



**ELE 2005: Análise Estratégica de
Investimentos e de Decisões com Teoria dos
Jogos e Jogos de Opções Reais**
Parte 7: Outros Jogos de Opções Reais.

**Marco Antonio Guimarães Dias,
E-mail: marcoagd@pobox.com
Professor Adjunto, tempo parcial**

Rio de Janeiro, 2º Semestre de 2006

Outros Jogos de Opções Reais

- ◆ **Nessa parte serão analisados dois jogos numa mesma aplicação:**
 - **Jogo não-cooperativo de “guerra de atrito”, onde quem “ganha” o jogo é o jogador mais paciente. Nesse caso, o primeiro a exercer a opção (líder) gera uma externalidade positiva (informação grátis) para o rival.**
 - **Jogo cooperativo de barganha (solução de Nash), que pode ser jogado em vez do jogo da espera (guerra de atrito).**
 - **Na aplicação (exploração de petróleo), será visto as condições em que é ótimo substituir um jogo pelo outro e como os dois jogos são relacionados.**
- ◆ **Nesse caso, além desses slides estão sendo distribuídos:**
 - **Texto retirado da minha tese de doutorado sobre esse tema; Artigo com o Prof. José Paulo, que apresentei em Montreal em 2004; e Planilha Excel.**
- ◆ **Notação e equações básicas usadas:**
 - **FC = fator de chance exploratório; I_w = investimento no poço exploratório**
 - **VME = valor monetário esperado = $-I_w + FC \cdot VPL$**

Guerra de Atrito na Exploração de Petróleo

- ◆ Duas companhias de petróleo tem prospectos correlacionados em blocos vizinhos, com direitos que expiram na mesma data T
 - O resultado da perfuração (descoberta ou não) é uma informação (sinal) pública e afeta o FC do prospecto vizinho para FC^+ ou FC^-
 - Assim, existe um incentivo adicional p/ a espera: obter informação grátis (“free rider”) para decidir se perfura, ou não, o seu prospecto
 - ➔ Prêmio da espera é maior que no caso de OR tradicionais
 - ➔ A firma que perfura primeiro é chamada de *líder* (L), exercendo em t_L , e a firma que exerce a OR em $t_F > t_L$ é chamada *seguidora* (F). Aqui $F > L$.
 - ➔ Em caso de firmas assimétricas, a firma mais *paciente* é a mais forte
 - ➔ Existe um tempo de expiração T e o preço do petróleo segue um MGB
 - Existem opções reais compostas: a opção exploratória $E(P, t; FC)$ com preço de exercício I_W (custo de perfuração) que, se exercida com sucesso, obtém a opção de desenvolvimento $R(P, t)$, com preço de exercício I_D .
 - ➔ O exercício de $R(P, t)$ dá o **VPL** de desenvolvimento = $q B P - I_D$
 - A solução do jogo de OR é feita “backwards”, calcula-se primeiro o valor do seguidor e depois o valor do líder. Será usado o método diferencial.

Guerra de Atrito: Medida de Aprendizagem

- ◆ Se a firma j perfura como líder, a firma i será a seguidora e irá atualizar o seu fator de chance FC_i para cima (FC_i^+) com probabilidade FC_j e p/ baixo (FC_i^-) com probabilidad. ($1 - FC_j$).
- ◆ O grau de correlação entre os prospectos é dada pela medida de aprendizagem chamada de η^2 , redução percentual da variância. Nesse caso (Bernoulli), η^2 é o quadrado da redução percentual da variância **valores** atualiz:

$$FC_i^+ = FC_i + \sqrt{\frac{1 - FC_j}{FC_j}} \sqrt{FC_i (1 - FC_i)} \sqrt{\eta^2}$$

$$FC_i^- = FC_i - \sqrt{\frac{FC_j}{1 - FC_j}} \sqrt{FC_i (1 - FC_i)} \sqrt{\eta^2}$$
- ◆ Ver detalhes na Parte 6 (sobre incerteza técnica) e um resumo focado em fator de chance no anexo dessa parte.

