisão de Investimento

- Algumas características importantes na tomada de decisão de investimentos ou de alocação de recursos:
  - Irreversibilidade parcial ou total: o comprometimento de recursos (investimento) é em geral irreversível.
  - Sujeito a incertezas diversas (de mercado, técnica, etc.)
  - Graus de liberdade gerencial (opções) especialmente o "timing": em geral não se é obrigado a investir imediatamente. Raramente uma oportunidade é do tipo "agora ou nunca".
- As palavras chaves são:

  Irreversibilidade, Timing e Incerteza

Irreversibilidade

- Irreversibilidade pode ser *total* (ex.: perfuração de um poço) ou *parcial* (aquisição de um torno).
- Conceito vem da literatura de economia ambiental (artigos de Arrow & Fischer, e de Henry, ambos de 1974).
- Valoriza a espera antes de fazer uma ação irreversível: a espera é reversível.
- Conceito se aplica a decisões sociais/políticas e até individuais (ex.: casamento, divórcio, suicídio).
- Negociação: se você tiver dúvida se deve ou não abrir uma informação, não abra!
  - A abertura da informação é irreversível. A espera é reversível, você sempre tem a *opção* de dar a informação depois.

Timing: Tempo de Expiração da Opção

- Raramente um investimento é do tipo "agora-ou-nunca". Pode-se esperar e observar o mercado.
- Em P & D, as patentes tem uma duração estabelecida pela lei. No Brasil a duração é de 20 anos, depois cai em domínio público.
  - Um *desenho industrial* tem proteção de 10 + 15 anos (prorrogação)
- No caso de concessões de exploração de petróleo é estabelecida em lei (geralmente de 5 a 10 anos)
  - No caso de regime de monopólio do petróleo, o tempo era infinito (oportunidade perpétua). Agora é até 9 anos.
- Concessões de longa duração (> 10 anos) geralmente podem ser tratadas como opções perpétuas. Ex.: direitos autorais (lançar um disco dos "maiores sucessos"), vida do autor + 70 anos.
- Em muitos casos o tempo é estimado considerando a entrada de novos concorrentes que podem até destruir sua opção de investimento (Kester, 1984).

Tipos de Incertezas

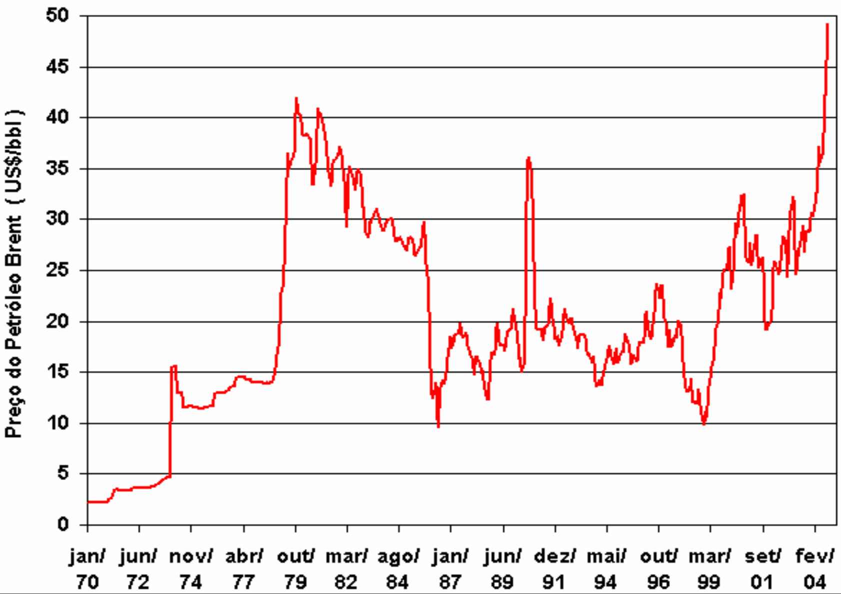
- **Incerteza Econômica**: Correlacionado aos movimentos gerais da economia. Será modelado com *processos estocásticos.*
  - Valoriza a Espera por Informações Externas ("learning by waiting"). Ex: preço do petróleo; câmbio; juros; demanda de aço.
- **Incerteza Técnica**: Não correlacionado aos movimentos gerais da economia. Será modelado com *processos de revelação.*
  - Incentiva o investimento seqüencial, para revelar o verdadeiro cenário e reduzir a variância da incerteza ("learning by doing").
  - Ex.: Volume de petróleo na jazida (reserva); Custo de projeto de P&D.
- **Incerteza Estratégica**: Relacionado à ação de outras empresas no mercado. Pode ser modelado com *processos de revelação.*
  - Pode tanto incentivar como adiar os investimentos.
  - Ex.: leilões de privatização/concessões; ameaça de entrada de concorrentes (ou de substitutos); jogo da espera na exploração e/ou revelation; timing-games em P&D.

Processos Estocásticos

- **Ross (1996, p.41): processo estocástico X = {X(t), t ∈ *T*} é uma coleção de variáveis aleatórias. Isto é, para cada t no conjunto de índices *T*, X(t) é uma variável aleatória. Freqüentemente nós interpretamos t como *tempo* e chamamos X(t) de *estado do processo* no tempo t.**
  - **Quando o conjunto de índices *T* é um conjunto contável, temos um *processo estocástico em tempo discreto*.**
  - **Se esse conjunto de índices *T* é incontável/contínuo, temos um *processo estocástico em tempo contínuo*.**
  - **Qualquer realização de X é chamada de *amostra de caminho* ("*sample path*"), que pode ser discreta ou contínua.**
  - **Mas no caso de *incerteza técnica* o índice <u>não</u> é tempo:**
    - **São <u>eventos</u>, tais como *exercícios de opções de aprendizagem*.**

Exemplo: Preço do Petróleo 1970-2004

- **Preços do óleo Brent (Londres) e similares de jan/1970 a out/2004, valores nominais (fontes: FMI/IFS e Pratts).**



Processo Estocástico (indexado pelo tempo)

Processo Estocástico = Tempo + Aleatoriedade

Num intervalo dt, a variação será :

d (variável) = Fator × d (tempo) + Fator × d(aleatoriedade)

- **Ex: Valor do projeto V segue um Movimento Geométrico Browniano (processo estocástico mais popular).**

$$dV = \alpha \, V \, dt + \sigma \, V \, dz$$

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$ ➡ **Incremento de Wiener**

$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \qquad dz \sim N(0, dt)$$

$$dV \sim \text{Log}\,N\,(\alpha \, V \, dt, \; \sigma^2 \, V^2 \, dt)$$

Processos Estocásticos e Previsão

- **Pode-se ver um processo estocástico X(t) como uma previsão E[X(t)] mais um erro dessa previsão. Ou seja:**

$$X(t) = E[X(t)] + erro(t)$$

- **No caso do Movimento Geométrico Browniano (MGB):**

$$\frac{dP}{P} = \alpha \, dt + \sigma \, dz$$

Retorno da Variável Estocástica = Parcela de Valor Esperado + Parcela de Desvio (variância)

- **É comum também traçar intervalos de confiança da previsão, usando percentis das distribuições.**
  - **No caso de P(t) seguir MGB, dP/P tem distribuição Normal e P(t) tem distribuição lognormal.**

Processos de Markov e de Itô

- O MGB, também chamado de *processo de Wiener*, é um caso especial de um processo de difusão forte (*strong diffusion process*), que é uma classe particular de um *processo de Markov em tempo contínuo* (livro do Merton, p. 121-122 e n. 3).
- Processos de Markov independem da história passada, i. é, toda a informação relevante está contida no valor corrente da variável estocástica.
  - A distribuição de probabilidade para x_{t+1} depende somente de x_t e não do que ocorreu antes do tempo t (não depende de x_s, onde s < t).
    - O MGB é um tipo particular de processo markoviano.
- Um processo Browiano <u>generalizado</u> é chamado de *processo de Itô* (inclui processos de *reversão à média*):

$$dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$$

Movimento Geométrico Browniano

- No MGB o valor esperado de V no instante t, dado o valor corrente V_0, é: $E[V(t)] = V_0\ e^{\alpha t}$
  - Para mostrar isso, toma-se o valor esperado de dV e o termo aleatório (segundo termo) da equação do MGB desaparece (pois E(dz) = 0). Logo:

$$E(dV) = \alpha\ V\ dt\ \Rightarrow \frac{E(dV)}{V} = \alpha\ dt \Rightarrow \int_{V_0}^{\bar{V}} \frac{dV}{V} = \int_0^t \alpha\, dt\ \Rightarrow \ln \bar{V} - \ln V_0 = \alpha\ (t-0)$$

$$\Rightarrow \ln \bar{V} = \ln V_0 + \alpha\ t\ \Rightarrow e^{\ln \bar{V}} = e^{\ln V_0 + \alpha t}\ \Rightarrow \bar{V} = e^{\ln V_0} . e^{\alpha t}\ \Rightarrow E[V] = V_0 . e^{\alpha t}$$

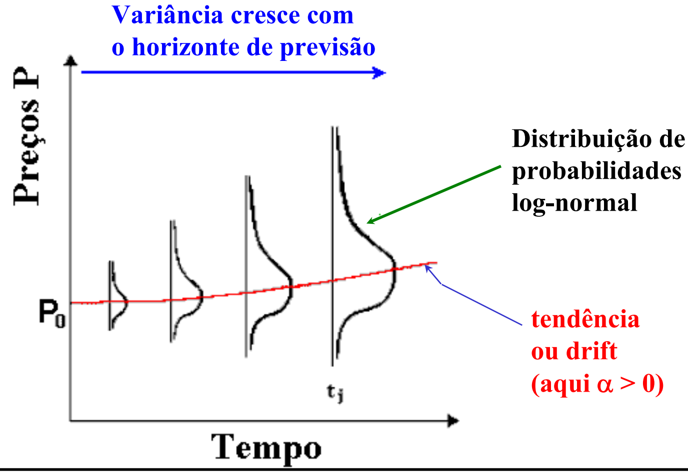
- Ou seja, espera-se que V cresça exponencialmente à taxa α. A variância de V, que segue um MGB, dado V_0 em t = 0, é:

$$Var\ [V(t)] = V_0^2\ e^{2\alpha t}\,(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

- Note que se $t \to \infty\ \Rightarrow Var[V] \to \infty$ (variância ilimitada)

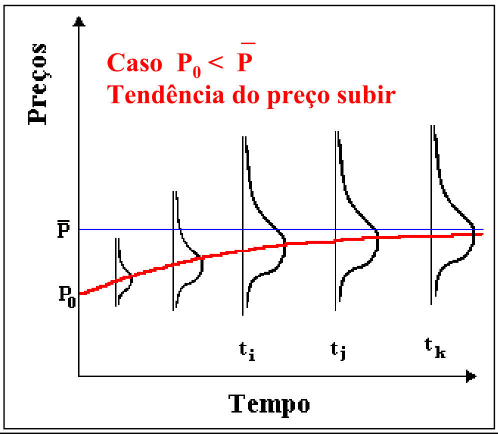
Movimento Geométrico Browniano (MGB)

