Opções Reais e Incerteza Técnica: Teoria, Modelagem e Aplicação em Portfólio de Exploração de Petróleo

Seminário de Métodos Matemáticos em Finanças

IMPA – Rio de Janeiro, 11 de abril de 2007

Por: Marco Antonio Guimarães Dias (marcoagd@pobox.com)
http://www.puc-rio.br/marco.ind/
Professor Adjunto, tempo parcial – PUC-Rio/D.E.I.
Consultor Sênior e Eng. de Petróleo Sr. – Petrobras

Incerteza Técnica e Opções Reais

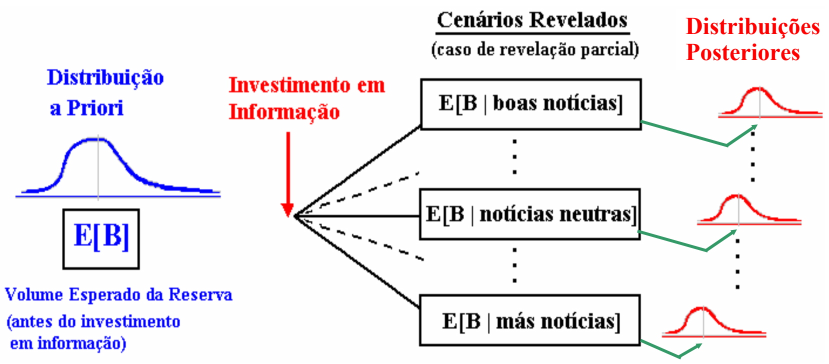
- **Incerteza técnica é aquela relacionada com as *características específicas* de um projeto. Exemplos:**
  - **A *chance de sucesso* técnico de um projeto de P&D;**
  - **As incertezas sobre a *existência*, sobre o *volume* e sobre a *qualidade*/produtividade de uma reserva de petróleo; e**
  - **Incerteza sobre o MTBF (tempo médio entre falhas) de um novo equipamento feito com uma nova tecnologia.**
- **A incerteza técnica incentiva o *investimento em processos de aprendizagem da função lucro*.**
  - ➡ **Incentiva o *exercício de opções de aprendizagem*.**
- **A característica comum é que a incerteza técnica *não é correlacionada com os movimentos da economia*.**
  - **Proposição: A incerteza técnica <u>não demanda prêmio de risco</u> por parte de corporações com acionistas diversificados.**
    - ➡ **Prova: com a correlação = zero, CAPM $\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow$ prêmio = 0.**

Modelos de OR com Incerteza Técnica

- O valor de um *projeto de petróleo* é função de variáveis estocásticas tanto de mercado como parâmetros técnicos.
- Incerteza técnica é um tema carente de pesquisa, pois a modelagem da literatura tem deixado muito a desejar.
- Tem papers usando o *movimento geométrico Browniano* (MGB) p/ modelar a incerteza técnica o que é um erro:
  - É mais adequado uma modelagem *endógena* (e não *exógena* como no MGB) já que é o *exercício de opções de aprendizagem* que faz ela evoluir (pois gera a *redução esperada da incerteza*).
  - A *filtração* do processo estocástico da incerteza técnica não é indexada pelo tempo como no MGB e sim por *eventos discretos* endógenos. O intervalo entre dois eventos pode ser de anos.
  - A variância do MGB é ilimitada quando $t \rightarrow \infty$. Veremos que na incerteza técnica a *variância é limitada* (a variância máxima da distribuição relevante será a da variância a priori); etc.
  - Minha insatisfação me levou a estudar o tema nos últimos 10 anos

Distribuição de Expectativas Condicionais

- O projeto de desenvolvimento é *otimizado* (fazer ou esperar; escala; etc.) *para o cenário esperado* (para minimizar o erro^2).
- Precisamos de E[B | informação], pois o projeto será otimizado p/ esse cenário.



- Mesmo tendo *infinitas* distribuições posteriores existe uma única *distrib. de expectativas condicionais* aqui chamada de *distribuição de revelações*.
  - A palavra "revelação": sugere um processo em direção à *verdade* (de B); tem sido usado em papers de OR (ex: Grenadier, 1999: "*information revelation…*"); e tem tradição na Petrobras (*projeto revelation* em 1999).

O Problema Clássico da Opção Real

- **O problema clássico de opção real W é o *momento ótimo* de investir I num projeto de valor V. Ele pode ser visto como análogo ao caso da *opção americana de compra*.**
  - **Uma das formulações é a da E.D.P. de W(V, t) obtida pelo método *contingent claims* que, caso V siga um M.G.B., é:**

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 W}{\partial V^2} + (r - \delta) V \frac{\partial W}{\partial V} - r W + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

  - **Essa EDP tipo *Black-Scholes-Merton* descreve W enquanto não há exercício. As *condições de contorno* dirão se a OR é européia ou americana, de compra ou de venda, etc., além das condições de exercício ótimo no gatilho V* (*continuidade* e *contato suave*).**
  - **Uma <u>outra</u> formulação p/ uma opção americana é o *problema de parada ótima* representado pelo seguinte *envelope de Snell*:**

$$W(V, t) = \sup_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}^Q\{ e^{-r(\tau - t)} (V_\tau - I)^+ \mid V_t \}$$

com $t^* = \inf\{\tau \in [t, T] \mid W(V_\tau, \tau) = (V_\tau - I)^+\}$

- **Onde $E^Q[.]$ é expectativa sob *medida equival. de martingale*.**
- **T é o tempo legal (ANP) de expiração do direito de investir**

OR com Incertezas Técnicas e de Mercado

- **O valor da OR de desenvolvimento W(P, t; q, B) de um campo já descoberto é função de várias variáveis:**
  - **De mercado, tais como o preço do petróleo P (aqui seguirá um MGB); do tempo t; e de parâmetros com incerteza técnica que aqui serão a *qualidade da reserva* q e o *volume da reserva* B.**
  - **Depois veremos o caso de prospectos com chances de ter petróleo, a OR exploratória E(P, t; FC, q, B), a qual inclui o *fator de chance* FC (v.a. de Bernoulli) sobre a *existência* de óleo.**
- **Vejamos 1º o caso da OR de desenvolvimento que tem <u>várias alternativas de investimento em informação</u>.**
- **Vamos considerar uma equação simples para o VPL de desenvolver o campo (= payoff de exercício da opção):**

  $VPL_{\text{desenvolvimento da produção}} = V(P; q, B) - I_D \rightarrow VPL_{DP} = q\,B\,P - I_D$
  - **Antes de desenvolver o campo pode-se exercer uma *opção de aprendizagem*, cujo resultado é a variável aleatória S (de *sinal*).**
  - **A *escala ótima* de investimento $I_D(B)$ é uma função linear de B.**

Alternativa Ótima de Aprendizagem

- **Proposição: incluindo a alternativa k = 0 (= não investir em informação), a melhor alternativa de aprendizagem é:**

$$k^* = \underset{k \in \{0,1,2,\ldots,K\}}{\arg\max} \; W_k$$

- **Onde W_k é o valor da jazida não-desenvolvida (OR) usando a alt. k, que tem custo C_k, tempo t_k de aprendizagem e emite sinal S_k:**

$$W_k = -C_k + E\left[\max_{t^* \in [t_k, T]} \left\{ E^Q\left[e^{-r t^*} \left(\tilde{q}\, \tilde{B}\, P(t) - I_D(\tilde{B}, t) \right) \right] \right\} \mid S_k \right]$$

- **Onde E^Q significa *expectat. neutra ao risco* e t* é o *tempo ótimo de exercício*:**

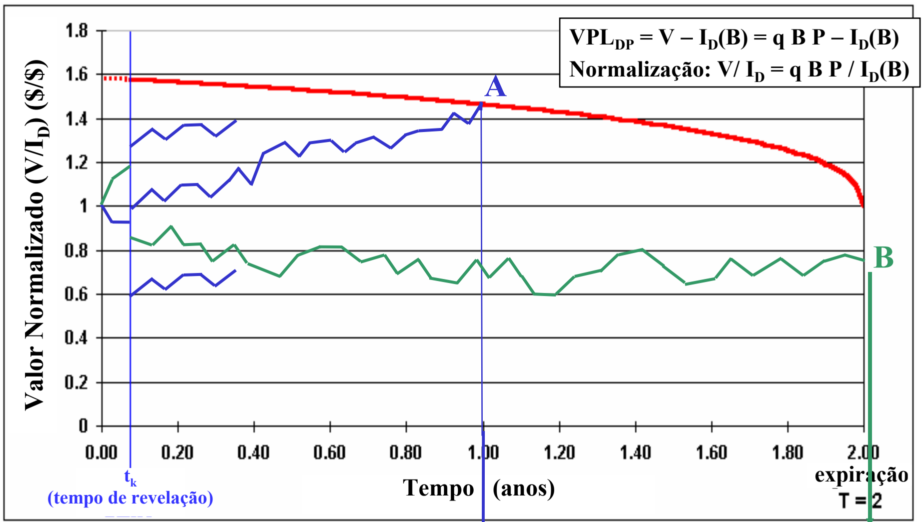
$$t^* = \inf\left\{ t \in [t_k, T] : \frac{q\, B\, P(t)}{I_D(B,\, t)} \geq \left(\frac{V}{I_D} \right)^*(t) \right\}$$

- **Sendo que W_k pode ser aproximado de uma forma simples, através de simulação de Monte Carlo, usando distribuições de revelações para q e B e um fator para trabalhar como se q e B fossem independentes:**

$$W_k = -C_k + E\left[\max_{t^* \in [t_k, T]} \left\{ E^Q\left[e^{-r t^*} \left(E[q|S_k]\, E[B|S_k]\, P(t) - I_D(E[B|S_k], t) \right) \right] \right\} \right] \psi_{F\,|\,S_k}$$

Combinação de Incertezas em Opções Reais

- **Combinação de *incertezas de mercado* (MGB neutro ao risco) com *dist. de revelações*:**



W(t = 0) =
= W(t*=1) . exp(– r t*)

Valor Presente (t = 0)