Guerra de Atrito: Equações Diferenciais Parciais

- ◆ As OR de *desenvolvimento* $R(P, t)$, com gatilho P^* , e a *exploratória* $E(P, t; FC)$, com gatilho P^{**} , são dadas pelas EDPs e suas c.c.:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial R}{\partial P} - rR + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \left| \quad \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial E}{\partial P} - rE + \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \right.$$

$$R(0, t) = 0, \quad \text{se } P = 0 \quad \left| \quad E(0, t) = 0, \quad \text{se } P = 0 \right.$$

$$R(P, T) = \max(q B P - I_D, 0), \quad \text{se } t = T \quad \left| \quad E(P, T) = \max[-I_W + FC (q B P - I_D), 0], \quad \text{se } t = T \right.$$

$$R(P^*, t) = q B P^* - I_D, \quad \text{se } P = P^* \quad \left| \quad E(P^{**}, t) = -I_W + FC (q B P^{**} - I_D), \quad \text{se } P = P^{**} \right.$$

$$\frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q B, \quad \text{se } P = P^* \quad \left| \quad \frac{\partial E(P^{**}, t)}{\partial P} = FC q B, \quad \text{se } P = P^{**} \right.$$

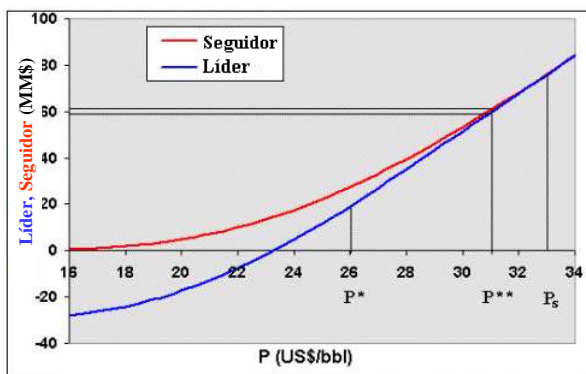
- O valor de líder para a firma i é o VME, mas com $R(\cdot)$ em vez do VPL

$$L_i(P, t) = -I_W + FC_i \cdot R_i(P, t; FC)$$
- O valor de seguidor $p/$ a firma i é um valor esperado considerando FC^- e FC^+

$$F_i(P, t) = FC_{j^-} \cdot E_i(P, t; FC_{j^+}) + (1 - FC_{j^-}) \cdot E_i(P, t; FC_{j^-})$$
- O gatilho do líder $P_L \geq P^{**}$, pois L teria incentivo a esperar mais que P^{**}
 - ➔ Mas, se for para ser líder, é melhor sem custo extra de espera $\Rightarrow P_L = P^{**}$
 - ➔ O exercício simultâneo só é ótimo para P muito grande, se $P \geq P_S$

Guerra de Atrito: Gatilhos e Valores

- ◆ Os gatilhos relevantes para os preços do petróleo são:
 - P^* : a opção de desenvolvimento do campo torna-se “deep-in-the-money”
 - P^{**} : a opção exploratória do prospecto torna-se “deep-in-the-money”
 - P_F : gatilho da opção exploratória *depois* da revelação de informação
 - P_S : limite superior para a interação estratégica, i. é, firmas exercem suas opções, não importa a firma rival: $P_S(t) = \inf\{ P(t) > 0 \mid L(P, t) = F(P, t) \}$



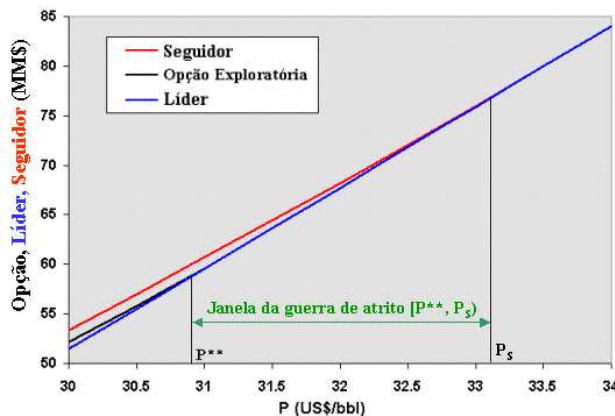
Valores em MM\$ para $P = 31$ \$/bbl

		Firma j	
		Esperar	Investir
Firma i	Esperar	59.3, 59.3	seguidor líder 60.7, 59.6
	Investir	líder seguidor 59.6, 60.7	simultâneo 59.6, 59.6