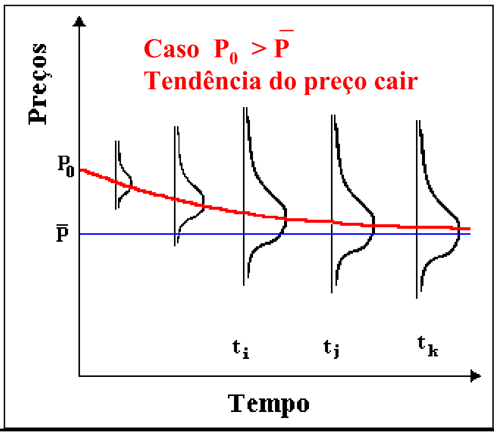
- **Um processo estocástico indexado pelo tempo é um mapeamento de probabilidades ao longo do tempo.**
  - **No caso do MGB, a tendência é um crescimento (ou queda) exponencial e os preços tem uma distribuição lognormal com variância crescendo (sem limites) com o horizonte temporal.**



Reversão à Média de Longo Prazo

- **No caso do processo de reversão à média, a tendência é o preço reverter para um <u>nível de equilíbrio do mercado</u>, $\bar{P}$, chamada de média de longo prazo. Analogia: mola.**
  - **Nesse caso a <u>variância cresce inicialmente e depois se estabiliza</u>**
  - **Figura: variâncias ~ iguais em t_i , t_j , t_k (i. é, ~ estáveis após t_i)**





Martingale e Martingale Descontado

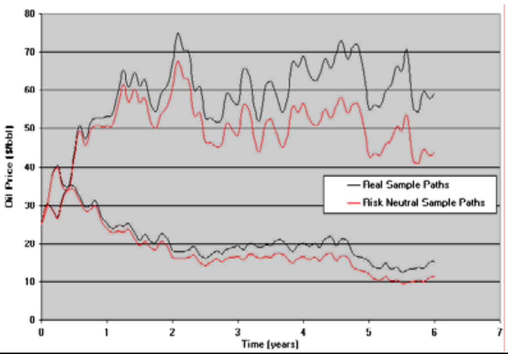
- Um processo estocástico X(t) é um martingale sob a medida de probabilidade P se o seu valor esperado (sob essa medida P) é o seu valor corrente X(0).
  - $E^P[X(t)] = X(0)$, $t > 0$; em geral: $E^P[X(t) \mid \mathcal{F}(s)] = X(s)$, $\forall\, t > s$, onde $\mathcal{F}(s)$ representa o conhecimento/informação no instante s.
    - Ex.: se X(0) = 10 e X(t) é martingale ⇒ E[X(t)] = 10, para todo $t \geq 0$.
  - Martingale é um processo estocástico *sem tendência* ($\alpha = 0$).
  - Essa teoria é ligada à teoria das *expectativas condicionais*.
- A importância aqui é porque prova-se que se o processo do valor descontado de um ativo é um martingale sob a medida Q, então o processo do valor *descontado* de um *derivativo* desse ativo também é um martingale sob Q.
  - Essa medida em que se toma valores esperados é chamada de *medida neutra ao risco* e o desconto é com a taxa livre de risco.
    - $E^Q[e^{-rt}\, V(t) \mid \mathcal{F}(0)] = V(0)$; p/ a opção F(V): $E^Q[e^{-rt}\, F(t) \mid \mathcal{F}(0)] = F(0)$

Processos Estocásticos Reais x Neutros ao Risco

- Foi dito que subtraindo o prêmio de risco π da tendência real α, se obtém a tendência neutra ao risco $\alpha - \pi$ e foi mostrado que $\alpha - \pi = r - \delta$.
  - Assim, um MGB neutro ao risco (sob medida de martingale) é:

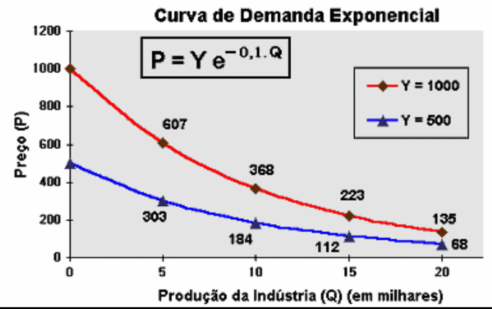
$$\frac{dP}{P} = (r - \delta)\, dt + \sigma\, dz'$$

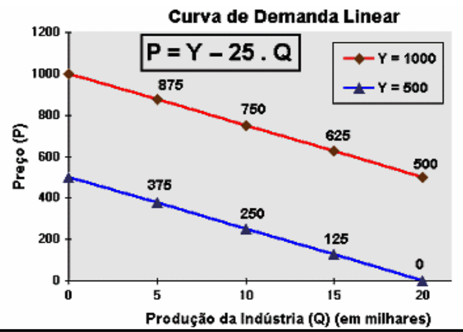
- Processos neutros ao risco (NR) são usados na valoração de opções/derivativos.
- Dois *sample-paths* dos processos reais e NR são mostrados ao lado (ver planilha):



Incerteza na Curva de Demanda

- Suponha uma curva de demanda de um produto qualquer. Ela relaciona preços com a demanda. Preço mais baixo significa maior demanda e preços altos reduzem a demanda pelo produto.
- Ver os gráficos das curvas de demanda exponencial e linear: planilha
- Existe incerteza na curva de demanda, ou seja, a curva de demanda futura pode estar mais elevada refletindo uma economia aquecida ou pode estar mais baixa refletindo um desaquecimento do consumo.
- Existem várias maneiras de modelar a incerteza na curva de demanda. Ex.: o valor do fator Y nas curvas abaixo é estocástico.





Modelagem de Opções em Tempo Contínuo

- Para modelar um problema de opção (ou qq. derivativo) em tempo contínuo, deve-se obter a *equação diferencial parcial* (EDP) da opção F(V, t) e suas condições de contorno (cc.). Para isso são necessárias as ferramentas:
  - Lema de Itô que permite escrever as relações entre a variável de interesse (F) e as variáveis de estado (X, t), onde X é um vetor de variáveis estocásticas (ex.: valor do ativo básico V e investimento I), que seguem processos estocásticos específicos;
    - O Lema de Itô permite expandir dF em termos de dX e dt;
    - Usa-se o Lema de Itô pois um processo de Itô é contínuo, mas não é diferenciável no senso convencional (não existe dX/dt, por ex.).
  - Otimização sob incerteza. Exs.: programação dinâmica sob incerteza; contingent claims; evolucionário; método integral.
    - Os dois primeiros métodos + o Lema de Itô permitem contruir a EDP e suas cc. O método integral será visto depois.
    - D&P: contingent claims é usado para mercado completo e a programação dinâmica é usada para mercado incompleto.

O Lema de Itô

- O Lema de Itô está para o cálculo estocástico, assim como a expansão de Taylor está para o cálculo ordinário.
  - O termo em $(dV)^2$, desprezado em Taylor, é considerado por ser de ordem dt se V for variável estocástica. Seja a função F(V, t):

$$\text{Taylor: } dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + 1/2 \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}}^{\,0} (dV)^2 + \ldots$$

$$\text{Itô: } dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + 1/2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} [\, f(V, t)\, dt \,]$$

Onde $f(V, t)$ é uma função que depende do processo estocástico escolhido. O lema de Itô mostrado é a versão mais simples (1 variável estocástica).

- Ex. (MGB): $dV = \alpha\, V\, dt + \sigma\, V\, dz$, logo $(dV)^2$ é:
  - $(dV)^2 = \alpha^2 V^2 (dt)^2 + 2\, \alpha\, \sigma\, V^2\, dt.dz + \sigma^2 V^2 (dz)^2$, mas os termos de ordem $(dt)^2$ e $(dt)^{3/2}$ (como dt.dz) são desprezíveis frente ao termo dt

$\Rightarrow (dV)^2 = \sigma^2 V^2 (dz)^2$; prova-se (anexo) que $(dz)^2 = dt \Rightarrow (dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$

Contingent Claims: Black-Scholes-Merton

- A equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M) é a solução de uma equação diferencial parcial (EDP).
  - A EDP é a mesma se americana ou européia, se put ou call
  - As cc. da EDP é que dizem se put ou call, amer. ou europ.
- Para chegar na EDP pelo método "contingent claims", a relação de F com V é dada por um portfólio livre de risco:
  - "Compra-se" uma opção de investimento, ou seja, F.
  - "Vende-se" n unidades do ativo básico V (unidade de projeto), sendo "n" (conhecido por "delta hedge") escolhido de forma a tornar o portfólio sem risco (mostraremos que $n = F_V$).
- Monta-se as equações de retorno desse portfólio no tempo dt.
  - Por ser livre de risco, o retorno exigido é a taxa livre de risco r.
- Usa-se o *Lema de Itô* para expandir dF em relação a V e t.
- Usa-se a equação do *processo estocástico* de V para $(dV)^2$.
- "Algebrando", chega-se à EDP do derivativo F(V, t).

Método dos Ativos Contingentes: B&S&M

- A carteira sem risco é: $\Phi = F - n V$ (com uma escolha *conveniente* de n para torná-la sem risco).
- Num intervalo de tempo infinitesimal dt, o retorno exigido da carteira será: $r \, \Phi \, dt = r \, (F - n V) \, dt$.
- Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:
  - A opção pode variar (dF) mas não distribui dividendos.
  - O retorno de V em dt é a soma do ganho de capital dV com o dividendo $\delta V dt$. Assim o retorno da carteira é:
  - Retorno da carteira $= dF - n \, (dV + \delta V dt)$.
  - Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r \, (F - n V) \, dt = dF - n \, (dV + \delta V dt)$$

  - Agora precisamos de dF: expansão com o Lema de Itô.

Método dos Ativos Contingentes

- O Lema de Itô para expandir dF, onde $F(V, t)$, é:

$$dF = F_v \, dV + ½ \, F_{vv} \, (dV)^2 + F_t \, dt$$

  - Agora precisamos de $(dV)^2$, elevando ao quadrado a equação estocástica $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$. Assim:

$(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$ (despreza termos em dt de ordem > 1).

  - Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

$$dF = F_v \, dV + ½ \, \sigma^2 V^2 F_{vv} \, dt + F_t \, dt$$

  - Substituindo a equação de dF na eq. do retorno de Φ:

$$r \, (F - n V) \, dt = F_v \, dV + ½ \, \sigma^2 V^2 F_{vv} \, dt + F_t \, dt - n \, (dV + \delta V dt)$$

$$\Rightarrow r \, (F - n V) \, dt = (F_v - n) \, dV + ½ \, \sigma^2 V^2 F_{vv} \, dt + F_t \, dt - n \, \delta V dt$$

  - Mas para essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dV. Para tal, faz $n = F_V$.
  - *Algebrando* se chega à EDP de Black & Scholes & Merton:

$$½ \, \sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) \, V F_V - r \, F = - F_t$$

EDP do Derivativo F(V, t) por Contingent Claims

- Assim, a EDP de um derivativo F(V, t) que não paga dividendos (F não tem fluxo de caixa) sobre um ativo básico V que segue um MGB e gera a taxa dividendos contínuos δ é:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)\, V F_V - r F = - F_t$$

- As <u>condições de contorno</u> da EDP é que dirão que F é uma opção que expira em T, o tipo da opção (aqui é americana de compra) e o resultado (payoff) do exercício da opção:

Ação de otimização é inserida no modelo

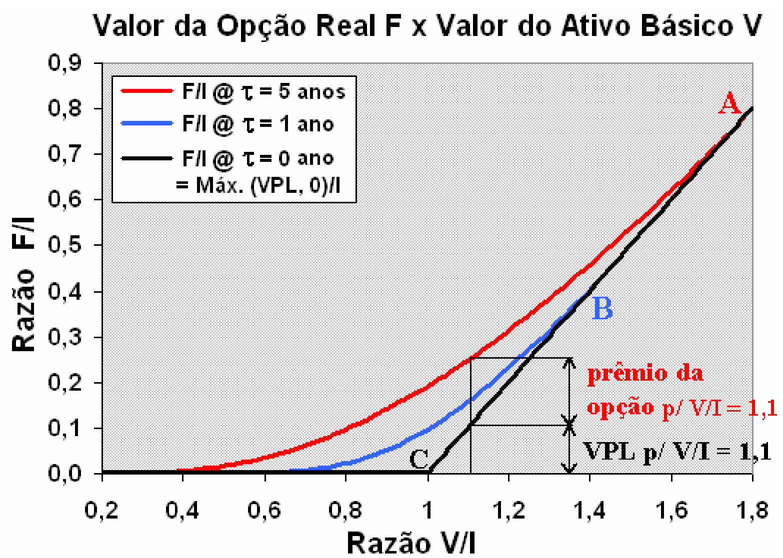
  - Para V = 0, F (0, t) = 0
  - Para t = T, F (V, T) = max [V – I, 0] = max [VPL, 0]
  - Para V = V*, F (V*, t) = V* – I
  - "Contato Suave", F_V (V*, t) = 1

$\}$ Condições no gatilho V*, onde é ótimo o imediato investimento

- No caso de opção *européia* de compra, bastam as 2 primeiras cc.
  - As duas últimas cc. dão as condições ótimas de *exercício antecipado* de F.

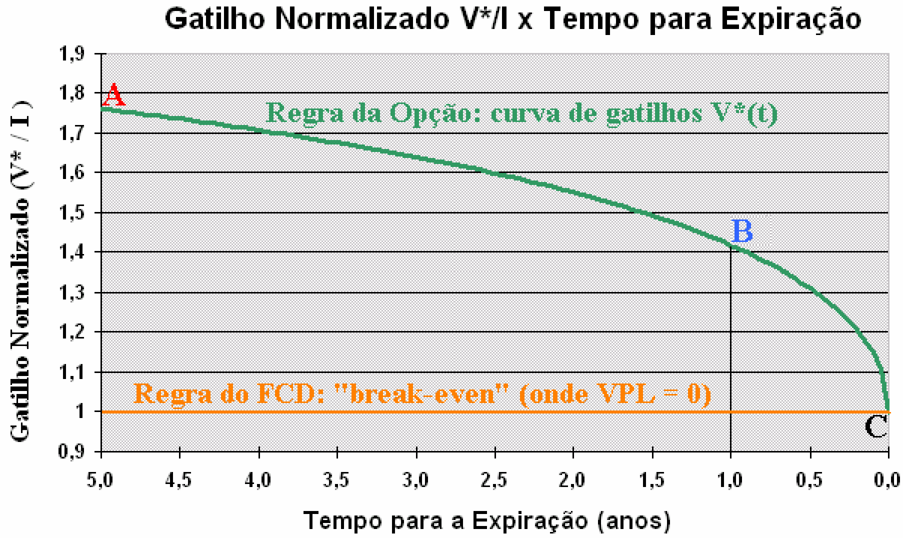
Gráfico da Opção Real F de Investir em V

- Resolvendo a valor da opção real F(V, t), obtém-se gráficos F x V como o abaixo (valores normalizados pelo investimento I).
  - Mostrados os valores para diferentes tempos de expiração τ



Curva do Gatilho: A Regra de Decisão Ótima

- O gráfico abaixo mostra a curva de gatilhos $V^*(\tau)$ para o mesmo caso do gráfico da opção $F(V, t)$.
  - Note os pontos A, B e C e compare com o gráfico anterior.



EDP para Opção Real Perpétua

- Se o tempo de expiração é infinito, se cai num caso mais simples, pois o tempo t deixa de ser variável de estado.
  - Postergar uma decisão leva a uma nova opção perpétua;
  - Assim, o valor da opção do caso anterior é função só de V;
  - A derivada parcial da opção em relação ao tempo é zero: $F_t = 0$
- Assim, a EDP de $F(V, t)$ se torna uma *equação diferencial ordinária* (EDO), $F(V)$, dada por:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, V^2\, F_{VV} + (r - \delta)\, V\, F_V - r\, F = 0$$

  - Com o gatilho V* independente do calendário, as três cc. são:
  - ❶ Para $V = 0$, $F(0, t) = 0$
  - ❷ Para $V = V^*$, condição de continuidade, $F(V^*) = V^* - I$
  - ❸ Para $V = V^*$, condição de "contato suave", $F_V(V^*) = 1$
- Essa ODE tem solução analítica do tipo $F = A\, V^{\beta}$ (cc. 1)
  - Onde A é uma constante a achar com as cc. e β será visto a seguir

Equação Quadrática Característica

- **Substituindo a solução $F = A V^{\beta}$ na EDO e simplificando se obtém a seguinte equação quadrática fundamental:**

$$\tfrac{1}{2}\, \sigma^2 \beta (\beta - 1) + (r - \delta)\, \beta - r = 0$$

  - **Que tem duas raízes, $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$:**

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \tfrac{1}{2}]^2 + 2\, r/\sigma^2}$$

$$\beta_2 = \tfrac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \tfrac{1}{2}]^2 + 2\, r/\sigma^2}$$

- **Assim, a solução da EDO é do tipo: $F = A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2}$**
  - **As constantes A_1 e A_2 serão determinadas com as cc.**
    - **Por ex., no slide anterior, a primeira cc. implica que $A_2 = 0$ (caso contrário, quando $V \to 0 \Rightarrow F \to \infty$ em vez de $F \to 0$)**
  - **Substituindo a solução $F = A_1 V^{\beta_1}$ na segunda e terceria cc., se obtém a constante A_1 e o gatilho V^* (ver próximo slide).**

Solução Analítica e Relevância Prática

- **Caso de opção <u>perpétua ou muito longa</u> a EDP vira uma EDO ($F_t = 0$) que tem solução analítica.**
  - **Patentes (20 anos no Brasil): boa solução aproximada.**
  - **Desenvolvimento de um terreno urbano.**
  - **Ford investir em nova fábrica no Brasil.**
  - **Abrir novas lojas de sua *griffe*.**
- **O valor da opção F e o gatilho V^*, valem:**

$$F = A V^{\beta_1} \quad ; \text{ e } \quad V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\, I$$

Onde: $A = (V^* - I) / (V^*)^{\beta_1}$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2\, r}{\sigma^2}}$$

Incerteza em Funções Côncavas e Convexas

- O efeito da incerteza em funções depende se a função é linear, côncava ou convexa. Esse efeito é conhecido por *desigualdade de Jensen* e quantificado com o *lema de Itô*.
  - Desigualdade de Jensen: se x é variável aleatória (v.a.) e f(x) é uma função (estritamente) *convexa* de x, então:

    $$E[f(x)] > f(E[x])$$

    - Logo, se o valor esperado de x permanece o mesmo, mas sua variância aumenta, então E[f(x)] aumenta. Ex.: opção.
    - Se g(X) é função (estritamente) *côncava* de x, e x for v.a., basta inverter a desigualdade: $E[g(x)] < g(E[x])$
    - Se h(x) é função *linear* da v.a. x, então: $E[h(x)] = h(E[x])$
- Ex.: Função não linear $y = f(x) = x^2$, onde x é uma variável aleatória (v.a.) que pode assumir os valores + 1 e – 1 com prob. 50% cada cenário. Então, $E[x] = 0$; $f(E[x]) = 0^2 = 0$, mas $E[f(x)] = 50\%(+1)^2 + 50\%(-1)^2 = 1 > f(E[x])$.
- Ver tb. DP, p.49: r é a taxa de desconto e a perpetuidade f(r) de $1 é 1/r.

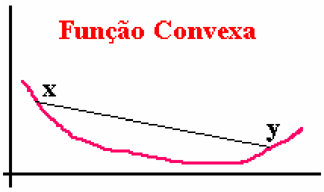
Funções Côncavas e Convexas

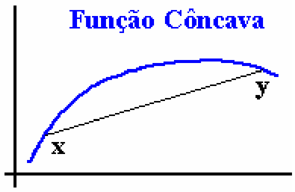
- Uma função é *convexa* no seu domínio (*D*) se toda corda (reta) ligando dois pontos fica <u>acima</u> da função
- Uma função é *côncava* no seu domínio (*D*) se toda corda (reta) ligando 2 pontos fica <u>abaixo</u> da função
- Matematicamente, a função $f: D \to \mathbb{R}$ é *convexa* se e somente se para todos os pontos x e $y \in D$ e $\lambda \in (0, 1)$

  $$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f[\lambda x + (1 - \lambda) y]$$

  - Analogamente, a função *f* é *côncava* se e somente se:

    $$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leq f[\lambda x + (1 - \lambda) y]$$



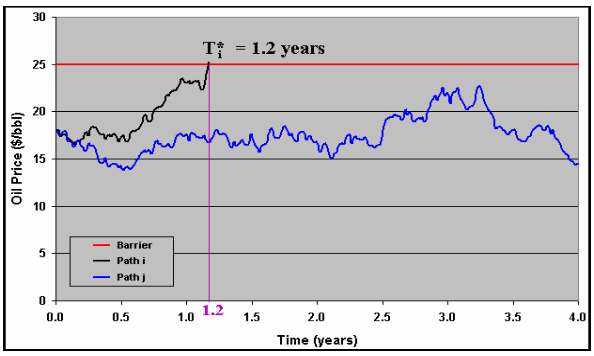


Barreiras Absorventes e Refletoras

- Um processo estocástico X(t) pode atingir um nível superior ou inferior onde algo ocorre com o processo.
  - Esse nível é chamado de *barreira*, que pode ser *absorvente*, *refletora* ou *elástica* (parcialmente absorvente ou refletora).
- Uma barreira é *absorvente* quando o processo estocástico termina assim que ele toca nessa barreira.
  - Ex.: processo estocástico do valor de um projeto V(t) toca num nível superior V* (gatilho) onde a opção é exercida. O processo de V(t) deixa de ter interesse e termina para efeito de tomada de decisão.
  - O valor de uma firma em indústria declinante atinge um valor inferior V** em que a firma entra em falência (abandona).
- Uma barreira é *refletora* quando o processo estocástico é refletido (direção oposta) após tocar essa barreira.
  - Será muito usado em *jogos de opções*: o preço de uma indústria não consegue superar P*, pois as firmas inundam o mercado de produtos (exercem opções) quando P atinge P*.

