Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

ELE 2005: Análise Estratégica de Investimentos e de Decisões com Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais

Parte 5: Equilíbrio Dinâmico da Indústria. Jogos de Opções Reais.

Marco Antonio Guimarães Dias,
E-mail: marcoagd@pobox.com
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 2º Semestre de 2007

OR e Jogos: Teorias Complementares

- **Em *jogos de opções reais*, o problema de maximização de valor da firma que analisa um investimento, deve considerar a presença de outras firmas como *jogadores*:**
  - **Os "players" reagem otimamente aos processos estocásticos relevantes (exógeno) e às ações das outras firmas (endógeno).**
    - **Onde "endógeno" significa que depende do nosso controle ótimo e "exógeno" não depende (entra como restrição na otimização).**
    - **A teoria dos jogos é necessária e entra nas *condições de contorno* (principalmente), com considerações sobre o *equilíbrio do jogo*.**
- **As teorias dos jogos e de OR são teorias *complementares*:**
  - **A teoria dos jogos tradicional sozinha ignora os avanços da teoria de finanças sobre risco-retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza (opções reais).**
  - **A teoria das opções reais tradicional sozinha ignora o fato que o exercício de opções por parte de outras firmas pode alterar o valor da sua opção real. *Conceitos de equilíbrio* são requeridos.**

Jogos de Opções e Equilíbrio Dinâmico

- Vamos combinar as teorias e ferramentas vistas antes sobre teoria dos jogos e teoria de opções reais.
  - Conceitos de equilíbrio (Nash, ENPS, etc.) sob incerteza exógena (demanda, preço) precisam de ferramentas tais como processos estocásticos, lema de Itô e otimização sob incerteza.
- Agenda das duas últimas partes do curso:
  - Equilíbrio dinâmico da indústria sob competição perfeita: iremos seguir as seções 8.1 e 8.2 do Dixit & Pindyck (D&P);
  - Duopólio simétrico sob incerteza: seção 9.3 do D&P; texto pdf.
  - Duopólio sob incerteza (*estratégias mistas*, *colusão*, *assimétrico*) e *oligopólio sob incerteza*: *texto extraído da minha tese*.
  - Se desse tempo: incerteza técnica, guerra de atrito e barganha.
  - Em todos os casos teremos *software em Excel* (alguns c/ VBA).
- Para começar iremos analisar o problema clássico do *equilíbrio da indústria em competição perfeita*, dessa vez considerando um *ambiente dinâmico de incertezas*.

Indústria Competitiva Dinâmica

- No caso clássico de OR as firmas são só *tomadoras de preços* e detêm o *monopólio da opção de investir*.
  - Isso não considera que a *competição* pode afetar o valor da opção real e a regra de decisão. Isso será feito agora.
  - Em vez de competição *exógena*, refletindo só nos preços do produto, agora ela será modelada de forma endógena.
- A análise com ferramentas de opções reais (processos estocásticos, otimização sob incerteza) permite estender a teoria microeconômica tradicional sobre a competição, para uma *realidade dinâmica, com incertezas* e *opções*.
- Iremos começar com o caso de competição perfeita.
  - Apesar da *competição perfeita* na indústria levar o prêmio da espera a zero (i.é, valor da opção = VPL de exercício), o *gatilho de exercício da opção* é o mesmo do caso anterior de *monopólio*!
    - Essa é a chamada "miopía ótima de Leahy" (Leahy, QJE, 1993).

Competição Perfeita sob Incerteza

- **Seja um grande número de firmas iguais formando uma indústria em *competição perfeita*. Cada firma produz *uma unidade* de um *produto homogêneo* com preço P.**
  - **Assim, a produção total da indústria Q é igual ao número de firmas ativas no mercado. Isso simplifica nossa análise.**
  - **As *firmas* são tomadoras *infinitesimais* de preços, mas a *indústria* "enxerga" uma *curva de demanda inversa* P = D(Q), com preços menores quanto maior for Q.**
  - **A *entrada de firmas é livre*, mas paga um investimento I.**
- **Além disso, existe incerteza na demanda correlacionada com os *movimentos gerais da economia*, modelada assim:**
  - **O preço é dado pela *demanda estocástica* P = Y D(Q), onde o choque estocástico Y segue um MGB: $dY/Y = \alpha\, dt + \sigma\, dz$.**
  - **Um aquecimento na economia (aumento de Y) significa preços maiores, mas significa também um aumento na probabilidade de entrada de novas firmas no mercado, derrubando os preços.**

Incerteza Técnica no Cap. 8 do D&P

- **Não iremos ver esse caso da incerteza técnica do cap. 8 do D&P (pularemos as seções 8.4 e 8.5, além da 8.3).**
- **Ver no anexo dois slides sobre isso com os títulos "*Incerteza Técnica no Cap. 8 do D&P*" e "Outro Tipo de Incerteza Técnica".**

Valor duma Firma em Perpetuidade

- Seguindo D&P, 8.2, vamos focar uma firma dessa indústria.
- Seja uma firma produzindo uma unidade de produto por período, em perpetuidade, com *preço unitário* P, *custo operacional unitário* C e custo fixo = 0.
- Assim, a firma tem fluxo de caixa perpétuo $\pi = P - C$, onde P segue um MGB de drift α. Vimos que para um MGB, o valor esperado é $E[P(t)] = P_0\, e^{\alpha\, t}$. A taxa de retorno total (= taxa ajustada ao risco p/ P) é $\mu = \alpha + \delta$.
  - No caso de commodities, a taxa de dividendos δ é interpretada como a taxa de conveniência (estimada no mercado futuro).
- Logo, o valor da firma ativa V(P) é dado pela integral:

$$V(P) = \int_0^{\infty} [(P_0 e^{\alpha t}\, e^{-\mu t}) - (C\, e^{-r t})]\, dt = \frac{P_0}{\mu - \alpha} - \frac{C}{r} = \frac{P_0}{\delta} - \frac{C}{r}$$

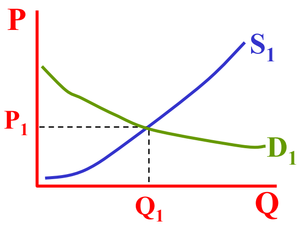
➢ Exercício: mostre que se obtém o mesmo resultado se usar a tendência *neutra ao risco* $(r - \delta)$ em vez de α, e a taxa de desconto livre de risco r em vez de μ. Por que?

Valor da Firma em Competição Perfeita

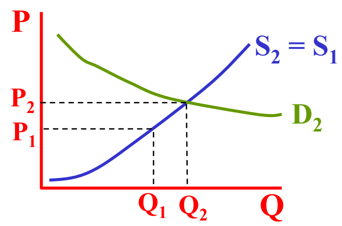
- Uma firma inativa pode entrar livremente no mercado desde que pague um investimento irreversível I. Há um grande nº de firmas. Se V(P) é o valor duma firma ativa:
  - O valor da firma *inativa* que exerce a opção é V(P) – I.
  - Seja o custo operacional = 0. Se não tivesse competição e nem opções após a entrada da firma, em perpetuidade $V(P) = P/\delta$.
  - O efeito da competição irá reduzir o valor da firma: $V(P) < P/\delta$
- Em $P = Y\, D(Q)$ o preço do produto seria *linear* em Y se D(Q) não se alterasse, i.é, se não houvesse competição.
  - Com a competição, aumenta a chance de Q aumentar quando Y aumenta e, logo, D(Q) diminuir com Y. Assim, um aumento em Y provoca um aumento menos que proporcional em P.
  - Assim, V(P) é uma função côncava de Y, ao contrário do caso clássico de OR onde opção era uma função *convexa* do preço.
    - ➨ Assim, pela *desigualdade de Jensen*, um aumento da incerteza na demanda (em Y) reduz o valor esperado de P e, logo, de V(P).

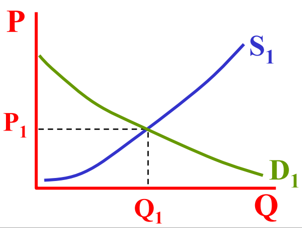
Demanda, Suprimento e Dinâmica de Preços

- **Quando se detém os direitos exclusivos de investimento (OR tradicional, monopólio), um aumento na demanda faz aumentar os preços. Mas em competição perfeita, um aumento da demanda pode estimular a entrada e os preços permanecerem constantes.**

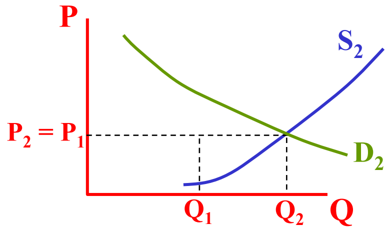


Aumento de demanda sem aumento de capacidade (ex.: monopólio)



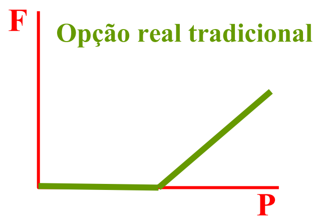


Aumento de demanda com aumento de capacidade (ex.: comp. perfeita)

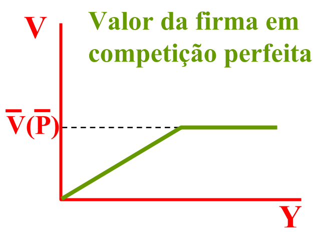


Desigualdade de Jensen na Prática

- **No caso clássico de opções reais, a função valor da opção F é tipicamente uma função convexa do preço. Já no caso de competição perfeita, o valor da firma ativa é uma função côncava da demanda. As figuras ilustram:**



- **Na expiração duma opção de investir num projeto, só se exerce se o VPL for positivo. F é uma *função convexa* dos preços ⇒ ↑ incerteza de P ⇒ ↑ F(P).**



- **O valor de uma firma em competição perfeita aumenta com a demanda enquanto os preços aumentam. A partir de certo valor de Y, há entrada de novas firmas e o preço estabiliza. Assim, V é uma *função côncava* de Y: ⇒ ↑ incerteza de Y ⇒ ↓ V(Y).**

Equilíbrio em Expectativas Racionais

- O conceito de equilíbrio dinâmico é chamado (Lucas, Nobel em 1995) de *equilíbrio em expectativas racionais*.
  - Cada firma toma como exógeno o mesmo processo estocástico da demanda. Assim, cada firma reage (oferta) racionalmente a esse processo e o equilíbrio dinâmico oferta x demanda determina o preço P(t) a cada instante.
- Uma firma inativa observa a demanda através do sinal dado pelos preços de mercado P.
  - Essa firma entra racionalmente (investe I) se os preços atingem um nível suficientemente alto P*.
    - Como aqui as firmas são homogêneas, um grande número de firmas entram no mercado quando P aumenta para P*.
  - Mas quando essas firmas entram, aumenta Q e, portanto, o preço é reduzido (refletido para baixo) devido a D(Q).
  - Assim, o gatilho P* é uma *barreira refletora superior* $\bar{P}$

Barreira Refletora e o Processo P(t)

- A barreira refletora superior faz com que exista um "teto" para os preços em competição perfeita.
  - Sob *expectativas racionais* as firmas demandam um alto P*, pois todas elas sabem que outras firmas também irão entrar.
- Enquanto que o processo estocástico Y(t) é um MGB sem restrição, a barreira refletora dos preços em P = P* faz o processo estocástico P(t) ser dividido em dois casos:
  - Para $P < P^*$, Q é constante $\Rightarrow$ $dP/P = \alpha\, dt + \sigma\, dz$.
    - Pois P é proporcional a Y se D(Q) é constante e assim P também segue um MGB com os mesmos parâmetros (α, σ e δ) de Y.
  - Para $P = P^*$, Q↑ e os preços são refletidos para baixo. Um novo MGB se reinicia com um valor de P um pouco menor que P*.
    - Se após um aumento da demanda Y em que P atinge P*, a demanda continuar aumentando durante um intervalo finito Δt, então os preços permanecerão no teto P* durante esse intervalo.
    - Durante Δt entrarão um nº de firmas alto o suficiente p/ manter P = P*.

