OTIMIZAÇÃO DINÂMICA SOB CONDIÇÃO DE INCERTEZA NA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

Juliana de Moraes Marreco
CEPEAD – UFMG
Faculdade de Ciências Econômicas
juliana.marreco@uol.com.br

RESUMO

O trabalho a seguir estuda uma opção real de abandono de um campo de petróleo. Deseja-se responder a seguinte pergunta: “Qual o melhor momento de abandonar um campo de petróleo em operação, considerando que o preço do barril está sujeito à incerteza ?” Não se trata apenas de abandonar quando a receita operacional for menor do que os custos operacionais fixos e variáveis. A incerteza pode tornar um campo inviável em altamente lucrativo no futuro, caso o preço do petróleo suba. O modelo apresentado vale-se da programação dinâmica associada a uma técnica de programação não linear para determinação dos valores críticos. O resultado é a curva de fronteira do exercício ótimo dessa opção.

Palavras-chave: programação dinâmica, opções reais, problema de parada ótima

ABSTRACT

This paper studies the option to abandon an offshore oil field. In other words, to answer the question: “when is it optimal to abandon an offshore oil fied, considering that future oil price is uncertain?” It is not just about abandonig the fild when the operating costs become higher than the operating revenues. Uncertain can turn an unprofitable field into a highly profitable one, once there is an increase in oil prices. The model presented uses Dynamic Programming together with a non linear programming method (Golden Section Search) to calculate the critical values. The result is the boundary curve.

Keywords: dynamic programming, real options, optimal stop problem

1 INTRODUÇÃO

O objetivo primordial das empresas é a criação de valor para os seus acionistas. O sucesso desse objetivo depende fundamentalmente da análise de investimentos dos novos projetos que precede a tomada de decisões.

Os estudos de viabilidade técnica e econômica dos investimentos deverão contemplar questões de risco, retorno, incerteza e orçamento de capital. A partir de uma analogia com as opções financeiras, a Teoria das Opções Reais (TOR) permite considerar na análise de projetos fatores como flexibilidade, oportunidades de crescimento, opção de abandono do investimento, contração, decisões de investimentos seqüenciais e, até mesmo, a entrada de concorrentes em um mercado. Projetos que poderiam ser descartados por apresentavam Valor Presente Líquido (VPL) negativo passam a ser considerados viáveis sob a justificativa de conterem valiosas opções embutidas.

A área de recursos naturais têm sido um campo fértil para a aplicação da TOR. Projetos de exploração de petróleo são repletos de opções e fontes de incerteza. Este trabalho trata da opção de abandono de um campo de exploração de petróleo, que pode ser exercida caso o preço do barril de petróleo atinja determinado patamar que justifique tal decisão. A opção de abandono é tratada como uma opção de venda americana. O objetivo será traçar a fronteira de exercício ótimo, o que será feito através da programação dinâmica.

O item 2 apresenta uma breve descrição da TOR e, ainda, o modelo binomial a ser adotado. Uma breve revisão da literatura da aplicação da TOR a projetos de produção e exploração de petróleo está contida no item 3. O item 4 apresenta a técnica da programação dinâmica para otimização sob incerteza. A formulação matemática da opção de abandono e a proposição do pseudo algoritmo são objetos do item 5. A aplicação das técnicas e do algoritmo a um caso real é objeto do item 6, em que se apresentam os resultados seguidos de uma breve análise de sensibilidade das taxas de juros e da volatilidade. A conclusão do trabalho é descrita no item 7. O item 8 destina-se às referências bibliográficas.

2 Análise De Investimentos Nas Empresas

A análise de investimentos consiste no levantamento e avaliação de todas as vantagens e impactos de um projeto para a empresa. É a partir dessa análise que os dirigentes das empresas tomarão as decisões acerca de em quais projetos investir, qual o orçamento de capital que deverá ser destinado a cada projeto e ainda poderão contar com uma previsão do resultado de cada um dos projetos.

Otimizar uma decisão quando não existe incerteza é relativamente simples: basta calcular o VPL de vários projetos de investimentos e escolher aqueles que oferecem maior retorno. Na prática, porém, as decisões são quase sempre cercadas de incerteza. No caso de projetos de exploração e produção de petróleo, as decisões de investimentos são afetados pelos componentes econômico e técnico da incerteza.

Quando analisamos um projeto, podemos optar por investir imediatamente caso as condições sejam favoráveis, ou podemos ainda aguardar e só investir num momento posterior de acordo com as mudanças no cenário. Isto é, podemos esperar que algumas dessas fontes de incerteza sejam resolvidas sem perdermos a oportunidade do investimento. Essa opção tem valor, e esse valor pode ser calculado de maneira análoga a uma opção financeira.

2.1 Teoria das Opções Reais

Em finanças, oportunidades podem ser avaliadas como opções. A partir dessa nova forma de pensar, nasce a TOR, que adequa o cálculo do valor das opções financeiras ao caso dos ativos reais, tornando possível quantificar o valor de oportunidades de crescimento, de abandono, de esperar para investir, de flexibilidade etc... É importante observar que a TOR não rejeita o VPL Tradicional, apenas o complementa, ao considerar o valor das opções que estão embutidas no projeto. Dessa forma, o valor adequado de uma empresa seria aquele que considera não apenas a sua capacidade de geração de caixa no futuro, mas que também abrange o valor das suas opções.

Dixit e Pindyck (1994) demonstraram que a adoção dos critérios do VPL como regra de decisão isolada levam à rejeição de projetos que, quando analisados pela TOR, seriam aceitos. Isso geralmente ocorre com projetos que têm opções, como projetos de P&D.