Opção W(t* = 1) = V – I_D

W(t = 2) = 0

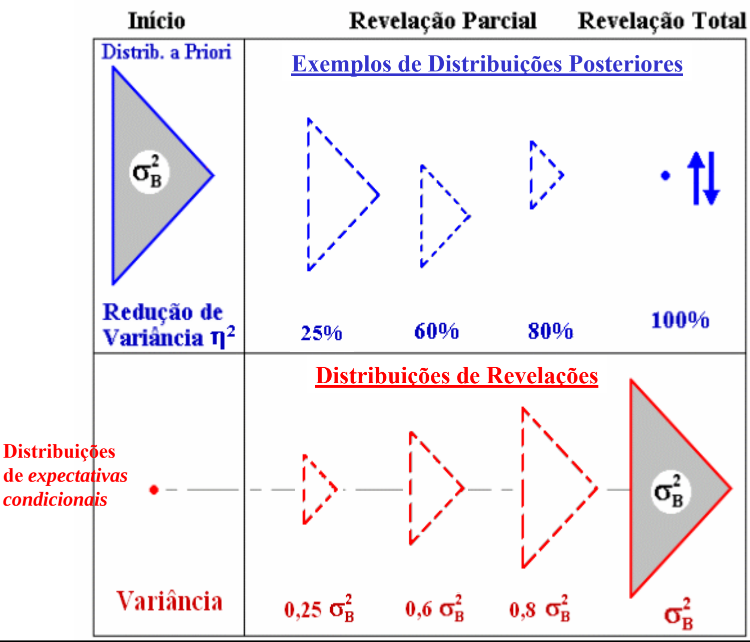
Expirou
Sem Valor

Distribuições de Revelações: Propriedades

- ***Distribuição de revelações:*** **distrib. de $R_X(S) = E[X \mid S]$**
  - **Onde X é a *variável de interesse* e S é o *sinal* (informação).**
    - ➨ **A distribuição de revelações será usada em simulações de Monte Carlo (*neutra ao risco*) combinando várias incertezas.**
- **Principais propriedades da distribuição de revelações:**
  - **<u>Limite</u>: em caso de *revelação total*, a distribuição de revelações é <u>igual a distribuição a priori</u> da variável com inc. técnica (X).**
  - **<u>Média</u>: é igual a média original da distribuição a priori, i. é,**
    - ➨ **$E[E[X \mid S]] = E[R_X] = E[X]$ (chamada de *lei das expectativas iteradas*)**
  - **<u>Variância</u>: é igual a *redução esperada de variância* devido a S,**
    - ➨ **$Var[E[X \mid S]] = Var[R_X] = Var[X] - E[Var[X \mid S]]$ (= redução de variância)**
  - **<u>Martingale</u>: a seqüência de sinais $\{S_k\}$ gera um *processo de revelação* $\{R_{X,1}, R_{X,2}, R_{X,3}, \ldots\}$ que é um *<u>martingale</u> de Doob* (unifor. integrável).**
    - ➨ **A seqüência de *exercícios de opções de aprendizagem* gera a seqüência $\{S_k\}$.**
- **Seja $\eta^2 = Var[R_X] / Var[X]$. Note que ela é a *medida de redução % esperada de variância*: ela será nossa *medida de aprendizagem*.**

Distribuições Posteriores x Distribuição de Revelações

- **Maior volatilidade, maior valor da opção. Por que investir na redução da incerteza?**



Por que aprender?

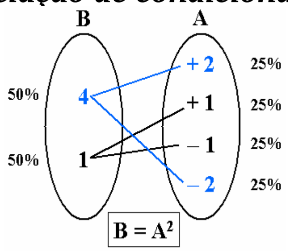
Redução de incerteza técnica

⇓

Aumenta a variância da distribuição de revelações (e, logo, o *valor da opção*)

Aprendizagem É Geralmente Assimétrica

- **Dadas duas v.a. A e B, muitas vezes B aprende mais com A do que A aprende com B (ou vice-versa), i. é, a aprendizagem é uma *relação de condicionamento*, em geral, *assimétrica*. Ex:**



- **Se soubermos o valor de A, então o valor de B está definido (aprendizagem total).**
- **Mas se soubermos o valor de B, o valor de A não está definido.**

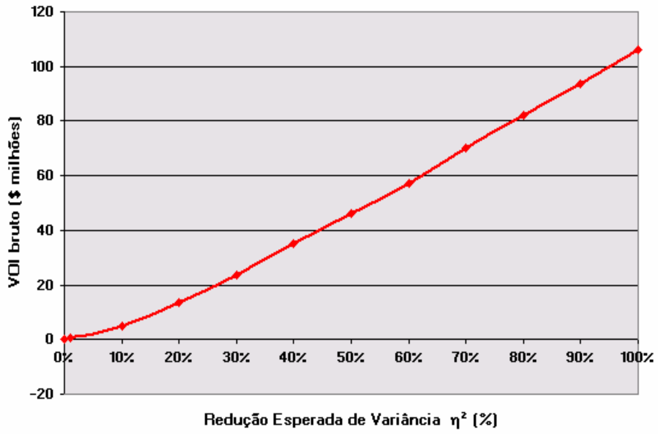
- **O coeficiente de correlação (medida simétrica) é zero, apesar de A e B terem dependência funcional! (Feller)**
  - **Medidas *simétricas* tais como coef. de correlação, cópulas e *distâncias de distribuições* conjuntas em relação à distrib. da independência, não servem como medida de aprendizagem.**
- **Já a medida η^2 é assimétrica em geral e captura a aprendizagem total de B dado A: $\eta^2(B \mid A) = 100\%$.**

Confiabilidade da Informação

- **Na literatura tradicional, é muito usado o conceito de confiabilidade (*likelihood*) da informação S para prever X.**
  - **São as chamadas *probabilidades inversas* p(S | X).**
- **Apesar da *relação condicionante*, essa <u>não é uma boa medida de aprendizagem</u>. Para ver isso, considere o exemplo:**
  - **Considere dois "expert infalíveis" que podem ser consultados para saber se a ação da companhia X subirá ou não no pregão do dia seguinte da Bolsa de Valores de São Paulo. Suponha que um dos "expert infalíveis" sempre diz a verdade e o outro sempre diz uma mentira, i. é, as confiabilidades são $p_1(s \mid x) = 100\%$ e $p_2(s \mid x) = 0\%$.**
  - **Do ponto de vista do <u>aprendizado</u> de X, os conselhos são equivalentes pois se aprenderá tudo sobre X em ambos os casos:**
    - **Se o "expert infalível 2" dizer que a ação não vai subir, então se saberá que a ação vai subir com probabilidade 1!**
  - **Assim, essa medida atribuiria <u>dois valores diferentes para uma mesma aprendizagem</u> e (ainda pior) usando até o <u>valor zero para o caso de aprendizagem máxima</u>. Logo, aqui ela não é adequada.**

Valor da Opção de Aprendizagem x η^2

- O gráfico abaixo foi construído a partir de simulações de MC p/ diferentes valores de η^2 (da tese de Dias, 2005; em cima de um exemplo em petróleo apresentado no MIT em 2002 e 2003).
- Para valores pequenos de η^2, o VDI (valor da informação) exibe uma "não-concavidade" clássica (Radner-Stiglitz, 1984).



Medida de Aprendizagem η^2 e Propriedades

- A medida de aprendizagem proposta é a ***redução percentual esperada de variância*** η^2, que também é a ***variância normalizada da distribuição de revelações*** de X dado o sinal S:

$$\eta^2(X \mid S) = \frac{\mathrm{Var}[X] - E[\,\mathrm{Var}[X \mid S]\,]}{\mathrm{Var}[X]} = \frac{\mathrm{Var}[\,E[X \mid S]\,]}{\mathrm{Var}[X]} = \frac{\mathrm{Var}[R_X]}{\mathrm{Var}[X]}$$

- Proposição: propriedades da medida de aprendizagem η^2
  - a) $\eta^2(X \mid S)$ existe sempre que Var[X] > 0 (não-trivial) e Var[X] for finito;
  - b) Essa medida é, em geral, assimétrica, $\eta^2(X \mid S) \neq \eta^2(S \mid X)$;
  - c) Ela é definida no intervalo unitário, i. é, $0 \leq \eta^2 \leq 1$;
  - d) Se X e S são *independentes* $\Rightarrow$ $\eta^2(X \mid S) = \eta^2(S \mid X) = 0$; em adição, vale a expressão: $\eta^2(X \mid S) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Var}[R_X(S)] = 0$;
  - e) $\eta^2(X \mid S) = 1 \Leftrightarrow$ dependência funcional, i. é, $\exists$ v.a. g(S), tal que X = g(S);
  - f) Ela é invariante sob transformações lineares de X, i. é, se a e b são números reais, com $a \neq 0$, $\eta^2(a\,X + b \mid S) = \eta^2(X \mid S)$;
  - g) Ela é invariante sob transformações lineares e não-lineares de S se g(S) for uma função 1-1, i. é, $\eta^2(X \mid g(S)) = \eta^2(X \mid S)$, se g(s) é função 1-1;
  - h) Se as v.a. $Z_1, Z_2, \ldots$ são iid e $S = Z_1 + \ldots + Z_j$ e $X = Z_1 + \ldots + Z_{j+k}$ $\Rightarrow$ $\eta^2(X \mid S) = \frac{j}{j+k}$

Axiomas para Medidas de Aprendizagem

- **Inspirado nos axiomas de Rényi para medidas de dependência de v.a., sejam os axiomas p/ uma medida de aprendizagem $M(X \mid S)$:**
  - **A.** **$M(X \mid S)$ deve <u>existir</u> pelo menos para v.a. não triviais e incerteza finita;**
  - **B.** **$M(X \mid S)$ deve, em geral, ser <u>assimétrica</u> para capturar eventuais assimetrias de aprendizagem entre X e S (X pode aprender muito com S, mas não vice-versa);**
  - **C.** **$M(X \mid S)$ deve ser <u>normalizada no intervalo unitário</u>, i. é, $0 \le M(X \mid S) \le 1$;**
  - **D.** **$M(X \mid S) = 0 \Rightarrow$ <u>não haver aprendizagem</u> (incluindo se X e S independentes);**
  - **E.** **Se a medida é máxima, $M(X \mid S) = 1 \Rightarrow$ <u>aprendizagem é máxima</u> (em caso de <u>dependência funcional</u> a medida deve ser máxima: $X = f(S) \Rightarrow M(X \mid S) = 1$);**
  - **F.** **$M(X \mid S)$ deve ser invariante a mudanças de escala da v.a. X ou da v.a. S, i. é, $M(a X + b \mid S) = M(X \mid S)$ e $M(X \mid S) = M(X \mid a S + b)$;**
  - **G.** **$M(X \mid S)$ deve ser <u>prática</u>, i. é, *fácil interpretação* e *fácil de ser quantificada*;**
  - **H.** **$M(X \mid S)$ deve ser <u>aditiva</u>, i. é, caso S possa ser decomposto numa soma de n fatores <u>independentes</u> $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, que dê uma <u>aprendizagem máxima</u>, então: $M(X \mid S_1) + M(X \mid S_2) + \ldots + M(X \mid S_n) = 1$**
- **Teorema: a medida de aprendizagem η^2 atende aos axiomas.**
  - **Em geral de forma ainda mais forte. Os 2 últimos axiomas serão vistos a seguir.**