EDO de V(P) por Contingent Claims

- **Agora iremos deduzir a equação diferencial ordinária (EDO) de V(P) pelo método dos *contingent claims*.**
  - **A diferença em relação ao caso de Black-Scholes é que agora tanto V como P têm dividendos (antes o derivativo não tinha).**
  - **Para tal, considere o portfólio: $\Phi = V - n$ unidades de P. Esse portfólio será sem risco para uma escolha conveniente de n.**
- **O retorno de Φ no intervalo dt é: $r\ \Phi\ dt = r\ (V - n\ P)\ dt$**
- **Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:**
  - **Agora V varia (dV) <u>e também distribui dividendos</u> $\pi\ dt$ que é o fluxo de lucro ($\pi = P - C = P$) durante o tempo dt.**
  - **O retorno de P em dt é a soma do ganho de capital dP com o dividendo $\delta\ P\ dt$, onde δ é o *convenience yield*.**
  - **Logo, retorno da carteira = $dV + \pi\ dt - n\ (dP + \delta\ P\ dt)$ = = $dV + P\ dt - n\ (dP + \delta\ P\ dt)$.**

EDO de V(P) por Contingent Claims

- **Igualando as duas equações de retorno da carteira:**

$$r\ (V - n\ P)\ dt = dV + P\ dt - n\ (dP + \delta\ P\ dt)$$

- **Agora precisamos de dV: expansão com o <u>Lema de Itô</u>: Note que V(P) não é função do tempo (produção perpétua) $\Rightarrow \partial V/\partial t = V_t = 0 \Rightarrow$ <u>Lema de Itô</u> p/ dV, é:**

$$dV = V_P\ dP + \frac{1}{2}\ V_{P\,P}\ (dP)^2$$

  - **Para obter $(dP)^2$, basta elevar ao quadrado a equação do MGB, $dP = \alpha\ P\ dt + \sigma\ P\ dz$. Logo, $(dP)^2 = \sigma^2\ P^2\ dt$**
  - **Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:**

$$dV = V_P\ dP + \frac{1}{2}\ \sigma^2\ P^2\ V_{P\,P}\ dt$$

  - **Substituindo a equação de dV na eq. do retorno de Φ**

$$r\ (V - n\ P)\ dt = V_P\ dP + \frac{1}{2}\ \sigma^2\ P^2\ V_{P\,P}\ dt + P\ dt - n\ (dP + \delta\ P\ dt)$$

$$\Rightarrow r\ (V - n\ P)\ dt = (V_P - n)\ dP + \frac{1}{2}\ \sigma^2\ P^2\ V_{P\,P}\ dt + P\ dt - n\ \delta\ P\ dt$$

  - **Mas para essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dP. Para tal, faz $n = V_P$**
  - ***Algebrando* se chega à EDO com o termo de cash-flow P:**

Equação Diferencial Ordinária de V(P)

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta)\,P\,V_P - r\,V + P = 0$$

- **Essa EDO tem uma *parte homogênea* (em V, em azul) e uma *parte não-homogênea* (o "cash-flow", em vermelho).**
  - **A parte homogênea tem *solução geral* do tipo $A\,P^{\beta}$ que deve ser somada a alguma *solução particular* devido à parte não-homogênea. Uma simples substituição mostra que a solução de perpetuidade P/δ atende a EDO (típico, ver a seguir).**
  - **Se a EDO é válida em geral, então em particular ela será válida para o caso de não haver nenhuma opção a ser exercida: por isso ela é válida para a produção perpétua $\Rightarrow$ solução de perpetuidade P/δ tem de ser uma (particular) solução da EDO.**
  - **Comentário: a equação diferencial só expressa como varia a função V(P) (o derivativo) em relação à variável estocástica P.**
  - **Até aqui não entrou o gatilho, se a competição é perfeita ou não, etc.**
  - **Nas <u>condições de contorno</u> é que entrarão essas considerações.**

A Equação Diferencial do Valor da Firma

- **Esse desenvolvimento foi similar ao do final da parte 4, sobre valor da firma com opção de shut-down.**
  - **Diferenças: aqui é o custo operacional C = 0 e não há opção de parada temporária (shut-down) e sim exercício da opção de entrada por parte das *outras* firmas (inativas) quando P = P*.**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta)\,P\,V_P - r\,V + P = 0$$

  - **Assim, a solução é a soma da *solução geral* do tipo $B\,P^{\beta}$ (parte homogênea, em azul, onde B é uma constante) com a *solução particular* do tipo P/δ (da parte não-homogênea, em vermelho):**

$$V(P) = B\,P^{\beta_1} + P/\delta$$

  - **Já foi suprimido o termo $B_2\,P^{\beta_2}$ com a raiz negativa (β_2) por ter coeficiente igual a zero (cc.: se $P \to 0$, é necessário que $V \to 0$).**
- **Para determinar a constante B e o gatilho P*, devemos ver as condições de contorno em P = P*.**
  - **Como foi dito que V(P) é côncava em P, devemos obter $B < 0$.**

Condição em P* e o Valor da Firma

- **Para obter B e P* devemos colocar cc. em P = P*.**
- **Usaremos primeiro uma propriedade similar ao *contato suave*, que vale para barreiras refletoras em geral:**
  - **Se V(P) é uma função escrita sobre um processo de difusão de P que tem uma barreira refletora em P*, então a derivada de V(P) no ponto P = P* deve ser igual a zero. Ou seja, V(P*) é um máximo ou um mínimo e é derivável p/ $\forall$ P > 0. Logo:**
  - $V_P(P^*) = 0 = \beta_1 B (P^*)^{\beta_1 - 1} + 1/\delta \Rightarrow B = -(P^*)^{1-\beta_1} / (\beta_1 \delta)$
  - **Logo, B é negativo e V(P) é côncava, como indica a intuição.**
- **Substituindo B, podemos achar o valor da firma:**

$$V(P) = \frac{P}{\delta} - \frac{P^{\beta_1} (P^*)^{1-\beta_1}}{\delta \beta_1}$$

  - **Interpretação da equação acima: o 1º termo representa o valor da firma se não houvesse competição, enquanto que o 2º termo é o efeito da competição erodindo o seu valor.**

Condição de Equilíbrio para Obter P*

- **Aqui será usada uma condição de equilíbrio para achar o gatilho: no caso (limite) de *competição perfeita*, a condição de entrada da firma é que o excesso de lucro *esperado* deve ser *zero*, numa visão dinâmica de expectativas racionais.**
  - **Dessa forma, quando as firmas entram em P = P*, o valor da firma ativa V(P) deve ser igual ao investimento de entrada I (VPL = 0). Assim, igualando a eq. anterior de V(P) com I, obtém-se P*:**

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I$$

- **Note que esse gatilho é exatamente o mesmo do caso de monopólio! Isso é chamado de *miopia ótima de Leahy*:**
  - **Em competição perfeita, cada firma age (regra de decisão P*) de forma míope, como se ela detivesse o monopólio de investir no projeto. Isso coincide com o ótimo não-míope.**
  - **Assim, cada firma entra *como se fosse a última firma a entrar*, ignorando a futura entrada de competidores.**

Equilíbrio de Nash Markoviano

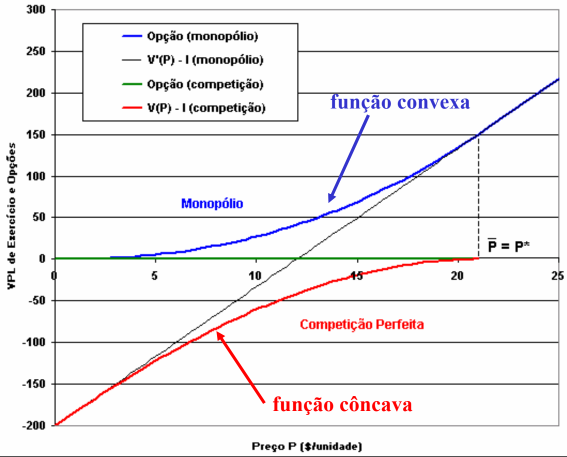
- Dado o estado da natureza aqui representado pelo preço P < P*, a estratégia de esperar os preços subirem e "*parar a espera*" (entrar) em P = P* é *equilíbrio de Nash*:
  - Desviar dessa estratégia entrando antes (em um P < P*) é pior para a firma porque ela teria um VPL esperado negativo.
  - Esperar o preço subir para um valor P > P* não é factível, pois como as outras (potencialmente infinitas) firmas estão entrando em P*, o preço nunca subirá acima de P*.
  - Logo, nenhuma firma unilateralmente tem incentivo para desviar da estratégia de exercer a opção de entrar em P = P*.
  - Logo, é um equilíbrio de Nash o vetor de estratégias onde todas as firmas homogêneas esperam enquanto P < P* e só entram quando P atingir P*.
  - A opção de entrar é perpétua. Assim, esse EN ocorre para todo o subjogo que começa em qualquer instante de tempo.
    - ➡ O que importa é o estado da natureza (P). Assim é um *equilíbrio de Nash markoviano*, um *equilíbrio de Nash perfeito em subjogos*.

Miopia Ótima e Valor da Firma

- Apesar dos gatilhos serem os mesmos (*miopia ótima*) nos casos da competição perfeita e de monopólio, os valores da firma V(P) e da opção F(P) em competição perfeita são muito diferentes (menores) do caso de monopólio.
  - O valor esperado da firma V(P) em P = P* é igual ao investimento I no caso de competição perfeita, enquanto que no monopólio V(P*) é (bem) maior que I.
- No caso de monopólio, a opção F(P) de investir no projeto é estritamente positiva se P > 0.
- DP (p.257-258) mostram que, no caso de *competição perfeita* (CP), o valor da opção de investir f(P) vale zero.
  - Isso é intuitivo, já que em P* a firma investe com VPL = 0.
    - ➡ O valor da capacitação técnica numa indústria em CP é zero.
  - Assim, um aumento de volatilidade aumenta P* p/ compensar o aumento do valor presente *das perdas competitivas*.

Competição Perfeita x Monopólio

- O gráfico mostra os VPLs de exercícios e os valores das opções para os casos de *competição perfeita* e *monopólio*.
  - Em *competição perfeita*, $V(P) - I \leq 0$ (vermelho). Note que a *opção* vale sempre *zero* no caso de *competição perfeita* (verde), enquanto que para o caso de monopólio (azul) ela é positiva.



Planilha
competicao-x
-monopolio.xls

Jogos de Opções Reais: Introdução

- Os primeiros artigos a analisarem o efeito da competição em modelos de opções reais fizeram <u>adaptações</u> dos modelos de opções reais, <u>sem usar a teoria dos jogos</u>:
  - Tempo de expiração da opção real é reduzido pela possibilidade de entrada de concorrentes (Kester, 1984).
  - *Preemption* de competidores é modelado através de “dividendos” adicionais perdidos (Trigeorgis, 1986, 1991).
  - *Preemption* de competidores é modelado incluindo *jumps-down* no processo estocástico (Trigeorgis, 1986, 1991).
  - Em geral a ação do rival era *aleatória* em vez de *racional*.
- A partir da tese de Smets (1993, WP em 1991), *em vez de exógeno*, o efeito da competição é *modelado de forma endógena*, combinando a *teoria dos jogos* com OR.
  - Dixit & Pindyck (1994, cap.9) popularizaram esse modelo e Huisman & Kort (1999) fizeram uma análise mais rigorosa e detalhada.
  - Jogos de OR é um tópico recente de crescente pesquisa.
- Livros textos: Huisman (2001) e Smit & Trigeorgis (2004).

Classificação dos Jogos de Opções Reais

- **Os jogos de opções de opções reais podem ser classificados de diversas formas. Em relação ao tempo:**
  - ***Jogos de OR em tempo discreto*: geralmente mais intuitivos, podem ser associado a processos de difusão tipo binomial.**
    - **Smit & Ankun (1993); livro do Smit & Trigeorgis (2004); Dias (1997); Kulatilaka & Perotti (1998); Amram & Kulatilaka (1999) …**
  - ***Jogos em tempo contínuo*: matematicamente mais complexo, permite conclusões mais gerais e software mais profissionais.**
    - **Smets (1993); Dixit & Pindyck (1994); Grenadier (vários); Huisman & Kort (1999); livro do Huisman (2001); Joaquin & Buttler (2000).**
  - **Iremos ver apenas jogos de OR em tempo contínuo.**
- **Outras classificações e aplicações:**
  - **Informação completa x informação incompleta (Bayesianos).**
    - **Jogos de OR com informação assimétrica é um tema "quente".**
  - **Externalidades negativas (*vantagem da primeira movida*) ou externalidades positivas (*guerra de atrito*, *efeito de rede*).**
  - **Duopólio ou oligopólio; simétrico ou assimétrico …**

Teoria dos Jogos de Opções Financeiras

- **Na área financeira também existem aplicações que combinam a teoria dos jogos com a teoria de opções.**
- **O primeiro livro-texto é de Ziegler (1999): "*A Game Theory Analysis of Options – Contributions to the Theory of Financial Intermediation in Continuous Time*".**
- **Alguns conceitos são válidos para OR. Por ex., em relação à diferença entre a teoria dos jogos e jogos de opções, Ziegler (p.133) escreveu:**
  - **"*a teoria dos jogos com análise de opções substitui a maximização da utilidade esperada encontrada nos modelos de teoria dos jogos clássica com a maximização do valor de uma opção … a abordagem de opções tem a vantagem que leva em conta o valor do dinheiro no tempo e o risco, automaticamente*".**
  - **Ele também destaca a "*ligação entre mercados e organizações*" com as opções determinando o valor baseado no mercado, e a teoria dos jogos levando em conta a estrutura da organização.**

Jogos de Opções Reais: *Timing Games*

- No contexto dinâmico de OR, a classe mais importante de jogos é a de "*timing games*" ou *jogos de parada ótima.*
  - As *estratégias puras* são *tempos de parada* (de exercício de OR).
- Timing games podem ser de *externalidades negativas* ou *positivas*, dependendo do efeito advindo do exercício da OR de um jogador no valor das OR dos *outros jogadores*
  - Iremos ver três jogos de parada ótima com externalidades *negativas*, incluindo o clássico modelo de Smets (DP, cap.9).
- Nos jogos de OR serão consideradas apenas as *estratégias simples de gatilhos*, que darão t*, os *tempos ótimos de exercícios* das OR. Proposição (Dias 2005):
  - Seja um jogo de OR em tempo contínuo com ENPS dado por estratégias de gatilhos, então existem ao menos dois métodos de solução, o método *diferencial* e o método *integral*
    - O método diferencial é o método que temos visto, com equações diferenciais e condições de exercício e/ou equilíbrio nas cc.
    - O método integral usa *integrais* com t* nos *limites de integração.*

Método Integral de Otimização sob Incerteza

- Motivação: resolver jogos de opções reais (ex.: duas firmas disputando um mercado) com integrais do tipo:

$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\,Y(t)\,D(1,0)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\,Y(t)\,D(1,1)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I$$

$$F(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\,Y(t)\,D(0,1)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\,Y(t)\,D(1,1)\,dt\right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

- O método integral também pode resolver problemas só de OR, pois é um método de *otimização sob incerteza*. Vimos ele na parte 4 para opções reais que ele:
  - Usa métodos tradicionais de otimização.
  - Para (jogos de) OR perpétuas, esse método é mais simples.
  - Baseado no tempo t* que um processo estocástico toca uma barreira (um gatilho), usa muito o valor esperado do *fator de desconto estocástico* E[exp(– r t*)].