A TOR surgiu a partir de uma analogia com as opções financeiras. Uma opção financeira dá ao seu titular o direito de comprar ou vender um determinado ativo em uma data preestabelecida por um preço de exercício determinado no contrato. Para adquirir uma opção, o portador deverá pagar um prêmio ao lançador da opção. A definição do valor do prêmio está diretamente relacionada com as condições do contrato de opção.

A existência de incerteza e a possibilidade de mudança no cenário até a data de vencimento é que tornam a opção atrativa aos investidores. Sob a ótica das opções, quanto maior a incerteza (medida pela volatilidade), maior a expectativa de ganhos. Um contrato de opção oferece oportunidade de perdas limitadas ao valor do prêmio e ganhos ilimitados. Se na data de vencimento, o titular optar por não exercer, tudo o que terá perdido será o prêmio pago pela opção.

O mesmo raciocínio deverá ser utilizado para os ativos reais. Assim, quanto maior a incerteza envolvida, maior será o valor da opção real.

2.2 MODELO BINOMIAL DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES

Os principais modelos de avaliação de opções são o Modelo Binomial (MB) proposto por Cox, Ross E Rubinstein (1979) e o modelo de Black e Scholes. O modelo que melhor se adequa ao caso de precificação de opção de venda americana é o MB, descrito a seguir. O modelo parte das seguintes hipóteses: a)os ativos são negociados continuamente, e todos os preços seguem processos estocásticos contínuos e estacionários, b)a distribuição dos preços do ativo-base é log normal, c)a variância do retorno e a taxa livre de risco são constantes ao longo do tempo, d)os modelos são desenvolvidos com base em opções européias, e)inexistência de restrições ou custos atrelados à venda curta e custos de transação.

O MB envolve a construção de uma árvore binomial, em que para cada instante discreto (representado por um nó), estarão relacionadas as possibilidades de alteração do preço do ativo-base. Considera-se que o ativo-base obedece a um processo binomial multiplicativo.

O valor da opção deverá ser igual ao valor de um portfólio que permita o mesmo retorno da opção. Esse portfólio, que deverá se ajustar de forma dinâmica a cada nova posição, será formado pela compra de Δ ações e pela venda de uma opção. O valor de Δ deve ser escolhido de modo que o retorno gerado pelo portfólio seja igual ao retorno obtido em uma aplicação livre de risco. Isso garante que não existirão oportunidades de lucro através de operações de arbitragem.

A cada intervalo de tempo Δt, o retorno sobre o ativo poderá variar de duas maneiras: na primeira, o retorno seria dado por u – 1, (u > 1); ou o retorno poderia ser igual a d – 1, (d < 1). Seja S_0 o valor atual do ativo, o preço, no momento t = 1, seria dado por S_1= u.S_0, e nessa situação o valor da opção seria f_u; ou por S_1= d.S_0 e a opção valeria f_d. Se houver um aumento no preço do ativo-base, o valor do portfólio será

$$S_0 u\Delta - f_u \tag{1}$$

Por outro lado, se o preço do ativo recuar, teremos

$$S_0 d\Delta - f_d \tag{2}$$

Logo, para que o portfólio ofereça um retorno livre de risco, (1) e (2) devem ser iguais.

Nesse caso,

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \tag{3}$$

O parâmetro Δ pode ser interpretado como sendo a taxa de variação do preço da opção em relação à variação do preço do ativo-base. Se o custo do portfólio é igual a

$$S_0\Delta - f \tag{4}$$

segue que

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u).e^{-rT} \tag{5}$$

em que "r" representa a taxa livre de risco.

Substituindo o Δ obtido pela equação (3) em (5), temos:

$$f = S_0 \cdot \left(\frac{f_u - f_d}{S_0.u - S_0.d} \right) - \left(S_0 u \left(\frac{f_u - f_d}{S_0.u - S_0.d} \right) - f_u \right) e^{-rT} \tag{6}$$

Simplificando temos:

$$f = \frac{f_u - f_d - e^{-rT} u.f_d + e^{-r.T} d.f_u}{u-d} \quad (7)$$

Fazendo $p = \frac{e^{r.T} - d}{u-d}$, e substituindo em (7):

$$f = e^{-r.T}\left[p.f_u + (1-p)f_d\right] \quad (8)$$

Os parâmetros "u" e "d" são calculados a partir da volatilidade e o retorno esperado do ativo-base. De acordo com Hull (1999), isso pode ser feito da forma descrita a seguir.

Os intervalos entre os nós têm comprimento igual a Δt. A probabilidade associada a um aumento no preço do ativo, "u", é dada por "p". De maneira análoga, a probabilidade de que o preço seja reduzido em "d" é igual a 1 – p. O valor esperado do ativo ao final do primeiro período é obtido por $S_0 e^{\mu \Delta t}$, em que μ representa o retorno esperado do ativo. Portanto, o valor esperado do ativo-base, ao considerarmos as probabilidades, será dado por:

$$qS_0 u + (1-q)S_0 d \quad (9)$$

Igualando a equação (9), ao retorno esperado do ativo $S_0 e^{\mu \Delta t}$, podemos calcular "p":

$$p = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u-d} \quad (10)$$

O mesmo raciocínio é aplicado para ajustar os parâmetros à volatilidade. Em um processo de Wiener, a variação do termo estocástico Δz, em pequenos períodos de tempo Δt, é igual a $\varepsilon \sqrt{z}$ em que ε é uma variável randômica relacionada a uma distribuição normal padrão. Como Δz é normalmente distribuído, a variância de Δz é dada por Δt, e o desvio padrão é igual a $\sqrt{\Delta t}$. A volatilidade é definida como o desvio padrão dos retornos em um período de tempo Δt. Logo, a volatilidade é obtida por $\sigma \sqrt{\Delta t}$. A variância é igual a $\sigma^2 \Delta t$. Para adequar os parâmetros da árvore binomial à volatilidade, devemos então igualar a variância dos retornos àquela proposta na árvore.