Medida η^2 e Decomposição da Aprendizagem

- **O axioma G pede que uma medida de aprendizagem seja *prática*, i. é, de fácil interpretação e fácil de ser quantificada.**
  - **A medida η^2 é intuitiva, pois é interpretada como uma redução esperada da incerteza (medida pela % da variância inicial);**
  - **A medida η^2 é fácil de ser estimada por métodos *não-paramétricos* (pois envolve só variâncias, não o tipo de distribuição) e por *métodos paramétricos populares*, como a regressão (linear ou não) e ANOVA.**
    - **Se a regressão linear é correta (ex.: X e S v.a. normais) então η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ^2. Se uma regressão não-linear é a correta, então η^2 é igual ao coeficiente da regressão R^2.**
    - **ANOVA: η^2 é calculada diretamente (é uma razão de soma de quadrados).**
- **Axioma H: o <u>Teorema 3</u> da tese mostra que a aditividade é ainda mais forte do que o exigido, pois vale para funções reais quaisquer**
  - **Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$, v.a. *independentes* e X uma soma de funções reais quaisquer desses sinais, $X = f(S_1) + g(S_2) + \ldots + h(S_n)$, então:**

$$\eta^2(X \mid S_1, \ldots, S_n) = \eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) + \ldots + \eta^2(X \mid S_n) = 1$$

(decomposição da aprendizagem).

Portfólio de Dois Prospectos Exploratórios

- Seja um portfólio com dois prospectos exploratórios no mesmo bloco. Considere que a opção está expirando e que a única incerteza é sobre a existência de petróleo.
- O valor de um prospecto exploratório é dado pelo VME (*valor monetário esperado*, o "VPL da exploração"), que é função do custo e do benefício esperado:

$$VME = -I_W + FC \,.\, VPL$$

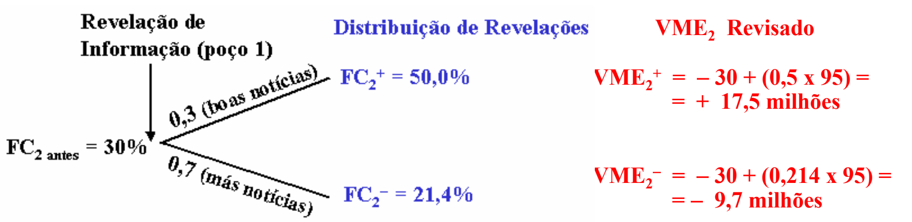
  - Onde: I_W = investimento na perfuração do poço pioneiro ("wildcat").
  - FC = fator de chance (probabilidade de sucesso) → *v.a. de Bernoulli*.
  - VPL = *valor presente líquido* do desenvolvimento da produção.
- Uma firma de petróleo tem dois prospectos iguais, os quais são correlacionados. Os VMEs (em MM$) são negativos e iguais:

$$VME_1 = VME_2 = -30 + [30\% \text{ x } 95] = -1{,}5 \text{ milhões \$}$$

- Assim parece melhor não perfurar, os prospectos nada valem.
  - Mas não foi considerado o fato dos prospectos serem dependentes!

Revelação de Informação e Fator de Chance

- No cálculo do VME não foi considerado que se o prospecto 1 for perfurado, revela informação p/ o prospecto 2, que revisa o seu fator de chance para cima em caso de boas notícias (FC_2^+) e para baixo em caso de más notícias (FC_2^-).
  - Considere que a dependência é tal que os cenários revelados são:



- O valor esperado do portfólio (2 prospectos), considerando que:
  - A perfuração do poço 1, *gera aprendizagem* para o poço 2, e
  - A perfuração é *opcional* (é um direito, não é obrigação); é:

$$\Pi = \text{Máx}\{0, VME_1 + [FC_1 \,.\, \text{Máx}(0, VME_2^+)] + [(1 - FC_1) \,.\, \text{Máx}(0, VME_2^-)]\}$$

$$\Rightarrow \Pi = -1.5 + [(30\% \text{ x } 17.5) + (70\% \text{ x } 0)] = +\$\ 3.75 \text{ millions}$$

- Por que aumentou o valor? Aprendizagem e opcionalidade de investir!

Medida η^2 para Fator de Chance (Bernoulli)

- **Teorema**: dado as v.a. $FC \sim Be(FC_0)$ e $S \sim Be(q)$, e dado η^2,
  - As probabilidades de sucesso reveladas por S, i. é, FC^+ e FC^- são:

$$FC^+ = FC_0 + \sqrt{\frac{1-q}{q}}\,\sqrt{FC_0\,(1-FC_0)}\,\sqrt{\eta^2(FC\,|\,S)}$$

$$FC^- = FC_0 - \sqrt{\frac{q}{1-q}}\,\sqrt{FC_0\,(1-FC_0)}\,\sqrt{\eta^2(FC\,|\,S)}$$

  - η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ:

$$\eta^2(FC\,|\,S) = \rho^2(FC, S) = \frac{(p_{11} - FC_0\, q)^2}{FC_0\,(1-FC_0)\,q\,(1-q)}$$

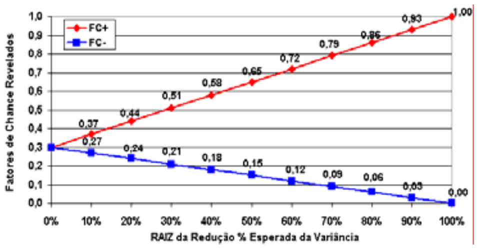
  - Aqui η^2 é simétrica: X e S ~ Bernoulli $\Rightarrow \eta^2(FC\,|\,S) = \eta^2(S\,|\,FC)$
  - $\eta^2(FC\,|\,S) = 0 \Leftrightarrow$ FC e S são independentes
  - Os limites de Fréchet-Hoeffding p/ existir a dist. bivar. de Bernoulli:

$$0 \le \eta^2 \le \text{Max}\left\{ \text{Max}\left\{\frac{FC_0\,q}{(1-FC_0)(1-q)}, \frac{(1-FC_0)(1-q)}{FC_0\,q}\right\}, \frac{\text{Min}\{FC_0, q\}\,(1-\text{Max}\{FC_0, q\})}{\text{Max}\{FC_0, q\}\,(1-\text{Min}\{FC_0, q\})} \right\}$$

Distribuições de Bernoulli Intercambiáveis

- Uma simplificação importante é quando as v.a. $FC \sim Be(FC_0)$ e $S \sim Be(q)$ são *intercambiáveis* (aqui $p_{01} = p_{10}$). Proposição:
  - FC e S intercambiáveis $\Leftrightarrow FC_0 = q$
  - O limite de Fréchet-Hoeffding deixa de ser restrição: $0 \le \eta^2 \le 1$
  - As probabilidades de sucesso FC^+ e FC^- reveladas pelo sinal S são:

$$FC^+ = FC_0 + (1 - FC_0)\,\eta$$
$$FC^- = FC_0 - FC_0\,\eta$$
$$\Rightarrow FC^+ - FC^- = \eta = \rho$$



$\Rightarrow$ No exemplo numérico, a dependência foi tal que $\rho = 50 - 21{,}4 = 28{,}6\%$.

- Lema: A condição necessária para haver aprendizagem máxima (assumindo ρ não negativo) é que FC e S sejam intercambiáveis:

$$\eta^2(FC\,|\,S) = 1 \;\Rightarrow\; \text{FC e S v.a. intercambiáveis}$$

- Se $\rho < 0$, essa condição passa a ser FC e S *complementares* ($FC_0 = 1 - q$).

Coeficiente de Correlação e Sinergia

- Em exploração de petróleo, não tem sentido falar em $\rho < 0$, mas em P&D existem aplicações em que isso pode ocorrer.
  - Para a análise ser mais geral, consideraremos todo range $\rho \in [-1, 1]$.
  - Vamos voltar a notação FC_1 para o sinal (1º poço) e FC_2 p/ o 2º poço.
- Nesse caso, os limites de Fréchet-Hoeffding para ρ são:

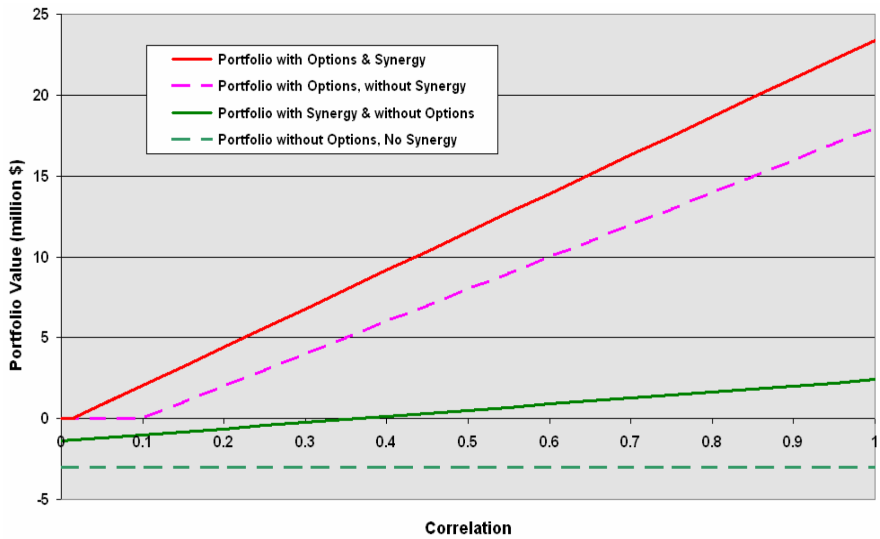
$$\mathrm{Max}\left\{-\sqrt{\frac{FC_2\ FC_1}{(1-FC_2)\ (1-FC_1)}}\ ,\ -\sqrt{\frac{(1-FC_2)\ (1-FC_1)}{FC_2\ FC_1}}\right\} \leq \rho \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Min}\{FC_2\ ,FC_1\}\ (1-\mathrm{Max}\{FC_2\ ,FC_1\})}{\mathrm{Max}\{FC_2\ ,FC_1\}\ (1-\mathrm{Min}\{FC_2\ ,FC_1\})}}$$