Duopólio Simétrico sob Incerteza

- **Vamos analisar o modelo de Smets (DP, cap. 9), mas <u>na versão mais detalhada de Huisman & Kort</u> (1999)**
  - **O modelo do DP é de *novo mercado*, i.é, as duas firmas estão fora do mercado. Exercendo a opção de investir entra-se em um novo mercado. <u>Não há fluxo de caixa antes de investir</u>.**
  - **Aqui (Huisman & Kort) <u>as duas firmas já estão no mercado</u> e avaliam se é ótimo o exercício de uma <u>*opção de expansão*</u>.**
  - **O valor da firma que tem opção de expansão, denotada por F, já <u>tem fluxo de caixa</u> advinda da atual produção.**
    - **Na dedução da equação diferencial esse termo irá aparecer, o que não ocorre com o caso mais simples do livro DP, cap. 9.**
- **As firmas são *simétricas* (*homogêneas*, com *mesmos custos*) e tem *expectativas racionais* sobre a demanda estocástica.**
- **Huisman & Kort assume que as firmas são *neutras ao risco*.**
  - **Claro que não seria necessário assumir essa premissa (eu não gosto), mas vamos seguir essa premissa para ver como trabalhar com ela.**

Duopólio Simétrico sob Incerteza

- **Firmas neutras ao risco (NR): a demanda irá seguir um MGB com drift α e a taxa de desconto é a livre de risco r.**
  - **Para passar para o caso <u>sem</u> essa premissa, o drift *seria* $(r - \delta)$, que é o drift NR e assim, sem assumir NR, a taxa de desconto seria r.**
- **A função inversa da demanda dá o preço $P = Y(t) \,.\, D(Q)$**
  - **$D(Q)$ é determinístico e função da produção *total* Q.**
  - **O choque estocástico multiplicativo da demanda $Y(t)$, segue um MGB: $dY/Y = \alpha\, dt + \sigma\, dz$.**
- **<u>O ENPS do jogo é obtido *backwards*</u>. Primeiro acha-se o valor do seguidor (dado que o líder entrou) e depois o valor do líder.**
- **Na dedução da equação diferencial, por ex. do *seguidor* F(Y), o que muda ao assumir que a firma é NR e que queremos trabalhar com o parâmetro α (em vez de δ) é:**
  - **O retorno passa a ser $r = \alpha + \delta$ (taxa NR r substitui μ) e vamos trabalhar com $r - \alpha$ em vez de explicitar δ. Assuma $r - \alpha > 0$.**
    - **Ver dedução da equação diferencial no <u>anexo</u> sob o título "EDO F(Y) para Firma Neutra ao Risco". É similar ao que vimos, mas usa $r - \alpha$ em vez de δ.**

Duopólio Simétrico: Notação e Premissas

- **Defina $D(N_i, N_j)$ tal que o fluxo de caixa da <u>firma i</u> é $Y(t)\ D(N_i, N_j)$, i.é, $D(N_i, N_j)$ já considera a produção de i:**
  - **$D(0, 0)$ sendo o caso de <u>ambas as firmas não tendo investido</u> ainda, mas existe um fluxo de caixa $Y\ D(0, 0)$, pois ambas as firmas já estão ativas no mercado (em DP, cap.9, $D(0, 0) = 0$);**
  - **$D(1, 0)$ significa que a <u>firma i investiu</u> (exerceu a opção de expansão) <u>e é a "líder"</u> porque a <u>firma j ainda não investiu</u>;**
  - **$D(0, 1)$ significa que a firma i é a "seguidora" e ainda <u>não</u> se expandiu, pois só a <u>outra firma</u> (j) <u>já investiu</u> e se fez líder; e**
  - **$D(1, 1)$ significa que <u>ambas as firmas investiram</u> no mercado (*ambas expandiram a produção*).**
- ***Externalidade Negativa*: $D(1, 0) > D(1, 1) > D(0, 0) > D(0, 1)$**
- ***Vantagem do primeiro lance*: $D(1, 0) - D(0, 0) > D(1, 1) - D(0, 1)$**
- **Lucro perpétuo *sem exercício*: $Y\ D(0, 0) / (r - \alpha)$, $r > \alpha$.**
  - **O valor de cada firma é esse lucro <u>mais</u> uma *opção de expansão*.**
- **Para exercer a opção, deve-se pagar o investimento irreversível I.**

Valor do Seguidor e Gatilho: 1º Método

- **<u>Método diferencial</u>. O valor do seguidor (F) é dado pela EDO:**

$$0{,}5\ \sigma^2\ Y^2\ F_{YY} + \alpha\ Y\ F_Y - r\ F + Y\ D(0, 1) = 0 \quad \text{(ver anexo)}$$

  - **A parte não homogênea (azul) é devido ao fluxo de lucro do seguidor para o caso da outra firma ter investido. Solução:**

$$F(Y) = A\ Y^{\beta 1} + Y\ D(0, 1) / (r - \alpha) \qquad \text{se} \quad Y \leq Y_F$$

$$F(Y) = Y\ D(1, 1) / (r - \alpha) - I \qquad \text{se} \quad Y \geq Y_F$$

    - **Onde Y_F é o *gatilho* ótimo de investimento do *seguidor***
  - **Os dois desconhecidos (A e Y_F) são determinados pelas condições de contorno (cc) "continuidade" e "suavidade":**

$$F(Y = Y_F) = Y_F\ D(1, 1) / (r - \alpha) - I$$

$$F_Y(Y = Y_F) = D(1, 1) / (r - \alpha)$$

  - **Aplicando as cc obtemos 2 eq. e 2 incógnitas, com solução:**

$$A = \frac{Y_F^{1-\beta_1}}{\beta_1} \frac{D(1, 1) - D(0, 1)}{(r - \alpha)} \qquad \Bigg| \qquad Y_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha)\ I}{D(1, 1) - D(0, 1)}$$

Valor do Seguidor: 2º Método

- <u>Método integral</u>: vamos usar os conceitos de *tempo de primeiro toque* T* e *fator de desconto esperado* exp(− r T*)
  - T* é o primeiro instante que Y(t) toca o nível superior Y_F
  - O valor do seguidor tem dois componentes (líder entrou em t = 0):

$$F(Y) = E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(0,1)\, dt\right] + E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right] - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

Lucro esperado antes do exercício — Lucro esperado depois do exercício

perpetuidade de t = T* a ∞.

$$\Rightarrow F(Y) = D(0,1)\; E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, dt\right] + E\left[e^{-rT^*}\right]\left[\frac{Y_F\, D(1,1)}{r-\alpha} - I\right]$$

Onde: $E\left[e^{-rT^*}\right] = \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1}$ e $E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, dt\right] = \frac{Y}{r-\alpha}\left[1 - \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1 - 1}\right]$

- O *segundo valor esperado* também aparece em DP, p/ prova ver: http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly.html#second_expectation
- Substituindo esses valores esperado na equação de F(Y), obtemos a mesma solução de F(Y) obtida antes com o 1º método.
  - Note que em DP, D(0, 1) = 0 e, logo, a primeira integral é zero.

O Gatilho do Seguidor: 2º Método

- Seja $VPL_F = V(Y) - I$ o VPL com o exercício da opção de F
  - A maximização do VPL do seguidor é um *trade-off* entre a espera por um maior valor de Y e o custo da espera dado pelo fator de desconto:

$$G(Y) = \underset{Y}{\text{Max}}\; E[e^{-rt}]\,.\,[V(Y) - I]$$

- *Benefício* do exercício: $V(Y) = Y\,[D(1,1) - D(0,1)]\,/\,(r-\alpha)$
- Fator de desconto: $R(Y, Y_F) = E[\exp(-r\,T^*)] = (Y/Y_F)^{\beta_1}$
  - Fator desde um Y qualquer até Y_F. Ex.: Y pode ser Y(t = 0).
- Logo, o problema de maximização escolhendo Y_F torna-se:

$$G(Y_F; Y) = \text{Max}\; R(Y, Y_F)\,.\,(\{Y_F\,[D(1,1) - D(0,1)]\,/\,(r-\alpha)\} - I)$$

- *Condição de 1ª ordem*: $\partial G(Y)/\partial Y = 0$ no ponto Y_F:

$$R(Y, Y_F).[D(1,1) - D(0,1)]/(r-\alpha) + R_{Y_F}(Y, Y_F).Y_F\,[D(1,1) - D(0,1)]/(r-\alpha) = R_{Y_F}(Y, Y_F)\,.\,I$$

  - Onde o derivativo de R(.) é: $R_{Y_F}(Y, Y_F) = -\,\beta_1\, Y^{\beta_1} / [Y_F^{(\beta_1 + 1)}]$
- Substituindo $R(Y, Y_F)$ e sua derivada na equação de 1ª ordem, obtemos a mesma solução obtida com o 1º método para o gatilho do seguidor Y_F.

Valor de se Tornar Líder (L): Dois Métodos

- O 2º método tem sido usado (DP) para achar o valor do *líder*:

$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,0)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I$$

- Entretanto, o método da equação diferencial também é possível (talvez + fácil). Considere o valor do líder *durante a fase monopolista*, denotado por $V(Y) = L(Y) + I$. Logo,

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, Y^2\, V_{YY} + \alpha\, Y\, V_Y - r\, V + Y\, D(1, 0) = 0$$

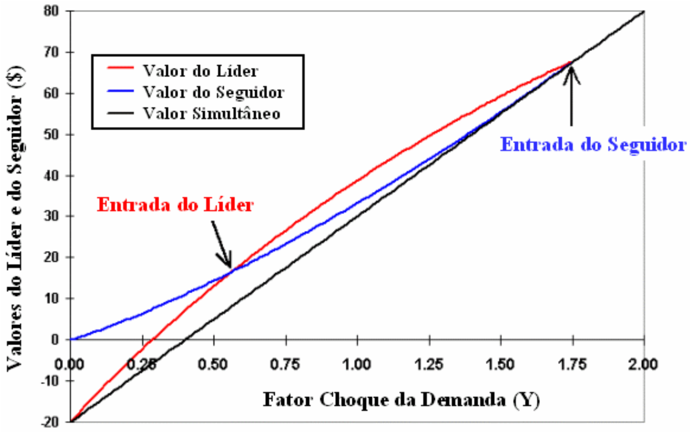
  - Onde o termo *não-homogêneo* (azul) é o fluxo de caixa ganho pelo líder durante a fase monopolista. A solução dessa EDO é:

$$V(Y) = B\, Y^{\beta_1} + \frac{Y\, D(1, 0)}{r - \alpha}$$

- A constante B é negativa (devido à redução esperada do lucro com a entrada do seguidor) e precisa só da cc de *continuidade* na entrada do seguidor: $V(Y_F) = Y_F\, D(1, 1) / (r - \alpha)$
  - Aplicando essa condição, obtemos o valor do líder L facilmente

Gráficos L(Y), F(Y) e o Gatilho do Líder

- O valor do líder L(Y) é côncavo devido a constante B < 0



- O gatilho do líder é dado quando Y cresce e L(Y) se iguala com F(Y), i.é: $Y_L = \{\, 0 < Y < Y_F \mid L(Y) = F(Y) \,\}$
- A figura mostra tb. o valor do *exercício simultaneo* S(Y) (que é um *erro* se $Y < Y_F$). Payoff: $S(Y) = [Y\, D(1, 1)/(r - \alpha)] - I$.