Tempo de Toque de um Processo Estocástico

- "*First hitting time*" ou "*first passage time*" ou "*first exit time*" denotam o primeiro instante em que um processo estocástico toca (ou cruza) um certo valor (ex.: o gatilho).



Ver planilha.

- A definição de *first hitting time* $T^*(V = b) = T^*_b$ para um processo estocástico V(t) alcançar (ou cruzar) a barreira b, assumindo que o processo inicia com V(t = 0) < b, é:
  $T^*_b = \inf \{ t \geq 0 \, ; \, V(t) \geq b \}$; onde o ínfimo de um conjunto vazio é infinito.

Valor Esperado do Fator de Desconto

- Para *resolver* problemas de OR e de jogos de OR, veremos que será muito útil saber o *fator de desconto esperado* E[exp(- r t*)].
  - Saber E[t*] não é suficiente: E[exp(- r t*)] > exp(- r E[t*]).
  - Note que não há problema em ter caminhos com t* = ∞, pois exp(– r ∞) = 0. Logo, E[exp(– r t*)] ∈ [0, 1], é sempre finito.
- Se X segue um MGB, pode-se provar a <u>importante fórmula</u>:

$$E\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X}{X^*}\right)^{\beta_1} \qquad \text{onde } X^* \text{ é o gatilho}$$

- Onde β_1 é a raiz positiva da eq. quadrática p/ o caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR (r – δ) e taxa de desconto livre de risco r: $\beta_1 = ½ - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,r/\sigma^2}$
- No caso de usar tendência *real* α e taxa de desconto exógena (ajustada ao risco) ρ, i. é, E[exp(– ρ t*)], só muda o β_1:

$$\beta_1 = ½ - \alpha/\sigma^2 + \sqrt{[\alpha/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,\rho/\sigma^2}$$

- Prova: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html#proof

Método Integral de Otimização sob Incerteza

- O método integral pode resolver problemas de OR, pois é um método de *otimização sob incerteza*.
  - Usa <u>métodos tradicionais de otimização</u>. Em problemas de OR *perpétuas*, esse método é mais simples e intuitivo.
  - Baseado no tempo t* que um processo estocástico toca uma barreira (um gatilho), usa muito o valor esperado do *fator de desconto estocástico* $E^Q[\exp(-\,r\,t^*)] = (V/V^*)^{\beta_1}$.
    - Pois a opção pode ser vista como $E^Q[e^{-\,r\,t^*}\,(V^* - I)]$.
- Muito usado p/ resolver jogos de opções reais (ex.: duas firmas disputam um mercado, a *líder* e a *seguidora*) com integrais do tipo:

$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\,Y(t)\,D(1,0)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\,Y(t)\,D(1,1)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I$$

$$F(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\,Y(t)\,D(0,1)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\,Y(t)\,D(1,1)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

Método Integral de Otimização

- O método é particularmente útil para OR *perpétuas*.
  - Usa uma soma de integrais estocásticas para descrever valores de opções, em que os limites de integração são tempos de parada ótima t* combinados com tempos limites triviais (0 e ∞).
  - Método tem no cap. 9 de DP, mas ele foi desenvolvido melhor em Dixit & Pindyck & Sodal (1997), com outros processos estocásticos.
- O problema clássico de *otimização sob incerteza* pode ser visto assim: A firma irá esperar até o primeiro instante t* no qual o valor do projeto V atinge um nível V* (gatilho), alto o suficiente para ser ótimo investir (exercer a OR), i.é:

$$F = \underset{V = V^*}{\text{máximo}} \{E[\exp(-\,r\,t)\,(V - I)]\}$$

  - Sujeito a V seguir um MGB neutro ao risco. No ótimo V = V*, t = t*.
  - Assim, o problema de otimização tem um *trade-off* entre a espera por um *valor maior de V* e a redução de F com a espera por exp(– r t)
  - Vamos provar que se obtém o mesmo resultado para F e V* obtido antes para uma opção americana perpétua por *contingent claims*.

Otimização com o Fator de Desconto Estocástico

- Vamos chamar o *fator de desconto esperado* p/ o tempo que o projeto leva para atingir um valor V, começando em V_0, como sendo $D(V_0, V) = E[\exp(-\,r\,t)]$. Logo,

$$F = \underset{V = V^*}{\text{máximo}} \{D(V_0, V)\,(V - I)\} = D(V_0, V^*)\,(V^* - I)$$

- Usaremos um *método tradicional de otimização* p/ resolver: a *condição de primeira ordem* (*derivada parcial de F em relação a V e iguala a zero em V = V**). “Algebrando”:

$$D(V_0, V^*) + D_{V^*}(V_0, V^*)\,.\,V^* = D_{V^*}(V_0, V^*)\,.\,I \qquad \text{(eq. 1)}$$

  - O 1º termo já foi visto que é $(V_0/V^*)^{\beta_1}$, o 2º termo é sua derivada:

$$D_{V^*}(V_0\,,V^*) = -\,\beta_1\,\frac{V_0^{\beta_1}}{(V^*)^{\beta_1 + 1}}$$

  - Agora, basta substituir $D(V_0, V^*)$ e $D_{V^*}(V_0, V^*)$ na (eq.1), que encontramos o valor de V*. Substituindo V* e $D(V_0, V^*)$ na eq. de maximização de F, obtemos dois resultados conhecidos:

$$\boxed{V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\,.\,I} \qquad \boxed{F = \left(\frac{V_0}{V^*}\right)^{\beta_1}\frac{I}{\beta_1 - 1}} \qquad \text{c.q.d}$$

Projeto com Opção de Shut-Down

- Seguindo DP, cap. 6, seção 2, veremos agora um modelo de opção em função da variável mais básica, o preço P.
  - Primeiro será visto o V(P) com *opção de parada temporária* (opção de "shut-down") e depois a opção composta: opção F(P) (call) de investir I num projeto V(P) com opção de shut-down
    - A análise é feita backwards: primeiro analisa o caso de já ter investido no projeto V(P) (com opção de shut-down) e depois se analisa a opção de investir nesse projeto F(P).
  - Esse exemplo simples também irá ilustrar o caso de EDO p/ V(P) com um termo adicional devido ao fluxo de caixa.
- Por simplicidade, assuma que o projeto tem uma vida *infinita*, produz uma unidade por ano que é vendida por um preço P(t), que segue um MGB. Além disso:
  - Existe um custo operacional C (determinístico) para produzir uma unidade. Logo, o fluxo de lucro da produção é $P - C$.

Projeto V(P) com Opção de Shut-Down

- Sem a opção de shut-down, o valor desse projeto V(P) de vida infinita é (lembrar que P cresce à taxa α no MGB):

$$V(P) = \int_0^{\infty} [(P\, e^{\alpha t}\, e^{-\mu t}) - (C\, e^{-r t})]\, dt = \frac{P}{\mu - \alpha} - \frac{C}{r} = \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$$

- Exercício: mostre que se obtém o mesmo resultado se usar a tendência *neutra ao risco* $(r - \delta)$ em vez de α, e a taxa de desconto livre de risco r (em vez de μ). Por que?
- Agora considere que existe uma *opção de shut-down* sem custo (nem para parar e nem para voltar a produzir), de forma que essa opção é sempre exercida quando $P < C$.
  - Logo, o fluxo de lucro com opção é: $\pi(P) = \text{máx}\{P - C, 0\}$
- Estudar em casa a dedução da EDO de V(P) pelo método dos *contingent claims*. Note que tanto V como P têm dividendos.
  - Para tal, considere o portfólio: $\Phi = V - n$ unidades de P

EDO de V(P) por Contingent Claims

- A carteira sem risco é: $\Phi = V - n P$ (com uma escolha *conveniente* de n para torná-la sem risco).
- No intervalo dt, o retorno é: $r \Phi \, dt = r (V - n P) \, dt$
- Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:
  - Agora V varia (dV) e também distribui dividendos $\pi(P)\, dt$
  - O retorno de P em dt é a soma do ganho de capital dP com o dividendo $\delta P \, dt$, onde δ é o *convenience yield*.
    - Convenience yield pode ser estimado com o *mercado futuro*
  - Logo, retorno da carteira $= dV + \pi \, dt - n \, (dP + \delta P \, dt)$
  - Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r (V - n P) \, dt = dV + \pi \, dt - n \, (dP + \delta P \, dt)$$

  - Agora precisamos de dV: expansão com o Lema de Itô.