- Sinergia entre duas OR significa que o valor *conjunto* de duas OR é maior que a soma dos valores individuais das OR.
  - Aqui esse efeito aparece para o *investimento em desenvolvimento*, pois campos de petróleo vizinhos podem dividir infraestrutura (ganho de escala com plataforma única, etc.), reduzindo o preço de exercício (investimento) do desenvolvimento conjunto dos campos.
- Sinergia ocorre só em caso de *duplo sucesso exploratório,* que ocorre com probabilidade que aumenta linearmente com ρ:

$$\mathrm{prob}_{sin} = p_{11} = \rho\sqrt{FC_1\ (1-FC_1)\ FC_2\ (1-\ FC_2)}\ +\ FC_1\ FC_2$$

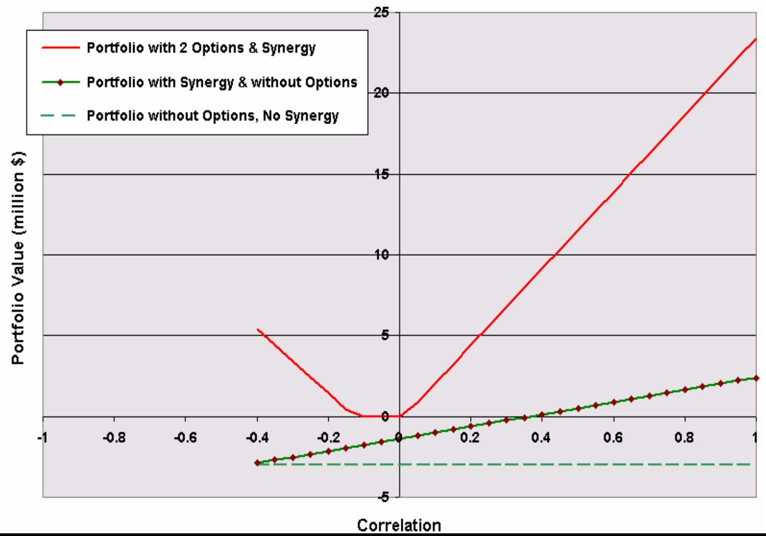
Portfólio Expirando com Aprendizado e Sinergia

- Portfólio está expirando (não há OR de espera). Compare os casos com e sem opção para perfurar o prospecto exploratório, com aprendizagem (útil só com opção) e com e sem sinergia.



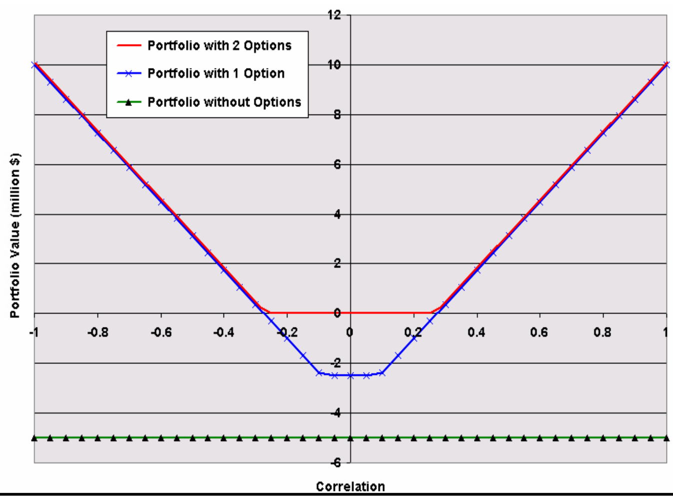
Portfólio Expirando: Aprendizagem com $\rho > 0$ e $\rho < 0$

- Se é permitido $\rho < 0$, também há o ganho de valor devido ao efeito da aprendizagem. Mas os limites de Fréchet-Hoeffding não permitem $\forall\ \rho$. Para $FC_1 = FC_2$, é possível $\rho = 1$, mas não $\rho = -1$.



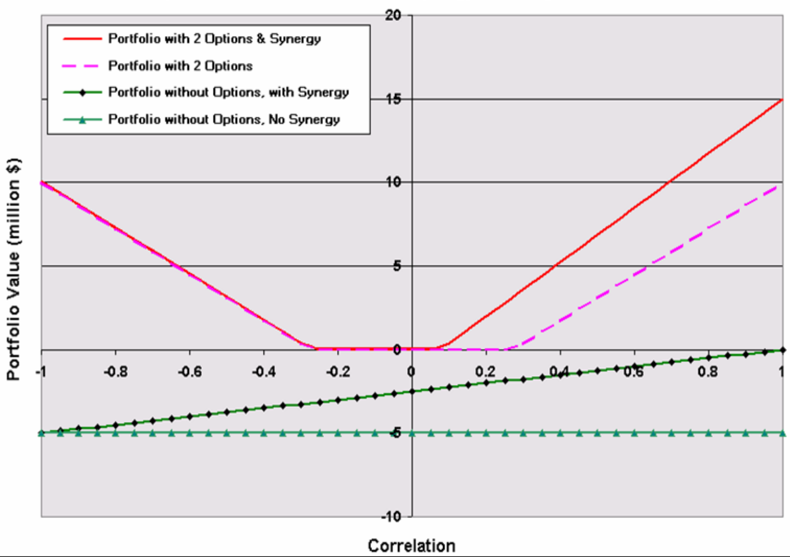
Aprendizagem em Todo Range de ρ

- O único caso que a aprendizagem é possível p/ todo o range de ρ é quando as dist. marginais de Bernoulli são simultaneamente *intercambiáveis* ($CF_1 = CF_2$) e *complementares* ($CF_1 = 1 - CF_2$).
  - Isso ocorre só se $FC_1 = FC_2 = 50\ \%$. O gráfico só mostra aprendiz.:



Aprendizagem em Todo Range de ρ e Sinergia

- O mesmo caso ($FC_1 = FC_2 = 50\ \%$), mas mostrando também o efeito da sinergia.



A Opção de Postergar o Desenvolvimento

- Seja a OR de desenvolvimento (condicional a exploração ter sucesso) ser $R_i(P, t)$, onde i = 1 ou 2 ou 1 + 2 (desenv. conjunto).
  - A EDP dessa OR e suas condições de contorno são:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial R}{\partial P} - r R + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

Para R_1 ou R_2 (desenvolmento indiv.)

If $P = 0$, $\quad R(0, t) = 0$

If $t = T$, $\quad R(P, T) = \max[NPV(P), 0] = \max[q\, B\, P - I_D, 0]$

If $P = P^*$, $\quad R(P^*, t) = NPV(P^*) = q\, B\, P^* - I_D$

If $P = P^*$, $\quad \frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q\, B$

Para R_{1+2} (desenvolmento conjunto)

If $P = 0$, $\quad R(0, t) = 0$

If $t = T$, $\quad R_{1+2}(P, T) = \max(q_{1+2}\, (B_1 + B_2)\, P - I_{D1+2}, 0) = \max(NPV_{1+2}(P, T), 0)$

If $P = P^*_{1+2}$, $\quad R_{1+2}(P^*_{1+2}, t) = q_{1+2}\, (B_1 + B_2)\, P^*_{1+2} - I_{D1+2} = NPV_{1+2}(P^*_{1+2}, t)$

If $P = P^*_{1+2}$, $\quad \frac{\partial R_{1+2}(P^*_{1+2}, t)}{\partial P} = q_{1+2}\, (B_1 + B_2)$

  - Se as jazidas são simétricas (mesmo valor do payoff), então sempre teremos $R_{1+2} \geq R_1 + R_2$. Logo, nós esperamos por $P \geq P^*_{1+2}$ p/ exercer
  - Entretanto, se as jazidas são suficientemente assimétricos, pode ocorrer $R_{1+2} < R_1 + R_2$. Nesse caso pode ser ótimo o exercício do desenvolvimento não-conjunto (individual).

EDP para as Opções Exploratórias E_1 e E_2

- As EDPs para as opções exploratórias E(P, t; FC) são as mesmas, mas as condições de contorno (cc) são específicas.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r-\delta)\, P \frac{\partial E}{\partial P} - r\,E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

O caso de E_2 (P, t; FC_2^-) é trivial pois o efeito de sinergia não é mais possível.

Para E_2 (P, t; FC_2^+): If $P = 0$, $\quad E_2(0, t) = 0$

If $t = T$,

$$E_2(P, T;\ CF_2^+) = \max\{0, -I_W + CF_2^+ \max[(NPV_{1+2} - \max(NPV_1, 0)), NPV_2]\}$$

If $P = P_2^{**}$, $R_{1+2} = NPV_{1+2}$ and $NPV_{1+2} > R_1 + R_2$,

$$E_2(P_2^{**}, t;\ CF_2^+) = -I_W + CF_2^+ (NPV_{1+2} - R_1)$$

If $P = P_2^{**}$, $R_2 = NPV_2$ and $NPV_2 > R_{1+2} - R_1$,

$$E_2(P_2^{**}, t;\ CF_2^+) = -I_W + CF_2^+ NPV_2$$

If $P = P_2^{**}$, $R_{1+2} = NPV_{1+2}$ and $NPV_{1+2} > R_1 + R_2$,

$$\frac{\partial E_2(P_2^{**}, t;\ CF_2^+)}{\partial P} = CF_2^+ \left[q_{1+2}(B_1 + B_2) - \frac{\partial R_1(P_2^{**}, t)}{\partial P}\right]$$

If $P = P_2^{**}$, $R_2 = NPV_2$ and $NPV_2 > R_{1+2} - R_1$,

$$\frac{\partial E_2(P_2^{**}, t;\ CF_2^+)}{\partial P} = CF_2^+ q_2 B_2$$

Condições de Contorno para a OR Exploratória E_1

- A primeira OR exploratória é mais complexa por causa que ela deve considerar os ganhos de aprendizagem e de sinergia.