Equilíbrios do Duopólio sob Incerteza

- **Os valores da figura anterior (L, F, S) facilitam a análise de equilíbrio, pois podemos comparar as diversas estratégias das firmas em se tornar líder, em se tornar seguidor e em se tornar firma em expansão simultânea.**
- **Definições: $t^*_L = \inf\{t \geq 0 \mid Y \geq Y_L\}$; $t^*_F = \inf\{t \geq 0 \mid Y \geq Y_F\}$**
  - **Onde o *ínfimo de um conjunto vazio é infinito* ($t^* = \infty \Rightarrow e^{-t^*} = 0$).**
- **Existem pelo menos (podem existir mais) dois equilíbrios de Nash (EN) em estratégias puras:**
  - **❶ Firma 1 exercendo a opção se $Y \geq Y_L$ e firma 2 exercendo a sua opção se $Y \geq Y_F$. O par de estratégias aqui é $\{t^*_L; t^*_F\}$.**
    - **Nesse par de estratégias, se $Y \in [Y_L, Y_F)$ a firma 1 é dita líder, a firma 2 é seguidora e se $Y \geq Y_F$ as firmas são ditas simultâneas.**
  - **❷ Firma 2 exercendo a opção se $Y \geq Y_L$ e firma 1 exercendo a sua opção se $Y \geq Y_F$. O par de estratégias aqui é $\{t^*_F; t^*_L\}$.**
    - **Nesse par de estratégias, se $Y \in [Y_L, Y_F)$ a firma 2 é dita líder, a firma 1 é seguidora e se $Y \geq Y_F$ as firmas são ditas simultâneas.**

Equilíbrios do Duopólio Sob Incerteza

- **Para ver que essas estratégias são EN note que não há incentivo para cada firma desviar unilateralmente:**
  - **No 1º EN, a firma 1 estaria pior se exercer a opção ("parar") com $Y < Y_L$, pois a espera seria mais valiosa (F > L). Também não estaria melhor se não exercer no caso de $Y \in [Y_L, Y_F)$, dado que a firma 2 só exerce se $Y \geq Y_F$.**
  - **Nesse 1º EN, a firma 2 não estaria melhor se exercer c/ $Y < Y_F$, dado que a firma 1 exerce em $Y \geq Y_L$, pois o valor simultâneo a faria pior se $Y \in [Y_L, Y_F)$. A firma 2 não ficaria melhor se não exercer em $Y = Y_F$ e ficaria pior se não exercer em $Y > Y_F$.**
  - **Um raciocínio similar pode provar o caso do 2º EN (exercício!)**
  - **Como as estratégias dependem só do valor corrente do estado da natureza (Y), o EN é markoviano e, logo, é ENPS.**
- **Com dois EN em estratégias puras, existe também EN em estratégias mistas (randomizando os ENs puros).**
  - **Mas antes, vamos ver que podem existir *infinitos EN* em colusão!**

Valor e Gatilho da Colusão Tácita

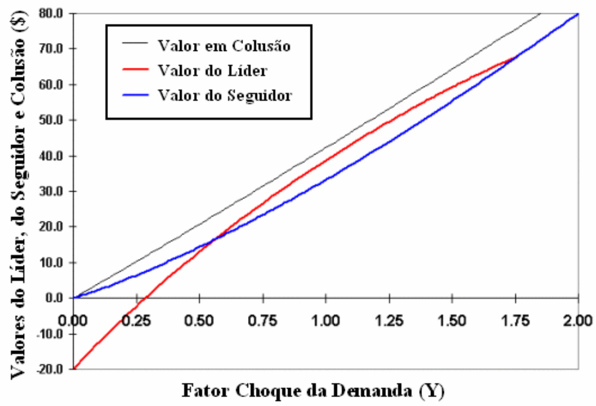
- Uma outra análise é verificar a possibilidade de *colusão tácita* entre os jogadores, i.é, sem contrato formal e sem comunicação entre os jogadores, poder ser um ENPS.
  - Eles podem considerar esperar mais, até um *gatilho de colusão* Y_C, onde ambos investiriam simultaneamente.
  - Denote $C(Y, Y_C)$ o valor de cada jogador em colusão.
  - A colusão só é equilíbrio se não houver incentivo para desviar.
  - Aqui desviar é parar a espera e investir se tornando líder. Assim, devemos verificar se pode ocorrer $C(Y, Y_C) > L(Y)$.
  - Se isso ocorrer p/ todos $Y \in (0, Y_F)$, então existiriam *infinitos* ENPS em colusão. Desses, o Pareto ótimo seria p/ $C(. , .)$ e Y_C:

$$C(Y,Y_C) = \begin{cases} \dfrac{Y\,D(0,0)}{(r-\alpha)} + \left(\dfrac{Y}{Y_C}\right)^{\beta_1}\left[\dfrac{Y_C[D(1,1)-D(0,0)]}{(r-\alpha)} - I\right], & \text{se } Y < Y_C \\ \dfrac{Y\,D(1,1)}{(r-\alpha)} - I, & \text{se } Y \geq Y_C \end{cases}$$

$$\boxed{Y_C = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\,\frac{(r-\alpha)\;I}{D(1,1)-D(0,0)}}$$

Caso com Colusão Tácita como ENPS

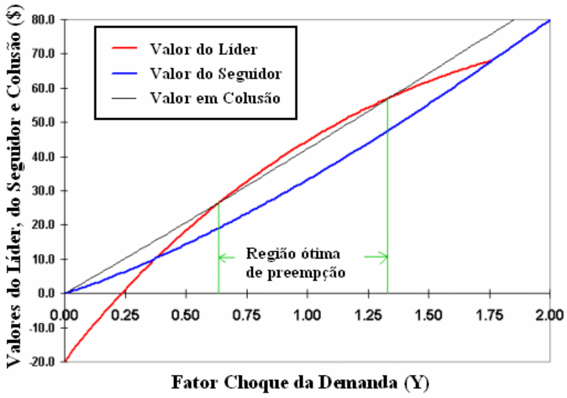
- No caso base de Huisman & Kort, a colusão é ENPS, conforme fica claro na figura (não é ótimo o desvio p/ L)



  - Valores do caso-base: $\alpha = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $r = 10\%$, $Y(t = 0) = 1$, $I = 20$ (p/ cada firma), $D(0, 1) = 1$, $D(0, 0) = 2$, $D(1, 1) = 2.5$ e $D(1, 0) = 4$.
  - O valor do gatilho em colusão está fora da figura (contato suave se dá em $Y_C = 5{,}29$). Colusão ótima é como no *monopólio*

Caso 2: Colusão Tácita Não É ENPS

- Se a *vantagem de ser líder* for *suficientemente grande*, a colusão pode ser destruída por preempção de uma das firmas.
- Ex.: se aumentar a vantagem de ser líder para D(1, 0) = 5:



  - Existe uma região onde a preempção é ótima e as firmas têm incentivo p/ trair e assim <u>a colusão nesse caso não é ENPS</u>.
  - Em DP (modelo de *novo mercado*) a colusão tácita nunca é EN.

Risco de Equívoco e Estratégias Mistas

- Em DP se considera que existem 50% de chances p/ cada firma se tornar a líder. Isso é verdade se o estado *inicial* da demanda é baixo, i.é, se $Y(t=0) < Y_L$.
  - No entanto, o que ocorre se $Y_L < Y(t=0) < Y_F$? Ambas as firmas têm incentivo para se tornarem líder pois L > F.
    - ➡ Não tem lógica pensar que, sem qualquer comunicação, uma firma irá deixar a outra firma se tornar líder, mesmo com cada firma temendo haver o investimento simultâneo por "equívoco".
    - ➡ Assim, o mais lógico é pensar que existe uma probabilidade positiva de haver investimento simultâneo por "equívoco".
    - ➡ Essa é a principal correção de Huisman & Kort sobre DP.
  - Para verificar, temos de analisar o *equilíbrio em estratégias mistas*, em que os jogadores jogam um *jogo simultâneo*, com a firma i jogando "investir" com probabilidade p_i.
    - ➡ A passagem de tempo discreto p/ tempo contínuo nesse caso deve ser muito cuidadosa para não "haver perda de informação" que ocorre quando se usa ferramentas convencionais de limites.

Estratégias Mistas e Jogo Simultâneo

- **Huisman & Kort usaram uma ferramenta já adotada por Fudenberg & Tirole (1985) em jogo de timing:**
  - **Especificaram "probabilidades" chamadas de "átomos" $p(\tau)$ que, se alguma for positiva, indicam que a *probabilidade acumulada de exercício* $G_i(\tau)$ é igual a 1.**
    - **Esse recurso foi tirado da literatura de *controle ótimo estocástico*.**
    - **A idéia fundamental é que *controle não toma tempo* (como um otimizador automático instantâneo). O jogo simultâneo, *mesmo se repetido infinitas vezes*, é jogado *instantaneamente*.**
  - **Logo, τ é definido como o primeiro instante que algum jogador exercerá a opção, dado que ninguém exerceu antes.**
    - **Nesse exato instante τ, o jogo simultâneo, representado por Γ_N é:**

		Firma 2	
		$p_2(\tau)$	$1 - p_2(\tau)$
Firma 1	$p_1(\tau)$	$S(Y(t))$, $S(Y(t))$	$L(Y(t))$, $F(Y(t))$
	$1 - p_1(\tau)$	$F(Y(t))$, $L(Y(t))$	Repete o jogo

Estratégias Mistas e Jogo Simultâneo

- **Esse jogo simultâneo em τ pode ser repetido infinitas, mas será definido com o exercício em alguma rodada.**
  - **O exercício em τ ocorre pela própria definição de τ.**
- **O valor da firma 1, ainda não otimizado, é:**

$$V_1 = p_1\, p_2\, S + p_1\,(1 - p_2)\, L + (1 - p_1)\, p_2\, F + (1 - p_1)\,(1 - p_2)\, V_1$$

  - **O último termo significa que em caso de repetição, se obtém o valor V_1 devido à definição de τ. Outra maneira de ver isso é:**

$$V_1 = [\, p_1\, p_2\, S + p_1\,(1 - p_2)\, L + (1 - p_1)\, p_2\, F\,] \,.\, [1 + (1 - p_1)\,(1 - p_2) + (1 - p_1)^2\,(1 - p_2)^2 + \dots]$$

  - **O somatório entre os primeiros colchetes é o valor esperado obtido numa rodada em caso de definição nessa rodada. Isso multiplica o outro par de colchetes, em que o 1º termo é em caso de definição na 1ª rodada, o 2º termo é em caso de definição na 2ª rodada [multiplica por $(1 - p_1)\,(1 - p_2)$], etc., até infinito.**
  - **Assim, o valor não-otimizado de V_i é:**

$$V_i = \frac{p_i\, p_j\, S + p_i\,(1 - p_j)\, L + (1 - p_i)\, p_j\, F}{1 - [(1 - p_i)\,(1 - p_j)]}$$

Estratégias Mistas e Jogo Simultâneo

- Agora os jogadores irão calcular as probabilidades ótimas p/ exercício da opção, i. é, a que maximiza V_i.
  - A *condição de primeira ordem* p/ esse problema de otimização é $\partial V_1 / \partial p_1 = 0$, para a firma 1, dado que o rival está planejando exercer a opção com probabilidade p_2.
  - Por simetria, as probabilidades ótima têm de ser $p_1 = p_2 = p^*$.
  - Com essa otimização e a simetria, se obtém a prob. ótima p*:

$$p^* = \frac{L - F}{L - S}$$

  - A probabilidade de *só uma firma exercer a opção* Pr(um = i):

$$\Pr(\text{um} = i) = p(\tau)\,(1 - p(\tau)) + (1 - p(\tau)) \,.\, (1 - p(\tau)) \,.\, \Pr(\text{um} = i)$$

Logo:

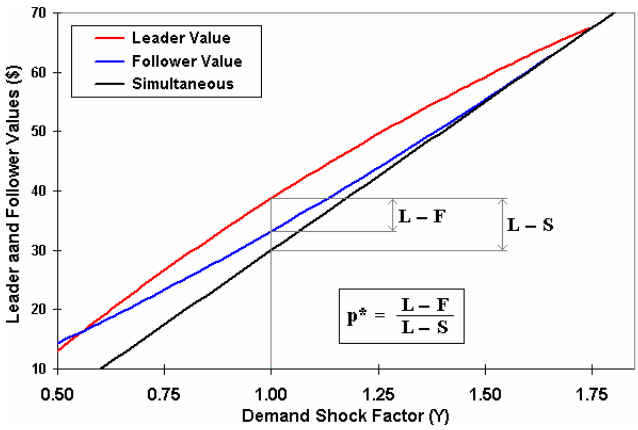
$$\boxed{\Pr(\text{um} = i) = \frac{1 - p(\tau)}{2 - p(\tau)}}$$

  - Por simetria, Pr(um = j) é a mesma. Como Σ probab. = 1, a probabilidade das *duas exercerem simultaneamente* Pr(dois) é:

$$\boxed{\Pr(\text{dois}) = \frac{p(\tau)}{2 - p(\tau)}}$$

Estratégias Mistas: Interpretação Geométrica

- Calculando o jogo simultâneo repetido infinitas vezes, mas instantâneo, achamos a probabilidade ótima de exercício p* indicada na figura, que dá uma interpretação geométrica.



  - Vimos também que existe uma probabilidade positiva de "equívoco" com investimento simultâneo, dado por $\Pr(\text{dois}) = p(\tau) / [2 - p(\tau)]$.

Estratégias Mistas no Duopólio: Conclusão

- Agora podemos analisar as probabilidade de haver só um líder e só um seguidor e a probabilidade de "equívoco" (investimento simultâneo com $Y < Y_F$).
  - Observando as equações (OBS: no ótimo $p(\tau) = p^*$):

$$p^* = \frac{L - F}{L - S} \qquad \Pr(\text{um} = i) = \frac{1 - p(\tau)}{2 - p(\tau)} \qquad \Pr(\text{dois}) = \frac{p(\tau)}{2 - p(\tau)}$$

  - Se $Y < Y_L$, ninguém exerce a opção; se $Y = Y_L$, então sabemos que $L = F$ e $L > S \Rightarrow p(\tau) = 0 \Rightarrow \Pr(\text{um} = i) = \Pr(\text{um} = j) = 50\%$, $\Rightarrow \Pr(\text{dois}) = 0$, como indicado pelo livro do D&P.
    - Logo, quando o mercado começa com $Y < Y_L$ existem 50% de chances de cada um ser líder e probabilidade zero de "equívoco" quando Y subir e alcançar Y_L.
  - Mas se o estado inicial da demanda está entre Y_L e Y_F, a situação muda bastante e a conclusão de D&P deixa de valer:
  - Como $L > F$ (e $> S$) $\Rightarrow p^* > 0 \Rightarrow \Pr(\text{dois}) > 0$. Logo, existe uma probabilidade estritamente positiva de "equívoco".