Convenção:
 = Equilíbrio de Nash

Intervalo de Preços Onde o Jogo É Relevante

- ◆ O jogo guerra de atrito não é relevante para preços abaixo de P^{**} , pois a política de espera é ótima de qualquer modo pela *teoria de OR*
- ◆ Para preços $P \geq P_S$, o jogo também é irrelevante, pois o valor do seguidor é igual ao valor do líder. Nesse caso, o exercício da opção é ótimo para *qualquer* estratégia do outro jogador.
 - Logo, existe uma janela $[P^{**}, P_S]$ em que o jogo é realmente relevante



Nesse exemplo:

$[P^{**}, P_S] = [30,89, 33,12]$

Esse intervalo é maior se for maior $\eta^2(FC_i | FC_j)$

(aqui foi usado $\eta^2 = 10\%$)

Equilíbrios da Guerra de Atrito

- ◆ O líder escolherá exercer a opção em $t_L = \inf \{ t \mid P \geq P^{**} \}$. Já o seguidor irá exercer a opção em $t_F = \inf \{ t \mid P \geq P_F \}$
- ◆ Para a guerra de atrito *simétrica*, existem dois equilíbrios em estratégias puras: firma i como seguidora e firma j como líder; e vice-versa. Em termos de *tempos de parada*: (t_{Fi}, t_{Lj}) e (t_{Li}, t_{Fj})
- ◆ Para a guerra de atrito *assimétrica*, o único equilíbrio em estratégias puras é o jogador *mais forte* como seguidor e o *mais fraco* como líder
 - O jogador *mais forte* é o *mais paciente*, que é o jogador com maior P_S
 - Qualquer assimetria pequena é decisiva para definir esse equilíbrio
 - O equilíbrio paradoxal com o jogador fraco sendo seguidor, talvez ocorra se considerar *regiões desconectadas de exercício* (múltiplas regiões de P_S).
 - Equilíbrio em estratégias mistas: não existe (degenerado) no caso de jogadores assimétricos e jogo finito. Trivial (50%) no caso simétrico.
 - Mas existe uma alternativa que pode dominar *qualquer* desses equilíbrios

Trocando o Jogo: Barganha Cooperativa

◆ Aqui se segue o conselho de Brandenburger & Nalebuff (1996): “mudar de jogo é a essência da estratégia de negócios”

- Será visto a troca do jogo de guerra de atrito para a barganha (parceria)
- Uma motivação é que a *informação pública* do jogo não-cooperativo é menos detalhada que a *informação privada* da parceria $\Rightarrow \eta^* > \eta$
- A união dos dois ativos tem valor U , com cada firma tendo uma participação (w_i, w_j) . Os valores das firmas são $U_i = w_i U$ e $U_j = w_j U$
 - ➔ Essas participações serão dadas pela *solução de Nash* para a barganha
 - ➔ A solução de Nash para a barganha cooperativa é a mais popular

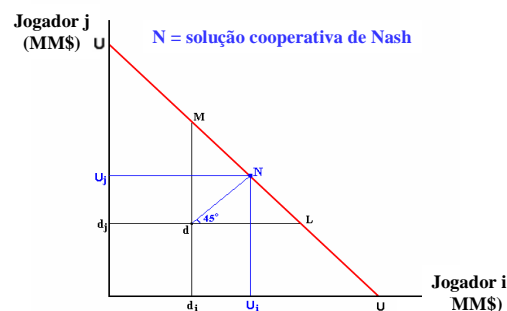
$$w_i = \frac{1}{2} + \frac{(d_i - d_j)}{2U}$$

$$w_j = 1 - w_i$$

$$U_i = w_i U; U_j = w_j U$$

$$U > 0 \text{ e } w_i \in (0, 1)$$

d = ponto de desacordo (“disagreement point”) e aqui é o ENPS da guerra de atrito (novidade teórica)