Para E_1(P, t; FC_1): If $P = 0$, $\quad E_1(0, t) = 0$

If $t = T$,

$$E_1(P, T;\ CF_1) = \max[0, -I_W + CF_1 NPV_1 + CF_1 E_2(P, T;\ CF_2^+) + (1 - CF_1)\, E_2(P, T;\ CF_2^-) - E_2(P, T;\ CF_2)]$$

Where: $E_2(P, T;\ CF_2^+) = \max\{0, -I_W + CF_2^+ \max[(NPV_{1+2} - \max(NPV_1, 0)), NPV_2]\}$;

$E_2(P, T;\ CF_2^-) = \max\{0, -I_W + CF_2^- NPV_2\}$ and $E_2(P, T;\ CF_2) = \max\{0, -I_W + CF_2 NPV_2\}$

If $P = P_1^{**}$, $R_{1+2} = NPV_{1+2}$ and $NPV_{1+2} > R_1 + R_2$,

$$E_1(P_1^{**}, t;\ CF_1) = -I_W + CF_1 [-I_W + CF_2^+ NPV_{1+2} + (1 - CF_2^+) R_1] + (1 - CF_1)\, E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2^-) - E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2)$$

If $P = P_1^{**}$, $R_1 = NPV_1$ and $NPV_1 > R_{1+2} - R_2$,

$$E_1(P_1^{**}, t;\ CF_1) = -I_W + CF_1 NPV_1 + CF_1 E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2^+) + (1 - CF_1)\, E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2^-) - E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2)$$

If $P = P_1^{**}$, $R_{1+2} = NPV_{1+2}$ and $NPV_{1+2} > R_1 + R_2$,

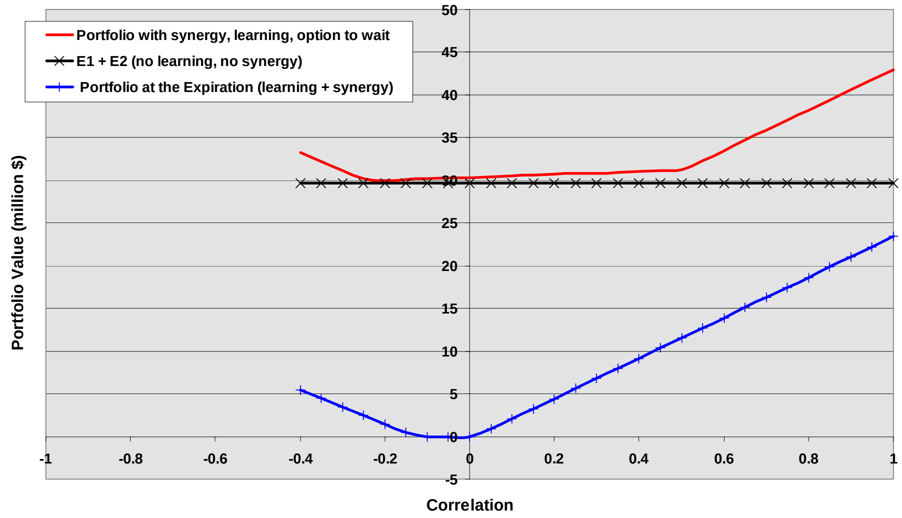
$$\frac{\partial E_1(P_1^{**}, t;\ CF_1)}{\partial P} = CF_1 \left[CF_2^+ q_{1+2}(B_1 + B_2) + (1 - CF_2^+) \frac{\partial R_1(P_1^{**}, t)}{\partial P}\right] + (1 - CF_1) \frac{\partial E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2^-)}{\partial P} - \frac{\partial E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2)}{\partial P}$$

If $P = P_1^{**}$, $R_1 = NPV_1$ and $NPV_1 > R_{1+2} - R_2$,

$$\frac{\partial E_1(P_1^{**}, t;\ CF_1)}{\partial P} = CF_1 \left[q_1 B_1 + \frac{\partial E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2^+)}{\partial P}\right] + (1 - CF_1) \frac{\partial E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2^-)}{\partial P} - \frac{\partial E_2(P_1^{**}, t;\ CF_2)}{\partial P}$$

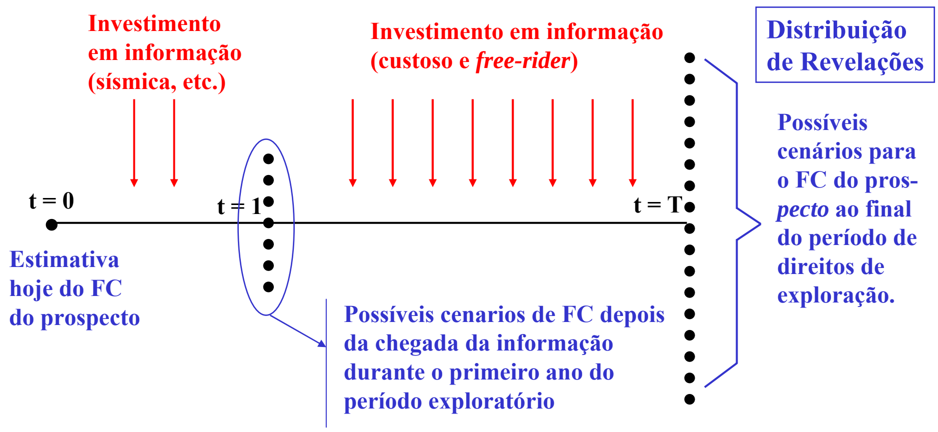
Valor do Portfólio Com e Sem a Opção de Espera

- O gráfico compara os casos com todos os efeitos (opção de espera de até 2 anos, aprendizagem e sinergia) com o caso com esses efeitos exceto a opção de espera (OR expirando).



Processo de Revelação em Bacias Pouco Exploradas

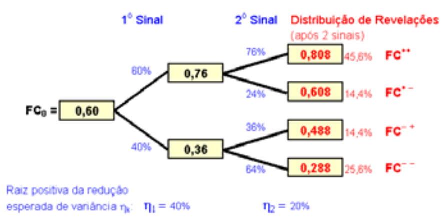
- Um caso mais geral é quando se tem uma seqüência de sinais que permitem revisar o fator de chance dum certo prospecto.
- A informação pode ser tanto <u>custosa</u> (nosso investimento) e/ou <u>grátis</u>, advinda do investimento de outras firmas (*free-rider*).

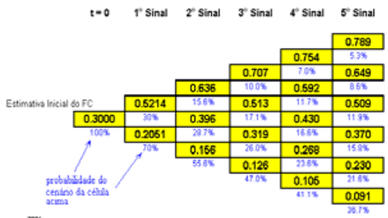


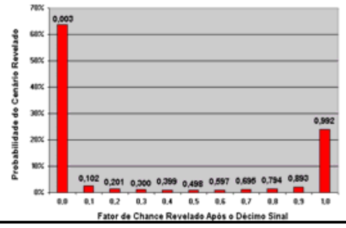
- Vamos examinar um pouco as possibilidades dos processos de revelação.

Processos de Revelação de Bernoulli

- <u>Processo de revelação de Bernoulli</u> é uma seqüência de *distribuições bivariadas de Bernoulli* gerada pela interação de uma seqüência de sinais S com o FC do prospecto de interesse.
  - Se existe um seqüência de sinais (poços correlacionados sendo perfurados, sísmica) então existe um *processo de revelação* do FC
    - O processo pode ser totalmente convergente ou não, recombinante ou não







- Como esses processos podem convergir para uma distribuição com apenas dois cenários (caso de revelação total)?

Conclusão

- Foi mostrado uma proposta p/ modelar a incerteza técnica a partir da *distribuição a priori*, como um *processo de redução de variância* gerado por *exercícios de opções de aprendizagem*.
  - A variância da distrib. de expectativas condicionais é igual à redução esperada de variância. Ela joga um papel similar à volatilidade.
  - Essas distribuições podem ser combinadas com *processos estocásticos neutros ao risco* p/ valorar OR com incertezas técnicas e de mercado.
- Foi apresentada uma medida de aprendizagem η^2 que tem várias propriedades matemáticas favoráveis (axiomas).
- O caso do fator de chance (dist. de Bernoulli) de prospectos exploratórios foi analisado num contexto de portfólio de OR.
  - A medida de aprendizagem nesse caso é igual ao quadrado do coef. de correlação. Foram apresentadas propriedades dessa medida.
  - Foi visto que, ao contrário do caso de portfólio de ativos financeiros, uma correlação positiva entre ativos reais é vantajosa, pois aumenta tanto o ganho de aprendizagem como o ganho de sinergia.
  - Foi feito uma introdução aos processos de revelação de Bernoulli.

MUITO OBRIGADO!