Duopólio Assimétrico Sob Incerteza

- O modelo de duopólio *assimétrico* sob incerteza é uma hipótese mais realista na maioria das industrias.
  - As firmas são não-homogêneas, pois, p/ o *mesmo investimento*, uma firma tem *custo operacional menor* do que a outra.
  - Assim, uma firma tem *vantagem competitiva* sobre a firma rival
- O modelo aqui é a extensão de Dias & Teixeira (2003) sobre o modelo assimétrico de Joaquin & Buttler (2000):
  - Duas firmas com diferentes custos operacionais, l = *firma de baixo ("low") custo* e h = *firma de alto ("high") custo*, estão planejando investir no mesmo *novo* mercado estrangeiro.
  - Seja $P = a - b\, Q_T$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a > b\, Q_T$, uma função ***derminística*** *linear inversa da demanda*, com quantidades em equilíbrio (de Nash) dadas pela *competição de Cournot*.
  - A taxa de câmbio X(t) é estocástica e segue um MGB.
    - A produção total é Q_T e $P(Q_T)$ é o preço do produto *em moeda estrangeira*. Em *moeda doméstica*, multiplica-se $P(Q_T)$ por X(t).

Duopólio Assimétrico Sob Incerteza

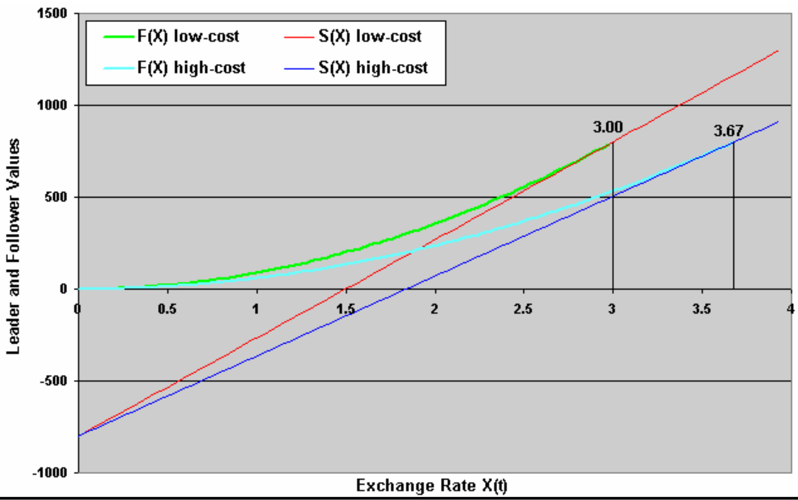
- O *fluxo de lucro* $\pi_i(Q_i)$ da firma i (i = l ou h, se baixo-custo ou alto-custo) em *moeda estrangeira* é:
  - $\pi_i(Q_i) = Q_i [a - b\ Q_T - c_i]$, o qual é determinístico.
- Em *moeda doméstica* o fluxo de lucro é:
  - $X(t) . \pi_i(Q_i)$, o qual é estocástico (e MGB!) devido a X(t).
- Para achar o valor presente desse fluxo de lucro perpétuo, divida o lucro pelo "dividend yield" δ.
- Os lucros do *monopolista* (π_M) e dos *duopolistas em Cournot* (π_l e π_h) são obtidos por otimização usual e são:

$$\pi_{M_i} = \frac{(a - c_i)^2}{4\,b} \qquad \pi_l = \frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9\,b} \qquad \pi_h = \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9\,b}$$

- Agora podemos usar um dos dois métodos (diferencial e integral) para achar os valores do líder e do seguidor.
  - Fica como *exercício* usar esses métodos para confirmar os resultados

Gatilhos de Seguidor: Duopólio Assimétrico

- O jogo é resolvido "backwards". Assim, imagine que o líder já entrou no mercado. Os gatilhos de seguidor para ambas as firmas são dadas pelas condições de "suavidade" ("smooth-pasting").
  - O seguidor tem uma opção real perpétua para investir como seguidor.



Valores do Líder e do Seguidor e Gatilhos

- Seja o caso mais provável da firma de baixo custo (l) como líder e a firma de alto custo (h) como seguidora:

$$F_h(X) = \begin{cases} \left[\dfrac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b}\,\dfrac{X^*_{F_h}}{\delta} - I\right]\left(\dfrac{X}{X^*_{F_h}}\right)^{\beta_1} & \text{se } X < X^*_{F_h} \\ \dfrac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b}\,\dfrac{X}{\delta} - I & \text{se } X \geq X^*_{F_h} \quad \text{(= valor do exercício \textit{simultâneo})} \end{cases}$$

  - A primeira eq. diz que se $X < X^*_{Fh}$ o seguidor é esperado exercer a opção no gatilho, obtendo o VPL (1º termo, entre colchetes), que é trazido a valor presente com o fator de desconto esperado (2º termo).

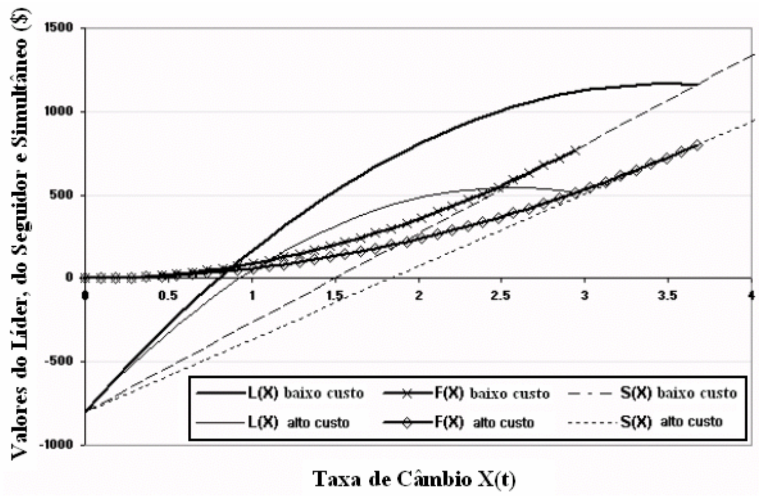
$$X^*_{F_h} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\,\frac{9b\ \delta\ I}{(a - 2c_h + c_l)^2} \longrightarrow \underbrace{X^*_{F_h}\,\frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b\ \delta}}_{V^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\,I$$

$$L_l = \frac{(a - c_l)^2}{4b}\,\frac{X}{\delta} + \left[\frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_l)^2}{4b}\right]\frac{X^*_{F_h}}{\delta}\left(\frac{X}{X^*_{F_h}}\right)^{\beta_1} - I \quad \text{se} \quad X < X^*_{F_h}$$

  - Onde $\beta_1 > 1$ é raiz da equação $0{,}5\,\sigma^2\,\beta^2 + (r - \delta - 0{,}5\,\sigma^2)\,\beta - r = 0$.
  - Se $X \geq X^*_{Fh}$, o valor do líder é igual ao valor de *exercício simultâneo*.
  - Para o caso *menos provável* da firma de alto custo ser a líder, basta permutar h e l nas equações acima. Gatilho do líder? A seguir.

Gatilho do Líder no Duopólio Assimétrico

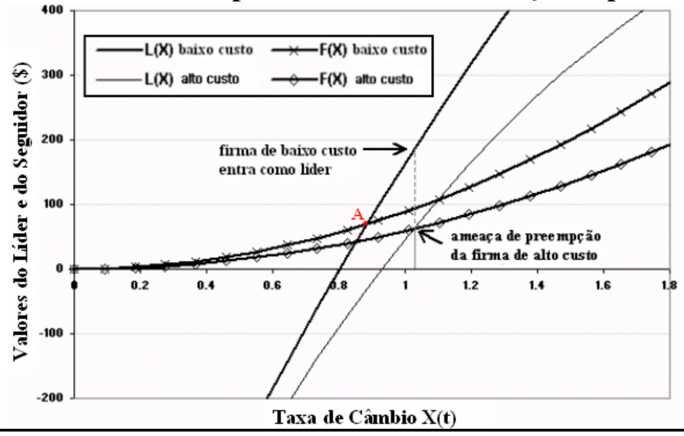
- O gatilho do líder é um pouco mais sutil que no caso simétrico.
- A figura mostra os valores do líder, seguidor e simultâneo p/ ambas as firmas, como função da taxa de câmbio X(t).



- Vamos dar um zoom na região de ameaça de preempção.

Gatilho do Líder no Duopólio Assimétrico

- A firma de *baixo custo* não precisa exercer no *seu ponto de indiferença* (A, onde $F_l = L_l$), pois *não existe ameaça* de preempção por parte da firma de alto custo ($L_h < F_h$).
  - A firma de baixo custo só vai exercer sua opção de ser líder no ponto (ou um pouco antes) de indiferença do rival ($L_h = F_h$), quando realmente passa a existir a ameaça de preempção.



Gatilho do Líder e Equilíbrio

- Outra maneira de ver o gatilho do líder X^*_L:
  - Sem a ameaça de preempção, a firma iria investir otimamente no gatilho monopolista X^*_M. Com competição essa estratégia não seria EN pois a outra firma poderia não esperar tanto e desviar exercendo a opção quando X atingir $X^*_M - \varepsilon$.
  - Investir em $X^*_M - \varepsilon$ também não seria EN pois a outra firma poderia desviar entrando quando X atingir $X^*_M - 2\,\varepsilon$, etc.
  - Esse processo só pararia quando uma das firmas não tivesse mais incentivo para desviar. Esse é o ponto indicado na figura anterior em que a firma de baixo custo entra como líder.
- Como sempre em jogos de "timing", o EN (equilíbrio de Nash) é estipulado em termos de *tempos de parada*.
  - Para todo subjogo iniciado num instante t qualquer, o perfil de estratégias $\{t_{Ll}, t_{Fh}\}$ é EN e, logo, um ENPS (mas tem outros).
    - Os tempos de parada (tempos de exercício da opção de investir) são definidos como usual, por ex.: $t_{Ll} = \inf\{t \geq 0 \mid X \geq X^*_{Ll}\}$.

Exercício: Deduzir Valor do Líder

- Use o método diferencial para deduzir a equação da firma de baixo custo como líder L_l mostrada antes.
- Dicas para solução:
  - Note que a equação diferencial do valor do líder *durante a fase monopolista* V_l já em moeda doméstica é dada por:

$$0,5\ \sigma^2 X^2 V_{XX} + (r - \delta)\ X\ V_X - r\,V + \frac{(a - c_l)^2}{4\,b}\ X = 0$$

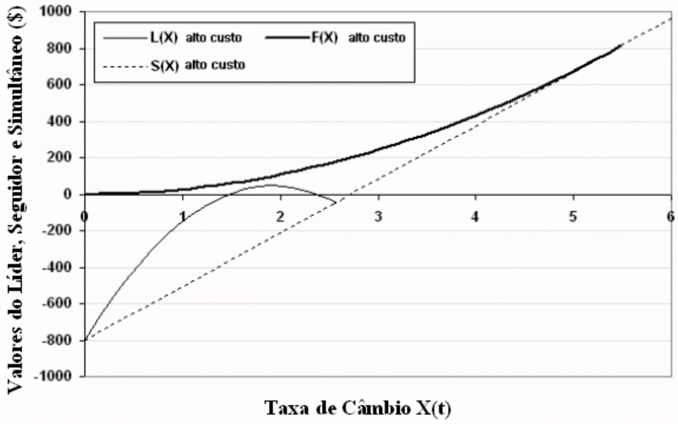
  - Onde o termo em vermelho é o termo não-homogêneo de *cash-flow* que sugere a solução em perpetuidade (divide o cash-flow por δ) como *solução particular*. A ela, é somada a *solução geral*:

$$V_l(X) = A_l\ X^{\beta_1} + \frac{(a - c_l)^2}{4\,b}\ \frac{X}{\delta} \quad \text{se } X \leq X^*_{F_h}$$

  - A constante A_l é negativa, refletindo as perdas competitivas causadas pela futura entrada do seguidor. Ela é dada pela c.c. de *continuidade de valor* ("value matching") em X^*_{Fh}, quando o seguidor entra.
  - Ver detalhes em: http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly3.html
- O valor que queremos, L_l, é simplesmente $L_l = V_l - I$.