$$q.u^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2 = \sigma^2 \Delta t \quad (11)$$

Substituindo (10) em (11) e ignorando os termos de ordem superior a Δt^2, chegamos aos valores de "u" e "d", propostos por Cox, Ross e Rubinstein (1979).

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad (12)$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad (13)$$

Uma vez calculados esses parâmetros, o modelo binomial apura o valor justo para o prêmio a cada nó, e esses valores são trazidos até a data presente descontados à taxa livre de risco.

O MB é o que melhor se adequa à avaliação de opções americanas, uma vez que é capaz de incorporar todas as alterações de preço possíveis, considerando a possibilidade do exercício antecipado. Se em um determinado nó o valor intrínseco (obtido pela diferença entre o preço de exercício e o corrente) for maior que o valor teórico da opção, esse prevalecerá na solução. Assim, é possível incorporar ao modelo o risco do exercício anterior à data de maturidade da opção.

3 Aplicações na Produção e Exploração de Petróleo

Em 1985, Brennan e Schwartz avaliaram as opções de cessar operações e abandonar uma mina, utilizando preços dos mercados à vista e futuros de commodities. Mais tarde, em 1998, Paddock, Siegel e Smith avaliaram as opções presentes em reservas de óleo ainda não desenvolvidas utilizando analogia com uma opção americana e foram os primeiros a demonstrar empiricamente que a avaliação por opções reais levaria a resultados melhores que o FCD. Em 1996, Dias utilizou essa mesma abordagem na sua dissertação de mestrado, em que trata a opção de *timing* de um investimento em produção e exploração de petróleo.

Trigeorgis (1990) estudou um projeto de exploração mineral que era considerado por uma empresa de mineração multinacional. Ainda em 1990, Bjerksund e Ekern avaliaram opções de adiamento e abandono em um campo de óleo norueguês. Morck, Schwartz e Stangeland (1989) também avaliaram os recursos florestais considerando estoques e preços estocásticos. A utilização da programação dinâmica na exploração de recursos naturais foi discutida por Stensland e Tjostheim, em 1990.

Em projetos de produção de petróleo, destacam-se as opções de abandono, opções de cessar operações temporariamente, opções de flexibilidade e opções de *timing* do investimento.A opção de abandono é observada em projetos em operação ou que estão parados temporariamente. Quanto maior a flexibilidade de uso alternativo de recursos do projeto, mais valiosa será a opção. Para projetos de exploração e produção de petróleo que utilizam plataforma fixa, o abandono implica em custos adicionais. Mas se a plataforma for móvel, como acontece nos casos de exploração em águas profundas, é possível seu aproveitamento em outro campo tanto para atividade de produção, perfuração, completação ou manutenção dos poços. A mudança de uso nesse caso também pode ser uma opção.

A opção de cessar operações é considerada quando a possibilidade de voltar a produzir no mesmo campo é significativa. São levados em conta custos de desmobilização temporária, de preservação, de retomada da produção e, caso sejam muito altos, optar-se-á pelo abandono definitivo. A opção de abandono, a ser modelada neste trabalho, pode ser destacada como a mais importante na etapa final de um projeto de produção de petróleo. Isso porque a vida operacional de uma jazida de petróleo é finita e a sua produção tem uma tendência declinante (depleção). O ativo passa a ter custos operacionais crescentes por barril produzido, até o ponto em que é ótimo abandonar o campo. A decisão de abandono só tem sentido pela existência da incerteza. Em caso contrário, na primeira vez que o custo operacional superasse a receita, a jazida deveria ser abandonada.

A incerteza gera a expectativa de que o preço do petróleo possa subir e, com isso, alterar a receita, tornando inadequada a decisão de abandono. A idéia de encontrar o momento ótimo para o exercício de uma opção, um dos objetivos deste trabalho, já foi tratada na literatura econômica. Campbell e Viceira (1999) demonstraram que erros relacionados ao tempo podem causar grandes perdas na escolha do portfólio. Majd e Pindyck (1987) trataram dos efeitos do tempo e do valor das opções nas decisões de investimento. Baldwin (1982) e Mcdonald e Siegel (1986) estudaram a questão da otimização para investimentos irreversíveis.

4 Otimização Dinâmica sob Condição de Incerteza

Os modelos que contemplam a incerteza, sempre presente no ambiente econômico, têm motivado pesquisas dos melhores economistas e matemáticos em toda a parte e há muito tempo. Lucas e Prescott (1971) dedicaram–se ao estudo do investimento agregado em uma indústria em condições de incerteza utilizando a programação dinâmica e considerando a demanda estocástica. Pelo enfoque no equilíbrio e através da crítica aos modelos de precificação de previsão de preços que usam expectativas adaptativas, consideraram expectativas racionais dos preços, nas quais eles têm a mesma distribuição de probabilidades ao longo do tempo. Essa idéia rendeu a Lucas o prêmio Nobel, em 1995.