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Incerteza Técnica e Neutralidade ao Risco

- **Por não demandar prêmio de risco, as distribuições de probabilidades das incertezas técnicas já são *naturalmente neutras ao risco*.**
  - **Elas não necessitam de nenhum ajustamento ao risco como ocorre com as incertezas de mercado, para poder usar a taxa de desconto livre de risco em modelos de OR.**
  - **Logo, em modelos de OR pode-se combinar distribuições de probabilidade neutras ao risco da incerteza econômica com as distribuições advindas de incerteza técnica.**
    - **Veremos modelos de OR com simulação de Monte Carlo.**
  - **Não demandar prêmio de risco é apenas *um dos aspectos* da incerteza técnica e não significa que ela seja menos relevante que a incerteza de mercado.**
    - **Ao contrário dos acionistas, os gerentes podem fazer melhor do que apenas *diversificar*, eles podem *alavancar* o valor da firma através do *exercício ótimo de opções de aprendizagem***

Modelagem de Incerteza Técnica para OR

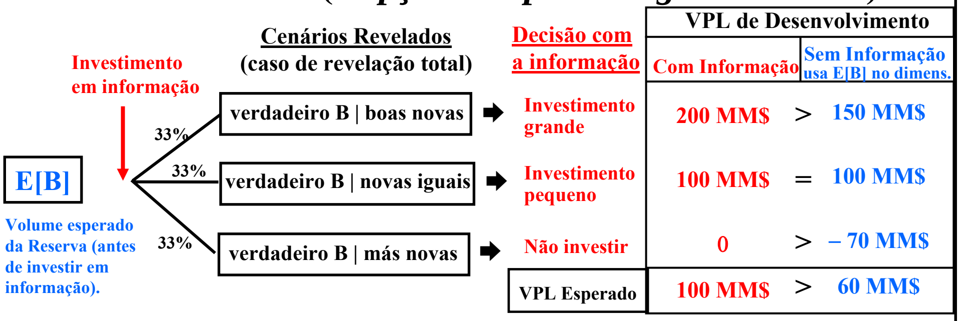
- **Na minha tese de doutorado desenvolvi uma teoria para incerteza técnica e investimento em informação visando principalmente as aplicações de opções reais. Resumo:**
  - **O conceito chave é *processo de revelação* como um *processo de redução esperada de incerteza* (medida pela variância).**
    - **Esse processo só ocorre com o exercício de *opções de aprendizagem***
  - **Trabalha-se com *distribuições de revelações* geradas pelo investimento em informação (exploração, P&D).**
  - **Uso uma teoria para *medidas de aprendizagem* e proponho a medida η^2 = redução percentual esperada de variância.**
    - **A medida η^2 está diretamente ligada à *teoria da distribuição de revelações* (pois é a sua variância normalizada).**
  - **É fácil incorporar em modelos de P&D existentes, por ex., Martzoukos (2000) e Martzoukos & Trigeorgis (2001):**
    - **V(P; parâmetros incertos): $dV/V = \alpha\, dt + \sigma\, dz + \Sigma_\iota\, \phi_i\, dq$**

Incerteza Técnica: Ameaça e Oportunidade

- A incerteza técnica tem dois lados: o lado da *ameaça de exercício subótimo* da opção de desenvolver um projeto e o lado da *oportunidade de investir em informação*.
- Ameaça: a incerteza técnica diminui tanto o *valor presente líquido* (VPL) dos projetos como o valor das *opções reais*.
  - A incerteza técnica *quase certamente* levará ao exercício da opção errada de projeto de desenvolvimento (escala do investimento, tecnologia a ser usada e até padrões de segurança inadequados).
    - O projeto sub-ótimo gera ou *over-investimento* ou *sub-investimento* quando comparado com o nível ótimo de investimento que maximiza o VPL ou OR.
  - Essa incerteza pode levar ao exercício da opção quando o melhor é não exercer a opção (esperar seria melhor p/ o *verdadeiro* valor).
  - Pode levar ao não exercício da opção quando o melhor é exercer a opção logo (opção *deep-in-the-money* para o *verdadeiro* valor).
  - Logo a incerteza técnica diminui o valor devido a decisões sub-ótimas, e não devido à taxa de desconto ou "utilidade do gerente".
- Oportunidade: modelos de opções de aprendizagem.

Incerteza Técnica: Ameaça e Oportunidade

- Incerteza técnica gera a ameaça de exercício sub-ótimo da opção *desenvolvimento*. Mas isso é somente *um lado da moeda*.
- Incerteza técnica cria também uma oportunidade: gera a *opção de investir em informação* antes da decisão de desenvolvimento (a *opção de aprendizagem* é valiosa)



Valor da informação perfeita = 40 MM$

- O valor *dinâmico* da informação será capturado pelo modelo de *opções reais*
- Será usada uma equação $I_D(B)$ para o *investimento ótimo* de desenvolvimento

OR em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D)

- **Do ponto de vista da análise econômica, a atividade de P&D é parecida com a atividade de *exploração* de petróleo.**
  - **Ambas não geram receitas imediatas, mas são opções de aprendizagem que revelam informações (*learning by doing*) e novas opções de investimento no desenvolvimento de produtos (opções compostas). Ou seja, em caso de sucesso, geram opções de desenvolver produtos que, se exercidas, irão gerar receitas.**
- **Além disso, projetos de P&D, assim como projetos exploratórios, têm valiosas opções de abandono que pode recomendar *iniciar* o projeto.**
  - **O gerente de P&D tem a opção, mas não a obrigação, de continuar o projeto de P&D. Só continua em caso favorável: limita as perdas ao investimento inicial e mantém o *upside.***
  - **Empresas farmacêuticas (que investem pesado em P&D e que estão dentre as que mais usam OR) exercem com freqüência a opção de abandonar projetos de P&D que se revelam não atrativos: o segredo está na minoria dos projetos que obtém sucesso (e pagam com sobras todo o programa de P&D).**

Uso de Opções Reais (OR) em P&D

- **Diversas empresas americanas e européias usam OR para analisar projetos de P&D. Alguns exemplos:**
  - **Eletrônica: Philips (DVD nos anos 90´s e outros).**
  - **Farmacêuticas: Merck, Schering Plough, Glaxo-Wellcome**
  - **Biotecnologia: Genzyme Corp. (bio-cirurgia), etc.**
- **O caso da Merck (investe ~ 1 bi/ano em P&D), reportado na Harvard Business Review (Jan/Feb, 1994), é bem conhecido.**
  - **Merck usa opções reais e teoria dos jogos. CFO Judy Lewent:**
    - **"To me, all kinds of business decisions are options";**
    - **"Options analysis provides a more flexible approach to valuing our research investments";**
    - **"When you make na initial investment in a research project, you are paying na entry fee for a right, but you are not obligated to continue that research at a later stage";**
    - **"... we have to ask ourselves, 'Do we continue to invest?' Those are the kinds of decisions we face every day".**

Fases dum Projeto de Remédio nos EUA

- **Nos EUA existem fases bem definidas que devem ser trilhadas antes da aprovação do medicamento por parte do governo (Federal Drug Administration)**
  - **Essas fases são mostradas a seguir. Mas antes dessas fases já teriam tido outras, tais como o financiamente de Ph.D. e a pesquisa básica para obter o produto (*descoberta*).**

Testes Pré-Clínicos (1 ano)	Fase I de experimentos (2 anos)	Fase II de experimentos (2 anos)	Fase III experimentos (2 anos)	Aprovação da FDA (1 ano)

  - **Nos testes pré-clínicos e na Fase I são usados apenas animais. Nas Fases II e III são feitos testes em seres humanos. O investimento no desenvolvimento só se dá após a aprovação da agência (FDA). Existe a opção de abandono após cada fase.**
  - **Depois ainda são feitos *testes pós-aprovação*, por ex., para desenvolver extensões do produto, dosagens para crianças, etc.**

Incerteza Técnica e Opções Compostas

- **A incerteza técnica gera oportunidades de investimentos seqüenciais. Quando é que a primeira opção se torna "deep-in-the-money" (madura para o exercício imediato)? Para responder, veremos um exemplo simples em petróleo.**
  - **Seja um prospecto exploratório em que existe um fator de chance FC de achar petróleo (incerteza técnica na existência de petróleo) e, logo, com chance 1 – FC de ser um *poço seco*.**
    - **A opção exploratória E(P, t) é função do preço do petróleo P que segue um MGB e do tempo t (ver abaixo). O preço de exercício da opção é I_W, que é o investimento no poço pioneiro ("wildcat").**
    - **Por simplicidade, assuma que a perfuração do poço é instantânea**
  - **Em caso de descoberta, a firma obtém uma opção real R(P, t) de desenvolver o campo. A opção é finita: existe um tempo legal máximo T (expiração) para a firma descobrir petróleo e se comprometer com um plano de desenvolvimento imediato.**
    - **O preço de exercício da opção de desenvolvimento é I_D, o qual é assumido determinístico por simplicidade (assim como I_W).**

Opções Compostas em Exploração

- Em caso de <u>exercício da opção exploratória</u> E(P, t), obtém-se o valor monetário esperado $VME = - I_W + FC \cdot R(P,t)$.
- Em caso de descoberta de petróleo e em caso de <u>exercício da opção de desenvolvimento</u> R(P, t), obtém-se o VPL de desenvolvimento: $VPL = V(P) - I_D$.
  - Vamos assumir o *modelo de negócios*: $V(P) = q\,B\,P$, onde q = qualidade da reserva e B = volume da reserva.
- Como sempre, o problema é resolvido "backwards", i.é, primeiro calcula-se R(P, t) e depois E(P, t).
- Seja P* o gatilho em que a opção de desenvolvimento R(P, t) fica "deep-in-the-money" p/ o exercício imediato.
- Seja P** o gatilho em que a opção exploratória E(P, t) fica "deep-in-the-money" para o exercício imediato.
  - Além disso, é necessário que $P^{**} \geq P^*$. Por que? Será visto.

EDP e cc's da Opção de Desenvolvimento

- A equação diferencial parcial (EDP) de R(P, t) é <u>igual</u> à EDP de Black-Scholes-Merton, já mostrada. Por que?
  - Essa EDP depende apenas de: (a) processo estocástico do ativo básico P (aqui MGB); (b) se o tempo t é variável de estado (é o caso); (c) se o derivativo R tem ou não fluxo de caixa (aqui não tem). Como sempre, os detalhes do modelo ficam p/ as cc's:

EDP:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r - \delta)\, P \frac{\partial R}{\partial P} - r\,R + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

Condições de contorno (cc):

$$\begin{cases} R(0, t) = 0 & , \quad \text{se } P = 0 \\ R(P, T) = \max(q\,B\,P - I_D, 0) & , \quad \text{se } t = T \\ R(P^*, t) = q\,B\,P^* - I_D & , \quad \text{se } P = P^* \\ \dfrac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q\,B & , \quad \text{se } P = P^* \end{cases}$$

EDP e cc's da Opção Exploratória

- A EDP de E(P, t) também é <u>igual</u> à EDP de B&S&M.
- O que muda são as cc's. A novidade aqui é que <u>só é ótimo exercer E(P, t) se, em caso de sucesso, a opção R(P, t) já estiver "deep-in-the-money"</u>, i.é, $P^{**} \geq P^{*}$.
  - Não tem sentido exercer a opção E(P, t) se depois o melhor for apenas esperar, pois com r > 0 é sempre melhor postergar I_W.
    - A alternativa esperar dt é melhor pelo menos $r\, I_W\, dt$ do que a de exercer já E e depois esperar pelo menos dt para exercer R.