Caso Sem Perigo de Preempção pelo Rival

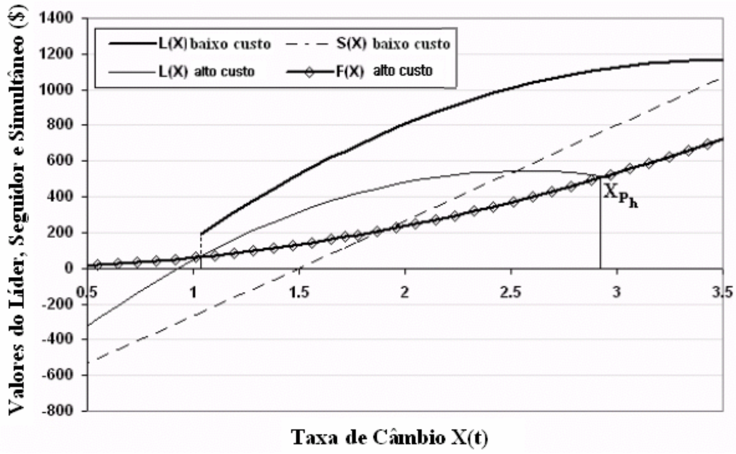
- Se a *vantagem competitiva* da firma de baixo-custo for *muito alta* (como na figura abaixo), pode *desaparecer a ameaça de preempção* antes do gatilho ótimo do *monopolista* $X = X_{Ml}$.
- Nesse caso a firma l ignora a firma rival h e exerce em $X^* = X_{Ml}$.



- Logo, o gatilho do líder é o *mínimo* entre o seu *gatilho de monopólio* e o *valor mínimo em que a firma rival tem incentivo p/ se tornar líder*.

Região de Preempção da Firma de Alto Custo

- Imagine que a vantagem competitiva não é tão grande, e logo existe uma região de X(t) onde a firma de alto custo tem incentivo p/ entrar (entre 1,03 e 2,94 na figura):



- Se a condição inicial X(t=0) pertence a essa região, existe probabilidade positiva de "equívoco" (exercício simultâneo).

Colusão, Estratégias Mistas e "Equívoco"

- Como esse é um modelo de "novo mercado", a *colusão nunca é ENPS*. A assimetria só reforça esse resultado.
- Estratégias mistas: usando um procedimento análogo ao caso simétrico, obtém-se as probabilidades ótimas:

$$p_l = \frac{L_h - F_h}{L_h - S_h} \qquad p_h = \frac{L_l - F_l}{L_l - S_l}$$

  - Se X(t = 0) pertence a região em que ambas as firmas tem L > F, então as probabilidades que só a firma de baixo-custo exerce a opção, só a firma de alto-custo exerce a opção e ambas as firmas exercem as opções (por "equívoco") são, respectivamente:

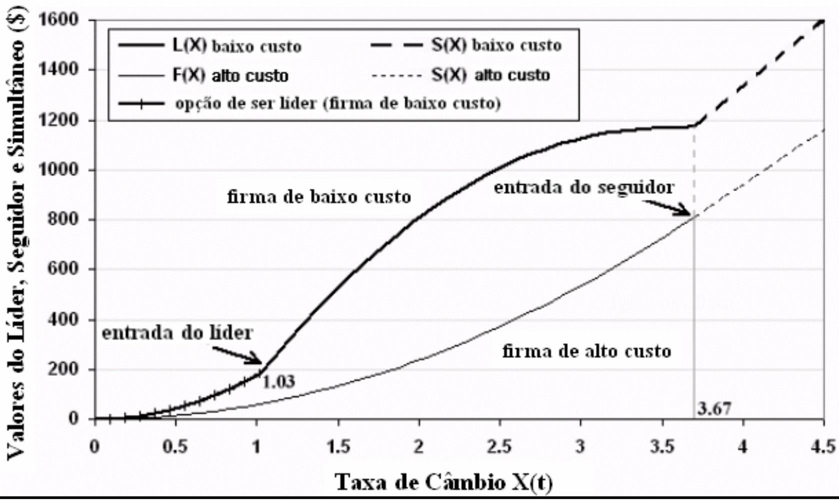
$$\boxed{pr(\text{baixo-custo}) = \frac{p_l\,(1 - p_h)}{p_l + p_h - p_l\,p_h}} \qquad \boxed{pr(\text{alto-custo}) = \frac{p_h\,(1 - p_l)}{p_l + p_h - p_l\,p_h}}$$

$$\boxed{pr(\text{ambas}) = \frac{p_l\,p_h}{p_l + p_h - p_l\,p_h}}$$

  - Logo, dependendo das condições iniciais, mesmo para o duopólio assimétrico existe uma probabilidade positiva de "equívoco".

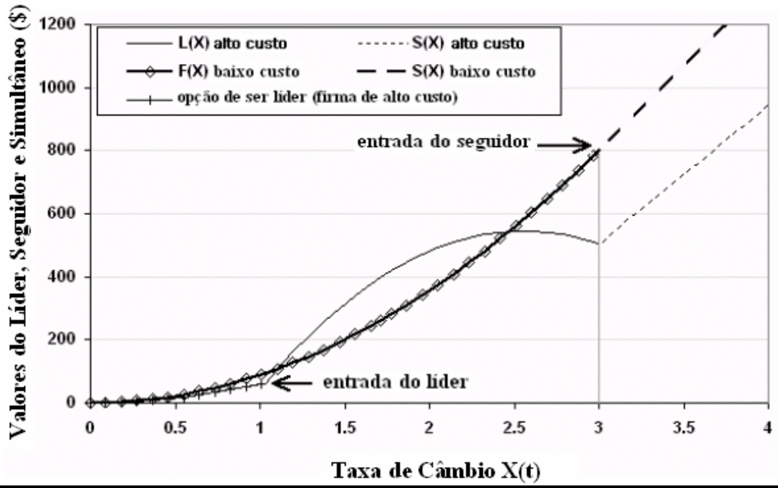
Principal Equilíbrio Perfeito em Subjogos

- Se inicialmente (X(t=0)) está *abaixo da região de preempção* (ou se essa região é um conjunto vazio), *quase certamente* o ENPS é a firma de baixo custo entrando como líder e a firma de alto custo entrando como seguidora em X_{Fh}. Ver figura:



Equilíbrio Perfeito em Subjogos Secundário

- Mas, o muito *menos provável* (mas não impossível) ENPS com a firma de alto-custo entrando como líder pode ocorrer para algumas condições (não existe incentivo unilateral para desviar em todos os subjogos):



Oligopólio Sob Incerteza

- **Esse modelo de oligopólio sob incerteza é baseado em Grenadier (2002). Ver detalhes e planilha em:**

  http://www.puc-rio.br/marco.ind/oligopoly_gren.html
- **Esse artigo tem pelo menos duas contribuições relevantes:**
  - **Extensão do *princípio do comportamento míope ótimo* (*principle of optimality of myopic behavior*) de Leahy p/ o caso de oligopólio; e**
  - **A determinação das estratégias de exercício em oligopólio usando uma indústria "artificial" em *competição perfeita*, através de uma *função demanda modificada*.**
  - **Os dois "truques" simplificam a solução dos problemas porque "*o jogo de exercício pode ser resolvido como um problema de otimização de um único agente*", de forma que novamente podem ser aplicadas as ferramentas usuais de OR em tempo contínuo.**
- **Considere uma indústria oligopolística com n firmas iguais**
  - **Faremos simulações de MC da demanda, de forma a comparar oligopólios com poucas firmas (n = 2) e com muitas firmas (n = 10), em termos de níveis de investimento e produção industrial.**

Características do Modelo de Oligopólio

- **O modelo de Grenadier é relacionado a modelos de DP (cap. 9, seç. 1; caps. 8 e 11), mas com *algumas diferenças*:**
  - **Em DP (cap.9) cada firma produz 1 unidade e a produção total da indústria Q é igual ao número de firmas no mercado;**
  - **Em Grenadier esse número de firmas é fixo (n), mas cada uma pode produzir mais de uma unidade. Isso é mais conveniente:**
    - **Os casos de monopólio (n = 1), duopólio (n = 2) e da competição perfeita (n = ∞), são casos particulares do modelo de Grenadier.**
  - **Mas, p/ o caso de *firmas assimétricas*, o modelo de DP parece melhor, pois a entrada das firmas é só um *problema de ordenação*.**
  - **Mas em ambos os modelos é necessário assumir a premissa que o *investimento é infinitamente divisível*, i.é, firma i pode adicionar uma *capacidade infinitesimal* dq com *investimento infinitesimal* dI.**
    - **Isso é uma aproximação razoável em muitas indústrias, por ex., se o novo investimento é uma fração pequena da capacidade instalada da indústria. É boa p/ estudar o *equilíbrio na indústria*.**
    - **Mas não é tão razoável p/ estudar a *decisão de investir da firma*.**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- **Numa indústria oligopolista com n firmas iguais:**
  - **Cada firma possui *opções compostas perpétuas, americanas de compra*, para *expandir* a sua produção no mercado.**
  - **O preço do produto P(t) é dado por uma curva de demanda inversa $D[X(t), Q(t)]$. O fator de demanda $X(t)$ segue um MGB.**
  - **Aqui, assuma *ou* que as firmas são neutras ao risco *ou* que o processo estocástico X(t) é neutro ao risco (α seria tendência NR).**
- **No equilíbrio perfeito de Cournot-Nash, as estratégias das firmas são quantidades ótimas $q_i^*(t)$, i = 1, 2, ... n:**
  - **$q_i^*(t)$ maximizam seus lucros, dadas as melhores respostas dos competidores q_{-i}^*. Sendo as <u>firmas iguais</u>, $q_i^* = q_j^*$ p/ todo i, j.**
  - **Se a produção total da indústria <u>em equilíbrio</u> é Q*(t), então:**

$$q_i^*(t) = Q^*(t) / n$$

- **O preço de exercício da opção de adicionar a capacidade dq é o investimento ($I \,.\, dq$), onde I é o custo unitário de investimento.**
  - **A opção é exercida por i quando X(t) alcança o gatilho $X_i^*(q_i, Q_{-i})$.**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- **Grenadier sumariza o equilíbrio na sua “Proposition 1”, usando o método diferencial: uma EDP com três cc.:**
  - **Duas cc. são as conhecidas condições de continuidade e de suavidade. Já a terceira cc. é uma condição de equilíbrio:**
    - **Cada firma i maximiza o seu valor $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ dada as estratégias dos rivais (gatilhos). Ela é também uma *condição de continuidade, mas no gatilho dos competidores* $X_{-i}(q_i, Q_{-i})^*$ (que é igual ao seu gatilho $X_i(q_i, Q_{-i})^*$, pois o equilíbrio é simétrico).**
    - **Entretanto, <u>essa condição não será necessária</u> (“Proposition 2” de Grenadier), que *estende o conceito de miopia ótima p/ oligopólios*.**
  - **Com isso, na “Proposition 3”, Grenadier consegue estabelecer o equilíbrio com apenas duas condições de contorno.**
  - **Denote o *valor da firma míope* por $M^i(X, q_i, Q_{-i})$. Seja o *valor marginal da produção* da firma míope $m^i(X, q_i, Q_{-i})$ dada por:**

$$m^i(X, q_i, Q_{-i}) \;=\; \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) \,/\, \partial q_i$$

  - **Por simetria, $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$, com $q_i = Q/n$ e $Q_{-i} = (n - 1) \,.\, Q / n$.**
  - **ENPS simétrico: <u>cada</u> firma exercerá sua opção no gatilho X*(Q).**

Oligopólio Sob Incerteza: Explicação 1

- **A EDO do *valor da firma* $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e suas cc. são:**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma(X)^2\, V^i_{XX} + \alpha(X)\, V^i_X - r\, V^i + q^i\, D(X, Q) = 0$$

  - **Se $X = 0$; $V^i(0, q_i, Q_{-i}) = 0$ (condição trivial; paper nem mostrou);**
  - **Continuidade: Se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V^i_{q_i}(X^*, q_i, Q_{-i}) = I$**
    - **Condição no gatilho ótimo da firma i, que exerce sua opção em X^*, expandindo sua produção em dq_i, investindo $I\, dq_i$. Essa cc. de "value-matching" diz: $V^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = V^i(X^*, q_i + dq, Q_{-i}) - I\, dq$ $\Rightarrow$ dividindo pelo incremento infinitesimal dq e lembrando da *definição de derivada parcial*, obtemos a cc. acima.**
  - **Suavidade: Se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V^i_{q_i X}(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0$**
    - **Condição ("smooth-pasting") de exercício ótimo da firma i, é a derivada da cc. anterior em relação a X. Outra forma: no ótimo as inclinações são iguais: $V^i_X(X^*, q_i, Q_{-i}) = V^i_X(X^*, q_i + dq, Q_{-i})$. Escrevendo no formato de derivada parcial, obtemos a cc. acima.**
  - **Continuidade nos gatilhos *dos rivais*, que no caso simétrico são os mesmos X^*: Se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V^i_{Q_{-i}}(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0$**
    - **Pois $V^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = V^i(X^*, q_i, Q_{-i} + dQ_{-i})$, etc.**

Oligopólio Sob Incerteza: Explicação 2

- **A EDO do *valor da firma míope* $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ e suas cc.:**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma(X)^2\, M^i_{XX} + \alpha(X)\, M^i_X - r\, M^i + (Q / n)\, D(X, Q) = 0$$