Bjorstad, Hefting e Stensland (1989) estudaram as interações entre opções combinando ferramentas de estatística com a programação dinâmica estocástica. Arrow e Chang (1982) utilizam a programação dinâmica combinada com a teoria da utilidade do consumidor. A técnica de programação dinâmica apresenta inúmeras aplicações no campo da economia e das finanças. Dixit e Pindyck (1994) apresentam duas técnicas para otimização dinâmica sob incerteza: a programação dinâmica e a análise de ativos contingentes. Ambas estão relacionadas entre si e levam a resultados idênticos em muitas aplicações, quando se utiliza a abordagem do portfolio replicante.

4.1 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A programação dinâmica é um procedimento matemático de otimização que surgiu no início da década de 50. Richard Bellman foi responsável não somente pela formulação do principal aspecto teórico do método, mas também pela sua sistematização.

A programação dinâmica oferece algumas vantagens em relação a outras técnicas de programação matemática. A primeira dessas vantagens é poder tratar funções descontínuas, não diferenciáveis, não convexas, determinísticas ou estocásticas. Além disso, não exige o isolamento prévio de uma região convexa para a aplicação do procedimento. A última e não menos importante dessa série de vantagens é o fato de a programação dinâmica oferecer um algoritmo mais barato que a simples enumeração de todas as possibilidades de um problema combinatório, o que, em alguns casos, se torna impraticável ou extremamente caro.

O método possui também desvantagens entre as quais as principais são a necessidade de separabilidade e monotonicidade. Uma função é dita separável se, e somente se, a função de retorno ótimo depender apenas do estágio em que é avaliada, não sendo afetada pelos demais estados do sistema. Funções monotônicas, por sua vez, são aquelas em que um crescimento na função de retorno ótimo acarreta um crescimento na função objetivo. Normalmente, essas desvantagens não representam problemas para a aplicação da programação dinâmica na maioria dos problemas práticos. No caso específico do problema tratado neste trabalho, a separabilidade é garantida pela definição do fenômeno como um processo de Wiener. A demonstração da monotonicidade, no caso de um problema de parada ótima, como é o caso, pode ser encontrada em Dixit e Pindyck (1994).

A programação dinâmica oferece uma abordagem alternativa ao problema de controle ótimo que explora de forma mais direta a estrutura dinâmica do problema. A sua principal vantagem em relação à formulação tradicional do problema de controle ótimo é que, uma vez resolvido o problema, a lei de controle ótimo para todo o domínio viável do estado é obtida. Será necessário resolver uma equação diferencial parcial que é a função de retorno ótimo e é derivada da equação de Bellman. A partir desse ponto, obtém-se a função de retorno ótimo. A vantagem que advém disso é que se dispõe de uma gama completa de controles ótimos em malha aberta que poderão servir de pré-programação para um sistema dinâmico. Como a dinâmica do problema é uma abstração do sistema físico real, é possível que existam diferenças entre os resultados do modelo matemático e os resultados reais. Essa é a vantagem de se trabalhar o controle em malha fechada, como faz a programação dinâmica.

4.2 INTERPRETAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A função de desempenho é escrita como função do controle e do estado em um estágio isolado. Deseja se conhecer o conjunto de estados ótimos para que essa função de desempenho seja otimizada. Conhecer o conjunto de estados ótimos significa conhecer o conjunto de controles ótimos. Através de restrições aos estados (finais, intermediários ou iniciais), deve-se estabelecer a lei de controle ótimo que também deve satisfazer as restrições impostas ao controle. A variável N representa o número de mudanças de estado.

4.3 PRINCÍPIO DA OTIMALIDADE

A firma deverá escolher as variáveis de controle u_t que irão gerar um lucro $\pi_t(x_t, , u_t)$. No período seguinte (t + 1), o estado será x_{t+1}. A decisão ótima leva a $F_{t+1}(x_{t+1})$. Uma vez que o período t é uma variável de comportamento randômico, utiliza-se o valor esperado: $\varepsilon[F_{t+1}(x_{t+1})]$, que é chamado de valor de continuidade. O valor atual da soma do lucro mais o valor de continuidade será

$$\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho}\varepsilon_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \tag{14}$$

O problema de otimização consiste em encontrar o conjunto de controles u_t que maximize a expressão acima. O resultado nos leva à equação de Bellman, também conhecida como equação fundamental da otimalidade, ou equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, como é conhecida pelos matemáticos devido à grande similaridade dessa abordagem com aquela formulada por Hamilton-Jacobi na teoria de controle ótimo.

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{máx}\left\{\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho}\varepsilon[F_{t+1}(x_{t+1})]\right\} \tag{15}$$

A equação de Bellman é derivada do princípio de otimalidade também formulado por Bellman: "De qualquer ponto de uma trajetória ótima, a trajetória remanescente é ótima para o problema correspondente que se inicia naquele ponto e termina no mesmo ponto do problema anterior."
A função retorno ótimo é caracterizada pelo estado $F_t(x_t)$. Essa função para cada estágio consiste em um vetor, em que a ordem do vetor é o número de estados viáveis para cada estágio. Assim, a dimensão F pode variar de estágio para estágio.

No estágio final, o valor de F é dado apenas pela contribuição do estado final à função objetivo. Assim, o procedimento geral de solução do problema de programação dinâmica consiste na avaliação recursiva da função de retorno ótimo. Inicia-se com a avaliação de $F_T(x_T)$. Em seguida, são avaliadas as funções para os pontos intermediários anteriores. O vetor de estado ótimo é aquele que, após essas avaliações recursivas, proporcionar o $F_t(x_t)$ máximo.