EDP: $$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial E}{\partial P} - r E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Condições de contorno (cc)

$$\begin{cases} E(0, t) = 0 & , \text{ se } P = 0 \\ E(P, T) = \max[-I_W + FC\,(q\,B\,P - I_D),\, 0] & , \text{ se } t = T \\ E(P^{**}, t) = -I_W + FC\,(q\,B\,P^{**} - I_D) & , \text{ se } P = P^{**} \\ \dfrac{\partial E(P^{**}, t)}{\partial P} = FC\,q\,B & , \text{ se } P = P^{**} \end{cases}$$

Exercício Antecipado de Opção Composta

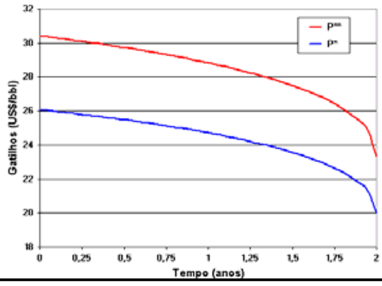
- Outra forma de ver que $P^{**} \geq P^{*}$:
  1. Seja o caso *mais favorável* com FC = 1 (⇒ com o menor P**).
  2. A opção R pode ser vista como ativo básico da opção composta E (pagando I_W se obtém R). Mas foi visto na parte 1 que existe um teorema mostrando que <u>a condição necessária (mas não suficiente) para o exercício *antecipado* ótimo de uma opção call americana é o ativo básico pagar dividendos (fluxo de caixa)</u>.
  3. A opção R só "paga dividendos" se ela estiver "deep-in-the-money" (⇒ só se P ≥ P*), pois nesse haveria fluxo de caixa > 0. Logo, P** ≥ P*. Assim, foi provado para o caso de FC = 1.
  4. Se FC < 1, então P** é ainda maior que no caso FC = 1. (cqd)
- Seja o <u>caso geral</u> em que a primeira opção pode revelar n (ou infinito) cenários que afetam o valor da 2ª opção:
  - A condição *necessária* para o exercício *antecipado* da 1ª opção é que, em pelo menos um cenário com probabilidade > 0, a 2ª opção esteja "deep-in-the-money" de forma a ter fluxo de caixa > 0.
    - Aqui eram dois cenários, com o cenário "sucesso" com prob. FC > 0

Solução Numérica: Simplicidade do MGB

- A solução do modelo (opções R e E e gatilhos P* e P**) é numérica e pode ser feita, por ex., com *diferenças finitas*.
- No entanto, mais uma vez podemos usar o código VBA fornecido, graças mais uma vez à homogeneidade em V e I da opção F(V, I, t), propriedade válida para o MGB.
  - Dada uma constante k, então: F(V, I, t) = k F(V/k, I/k, t). Ou seja, F(V, I, t) tem cc do tipo V – I, enquanto que F(V/k, I/k, t) tem cc do tipo V/k – I/k, a escala da opção é colocada nas cc.
  - Com V = q B P, faz k = q B. Assim, o valor da nossa opção R(.) com cc. tipo q B P - I_D, é k vezes R(.) com cc. do tipo P - I_D/k.
  - Além disso, vimos na parte 2 que se o preço P segue um MGB e o valor do projeto V é proporcional a P (i.é, V = k P), então V segue também um MGB e com os mesmos parâmetros (δ, σ) de P
    - Com o lema de Itô mostra-se que a EDP R(V, t) é igual a R(P, t), com V no lugar de P. Como as cc são iguais, a solução é igual.
  - Código VBA: faz V = q B P e preço de exercício I_D, tem R(P, t). O gatilho V* obtido é dividido por q B para ter P* = V*/(q B).

Solução do Modelo para E(P, t)

- Para a opção E, também pode usar o mesmo software, mas o truque é um pouco mais sutil e usa P** ≥ P*.
  - Se chamar V' = k' P = FC q B P e preço de exercício igual a I_W + FC I_D, a EDP e as cc de E(V', t) são iguais às de E(P, t).
  - Nas cc., como em P** a opção R = VPL (pois P** ≥ P*), o valor da opção R(V', t) obtido com o software é o mesmo de R(P, t). Com o gatilho (V')* achamos P** = (V')* / (FC q B).
  - Ver planilha Excel que usa o mesmo código VBA de antes. Ela mostra, por ex., as curvas de gatilhos P*(t) e P**(t):



Investimento em Informação em Petróleo

- Usaremos o modelo de negócios para o caso de exercício da opção de desenvolvimento: $VPL = V - I_D = q\ B\ P - I_D$.
  - Nesse caso, q e B têm incertezas técnicas que podem ser reduzidas (aprendizagem) com o investimento em informação.
  - Algumas alternativas de investimento em informação: a perfuração de um poço vertical; a perfuração de um poço horizontal; um teste de longa duração em um poço; um sistema piloto de produção, etc.
- Além disso, considere que a escala ótima de investimento de desenvolvimento I_D depende do volume de reserva B:
  - Quanto maior B, maior o nº de poços, capacidade da planta, etc.
  - Análise de dados indica uma relação linear para $I_D(B)$ ótimo, dado B. Além disso, I_D segue um MGB através da variável $\upsilon(t)$:

$$I_D(B, t) = \upsilon(t)\ [CF\ +\ CV\ .\ B]$$

  - Onde CF (custo fixo) e CV (custo variável) são constantes.
  - Devido à *homogeneidade de grau zero* (vale para MGBs) iremos usar a curva *de gatilhos normalizados* V/I_D. Isso evitará que a cada sorteio de B tenhamos de recalcular os gatilhos.

Opção de Aprendizagem: Exemplo Numérico

- Parâmetros gerais: $P(t = 0) = 20$ \$/bbl; $r = 6\%$ p.a.; $\delta = 6$ % p.a.; $\sigma = 20$ % p.a.; I_D (MM\$) = 310 + (2,1 x E[B])
- Distribuições a priori de q e B: $B \sim$ Triang(300; 600; 900) em MM de bbl; e $q \sim$ Triang(8%; 15%; 22%)
- Alternativa 1: perfurar um poço *vertical*. C_1 = US\$ 10 MM e leva t_1 = 45 dias para aprender. $\eta^2(q \mid S_1) = 40\%$ e $\eta^2(B \mid S_1) = 50\%$.
- Alternativa 2: perfurar um poço *horizontal*. C_2 = US\$ 15 MM e t_2 = 60 dias para aprender. $\eta^2(q \mid S_2) = 60\%$ e $\eta^2(B \mid S_2) = 75\%$.

Alternativas	S_1	S_2
(1) VPL sem incerteza técnica	230	230
(2) OR sem incerteza técnica	302,1	302,1
(3) VPL com incerteza técnica	178,5	178,3
(4) OR com incerteza técnica mas sem informação	264,2	263,7
(5) OR com incerteza técnica e com informação (W_k)	285,2	298,8
(6) Valor dinâmico líquido da informação [(5) – (4)]	21,0	35,1

Momento Ótimo de Investimento em Informação

- **No exemplo anterior foi considerado que o investimento em informação é feito em t = 0. Adiar o aprendizado tem valor?**
  - **Como o custo de adquirir informação (C_k) é ~100 vezes menor que o custo de desenvolvimento I_D, a opção de adiar C_k não é tão valiosa.**
  - **O problema pode ser resolvido de forma similar, mas testando o momento ótimo t** de investir em informação na fórmula de W_k:**

$$W_k = \max_{t^{**} \in [0,\, T - t_k]} E\left[e^{-r\, t^{**}} \left[E\left[\max_{t^{*} \in [t^{**} + t_k,\, T]} \left\{ E^Q \left[e^{-r\,(t^{*} - t^{**})} \left(\tilde{q}\, \tilde{B}\, P(t) - I_D(\tilde{B}, t) \right) \right] \right\} | S_k \right] - C_k \right] \right]$$

- **No exemplo numérico anterior, o imediato investimento seria melhor para as duas alternativas de investimento em informação**

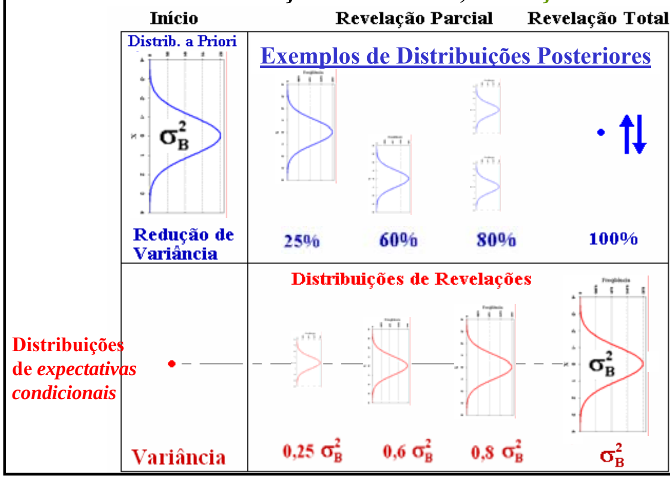
Alternativas	S_1	S_2
OR sem informação (sem aprendizagem)	267,9	263,3
OR com aprendizagem imediata	298,4	307,0
OR com aprendizagem adiada de 6 meses	293,9	305,9
OR com aprendizagem adiada de 1 ano	291,2	299,7

Distribuições de Revelações

- **Distribuição Quase-Definida: é uma distribuição em se conhece pelo menos a média, a variância e que pertence a um processo seqüencial de distribuições com distribuição inicial conhecida e que seja convergente a uma distribuição também conhecida.**
  - **Com o Teorema 1, as distribuições de revelações (ou de expectativas condicionais) são quase definidas, pois temos a média, a variância e conhecemos o valor inicial (ponto) e final (distribuição a priori) de um processo seqüencial.**
  - **Na figura anterior, o tipo de distribuição é desenhado pontilhado por não sabermos exatamente o seu tipo.**
    - **Em muitos casos, a aproximação das distribuições serem de tipos iguais ao da distribuição a priori, é razoável.**
- **No caso particular (mas muito importante na prática) das distribuições normais para X e S, as distribuições de revelações são totalmente definidas.**

O Caso Exato para Distribuições Normais

- No caso de distribuições normais p/ a variável de interesse e p/ o sinal, a distribuição de revelações é também normal para ∀ redução de variância. Se $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$; $S \sim N(m_s, \sigma_s^2)$:
  - Posteriores: $X \mid S = s_i \sim N(m_x + \rho\, \sigma_x\, (s_i - m_s) / \sigma_s, \sigma_x^2\, (1 - \rho^2))$
  - Para distribuições normais, redução % variância = ρ^2.