  - **Se $X = 0$, $M^i(0, q_i, Q_{-i}) = 0$ (condição trivial; paper nem mostrou);**
  - **Continuidade: Se $X(t) = X^{**}(q_i, Q_{-i})$; $M^i_{q_i}(X^{**}, q_i, Q_{-i}) = I$**
    - **A firma míope ignora a competição e exerce a opção no gatilho míope X^{**}, que Grenadier mostra ser igual a X^* de V^i (Prop. 2).**
  - **Suavidade: Se $X(t) = X^{**}(q_i, Q_{-i})$; $M^i_{q_i X}(X^{**}, q_i, Q_{-i}) = 0$**
    - **Quando a condição de suavidade tem derivada igual a zero é também chamada de condição de "super-contato".**
    - **Ela indica que X^{**} é uma *barreira refletora* para a derivada $M^i_{q_i}$.**
  - **Não há a cc. de competição, pois a firma é míope e a ignora!**
- **A derivada parcial $M^i_{q_i} = m^i(X)$ é o *valor marginal da produção da firma míope* e sua EDO é obtida da forma usual (porfolio livre de risco, etc.). Muda só o *cash-flow*.**
  - **Iremos trabalhar com ela para cair no caso de competição perfeita, que já sabemos resolver: a miopia ótima de Leahy!**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- Seja m(X, Q) o *valor marginal da produção da firma míope*. A seguinte EDO e duas condições de contorno (cc.) são *suficientes* para determinar X*(Q) e m(X, Q):

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma(X)^2\, m_{XX} + \alpha(X)\, m_X - r\ m + D(X, Q) + (Q / n)\, D_Q(X, Q) = 0$$

  - Sujeito às condições de contorno (além da trivial em X = 0):
  - m[X*(Q), Q] = I (condição de continuidade em X*(Q)); e
  - ∂m[X*(Q), Q] / ∂X = 0 (condição de suavidade em X*(Q)).
  - Os termos "cash-flow" *não-homogêneos* da EDO (vermelho), compreendem a *função demanda modificada* de Grenadier D'.
  - O *gatilho estratégico* é ("Proposition 2" de Grenadier) igual ao gatilho "míope" X*.
  - O formato da EDP é para qualquer processo estocástico de Itô.
    - Para o MGB: $\alpha(X) = \alpha\, X$ e $\sigma(X) = \sigma\, X$.
  - Vamos assumir uma *função demanda inversa iso-elástica*:

$$P(t) = X(t)\ .\ Q(t)^{-1/\gamma}$$

    - Onde $\gamma > 1/n$ assegura lucros marginais *decrescentes* em X.

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- Assim, o oligopólio é resolvido mais facilmente como um "single agent optimization problem":
  - Basta "fingir" que a indústria é *perfeitamente competitiva*, maximizando uma função objetivo "fictícia", que usa a <u>função demanda artificial</u> $D'(X, Q) = D(X, Q) + (Q / n)\, D_Q(X, Q)$.
  - Resolvendo a EDO e as cc., o gatilho ótimo X*(Q) é dado por:

$$X^*(Q) = v_n\ .\ Q^{1/\gamma}$$

  - Onde v_n é uma *barreira refletora superior* (um *preço máximo*, lembrar o caso de *competição perfeita*) que é dada por:

$$v_n = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\right)\left(\frac{1}{1 - 1/n\,\gamma}\right)(r - \alpha)\, I$$

  - Isto é, v_n é o *preço máximo* em oligopólio, pois, nesse nível, as firmas adicionam capacidade (exercem OR) numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional.
  - Enquanto X(t) segue um MGB *irrestrito*, P(t) segue um MGB *restrito*.
  - Note que o gatilho X*(Q) decresce com o nº de firmas no oligopólio (n).

Oligopólio Sob Incerteza: Prêmio da Espera

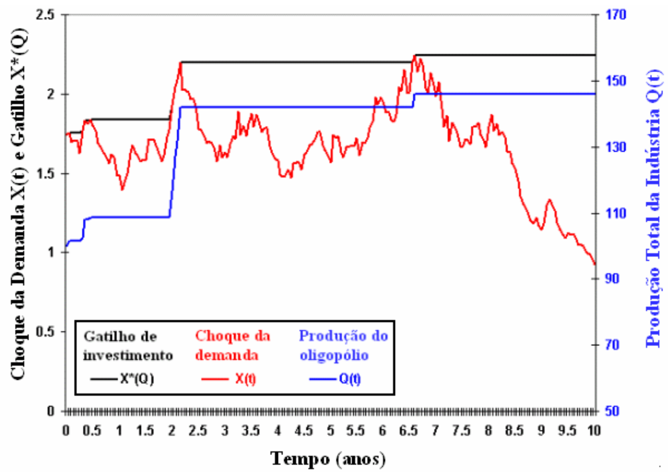
- **Para manter o preço num valor igual ou menor que v_n:**
  - **A adição de capacidade dQ (= n dq) quando X(t) > X*(Q), com custo I dQ, terá de ser maior, quanto maior for a diferença X(t) – X*(Q), i.é, se X(t) > X*(Q), então $Q(t) = (X(t) / v_n)^{\gamma}$.**
- **Qual o *prêmio da opção* quando se exerce essa opção estratégica no oligopólio de n-firmas?**
  - **Grenadier define esse *prêmio de opção* como o VPL em X* *por unidade de investimento* I, denotado por OP(n) e dado por:**

$$OP(n) = 1 / [(n\,\gamma) - 1]$$

  - **Logo, quando n tende a infinito o prêmio da opção OP(n) tende a zero (consistente com a *competição perfeita*, com VPL = 0).**
  - **Para o caso de número finito de firmas esse prêmio é positivo e é maior quanto menos firmas tiver no mercado.**
- **Agora serão feitas simulações numéricas com os dados do caso-base de Grenadier: $\alpha = 0{,}02$; $r = 0{,}05$; $\sigma = 0{,}175$; $\gamma = 1{,}5$; n = 10 firmas; I = 1; Q(0) = 100; e X(0) = 1,74.**

Oligopólio Sob Incerteza: Simulações

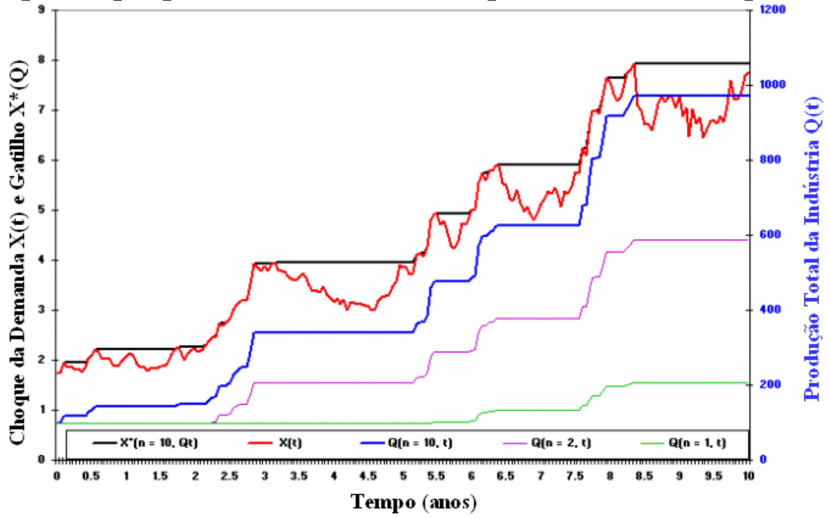
- **O *princípio do gatilho míope ótimo* permite usar a simulação de MC para resolver o modelo. Não precisa trabalhar "backwards" porque se sabe o gatilho ("míope") X*(Q(t)) antecipadamente.**



- **Quando a demanda X(t) atinge o gatilho X*(Q(t)), aumenta a produção da indústria Q e o novo gatilho passa a ser maior.**

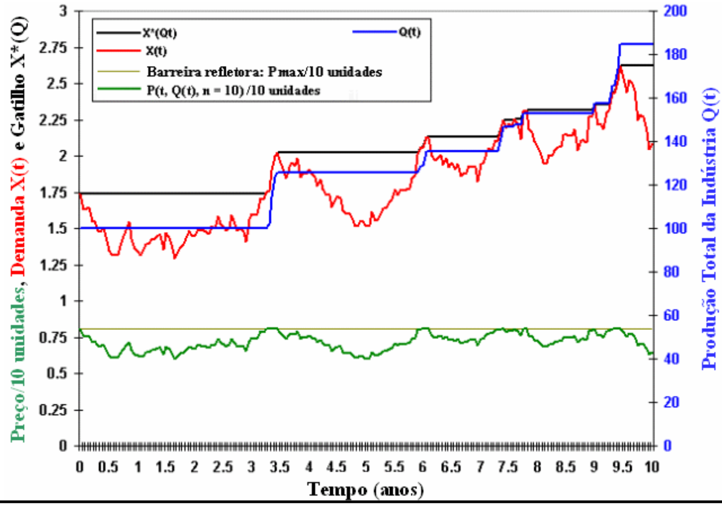
Oligopólio Sob Incerteza: Simulações

- **A figura mostra, para uma amostra de caminho da evolução da demanda, que a produção total da indústria Q(t) é muito maior p/ o caso de oligopólio com 10-firmas (n = 10) do que p/ o caso de duopólio, que por sua vez é maior do que o caso de monopólio.**



Simulações do Oligopólio Sob Incerteza: Preços

- **A figura mostra a <u>evolução dos preços</u>, considerando uma possível evolução da demanda com a respectiva evolução da produção do oligopólio. Note que existe uma <u>barreira refletora superior</u> para esses preços em 0,8081/10 unidades.**



Oligopólio Sob Incerteza: Conclusões

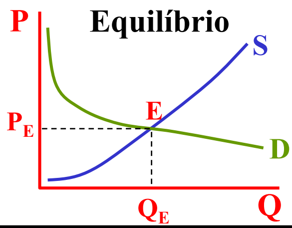
- **Todas as figuras apresentadas aqui foram facilmente obtidas com as equações apresentadas e com a simulação de uma possível evolução da demanda incerta.**
  - **Uma simulação de Monte Carlo mais completa daria as distribuições de probabilidades da produção, dos preços, dos investimentos na indústria, etc., p/ qualquer instante futuro t.**
  - **Isso permitiria fazer um estudo mais realista dos oligopólios, do que é feito com a abordagem tradicional, que ignora a incerteza dinâmica da demanda.**
- **Nessa parte do curso foram vistas várias ferramentas relativamente simples para resolver jogos de OR.**
  - **Os métodos alternativos *diferencial e integral* que resolvem a maioria dos jogos, os quais usam *estratégias simples de gatilhos*.**
  - **Princípios da *miopia ótima de Leahy* e da *curva de demanda artificial* p/ resolver jogos de OR como uma *maximização de um agente míope* num mercado em "*competição perfeita*".**
    - **Isso permitiu usar simulações de MC, pois sabemos o gatilho.**

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

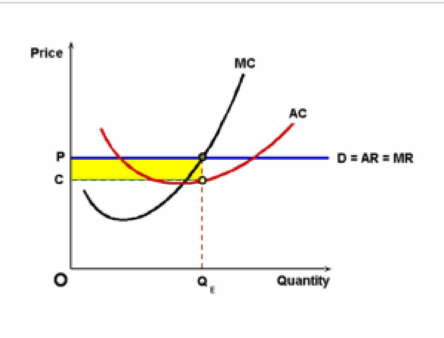
Mercado em Competição Perfeita

- Num mercado em competição perfeita todas as firmas são (ou se comportam como) *tomadoras de preço* e produzem um mesmo ***bem homogêneo*** (commodity).
  - As <u>firmas</u> não "exergam" uma curva de demanda para maximizar o lucro ajustando quantidades. Podem produzir qualquer quantidade que o preço será o mesmo.
    - <u>Para a *firma*</u> a curva de demanda (q x P) é uma *reta horizontal* e a *elasticidade da demanda* (η) é *infinito*. O mercado tudo absorve.
    - As firmas não podem ajustar preços para maximizar o lucro, pois a firma <u>nada venderia com um preço maior</u> e um preço menor seria sub-ótimo, já que reduziria seu lucro (ou geraria prejuízo).
  - Já a <u>indústria</u> "enxerga" uma curva da demanda Q(P) ou gráfico Q x P.
  - É + usada a *função demanda inversa* P(Q).
  - O *preço de equilíbrio* num certo instante t é dado pela interseção das curvas de demanda x suprimento da indústria:

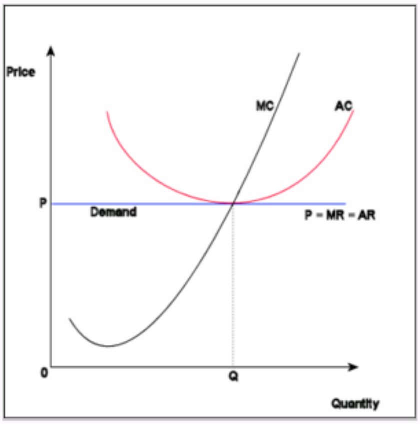


Competição Perfeita: Teoria Clássica

- Retirado da Wikipedia (acesso em 05/11/2006).