EDO de V(P) por Contingent Claims

- Note que V(P) não é função do tempo (produção perpétua) $\Rightarrow \partial V/\partial t = V_t = 0 \Rightarrow$ Lema de Itô p/ dV, é:

$$dV = V_P \, dP + ½ \, V_{PP} \, (dP)^2$$

  - Para obter $(dP)^2$, basta elevar ao quadrado a equação do MGB, $dP = \alpha P \, dt + \sigma VP \, dz$. Logo, $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 \, dt$
  - Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

$$dV = V_P \, dP + ½ \, \sigma^2 P^2 V_{PP} \, dt$$

  - Substituindo a equação de dV na eq. do retorno de Φ

$$r \, (V - n P) \, dt = V_P \, dP + ½ \, \sigma^2 P^2 V_{PP} \, dt + \pi \, dt - n \, (dP + \delta P \, dt)$$

$$\Rightarrow r \, (V - n P) \, dt = (V_P - n) \, dP + ½ \, \sigma^2 P^2 V_{PP} \, dt + \pi \, dt - n \, \delta P \, dt$$

  - Mas para essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dP. Para tal, faz $n = V_P$
  - *Algebrando* se chega à EDO com o termo de cash-flow π:

$$½ \, \sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta) \, P \, V_P - r \, V + \pi = 0$$

Equação Diferencial Ordinária de V(P)

- Essa EDO tem uma *parte homogênea* (em V, em azul) e uma *parte não-homogênea* (em vermelho):

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta)\,P\,V_P - r\,V + \pi = 0$$

  - A parte homogênea tem *solução geral* do tipo $A\,P^{\beta}$ que deve ser somada a alguma *solução particular* devido à parte não-homogênea. Uma simples substituição mostra que a solução de perpetuidade $P/\delta - C/r$ atende a EDO (típico).
- Como $\pi = 0$ quando $P < C$ e $\pi > 0$ quando $P > C$, a solução será dividida em duas regiões de valores de P:
  - Na região $P < C$, o "cash-flow" desaparece e a solução é:
  - $V(P) = K_1\,P^{\beta_1} + K_2\,P^{\beta_2}$; onde $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$ são raízes da eq. quadrática: $\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,\beta\,(\beta - 1) + (r - \delta)\,\beta - r = 0$
  - Na região $P > C$, soma-se as soluções geral e particular:
  - $V(P) = B_1\,P^{\beta_1} + B_2\,P^{\beta_2} + P/\delta - C/r$;(β_1 e β_2 são os mesmos)

V(P) e Condições de Contorno

- As cc. determinarão as constantes K_1, K_2, B_1 e B_2.
  - No caso de $P < C$, se <u>P ficar próximo de 0</u> o valor de V deve tender a zero também. Para isso é necessário que $K_2 = 0$ (caso contrário o termo com o expoente negativo β_2 iria a infinito);
  - No caso de $P > C$, se <u>P for muito grande</u> o valor de V deve ficar apenas um pouco maior que o fluxo de caixa $P/\delta - C/r$, pois a opção de shut-down torna-se muito menos valiosa. Assim, é necessário que $B_1 = 0$ (caso contrário o termo "de opção" com o expoente positivo β_1 se tornaria cada vez maior com P).
    - Termos do tipo $A\,P^{\beta}$ são termos de *opção* (aqui de "shut-down").
- Logo, o valor do projeto implantado V(P) se reduz a:

$$V(P) = \begin{cases} K_1\,P^{\beta_1} & \text{se } P < C \\ B_2\,P^{\beta_2} + \dfrac{P}{\delta} - \dfrac{C}{r} & \text{se } P > C \end{cases}$$

- Interpretação: se $P < C$, V(P) é o valor da *opção de reativar a produção* (já que existe probab. de P voltar a ser > C); já se $P > C$, além do fluxo de caixa, existe a *opção de shut-down* se P vier a cair.

V(P) e Condições de Contorno

- **Para determinar as constantes restantes (K_1 e B_2) usaremos cc. similares às *condições de continuidade e de suavidade* no valor de gatilho, que aqui é P** = C**
  - **Por continuidade em P = C, podemos igualar as duas eqs. de V(P): $K_1\, C^{\beta_1} = B_2\, C^{\beta_2} + C/\delta - C/r$**
  - **As derivadas em P = C também devem ser iguais para as duas eqs. de V(P) (função deve ser suave, sem quinas): $\Rightarrow \beta_1\, K_1\, C^{\beta_1 - 1} = \beta_2\, B_2\, C^{\beta_2 - 1} + 1/\delta$;**
- **Temos duas variáveis e duas equações *lineares*. Logo:**

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta}\right) \quad \Bigg| \quad B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta}\right)$$

- **Note que essas constantes tem de ser *positivas* para as opções também serem positivas (DP mostra isso matematicamente).**

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e, em alguns casos, apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Pesquisa de Graham & Harvey (2001)

- Maior pesquisa já feita sobre práticas corporativas, com 392 CFO's dos EUA e Canadá: crescimento surpreendente de OR.
  - Journal of Financial Economics, vol.60, 2001, pp.187-243

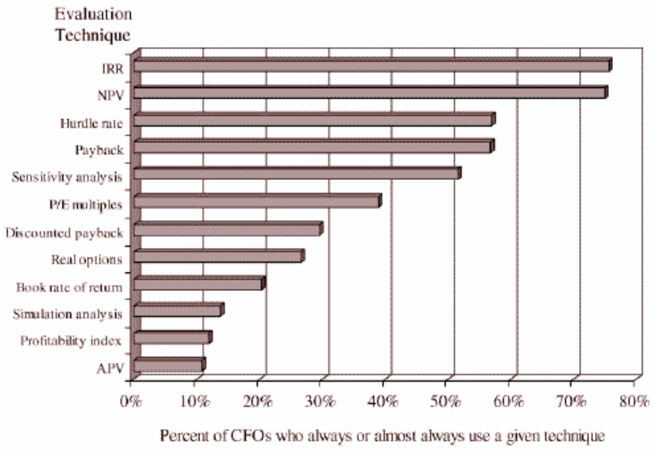


Fig. 2. Survey evidence on the popularity of different capital budgeting methods. We report the percentage of CFOs who always or almost always use a particular technique. IRR represents internal rate of return, NPV is net present value, *P/E* is the price-to-earnings ratio, and APV is adjusted present value. The survey is based on the responses of 392 CFOs.

Quando as Opções Reais São Mais Valiosas

- A flexibilidade (opções reais) tem mais valor quando:
  - Grande incerteza em relação ao futuro
    - Grande chance de obter novas informações relevantes ao longo do tempo. Informações podem ser obtidas a um custo ou grátis.
  - Muito espaço para a flexibilidade gerencial
    - Permite à gerência responder adequadamente a esta nova informação (exs.: investindo numa capacidade mais adequada; expandir ou contrair o projeto; etc.)
  - O VPL sem flexibilidade está próximo de zero
    - A opção (flexibilidade) de mudar os rumos do projeto tem mais chance de ocorrer nesse caso
- Sob as condições acima, a diferença entre o VPL e o valor de opções reais é substancial (Tom Copeland)

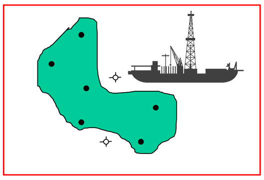
Outros Tipos de Opções

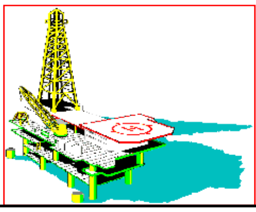
- **Opções de mudança de uso (*switch-use*), baseadas na múltipla aplicabilidade de um ativo ou capacidade; e opções de mudança de insumo (*switch-input*). Exs.**
  - **O navio P.P. Moraes construído para viagens domésticas, foi convertido p/ viagens internacionais, depois foi convertido em unidade de processo na Bacia de Campos e agora produz petróleo em águas profundas;**
  - **Automóveis “flex-fuel” (dois ou + combustíveis): OR para o consumidor;**
  - **Terreno com casa pode ser redesenvolvido (edifício, shopping);**
  - **Unidade industrial bicombustível (carvão e óleo combustível).**
- **Opções de modificação: capacidade de mudar a escala, a locação ou as características de um projeto. Exs.:**
  - **Campanha publicitária do Banco do Brasil (Guga, seleção de vôlei) pode ser ampliada, reduzida ou modificada ao longo do tempo.**
  - **Geradoras térmicas móveis (barcaças, containers, caminhões), em geral de ~100 MW. Existem 7000 MW no mundo (O Globo, 22/7/01).**
  - **Terceirização de parte da mão de obra permite eventual contração da escala produtiva (em caso de baixa demanda) a um custo menor.**

Opções Reais Seqüenciais em Exploração e Produção de Petróleo

Fator de chance (FC) p/ achar petróleo/gás

Volume esperado de reservas = B





⇒ **Bloco (prospecto): Opção de perfurar o pioneiro**

Investimento em Exploração

⇒ **Campo Não Delimitado: Opção de delimitar**

Investimento em Delimitação

⇒ **Reservas Não-Desenvolvidas: Opção de desenvolver (colocar em produção) a reserva**

Investimento em Desenvolvimento

⇒ **Reservas Desenvolvidas: Opções de expansão (perfurar mais poços, aplicar nova tecnologia); de parar temporariamente e de abandonar**

Teorias e Ferramentas Tradicionais

- **CAPM: taxas de desconto ajustadas ao risco**
  - **Teoria é válida mas insuficiente e mais restritiva**
  - **Problemas práticos: cálculo do(s) beta(s)**
  - **Taxas de desconto podem variar na presença de opções**
- **Simulação de Monte Carlo**
  - **Ferramenta de simulação, <u>não é de otimização</u>**
    - **Simulação é "forward", otimização é "backward".**
    - **Precisa de otimizador ou algoritmo complementar de otimização**
  - **Calcula valor esperado e distribuição de probabilidade**
  - **Tem sido cada vez mais usada no cálculo de opções reais**
    - **MC + otimização para opções *americanas* é tema relativamente recente**
- **Árvore de Decisão**
  - **Explicita as ações gerenciais e as incertezas**
  - **Com a correta taxa de desconto + probabilidades, é a teoria das opções em *tempo discreto*. Se resolve "backwards".**

Exemplo em Petróleo e Qualidade da Reserva

- **Imagine que você quer comprar 100 milhões de barris de reservas desenvolvidas. O valor da reserva claramente depende da expectativa de preço de longo-prazo do petróleo, mas não só.**
- **Quanto você pagaria por barril de <u>reserva</u> já desenvolvida?**
  - **Isso depende de vários fatores tais como a qualidade da rocha-reservatório (produtividade da jazida), qualidade dos fluidos (óleo pesado x leve, etc.), país (regime fiscal, risco político), localização (águas profundas tem maior custo operacional que as reservas onshore), o capital *in place* (velocidade de extração e logo o valor presente da receita depende do número de poços), etc.**
- **Quanto maior é o valor do barril de reserva em relação ao barril de óleo (na superfície), maior é a qualidade econômica: valor de um barril de reserva = v = q . P**
  - **Onde q = qualidade econômica da reserva desenvolvida**
  - **O valor da reserva desenvolvida é v vezes o *tamanho da reserva* (B)**
  - **Logo, vamos usar a equação para o VPL = $V - I_D$ = $q\ P\ B - I_D$**
    - **I_D = custo de investimento de desenvolvimento (ou *preço de exercício da opção*)**