É importante notar que o estado final não precisa ser conhecido. É necessário apenas que a avaliação da função retorno ótimo se inicie no último estágio, o que não implica a definição do estágio final.

5 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA OPÇÃO DE ABANDONO

O problema da opção de abandono pertence a uma classe particular de programação dinâmica, de extrema importância, devido à vasta possibilidade de aplicações no campo das ciências econômicas. Trata-se do problema de parada ótima, caracterizado por uma decisão binária. Isso quer dizer que a variável de controle poderá assumir o valor zero ou um. O controle u_t será igual a um, quando a decisão for de continuar produzindo para obtenção de um fluxo, $\pi(x_t, u_t)$. Se a melhor decisão for a de abandonar o campo, o controle passa a assumir valor zero. Os estágios são definidos pelo intervalo de tempo.

A variável $\Omega(x_t, u_t)$ representa os custos de recuperação ambiental da locação a ser abandonada. Do valor total a ser considerado será descontado um valor residual líquido de equipamentos justificado pela fato de que a árvore de natal molhada e de outros equipamentos, bem como os recursos humanos, podem ser aproveitados em outro campo, cuja taxa de extração seja maior a ponto de justificar o investimento. Assim, ao mesmo tempo em que pode ser ótimo abandonar um determinado poço, a mesma decisão poderá não ser válida para os demais, uma vez que a taxa de extração decai à medida que a vida útil da jazida vai chegando ao fim.
A equação de Bellman neste caso será:

$$F_t(x_t, u_t) = \underset{u_t}{máx}\left\{\Omega(x_t, u_t), \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho}\varepsilon[F(x') \mid x]\right\} \tag{16}$$

Para uma determinada faixa de valores de x, aqui representado pelo preço do petróleo, o máximo será dado pelo lado direito da equação (16). Da mesma forma, para alguns valores de x, o lado direito poderá se tornar negativo, tornando o abandono a opção que maximiza a equação. Isso é, pode acontecer de o preço do petróleo estar baixo a ponto de resultar em prejuízo a extração do mesmo em determinado campo.

Duas condições específicas irão prover a consistência adequada para que a decisão de abandono não seja alternada por uma decisão de continuidade. Na primeira, considerando $x > x^*$, para o caso em que é ótimo manter a operação, equivale dizer que o lado direito da equação (16) é maior que zero, portanto, a relação expressa em (17) deverá ser maior quanto maior o valor de x.

$$\pi(x) + (1+\rho)^{-1}\varepsilon[F(x') \mid x] - \Omega(x) \tag{17}$$

A segunda condição é que nenhuma vantagem poderá ser revertida no futuro próximo. Para que isso seja verdadeiro, é necessário que exista correlação no processo estocástico de evolução de x, o que é tecnicamente conhecido como dominância estocástica de primeira ordem.

A definição da curva de parametrização da decisão de exercer ou não a opção de abandono está relacionada ao valor da opção em cada momento em que a decisão pode ser tomada.

Investimentos parcialmente reversíveis, como no caso de um campo de petróleo no qual é possível recuperar a árvore de natal molhada, têm a opção de abandono que será avaliada como uma opção de venda americana. A variável preço do barril de petróleo, é a variável estocástica, cujo comportamento ao longo do tempo será descrito pelo Movimento Geométrico Browniano.

A curva de produção de um campo de petróleo tipicamente apresenta um declínio exponencial após o pico de produção. Considera-se que a quantidade Q(t) é função do tempo de exploração e da taxa de declínio exponencial: $Q(t) = Q(0) * e^{-\lambda * t}$. Adelman e Jacoby (1979) especificam que o valor de λ reflete características da reserva que impõem restrições na taxa de extração.

Uma importante premissa feita neste trabalho com relação aos custos é que há uma correlação positiva entre os custos e o preço do petróleo. Beike e Holtz (1995) trabalharam com modelos de regressão, para chegar à conclusão de que a principal motivação de oscilações dos custos é a variação no preço do petróleo. Embora a análise seja feita para reservas terrestres, Dias (1996) acrescenta que essa relação deve ser ainda mais favorável para o caso de reservas *offshore*, que são mais intensivas em bens de capital.

A vida útil da jazida é parte do que chamamos de incerteza técnica, isto é, a incerteza que não está correlacionada com os movimentos macroeconômicos. É estimada a partir de técnicas tais como poços de delimitação, de extensão e pioneiros adjacentes, sísmica 2D,3D, e de detalhe, testes de longa duração e sistemas pilotos de produção entre outros.

5.1 ALGORITMO

Admitindo o preço do barril de petróleo como sendo a variável estocástica, que segue um Movimento Geométrico Browniano, o primeiro passo será traçar uma árvore binomial pelo número de períodos da vida útil e de acordo com a discretização do tempo Δt e com a volatilidade estimada. O passo seguinte é calcular a quantidade produzida a cada período de acordo com a taxa de declínio exponencial da produção.

Em seguida, é calculado o lucro π (x_t, u_t) para cada período t, em que x_t é a variável de estado preço do barril de petróleo no instante t, e u_t é a variável de controle no instante t. A variável de controle, conforme foi explicado anteriormente, irá assumir o valor 1, quando a decisão ótima for a de manter a produção, e valor zero quando for mais vantajoso exercer a opção de abandono. O lucro é calculado como sendo a receita bruta (RB), menos os custos operacionais (CO), no período. Assim,

$$\pi\,(x_t, u_t) = RB - COF - COV{*}Q \qquad (18)$$

em que RB a receita bruta, medida pelo preço do petróleo na data vezes a produção esperada; COF representam os custos operacionais variáveis; COV os custos operacionais variáveis e Q a produção esperada em barris.