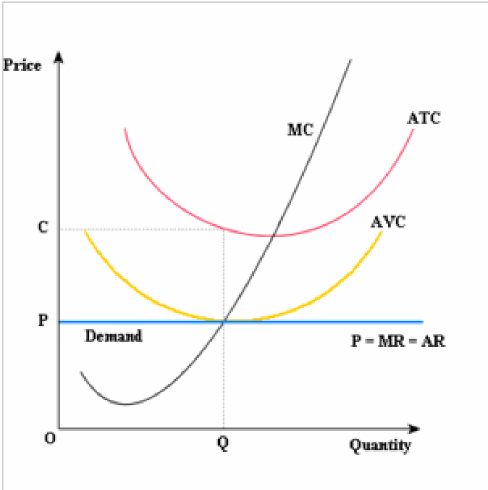
In the short-run, it may be possible for an individual firm to make abnormal profit. This situation is shown in this diagram, as the price or average revenue, denoted by **P** is above the average cost denoted by **C** .



However, in the long run, abnormal profit cannot be sustained. The arrival of new firms in the market and the fact that supply shifts, lowers the price and consequently the average revenue and marginal revenue curves. The final outcome is that, in the long run, the firm will make only normal profit (zero economic profit). The horizontal demand curve will touch the average total cost curve at its lowest point. (see cost curve).

Competição Perfeita: Teoria Clássica

- Figura retirada da Wikipedia. Texto: www.economyprofessor.com



If the Marginal Revenue curve is equal to the average variable cost curve, the firm will be indifferent between shutting down and continuing to produce.

G. Stigler (Journal of Political Economy, vol. LXV, 1957):
Perfect competition is a competitive system in which a large number of firms produce a *homogenous product* for a large number of buyers.
All the firms share the *same product/ market knowledge* and enjoy *free entry/exit* to and from the industry.
They are *price-takers* and sell as much of the product as possible at the market price.
Output is set where marginal cost equals marginal revenue. <u>In the long run, average revenue equals marginal cost</u> and firms enjoy only normal profits. (grifos de Marco Dias)
OBS: *normal profits* = custo capital, i. é, VPL = 0 em nossa notação.

Incerteza Técnica no Cap. 8 do D&P

- Incerteza técnica é definida como a <u>incerteza que não é correlacionada aos movimentos gerais da economia</u>.
  - Em geral, ela é *independente* das flutuações da economia.
  - No mundo de retornos normais, ela tem correlação zero com o mercado. Logo, pelo CAPM o prêmio de risco é zero no caso da incerteza técnica. Isso <u>não</u> significa que ela seja irrelevante.
- No D&P <u>cap. 8</u> é apresentada uma visão de incerteza técnica que é válida p/ alguns tipos de incerteza técnica (mas não para todas), em especial numa visão agregada.
  - D&P: em termos *mais gerais* o preço é dado por P = X Y D(Q), onde além das flutuações de mercado (dado pelo fator Y), há um fator de *incerteza técnica* X que segue outro MGB.
    - Cap 8: incerteza técnica X é relativa a *flutuações nas preferências por certas marcas*, *mudanças na moda*, etc., que independem de Y.
- Não iremos ver <u>esse</u> caso da incerteza técnica do cap. 8 do D&P (pularemos as seções 8.4 e 8.5, além da 8.3).

Outro Tipo de Incerteza Técnica

- **Outro tipo de incerteza técnica é relativa a falta de conhecimento das características de um ativo. Exs.:**
  - ***Sucesso* (ou não) e *custo* de P&D duma vacina da gripe aviária;**
  - ***Volume e qualidade* duma jazida de petróleo recém descoberta.**
- **Esse tipo de incerteza técnica pode ser reduzida através de *investimento em informação* - ou exercício de *opções de aprendizagem*, no linguajar de opções reais.**
  - **Assim, esse tipo de incerteza incentiva o investimento da firma para conhecer a sua função-lucro ("learning by doing").**
- **Iremos ver depois (se der tempo) esse outro tipo de incerteza técnica, que é mais importante por causa de aplicações em P&D, exploração de petróleo, etc.**
  - **Esse tipo de incerteza é analisado no cap. 10 do D&P.**
  - **Ela será modelada como um *processo de redução de variância* (*processo de revelação*, em vez de MGB) gerada pelo exercício de *opções de aprendizagem* (da própria firma ou de outras).**

EDO F(Y) para Firma Neutra ao Risco

- **No caso de duopólio simétrico sob incerteza, foi assumido que as firmas são neutras ao risco.**
- **Deduziremos a EDO de F(Y) por *contingent claims* para o caso de firma NR e usando $r - \alpha$ como dividendo de Y.**
  - **Aqui a firma *seguidora* F tem fluxo de dividendo $Y\ D(0, 1)$;**
  - **Y tem dividendo $r - \alpha$. Como o preço P é proporcional a Y para um D constante, então matematicamente P segue o mesmo MGB de Y e o dividendo é interpretado como *taxa de conveniência* de P.**
- **Seja o portfólio: $\Phi = F - n\ Y$. O retorno num intervalo dt é: $r\ \Phi\ dt = r\ (F - n\ Y)\ dt$.**
- **O retorno de Φ também é a *soma algébrica dos retornos*:**
  - **F varia (dF) e também distribui dividendos $Y\ D(0, 1)\ dt$ que é o fluxo de lucro no intervalo dt antes de expandir.**
  - **O retorno de Y em dt é a soma do ganho de capital dY com o dividendo $(r - \alpha)\ Y\ dt$, como vimos acima.**

EDO F(Y) para Firma Neutra ao Risco

- Logo, retorno = $dF + Y\,D(0, 1)\,dt - n\,[dY + (r - \alpha)\,Y\,dt]$.
- Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r\,(F - n\,Y)\,dt = dF + Y\,D(0, 1)\,dt - n\,dY - n\,(r - \alpha)\,Y\,dt$$

◆ Para obter dF usamos o <u>Lema de Itô</u> para F(Y). Note que F não é função do tempo (opção perpétua, $F_t = 0$):

$$dF = F_Y\,dY + ½\,F_{YY}\,(dY)^2$$

- Vimos que $(dY)^2$, se Y segue MGB, é $(dY)^2 = \sigma^2\,Y^2\,dt$
- Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

$$dF = F_Y\,dY + ½\,\sigma^2\,Y^2\,F_{YY}\,dt$$ (subscritos são derivadas parciais)

- Substituindo a equação de dF na eq. do retorno de Φ

$$r\,(F - n\,Y)\,dt = F_Y\,dY + ½\,\sigma^2\,Y^2\,F_{YY}\,dt + Y\,D(0, 1)\,dt - n\,dY - n\,(r - \alpha)\,Y\,dt$$

- Algebrando com o objetivo de eliminar termos em dY:

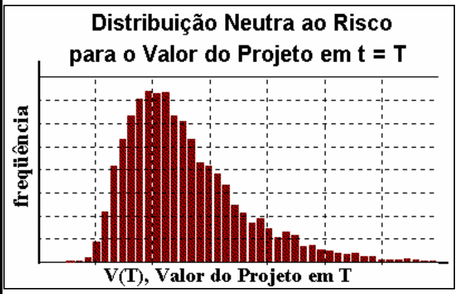
$$r\,(F - n\,Y)\,dt = (F_Y - n)\,dY + ½\,\sigma^2\,Y^2\,F_{YY}\,dt + Y\,D(0, 1)\,dt - n\,(r - \alpha)\,Y\,dt$$

- Escolhendo $n = F_Y$ se elimina o termo em dY.
- *Algebrando* se chega à EDO do seguidor mostrada no texto:

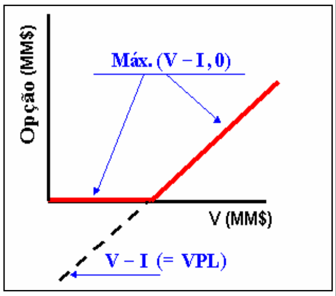
$$½\,\sigma^2\,Y^2\,F_{YY} + \alpha\,Y\,F_Y - r\,F + Y\,D(0, 1) = 0$$

Equação Visual de Opções Reais

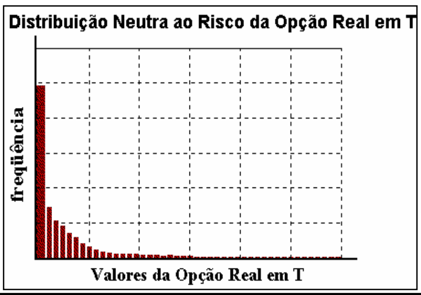
◆ Se o ativo básico V é o valor do projeto operando e I é o investimento (preço de exercício), a *equação visual para a opção real* tipo Européia é:



+



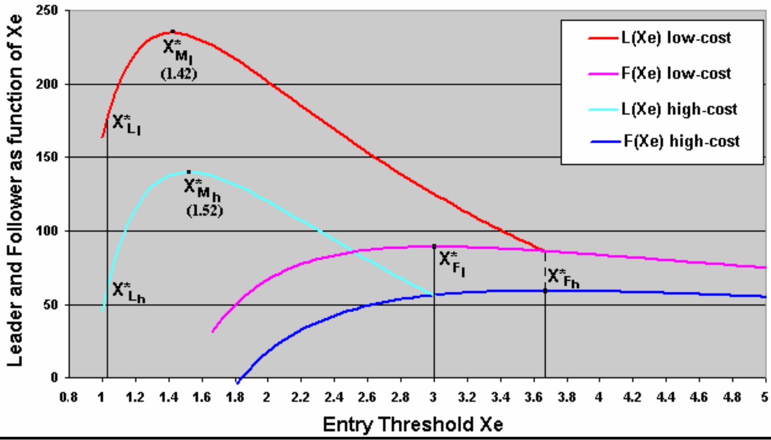
=



Taxa de desconto Livre de Risco r ⇒ Valor da Opção Real em t = 0

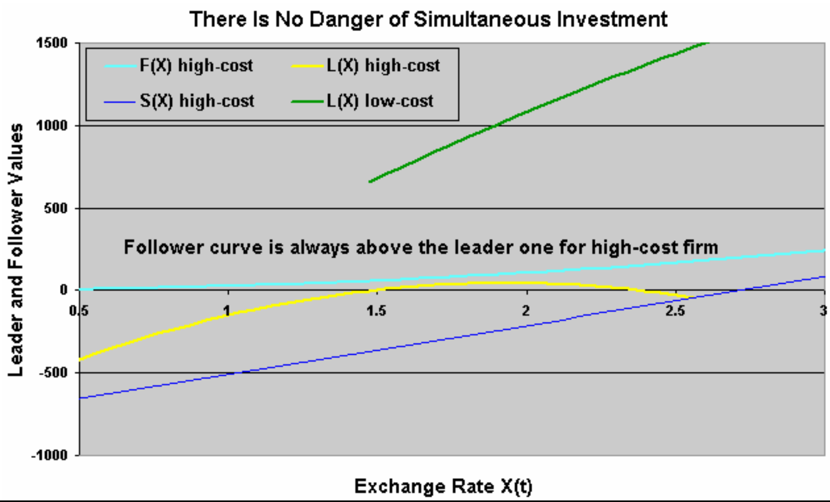
Duopólio Assimétrico de Joaquin & Buttler

- Essa figura mostra o único gráfico mostrado em Joaquin & Buttler. Ela mostra os gatilhos de monopólio maximizando os valores de líder e os gatilhos de seguidor como máximos das curvas de seguidores.
  - A curva do líder é condicional ao rival entrando como seguidor.
  - O único interesse é ver que o líder investe demandando um prêmio menor que o monopolista.



Caso Sem Interação Estratégica de Entrada

- Se a *vantagem competitiva* é suficientemente alta p/ a firma de baixo-custo, não existe a ameaça de preempção do rival.
  - A firma de baixo-custo entra como monopolista (estratégia "open-loop", em vez de estratégia "feedback" ou "closed-loop").



Detalhe do Valor Esperado da Integral

- **Em termos mais formais, deve-se escrever:**

$$\mathbf{E}\left[\int_{t^*}^{\infty} e^{-\,r\,t}\ \pi\, X\, dt\right] \;=\; \mathbf{E}\left[e^{-\,r\,\tilde{t}^*}\int_{0}^{\infty} e^{-\,r\,s}\ \pi\, \tilde{X}\, ds \;\middle|\; X(s{=}0) = X^*\right] \;=$$

$$=\; \mathbf{E}\left[e^{-\,r\,\tilde{t}^*}\right]\, \mathbf{E}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\,r\,s}\ \pi\, \tilde{X}\, ds \;\middle|\; \tilde{X}(s{=}0) = X^*\right] \;=\; \left(\frac{X}{X^*}\right)^{\beta_1} \frac{\pi\, X^*}{\delta}$$

- **A figura retocada nos "tils", pode estar mais clara:**

$$\mathbf{E}\left[\int_{t^*}^{\infty} e^{-\,r\,t}\ \pi\, X\, dt\right] \;=\; \mathbf{E}\left[e^{-\,r\,\tilde{t}^*}\int_{0}^{\infty} e^{-\,r\,s}\ \pi\, \widetilde{X}\, ds \;\middle|\; X(s{=}0) = X^*\right] \;=$$

$$=\; \mathbf{E}\left[e^{-\,r\,\tilde{t}^*}\right]\, \mathbf{E}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\,r\,s}\ \pi\, \widetilde{X}\, ds \;\middle|\; X(s{=}0) = X^*\right] \;=\; \left(\frac{X}{X^*}\right)^{\beta_1} \frac{\pi\, X^*}{\delta}$$