Exemplo de Escolha da Melhor Alternativa

- **Um empresário vai fabricar um produto com demanda incerta. Ele tem duas alternativas mutuamente exclusivas, A e B.**
  - **A alternativa A usa uma tecnologia "taylor made", com máquinas desenhadas para máxima eficiência em fabricar esse produto. Essa tecnologia usa pouca mão de obra (automação).**
    - **Uma análise de FCD mostrou: VPL_A = 500 – 400 = 100 MM$.**
  - **A alternativa B usa uma tecnologia menos eficiente, com máquinas padronizadas (tornos, fresas), usa mais mão de obra (mas é mais flexível). VPL_B = 450 – 355 = 95 MM$.**
- **Pela análise tradicional, a alternativa A seria a escolhida.**
  - **No entanto, a alternativa B tem um valor de opção de abandono bem mais valiosa do que a alternativa A, que não foi computada. Isso *pode* inverter o valor das alternativas.**
    - **Se a demanda cair (ex.: entrada de um produto substituto melhor ou mais barato), as máquinas da tecnologia A não tem valor. Já as máquinas da alternativa B tem valor no mercado secundário.**

Recordação de Taxa de Desconto

- **Num mercado em equilíbrio, risco e retorno são ligados**
  - **A taxa ajustada ao risco é o retorno esperado (ou exigido) pelos acionistas. Quanto maior o risco *sistemático* (risco correlacionado com a economia), maior é o retorno exigido pelo mercado.**
  - **Em mercados competitivos, qualquer redução desse risco é compensada por uma redução do retorno**
- **A taxa ajustada ao risco é composto de duas parcelas, a taxa livre de risco r_f (ajuste do valor do dinheiro no tempo) mais uma parcela de prêmio de risco, conforme o CAPM (Capital Asset Pricing Model):**

$$\mu = \underbrace{r_f}_{\text{Prêmio temporal (adiamento de consumo)}} + \underbrace{\beta\,(r_m - r_f)}_{\text{Prêmio de risco}}$$

Método da Neutralidade ao Risco

- O método da neutralidade ao risco <u>não supõe</u> que os investidores são neutros ao risco.
  - Vale para avessos ao risco e até para amantes e neutros ao risco.
  - Através de "probabilidades adequadas" q e $1 - q$, o valor do ativo básico é penalizado (certeza equivalente) e isso permite que se use a taxa de desconto livre de risco para obter o preço correto.
- O ponto chave é que essa mudança de probabilidade permite calcular o valor de *qualquer* ativo derivado desse ativo básico V.
  - A taxa *ajustada ao risco da opção* não é igual à taxa ajustada ao risco *do ativo básico*. A boa notícia é que não precisamos dela!
- Num contexto mais geral, o método da neutralidade ao risco é provado com ajuda do *teorema de Girsanov* (teorema de mudança de medida).
- Essa probabilidade q é usada para apreçar opções usando

Método da Medida Neutra ao Risco

- O método da carteira neutra ao risco parece mais convincente do que o método da probabilidade neutra ao risco, pois é mais intuitivo aceitar o argumento de não-arbitragem (se a carteira sem risco der um retorno diferente da taxa r, gera arbitragem).
  - Mas o método da medida neutra ao risco dá igual resultado! O link será formalizado pelo *teorema fundamental de apreçamento de ativos*.
  - Se o retorno esperado (sob medida real P) de um ativo *em equilíbrio* é μ, matematicamente podemos mudar o cálculo do retorno esperado (usando uma medida Q) para que o retorno seja a taxa livre de risco r.
  - Como uma variável aleatória é um martingale sob medida Q se $E^Q[X(t)] = X(0)$, $\forall\, t > 0$, então queremos que o valor *descontado* por r seja um martingale sob uma certa medida Q. Para quê? Pelo seguinte:
  - Seja o ativo básico V com $\delta = 0$ e seja F(V, t) uma função (*derivativo*) de V. Então o martingale abaixo é um preço F(t = 0) livre de arbitragem:

$$F(t = 0) = E^Q[e^{-rt}\, F(V, t)] \quad \text{(onde Q é tal que } E^Q[e^{-rt}\, V(t)] = V(0)\text{)}$$

    - Isso não foi demonstrado, só mostrado no ex. do seguro, <u>mas é bem geral</u>.
    - Além disso, tem um teorema que diz que num mercado *completo* existirá uma *única* medida equivalente Q tal que o preço F é livre de arbitragem.

Teoremas Fundamentais de Preços de Ativos

- Os dois teoremas fundamentais de precificação de ativos são devidos a Harrison & Kreps (1979) e Harrison & Pliska (1981). Esses teoremas unem os conceitos de arbitragem e martingale:
  - ❶ A existência de *alguma* medida neutra ao risco, chamada de medida equivalente de martingale, é igual a ausência de arbitragem. Isto é:

Mercado é livre de arbitragem ⇔ Existe alguma medida equiv. de martingale

- O valor descontado (por r) de um ativo é um preço livre de arbitragem se e somente se é um martingale sob essa medida equivalente de probabilid.

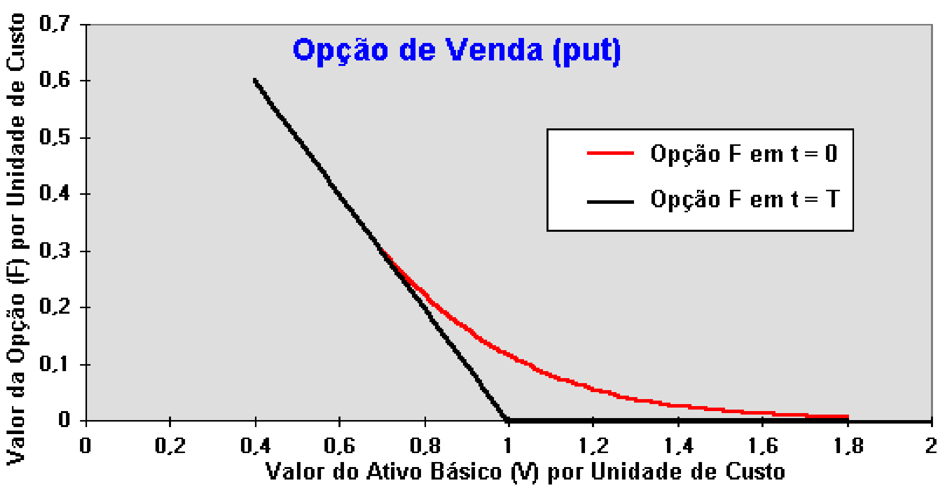
  - ❷ Quando a medida de martingale é única (para um ativo e seus derivativos), equivale a dizer que o mercado é completo. Ou melhor:

Mercado é completo ⇔ Medida equivalente de martingale Q é única

- O 1º teorema faz uma ligação fundamental entre *arbitragem* e *martingale*, gerando facilidades matemáticas devido à bem desenvolvida *teoria de integração estocástica de martingales.*
  - O nome "*Fundamental Theorem of Asset Pricing*" é devido a Dybvig & Ross (Palgrave Dictionary of Economics, 1987) e é usado amplamente.
  - Ver Battig & Jarrow (1999) p/ uma discussão dos teoremas e teoria + geral.

Opção de Venda Antes da Expiração

- Analogamente, o valor da opção de venda americana antes da expiração vale mais do que na expiração



Equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M)

- O valor da <u>opção *européia* de compra</u> antes do vencimento é dada pela equação de B&S&M (a *versão com dividendos*), deduzida por arbitragem, que só <u>depende só de 6 parâmetros</u> de mercado:
  - preço do ativo básico (ação), V ;
  - preço de exercício da opção, K ;
  - *volatilidade* do ativo básico (desvio-padrão da taxa de retorno do ativo básico, isto é, de dV/V), σ ;
  - o tempo que falta para a expiração da opção, τ ;
  - a taxa de juros livre de risco, r ; e
  - a taxa de distribuição de dividendos do ativo básico, δ (*dividend yield* em % p.a. de V).

Equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M)

- A equação de Black & Scholes, *versão com dividendos* (Merton), para uma opção de <u>compra européia</u>, é dada pela seguinte solução de uma EDP:

$$C = V\, e^{-\delta\tau}\, N(h) - K\, e^{-r\tau}\, N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\right)$$

  - Onde: $$h = \left[\ln\left(\frac{V}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

N(.) = função distribuição normal padrão acumulada (obtida em tabela ou como função de planilha)

- Para o caso sem dividendos, basta fazer δ = 0
- Repare que não entra "taxa ajustada ao risco" ou "taxa de crescimento esperada" da ação

Interpretação de Black & Scholes & Merton

- **Podemos interpretar os termos da equação de B&S&M, observando valores presentes de expectativas sob probabilidades neutras ao risco, que consideram a ação ótima (opção) nos cenários possíveis de V em t = T, faltando τ anos para a expiração da opção:**

Probabilidades neutra ao risco (com ponderação de valor) de V > K na expiração

$$C = \underbrace{V e^{-\delta \tau}}_{\text{Valor presente do valor do ativo básico}} N(h) - \underbrace{K e^{-r \tau}}_{\text{Valor presente do custo de exercício}} N\left(h - \sigma \sqrt{\tau}\right)$$

h é função de V, K, r, δ, σ, τ

Valor presente esperado de V se V > K na expiração (usando prob. neutra ao risco)

Valor presente de K se V > K na expiração

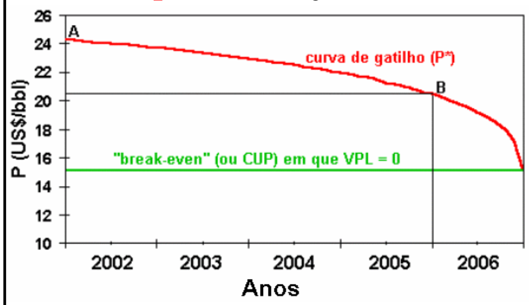
Fatores Que Afetam o Valor da Opção

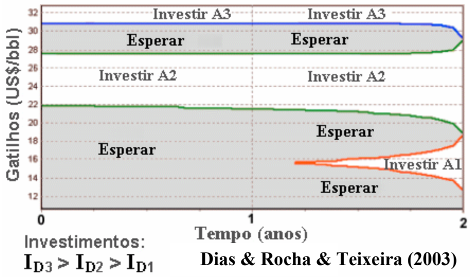
- **Como varia as opções de compra e de venda se variar (*ceteris paribus*) os parâmetros da fórmula de B&S&M?**

Fator	Efeito na Opção de Compra	Efeito na Opção de Venda
Aumento de V (valor da ação)	Aumenta	Diminui
Aumento de K (preço de exercício)	Diminui	Aumenta
Aumento da Volatilidade	Aumenta	Aumenta
Aumento do Tempo de Expiração	Aumenta	Aumenta
Aumento na Taxa de Juros	Aumenta	Diminui
Aumento nos Dividendos Pagos	Diminui	Aumenta

Curva de Gatilhos: Tipos e Como Calcular

- A curva de gatilhos dá a regra de decisão para exercício ótimo das opções reais (OR). Ela depende da incerteza de mercado.
  - Essa regra de exercício ótimo pode ser *simples* (curva de gatilhos) ou *complexas* (conjuntos *desconectados* de exercícios):