Esse valor $\pi\,(x_t, u_t)$ representa o fluxo imediato e o segundo termo do lado direito da equação (18), dado por $\left\{\frac{1}{1+\rho}\varepsilon\left[F(x')\,|\,x\right]\right\}$ é o valor de continuidade, que reflete o valor presente da expectativa dos fluxos futuros, caso a produção seja mantida. Esse valor é obtido através da programação dinâmica, que irá calculá-lo recursivamente, isto é, do estágio final para o estágio inicial.

Para cada intervalo de tempo t, o valor de continuação é obtido com a aplicação da fórmula (18), substituindo o preço do petróleo em t + 1 para o cálculo da receita bruta e ponderando os valores encontrados pelas probabilidades correspondentes da árvore binomial. O lucro obtido no período t + 1 é descontado por um período para ser somado ao fluxo imediato, resultando no valor que será comparado a $\Omega(x_t, u_t)$, que representa o valor do custo de abandono.

Dessa forma, é possível afirmar que, caso o valor do preço do petróleo atinja um valor abaixo da fronteira de exercício, será ótimo exercer a opção de abandono, ainda que o preço possa subir novamente até o final da vida útil da jazida. A decisão ótima garante que nenhuma vantagem poderá ser revertida no futuro próximo.

Para cada instante representado por um nó na árvore binomial, dependendo do preço do petróleo, da produção esperada e da expectativa dos preços futuros, a variável de controle irá assumir um valor igual a zero, quando o lado esquerdo da equação (16) for maior do que o lado direito. Em caso contrário, a variável de controle $u_t = 1$.

O passo seguinte é determinar em cada estágio, quando os controles passam de zero a um. Nesse intervalo é que se encontra o ponto crítico, que determina a fronteira de exercício ótimo. O ponto crítico é definido como sendo o ponto em que o lado direito da equação de Bellman torna-se igual ao lado esquerdo, fazendo indiferente o exercício da opção. Igualando os dois lados da equação, tem-se

$$\Omega(x_t,u_t) = \left\{\pi(x_t,u_t) + \frac{1}{1+\rho}\varepsilon\left[F(x')\,|\,x\right]\right\} \qquad (19)$$

A equação (19) é não linear. Deseja-se calcular o preço(x_t^*)no tempo t, que torna a expressão verdadeira, conhecendo-se as seguintes condições:

i) Para o preço(x_t^+), $u_t = 1$, $\Omega(x_t,u_t) < \left\{\pi(x_t,u_t) + \frac{1}{1+\rho}\varepsilon\left[F(x')\,|\,x\right]\right\}$ e

ii) Para o preço(x_t^-), $u_t = 0$, $\Omega(x_t,u_t) > \left\{\pi(x_t,u_t) + \frac{1}{1+\rho}\varepsilon\left[F(x')\,|\,x\right]\right\}$

Para encontrar esse ponto, adotou-se a técnica de programação matemática não linear da Busca Unidirecional da Seção Áurea. Os testes realizados apresentaram resultados coerentes, demonstrando a convergência e consistência do algoritmo.

6 ESTUDO DE CASO

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos para o caso de um projeto particular. O resultado apresentado a seguir foi obtido a partir dos seguintes dados: λ igual a 10% ao ano.Capacidade inicial de produção do campo é de 95.000 barris por dia. O preço atual do barril de petróleo US$28,98. Taxa livre de risco de 6% ao ano. A taxa de conveniência do petróleo, foi estimada em 6% ao ano e representa um custo de oportunidade.

Os custos operacionais são divididos em custos fixos e variáveis. Os custos operacionais variáveis são os *royalties*, aqui estimados em 10% da receita bruta, custos de transporte e outros, que foram estimados em US$0,8/bbl. Os custos operacionais fixos estimados em US$30 milhões dependem do porte do sistema instalado, da lâmina d'água etc.. A vida útil da jazida foi estimada em 25 anos. O valor da volatilidade adotado foi de 15% ao ano. A fim de fazer uma análise de sensibilidade da volatilidade, adotou-se σ = 25%. O valor adotado considera um custo de abandono para o campo *offshore* de US$ 50 milhões.

O gráfico 1 apresenta a fronteira do exercício ótimo para a opção de abandono quando a volatilidade é de 15% ao ano. O resultado observado mostra que com o passar dos anos o preço mínimo exigido para a manutenção do produção é cada vez maior. A região de abandono, representada pela área abaixo da curva, é maior quanto mais próximo do fim da vida útil.

Nos primeiros anos, poderá ser viável manter a produção a preços mais baixos porque existe o valor da opção de abandono, e a incerteza quanto ao comportamento futuro dos preços é maior. Somado a isso, o fato de a capacidade de produção apresentar um decaimento exponencial torna o preço mínimo requerido maior para que as receitas operacionais superem os custos operacionais. Isso é, uma vez produzindo menor quantidade para os mesmos custos fixos, faz-se necessário maior preço de venda para manter o equilíbrio das contas.