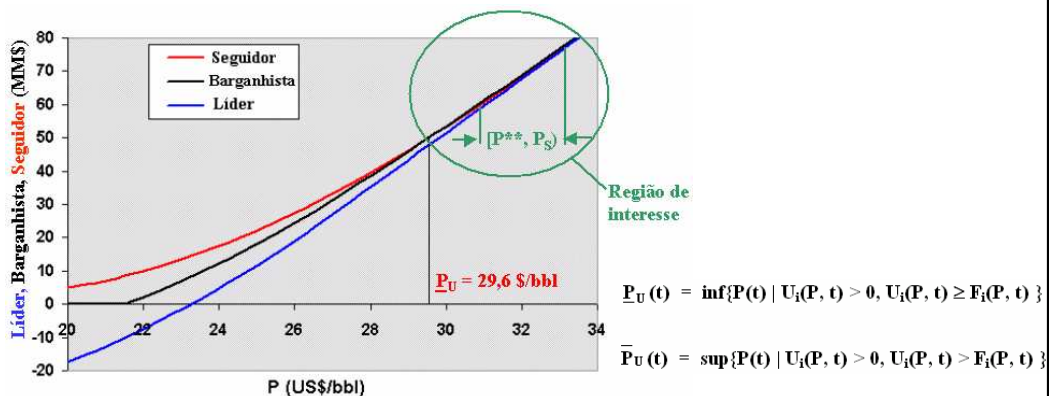


Barganha Cooperativa e Guerra de Atrito

◆ O valor da união de ativos no jogo de OR exploratório é:

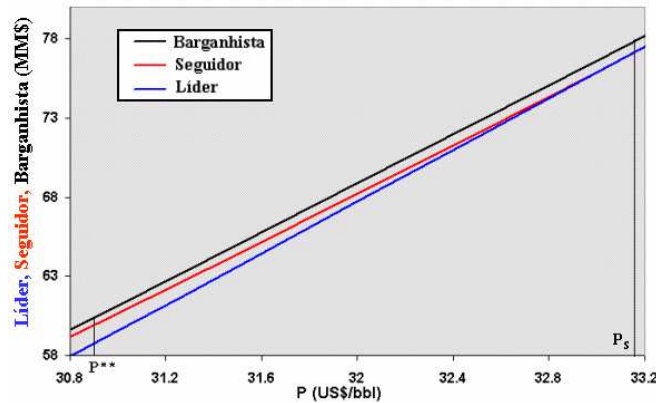
$$U = \max\{0, VME_j + [FC_j \cdot E_i(P, t; FC_i^+) + [(1 - FC_j) \cdot E_i(P, t; FC_i^-)]\}$$

- ➔ Mas agora usa $\eta^* > \eta$ para calcular FC^+ e FC^- , uma importante diferença
- ➔ Para os pesos w_i e w_j , pode-se usar um valor fictício máximo da guerra de atrito ($d_i = F_i$ e $d_j = F_j$) para ver se a barganha domina *qualquer* GA
- ➔ Seja o intervalo $[\underline{P}_U, \bar{P}_U]$ em que a barganha domina qualquer guerra de atrito



Dominância da Barganha Cooperativa

- ◆ A figura abaixo é um “zoom” da anterior no intervalo em que a guerra de atrito é relevante: $[P^{**}, P_S) = [30,89, 33,12)$
 - Nesse exemplo a barganha domina a guerra de atrito em todo o intervalo onde existiria interesse na guerra de atrito
 - $[P^{**}, P_S) \subset (\underline{P}_U, \bar{P}_U) = (29,6, 36,7)$. Logo, nesse caso, troque de jogo!



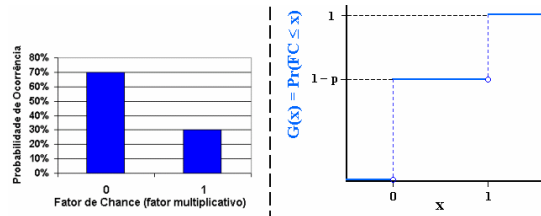
MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Fator de Chance e Distribuição de Bernoulli

◆ Foi visto que o *fator de chance* dá a probabilidade de sucesso de um prospecto e é usada no cálculo: $VME = -I_w + FC \cdot VPL$

- FC tem distribuição de Bernoulli, um parâmetro e dois cenários (0 e 1)



- FC é função (produto) de seis fatores: probabilidades de existência de rocha geradora, migração, rocha reservatório, trapa geométrica, retenção (rocha selante + preservação) e sincronismo geológico.
- ◆ Aqui a v.a. técnica de interesse é o FC de um prospecto e o sinal S é o FC de outro prospecto, também v.a. de Bernoulli (0 ou 1)
- Se o sinal $S_k = 1$, então revisa p/ FC^+ , se $S_k = 0$, então revisa p/ FC^-
 - Logo, para estudar o poder de revelação de um sinal em relação a FC é necessário estudar a *distribuição bivariada de Bernoulli*