Investimentos: $I_{D3} > I_{D2} > I_{D1}$

Dias & Rocha & Teixeira (2003)

- A curva ou regiões de gatilho podem ser obtidas de vários modos:
  - Tradicional: resolve um equação diferencial parcial (EDP) através de diferenças finitas ou aproximações analíticas
  - Simulação de Monte Carlo + método tradicional de otimização
  - Simulação de Monte Carlo + método de inteligência computacional

Prova: Exercício Antecipado Não É Ótimo se $\delta = 0$

- Para provar que nunca é ótimo exercer antecipadamente ($t < T$) uma opção americana de compra C escrita sobre V com $\delta = 0$, primeiro temos de provar que vale a seguinte desigualdade p/ uma opção *européia* de compra c(t) se V não paga dividendos:
  - $c(t) \geq \text{Máx}[0, V(t) - K\, e^{-r(T-t)}]$, para qualquer $t \in [0, T]$ (*)
  - ou $c(t) > \text{Máx}[0, V(t) - K\, e^{-r(T-t)}]$, para qualquer $t < T$
    - A segunda inequação assume que V é estocástico e *pode* ocorrer V(T) > = < K.
- Iremos provar a inequação (*) comparando dois portfólios:
  - Portfólio A: consiste de uma unidade do ativo básico V(t).
  - Portfólio B: uma opção de compra européia c(t) mais um título de renda fixa que vale hoje $K\, e^{-r(T-t)}$.
  - Na data de expiração T, pode ocorrer um dos dois casos para V:
    - $V < K$: nesse caso o portfólio A vale V e o portfólio B vale K (ganho dos juros; c(T) = 0). Como $V < K$, o portfólio B vale mais que o portfólio A; e
    - $V \geq K$: nesse caso o portfólio A vale V e o portfólio B também vale V.
  - Logo, o portfólio B vale mais que o portfólio A $\Rightarrow c + K\, e^{-r(T-t)} \geq V \Rightarrow$ $\Rightarrow c(t) \geq V(t) - K\, e^{-r(T-t)}$, provando (*).

Prova: Exercício Antecipado Não É Ótimo se $\delta = 0$

- Note no slide anterior que se V pagasse dividendos ($\delta > 0$), então não poderíamos afirmar nada pois o portfólio A valeria V + δV, que é maior que o valor do portfólio B (= V) no caso de V > K.

◆ Agora podemos provar que se o ativo básico V não paga dividendos ($\delta = 0$), nunca será ótimo exercer antecipadamente (t < T) uma opção americana de *compra* C.

- Como $C(t) \geq c(t)$ e dado a inequação provada no slide anterior, vem:
- $C(t) \geq V(t) - K\, e^{-r(T-t)} > V(t) - K$, p/ $t < T$ e assumindo que $r > 0$
  - ➡ Alternativamente, p/ t < T, mesmo que r = 0 temos $C(t) > V(t) - K$ se assumir que V(T) é estocástico (i.é, pode ocorrer V < K em T). Prova?
- Se para todo t < T a opção C "viva" (sem exercer) vale sempre mais que o valor obtido exercendo a mesma, então não vale nunca a pena exercer a opção antecipadamente (em t < T). c.q.d.
- Nesse caso ($\delta = 0$) o direito adicional não tem valor $\Rightarrow C(t) = c(t)$.

◆ Já para uma opção americana de *venda* P, pode valer a pena o exercício antecipado, mesmo que o ativo básico V tenha $\delta = 0$.

- No caso da opção americana de *venda*, o exercício *antecipado* nunca é ótimo se r = 0.

Opções Americanas e Européias: Limites

◆ A opção americana de compra (C) e a de venda (P) têm os seguintes limites inferiores, indicados pelas desigualdades:

- $C(t) \geq \text{Máx}[0, V(t) - K]$, para qualquer $t \in [0, T]$
- $P(t) \geq \text{Máx}[0, K - V(t)]$, para qualquer $t \in [0, T]$
- A prova é óbvia, pois seu valor é sempre não negativo (já que não é obrigado a exercer a opção) e vale pelo menos o seu valor intrínseco, já que pode ser exercida a *qualquer momento* ganhando esse payoff.

◆ Já a opção européia de compra (c) e a de venda (p), podem valer menos que seu valor intrínseco, antes da expiração.

◆ Vimos que uma opção americana vale tanto ou mais que uma opção européia, por poder fazer tudo que a última faz e ter o direito adicional de exercício antecipado. Logo, $C \geq c$; $P \geq p$

◆ O direito adicional de exercício antecipado só valerá zero se nunca for ótimo o exercício antecipado da opção.

- No caso da opção de compra C, isso ocorre para $\delta = 0$ (provaremos agora). No caso da opção de venda P, isso ocorre para r = 0.

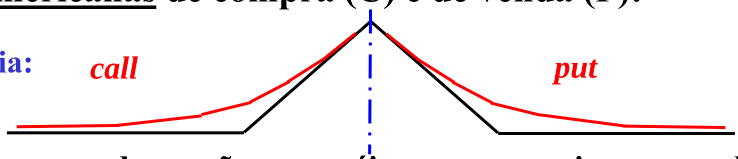
Paridade/Simetria de Opções Americanas

- Na literatura é muito conhecida (ex.: ver Hull) a paridade entre as opções <u>européias</u> “call” (c) e “put” (p), com mesmo preço de exercício K e com mesma expiração T e dado o preço inicial V_0:

$$c - p = V_0\, e^{-\delta T} - K\, e^{-r T}$$

- Menos conhecido é a simetria (um tipo de paridade) entre as opções <u>americanas</u> de compra (C) e de venda (P):

Simetria:



  - Tanto no caso das opções européias como americanas, a relação de paridade/simetria permite que um software que resolva opções de compra, automaticamente resolva opções de venda e vice-versa
    - No caso das opções americanas isso se dá através duma *permutação* específica dos dados de entrada (V com K e r com δ).
    - Por ex., para calcular a *call* americana dado um software que calcula *put*:

$$C(V, K, r, \delta, \sigma, \tau) = P(K, V, \delta, r, \sigma, \tau)$$

Paridade/Simetria de Opções Americanas (2)

- O gatilho de uma call V* dado o gatilho da put V** é:

$$V^*(K, r, \delta, \sigma, \tau) = \frac{V\,.\,K}{V^{**}(V, \delta, r, \sigma, \tau)}$$

- Existe uma relação de simetria ainda mais geral
  - Relação válida para o mesmo tempo de expiração τ e <u>para o mesmo *grau de lucratividade*</u> $V_c/K_c = K_p/V_p$

$$P(V_P, \tau\,;\, K_P, r, \delta) = \sqrt{\frac{V_P\, K_P}{V_C\, K_C}}\; C(V_C, \tau\,;\, K_C, \delta, r)$$

Cálculo do gatilho é igual: $\sqrt{V^*(K_C;\ \delta, r)\, V^{**}(K_P; r, \delta)} = \sqrt{K_C\, K_P}$

Onde: V_C e V_P = valores das ações sobre as quais estão escritas as opções de compra e de venda, respectivamente.

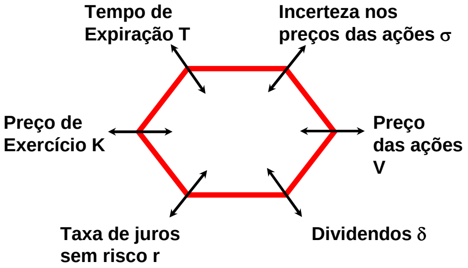
K_C e K_P = preços de exercício das opções de compra e de venda, respectivamente.

V* e V** = valores de gatilho das opções de compra e de venda, respectivamente.

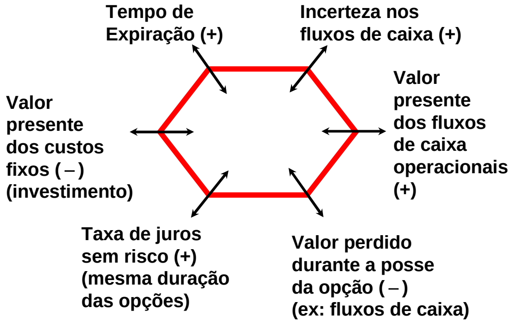
Analogia Opções Financeiras x Reais

- Os seis parâmetros usados na equação de Black-Scholes & Merton e em opções americanas call, tem a seguinte analogia com opções reais:

- **Opções financeiras**



- **Opções reais**



- OBS: Entre parênteses está mostrado o efeito da sensibilidade do valor da opção

- O tempo de expiração pode ser perpétuo (terreno) ou finito; estipulado por lei (petróleo, patente) ou estimado em função da concorrência

Opções Financeiras x Opções Reais

- Nas opções reais, os ativos básicos são do tipo não-financeiros ou “reais” ou “produtivos”
  - Exs.: projeto de produção de petróleo; de aços planos; de uma novela de TV; de um remédio; etc.
- As analogias entre opções financeiras e reais tem de respeitar as <u>diferenças</u> entre as duas:
  - Tipicamente as opções financeiras são de curto prazo (< 1 ano) enquanto que as opções reais podem ser até perpétuas.
  - Ativos financeiros, tais como as ações, não podem ter valores negativos. Um projeto pode ter valor negativo.
  - Opções reais são mais complexas que as financeiras: preço de exercício pode ser incerto; é comum ter opções reais compostas; presença de incertezas técnicas além da incerteza de mercado; e interações estratégicas com outras firmas.
  - No exercício de opções reais existe o tempo de construção.