Foi feito um estudo de sensibilidade para a taxa livre de risco e para a volatilidade. Reduzindo-se a taxa livre de risco de 6 para 3%, a curva permaneceu a mesma. Aumentando-se a taxa para 10%, observa-se uma variação em torno de 25% nos preços, trazendo a curva para baixo, comprimindo a região de abandono. A volatilidade é um parâmetro muito mais sensível. Uma variação de 10% na volatilidade (que passou de 15 para 25%) muda bruscamente o perfil do gráfico. A região de abandono cresce com o aumento da volatilidade.

A opção de abandonar tem valor justamente porque existe incerteza, que é quantificada no modelo pela volatilidade. Os preços poderão subir no futuro e tornar a produção de petróleo, nesse campo, uma atividade altamente rentável ainda que em algum momento possa parecer melhor abandoná-lo. A análise da opção de abandono pela fronteira do exercício ótimo é valiosa justamente por contemplar todos esses aspectos.

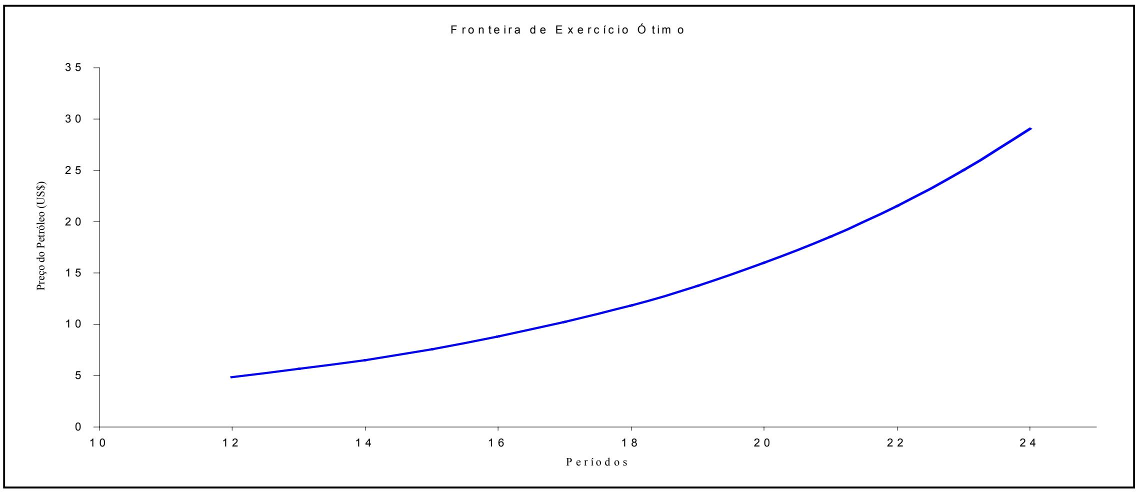

GRÁFICO 1 – Fronteira do Exercício Ótimo. A área acima da curva representa a região de continuação e a área abaixo, a região de abandono.

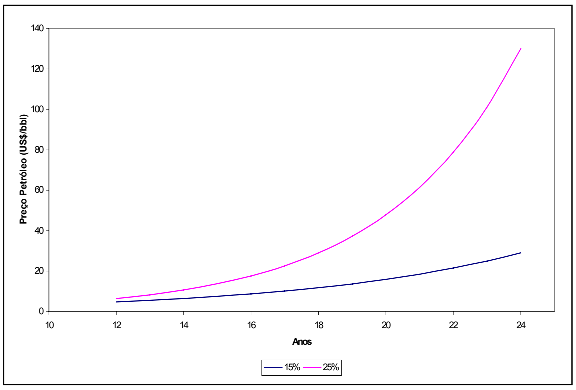

GRÁFICO 2 – Análise de sensibilidade da volatilidade

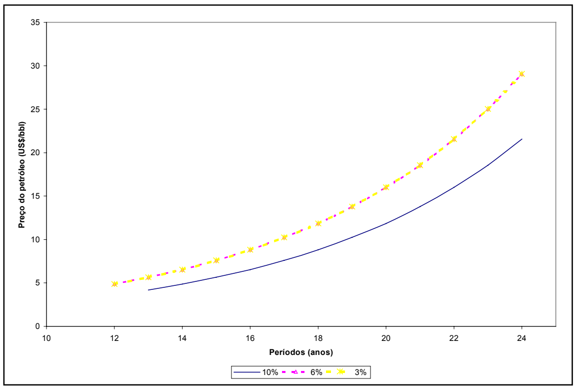

GRÁFICO 3 – Análise de sensibilidade da taxa livre de risco

7 CONCLUSÕES

O objeto de estudo deste trabalho é a determinação da fronteira de exercício ótimo de uma opção de abandono de um campo de petróleo *offshore.* A análise feita pela programção dinâmica que leva aos resultados apresentados vai além de uma simples análise de receitas *versus* custos operacionais. Considera o valor de continuidade, que é o valor que se obtém por continuar a produção. Às vezes, um período de baixa nos preços do petróleo pode acarretar fluxos negativos por um período de tempo, e essa situação pode ser revertida com uma alta futura nos preços. Uma análise que desprezasse os valores de continuidade poderia levar à decisão de abandonar um campo que futuramente traria resultados positivos e, portanto, não otimizaria o uso dos equipamentos e dos recursos empregados.