Valores Revisados de FC e Medida η^2

◆ Teorema 4: dado as v.a. $FC \sim Be(FC_0)$ e $S \sim Be(q)$, e dado η^2

- As probabilidades de sucesso reveladas por S, i. é, FC^+ e FC^- são:

$$FC^+ = FC_0 + \sqrt{\frac{1-q}{q}} \sqrt{FC_0 (1-FC_0)} \sqrt{\eta^2(FC | S)}$$

$$FC^- = FC_0 - \sqrt{\frac{q}{1-q}} \sqrt{FC_0 (1-FC_0)} \sqrt{\eta^2(FC | S)}$$

- η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ :

$$\eta^2(FC | S) = \rho^2(FC, S) = \frac{(\rho_{11} - FC_0 q)^2}{FC_0 (1-FC_0) q (1-q)}$$

- Aqui η^2 é simétrica: X e $S \sim Bernoulli \Rightarrow \eta^2(FC | S) = \eta^2(S | FC)$

- $\eta^2(FC | S) = 0 \Leftrightarrow FC$ e S são independentes

- Os limites de Fréchet-Hoeffding p/ existir a dist. bivar. de Bernoulli:

$$0 \leq \eta^2 \leq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \left\{ \frac{FC_0 q}{(1-FC_0)(1-q)}, \frac{(1-FC_0)(1-q)}{FC_0 q} \right\}, \\ \frac{\text{Min}\{FC_0, q\} (1-\text{Max}\{FC_0, q\})}{\text{Max}\{FC_0, q\} (1-\text{Min}\{FC_0, q\})} \end{array} \right\}$$

Distribuições de Bernoulli Intercambiáveis

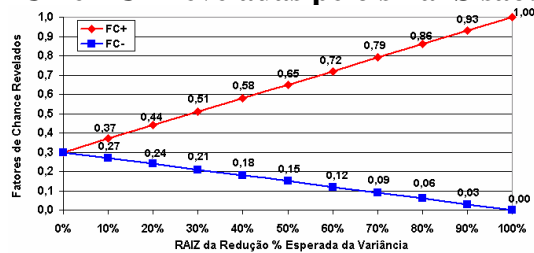
◆ Uma simplificação importante é quando as v.a. $FC \sim Be(FC_0)$ e $S \sim Be(q)$ são *intercambiáveis* (aqui $p_{01} = p_{10}$). Proposição 7:

- FC e S intercambiáveis $\Leftrightarrow FC_0 = q$
- O limite de Fréchet-Hoeffding deixa de ser restrição: $0 \leq \eta^2 \leq 1$
- As probabilidades de sucesso FC^+ e FC^- reveladas pelo sinal S são:

$$FC^+ = FC_0 + (1 - FC_0) \eta$$

$$FC^- = FC_0 - FC_0 \eta$$

$$\Rightarrow FC^+ - FC^- = \eta$$



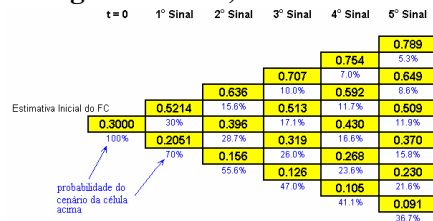
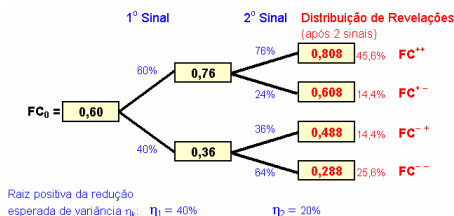
◆ Lema 7. A condição necessária para haver revelação total (ou aprendizagem máxima) é que FC e S sejam intercambiáveis:

$$\eta^2(FC | S) = 1 \Rightarrow FC \text{ e } S \text{ v.a. intercambiáveis}$$

Processos de Revelação de Bernoulli

◆ Processo de revelação de Bernoulli é uma seqüência de *distribuições bivariadas de Bernoulli* gerada pela interação de uma seqüência de sinais S com o FC do prospecto de interesse.

- Se existe uma seqüência de sinais (poços correlacionados sendo perfurados, sísmica) então existe um *processo de revelação* do FC
- ➔ O processo pode ser totalmente convergente ou não, recombinante ou não



- Como esses processos podem convergir para uma distribuição com apenas dois cenários (Teorema 1 a)?