Analogia Opção Financeira-Opção Real

- **Uma diferença entre o caso financeiro e o caso de projeto, é que no segundo caso existe o "tempo de construção" (não se obtém o ativo imediatamente)**
  - **Isso pode ser considerado usando o valor presente do invest.**
  - **Existem modelos mais sofisticados de tempo de construção**
- **O cálculo de δ (taxa de distribuição de fluxo de caixa):**
  - **Média das razões anuais entre o fluxo de caixa e o valor do projeto (FC_t/V_t) (ex.: aluguel de imóvel/seu valor)**
  - **Em petróleo e recursos minerais tem de considerar a depleção da jazida. Usa-se aqui também o *convenience yield.***
- **Valor do projeto implantado (V):**
  - **É a melhor *estimativa de mercado* para V. Ela pode ser obtida observando valores correntes do mercado (preço de um imóvel, preço de uma reserva desenvolvida de petróleo) ou, na falta de valor direto do mercado, pelo FCD (fluxo de caixa descontado) com a taxa de desconto apropriada.**

Simplicidade do Mov. Geométrico Browniano

- **O uso do MGB em modelos de opções é mais simples por ter menos parâmetros para estimar e por causa da homogeneidade da equação diferencial.**
  - **Temos de estimar somente os parâmetros r, δ e σ.**
  - **Na reversão à média temos de estimar ao menos r, σ, μ, η e $\bar{P}$**
- **A homogeneidade ocorre tanto na equação do valor da opção como na própria equação original do MGB:**
  - **Ex.: Se o preço P segue um MGB e o valor do projeto V é proporcional a P (isto é, V = k P), então V segue também um MGB e com os mesmos parâmetros do MGB de P:**
    - $dP = \alpha P\, dt + \sigma P\, dz$ **e** $V = k\, P \Rightarrow k\, dP = \alpha\, k\, P\, dt + \sigma\, k\, P\, dz \Rightarrow$
    - $d(k\, P) = \alpha\, (k\, P)\, dt + \sigma\, (k\, P)\, dz \Rightarrow dV = \alpha V\, dt + \sigma V\, dz$
    - **Uma demonstração usando o Lema de Itô tem no website.**
- **A homogeneidade da opção será vista depois. Essa *não* ocorre p/ a reversão à média (distr. de retornos depende de P em t = 0).**

Movimento de Reversão à Média (MRM)

- **O movimento de reversão à média é um processo de Markov, mas, ao contrário do MGB, o sentido e a intensidade da tendência dependem do preço corrente.**
- **O MRM aritmético, chamado *Ornstein-Uhlenbeck*, é:**

$$dx = \eta(\bar{x} - x)\,dt + \sigma\,dz$$

- **Onde: η = velocidade de reversão e $\bar{x}$ = média de longo prazo (valor de equilíbrio)**
- **Na equação acima, é comum modelar os preços P com reversão usando relações como $x = \ln(P)$ p/ evitar $P(t) < 0$.**
- **Outros modelos de reversão à média são o MRM geométrico (Dixit & Pindyck) e o de Battacharya. Resp.:**

$$\frac{dP}{P} = \eta(\bar{P} - P)\,dt + \sigma\,dz \quad \Big| \quad dP = \eta(\bar{P} - P)\,dt + \sigma P\,dz$$

- **Ver também www.puc-rio.br/marco.ind/revers.html**

Prova de que $(dz)^2 = dt$

- **A prova de que $(dz)^2 = dt$ é dividida em duas partes:**
  - **Primeiro se prova que $E[(dz)^2] = dt$ e depois se prova que $Var[(dz)^2] = 0$. Isso implicará que $(dz)^2 = dt$.**

❶ **Lembrando que o *incremento de Wiener* $dz = \varepsilon\,(dt)^{½}$,**
  - **$E[(dz)^2] = E[\varepsilon^2\,dt] = dt\;E[\varepsilon^2]$; mas a variância de ε é por definição igual a 1 (normal padronizada), ou seja:**
  - **$Var(\varepsilon) = 1 = E[\varepsilon^2] - (E[\varepsilon])^2 = E[\varepsilon^2] - 0 \Rightarrow E[\varepsilon^2] = 1 \Rightarrow$**
  - **Substituindo $\Rightarrow$ $E[(dz)^2] = dt$ □**

❷ **Para provar que $Var[(dz)^2] = 0$,**
  - **$(dz)^2 = \varepsilon^2\,dt \Rightarrow Var[(dz)^2] = Var[\varepsilon^2\,dt] = dt^2\;Var[\varepsilon^2]$**
  - **Mas $dt^2 \cong 0 \Rightarrow Var[\varepsilon^2\,dt] = 0\,.\,Var[\varepsilon^2] \Rightarrow Var[\varepsilon^2\,dt] = 0$ □**

- **Ou seja, embora dz seja variável aleatória com distrib. normal, o seu quadrado $(dz)^2$ é determinístico!**
  - ➡ **Para o caso mais geral (dz^n, $n \geq 2$) ver Ingersoll, 1987, p. 348.**

Processo Estocástico da Opção

- Seja V (ex.: ativo básico) seguindo um processo de Itô (MGB, reversão, etc.). Seja uma função F(V, t), por ex. uma OR, pelo menos duas vezes diferenciável em relação a V e uma vez em relação a t. Mostraremos com o Lema de Itô que F(V, t) também segue um processo de Itô.
  - Sabemos também que a fórmula (lema) de Itô para F(V, t) é:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}(dV)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

  - V segue processo de Itô: $dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$. Sabemos que $(dV)^2 = b^2(V, t)\, dt$. Substituindo, vem:

$$dF = \left[a(V,t)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2} b^2(V,t)\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right] dt + b(V,t)\frac{\partial F}{\partial V} dz$$

- Logo, como V, a função F também segue um processo de Itô, mas em geral com drift e variância diferentes.
  - Mas os parâmetros do ativo básico (ex: drift α e volatilidade σ, se V seguir um MGB) aparecem no processo de F.

Exemplo de Aplicação do Lema de Itô

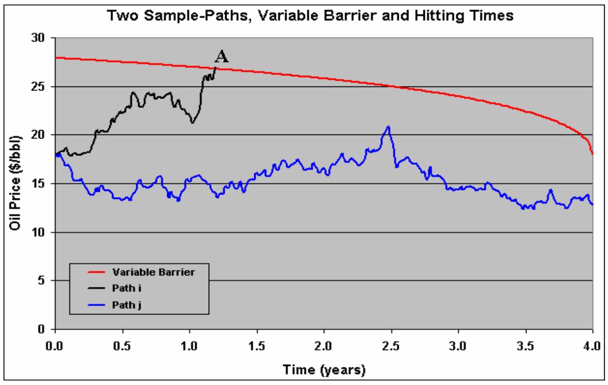
- Seja uma variável estocástica P seguindo um MGB:
  - $dP = \alpha\, P\, dt + \sigma\, P\, dz$. Sabemos agora que $(dP)^2 = \sigma^2 P^2\, dt$
- Seja uma variável p dada pela função: $p = \ln(P)$.
- Prove que p segue um movimento *aritmético* Browniano (MAB) e ache a equação estocástica que descreve dp.
  - As derivadas a serem usadas no Lema de Itô são:
    - $\partial p/\partial t = 0$; $\partial p/\partial P = 1/P$; $\partial^2 p/\partial P^2 = -1/P^2$.
  - Aplicando o Lema de Itô para p(P, t):
  - $dp = (1/P)\, dP - ½\, (1/P^2)\, (dP)^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow dp = \alpha\, dt + \sigma\, dz - ½\, \sigma^2\, dt \Rightarrow$

  $\Rightarrow dp = (\alpha - ½\, \sigma^2)\, dt + \sigma\, dz$
  - Ou seja, um MAB com a mesma volatilidade de dP/P, mas diferentes drifts $\Rightarrow$ $dP/P \neq d(\ln(P))$, i. é, $dP/P > d(\ln(P))$.

First Hitting Time: Aplicações

- Tem inúmeras aplicações em opções e jogos de opções
  - Planejamento: se um projeto não está "deep-in-the-money", qual o tempo esperado para ele atingir a curva de gatilhos?
  - Cálculo da opção: exerce a opção em t* (t que atinge o gatilho), o valor da opção F(0) é o payoff descontado por E[exp(– r t*)].
  - No primeiro caso se considera o processo real e no segundo caso o processo estocástico neutro ao risco.



Valor Esperado do Tempo de Toque E[t*]

- O valor de E[t*] depende da tendência do processo estocástico. Ex.: p/ uma barreira superior P*, o processo NR demora mais do que o processo real para atingir P*.
- O cálculo do valor esperado desse tempo de toque, E[t*], é relevante p/ *planejamento de portfólio* (processo é *real*):
  - Quando é esperado o exercício da OR de investir num projeto?
- Se o ativo básico V segue um MGB com drift α e valor inicial V_0, então E[t*] até uma barreira superior b fixa é:

$$E[\,t^*(V = b)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2} \ln\left(\dfrac{b}{V_0}\right) & \text{se } \alpha > \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \infty & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2}\sigma^2 \end{cases}$$

$(\text{com } b > V_0)$

  - Mais detalhes: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html
  - Ver planilha simula-hit_time.xls que inclui fórmulas (MGB) p/ densidade de probabilidade de t*, probabilidade acumulada de atingir b e probabilidade de eventual toque p/ 1 e 2 barreiras.

Simplificação do Modelo: Homogeneidade

- **Podemos tratar V e D estocástico com o mesmo modelo unidimensional anterior (com pequenas adaptações).**
- **Isso é possível devido a homogeneidade de grau 1 da opção F em relação a V e D: $F(c\,.V, c\,.D) = c\,.\,F(V, D)$**
  - ➡ **$F(V, D, t) = D\,.\,F/D(V/D, 1, t) = D\,.\,f(p, 1, t)$; onde:**
  - **$f = F/D$ (valor da opção por unidade de investimento)**
  - **$p = V/D$ (valor do projeto por unidade de investimento)**
- **Assim, temos uma opção f sobre uma única variável estocástica p, com preço de exercício = 1.**
- **O gatilho normalizado p* = (V/D)* é homogêneo de grau 0 em V e D (vale p/ MGBs, ver McDonald & Siegel, 1986).**
  - **Isso significa que a regra p* = (V/D)* permanece válida para *qualquer* V e D. O gatilho (V/D)* só muda se mudar um ou mais *parâmetros do processo estocástico neutro ao risco* r, δ, σ.**
  - **Isso simplificará muito um caso que combina incertezas técnicas.**

Redução da Dimensionalidade da EDP

- **Seguindo passos similares a DP (p. 210), i. é, derivando $F(V, D, t) = D\, f(p, 1, t)$ para achar F_V, F_{VV}, F_D, F_{DD}, F_{VD} e F_t, e substituindo na EDP anterior F(V, D, t), obtém-se a seguinte EDP para a opção normalizada f = F/D:**

$$\frac{1}{2}\,\sigma_T^2\,p^2\,f_{pp} + (\delta_D - \delta_V)\,p\,f_p - \delta_D\,f = -\,f_t$$

Obs: Em geral se assume que o "dividend yield" do custo D é a taxa de juros, i. é, $\delta_D = r$, mas poderia usar outro valor (ex.: $\delta_D = \mu_D - \alpha_D$)

- **Onde aparece a volatilidade total (da razão p) ao quadrado:**

$$\sigma_T^2 = \sigma_V^2 + \sigma_D^2 - 2\,\rho\,\sigma_V\,\sigma_D$$

- **Esse tipo de recurso (homogeneidade) foi usado em opções perpétuas (McDonald & Siegel, 1986; DP) e em opções finitas (Myers & Majd, 1990). Em D&P é para P (em vez de V).**
- **Logo, uma planilha como a "Timing" resolve o problema com V e D estocásticos, usando volatilidade σ_T, investim. = 1, etc.**