Os resultados obtidos estão de acordo com a TOR. Quanto mais próximo estiver do final da vida útil da jazida, maior deverá ser o preço do barril para justificar a produção, uma vez que há menos quantidade a ser explorada. Nos primeiros anos de extração, admite-se um preço mais baixo pela existência da incerteza. Isso quer dizer que, nos primeiros anos, há grande expectativa de que os preços subam e a jazida seja lucrativa. A utilização da programação dinâmica combinada com técnicas de programação não linear (busca direcional pela Seção Áurea) mostrou-se eficiente para a otimização de investimentos sob condições de incerteza.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ADELMAN, M e JACOBY, H. Alternative methods of oil supply forecasting. *Advances in Economics Energy Resources,* v.2 Robert Pindyck, ed.Greencwich, CT:JAI Press, 1979.
2. ARROW, K.J e CHANG, S. Optimal pricing use, and exploration of uncertain natural resources stocks. *Journal of Environmental Economics and Management,* v. 9, p.1-10, 1982.
3. BALDWIN, C. Optimal sequential investment when capital is not readily reversible. *The Journal of Finance*. v. 37, n. 3, June, 1982.
4. BEIKE,D e HOLTZ, M. *Cost functions for oil well drilling, lease equipment and well operation in Texas*. SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium, 1995.p.307-21
5. BELLMAN, R. E *Dynamic programming*. New Jersey: Princeton University Press, 1957.
6. BERTSEKAS, D. *Dynamic programming*. New Jersey: Prentice Hall, 1987.
7. BJERKSUND, P e EKERN, S. *Contingent claims evaluation of mean reverting cash flows in shipping*. Real Options in capital investments. Westport: Trigeorgis, Praeger, 1995.
8. BJORSTAD, H HEFTING,T e STENSLAND, G. A model for exploration decisions. *Energy Economics,* p 189-200, July, 1989.
9. BRENNAN, M.J. e SCHWARTZ, E.S. A new approach to evaluating natural resource investment. *Midland Corporate Finance Journal*, v.3, n.1, p37-47, 1985.

10. CAMPBELL, J e VICEIRA, L. Consumption and porfolio decisions when expected returns are time varying. *Quarterly Journal of Economics,* May, 1999.
11. COX, S , ROSS, S e RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, v. 7, Oct. 1979.
12. DIAS, M. *Investimento sob incerteza em exploração e produção de petróleo*. Rio de Janeiro: PUC Rio de Janeiro, 1996. 464 p. (Dissertação, Mestrado em Engenharia da Produção).
13. DIXIT,A *Optimization in economic theory*. New York, NY, Oxford University Press, 1990.
14. DIXIT, A e PINDYCK, R.*Investment under uncertaint* Princeton, NJ: Princeton Press, 1994.
15. HULL,J.*Options, futures and other derivatives*. 4thed. NJ:Prentice Hall, 1999.
16. JONSBRATEN, TW. Oil field optimization under price uncertainty. *Journal of Operational Research Society*. v. 49, p 811-18, 1998.
17. KWOK, Y. *Mathematical models of financial derivatives*. Singapore: Springer, 1999.
18. LUCAS, R e PRESCOTT, E. Investment under uncertainty. *Econometrica* ,v. 39, n.5, p. 659-81, Sept. 1971.
19. LUENBERGER, D. G. *Introduction to dynamic systems. Theory, models and applications*. New York: John Wiley, 1979.
20. _____________ *Linear and non linear programming*. Addison-Wesley Publishing, 1984.
21. MAJD, S e PINDYCK, R. Time to build, option value and investment decisions. *Journal of Financial Economics*. v. 18, 1987.
22. MC DONALD, R e SIEGEL, D. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review*. v. 26, n. 2, p. 331-49, June 1985.
23. MERTON R. *Continuos time finance* Malden, MA: Blackwell, 1990.
24. MORCK,R., SCHWARTZ, e STANGELAND. The valuation of forestry resources under stochastic prices and inventories.*Journal of Financial and Quantitative Analysis* .n. 24, 1989.
25. NEUFVILLE, R. *Applied systems analysis*. Singapore: McGraw-Hill, 1990.
26. PADDOCK, J; SIEGEL, D e SMITH, J. Option valuation of claims on real assets: then case of offshores petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*. p. 479-508, Aug. 1988.
27. RAO, Singiresu. *Engineering optimization*, New York, John Willey, 1996.
28. RARDIN, R L. *Optimization in operations research*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
29. SHAMBLIN, JAMES E. e STEVENS JR, G.T. *Pesquisa operacional:* uma abordagem básica. São Paulo: Atlas, 1989.
30. SIEGEL, D; J SMITH E J. PADDOCK. Valuing off shore oil properties with option pricing models. *Midland Corporate Finance Journal,* v. 5, n. 1, p. 22-30, 1987.
31. STENSLAND, G e TJOSTHEIM. Optimal Investment using empirical dynamic programming with application to natural resources. *Journal of Business,* v. 62, n. 1, p.99-120, 1989.
32. ________________*Optimal Decisions with reduction of uncertainty over time*: an application to oil production. Stochastic Models and Options Value. New York: North-Holland, 1991.
33. STOECKER, W.F *Design of thermal systems.* Singapore: McGraw-Hill, 1989.
34. STOKEY, N.L, LUCAS,R e PRESCOTT. *Recursive models in economic dynamics*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989.
35. TRIGEORGIS, L. *Real options*: managerial flexibility and strategy in resource allocation. Cambridge, MA: The MIT Press, 1999.
36. ______________ A real options application in natural resource investments. *Advances in Futures and Options Research*, v. 4, p. 153-64, 1990.
37. WINSTON, W. Pricing of options and real options for arbitrary distributions. *Third Annual International Conference in Real Options: theory meets practice, 1999.*
38. __________*Financial models using simulation and optimization*. New York: Palisades, 1998.