Para cada % redução de variância, existem infinitas distribuições posteriores e uma única distrib. de revelações.

Expectativa Condicional: $E[X \mid S] \sim N(m_x, \sigma_x^2\, \rho^2)$
Aqui $E[X \mid S]$ é distrib. Normal exata para ∀ redução % de variância

Distribuição de Revelações e Aplicações

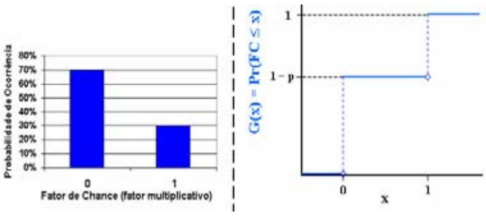
- Logo, num problema de OR com incerteza técnica em X, o <u>exercício da *opção de aprendizagem*</u> gera distribuições de revelações das variáveis com incerteza técnica.
  - Essas distribuições de revelações podem ser combinadas com processos estocásticos neutros ao risco num modelo de OR.
  - A distribuição de revelações é obtida com a *distribuição a priori* de X e a *redução % esperada da variância* $\eta^2(X \mid S_k)$, a qual *mede a aprendizagem* sobre X advinda da revelação do sinal S_k.
- Ex.: um projeto de P&D de um novo processo industrial, tem fator de chance FC e irá revelar cenários (aprender) sobre os seguintes fatores com incertezas técnicas:
  - *Consumo* de combustível/produto (entra na função custo oper.)
  - MTBF, que influencia a receita acumulada e o custo operacion.
  - Fator custo de material, que influencia o investimento (preço de exercício da opção de desenvolvimento, depende do P&D);
  - Qualidade do produto q, que influencia a função receita.

Alternativas de Investimento em Informação

- **Aplicação: considere um campo de petróleo já descoberto, com alguma incerteza técnica em q e B. Sejam K alternativas mutuamente exclusivas de investimento em informação**
  - **Qual a melhor alternativa? Quanto vale o campo não-desenvolvido?**
- **Métodos tradicionais de valor da informação (VOI), são limitados:**
  - **Consideram apenas alguns poucos cenários (típico = 3) revelados;**
  - **Muitas vezes assumem informação perfeita (revelação total com S_k);**
  - **Não comparam alternativas de investimento em informação com *diferentes custos e diferentes potenciais de aprendizagem*;**
  - **Não consideram as interações das incertezas técnicas com as de mercado, apesar de ambas afetarem o valor econômico da reserva;**
  - **Ignoram o tempo legal de expiração dos direitos e o *tempo de aprender***
- **A solução aqui irá considerar 5 variáveis de estado: tempo (existe uma expiração de direitos); 2 processos estocásticos correlacionados (MGB), o preço do petróleo P e o investimento no desenvolvimento I_D (que será função de B); e as v.a. com incerteza técnica q e B.**
  - **Dados: distribuições a priori de q e B e as medidas $\eta^2(q \mid S_k)$ e $\eta^2(B \mid S_k)$.**
  - **Nesse contexto, o valor da informação é dinâmico (considera o tempo)**

Fator de Chance e Distribuição de Bernoulli

- **Foi visto que o *fator de chance* dá a probabilidade de sucesso de um prospecto e é usada no cálculo: $VME = -I_W + FC \cdot VPL$**
  - **FC tem distribuição de Bernoulli, um parâmetro e dois cenários (0 e 1)**



  - **FC em petróleo é função (produto) de seis fatores: probabilidades de existência de rocha geradora, migração, rocha reservatório, trapa geométrica, retenção (sêlo + preservação) e sincronismo geológico.**
- **Aqui a v.a. técnica de interesse é o FC de um prospecto e o sinal S é o FC de outro prospecto, também v.a. de Bernoulli (0 ou 1)**
  - **Se o sinal $S_k = 1$, então revisa p/ FC^+, se $S_k = 0$, então revisa p/ FC^-**
  - **Logo, para estudar o poder de revelação de um sinal em relação a FC é necessário estudar a *distribuição bivariada de Bernoulli***

Distribuição Bivariada de Bernoulli

- A distribuição bivariada de Bernoulli é dada abaixo:

Distribuição Bivariada de Bernoulli e Distribuições Marginais

		Sinal S (ex.: sísmica)		Distribuição Marginal de X (FC)
		S = 1	S = 0	
Variável X (ex.: fator de chance)	X = 1	p_{11}	p_{10}	p
	X = 0	p_{01}	p_{00}	1 – p
Distribuição Marginal de S		q	1 – q	

$$\boxed{p_{11} + p_{10} + p_{01} + p_{00} = 1}$$

$$FC_0 = p = p_{11} + p_{10}$$
$$q = p_{11} + p_{01}$$

- Os dois cenários da distribuição de revelações, FC^+ e FC^- são:

$$FC^+ = \Pr[FC = 1 \mid S = 1] = E[FC \mid S = 1]$$
$$FC^- = \Pr[FC = 1 \mid S = 0] = E[FC \mid S = 0]$$

- Como P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B), então:

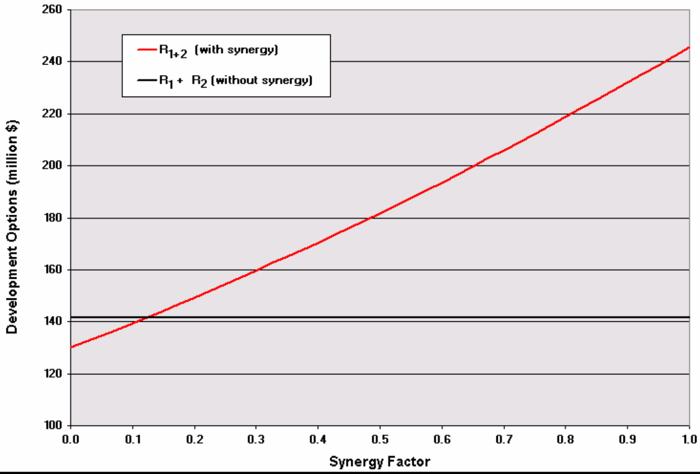
$$FC^+ = \frac{p_{11}}{q} \qquad FC^- = \frac{p_{10}}{1-q}$$

Processos de Descoberta e de Revelação

- <u>Processo de Descoberta Exploratória</u>: é uma seqüência de exercícios de OR de aprendizagem com diferentes custos e tempos de aprendizagem e diferentes poderes de revelação que culminam na descoberta de depósitos de petróleo.
  - Essa seqüência de atividades pode ser: reconhecimento de superfície (afloramento geológico, etc.), pesquisas magnéticas, graviométricas, sísmicas e perfuração de um ou mais poços pioneiros.
- <u>Processo de Revelação Exploratória</u>: modela o efeito probabilístico na variável de interesse de um processo de descoberta. Essa variável pode ser o FC, volume in place, ºAPI.
- <u>Processo de revelação de Bernoulli</u> é uma seqüência de distribuições de revelações geradas por seqüência de *distribuições bivariadas de Bernoulli* advindas da interação de uma seqüência de sinais S com o FC do prospecto de interesse.
  - Se existe um seqüência de sinais (poços correlacionados sendo perfurados, sísmica) então existe um *processo de revelação* do FC.

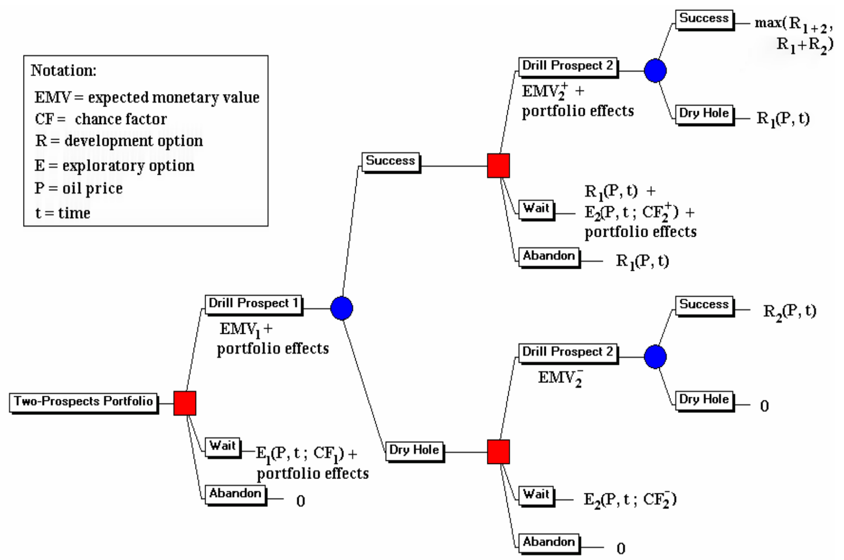
Asymmetric Oilfields Development Options

- In this case, for low values of synergy factor (γ_{syn}), it is possible cases where $R_{1+2} < R_1 + R_2$, that is, instead wait for the joint development (exploiting synergy), we can wait for the best oilfield development threshold.



Option to Delay in the Exploratory Portfolio

- The decision tree shows the two-compound options portfolio with the option to delay, in addition to learning and synergy.



Processos de Revelação Recombinantes

- **Um caso de interesse devido a simplicidade é o caso de processo de revelação de Bernoulli para distribuições intercambiáveis e com cenários recombinantes.**
  - **Nesse caso, dado a medida de aprendizagem inicial η_1, para recombinar a medida após o sinal k deve ser:**

$$\eta_k = \frac{\eta_1}{1 + (k-1)\,\eta_1}$$

- **A cada sinal k a variância de FC reduz em $(1 - \eta_k^2)$.**
  - **No caso *intercambiável recombinante*, <u>não</u> existe convergência p/ a revelação *total* (p/ variância zero) e sim para $(1 - \eta_1)$ pois:**

$$1 - \eta_k^2 = 1 - \frac{\eta_1^2}{[1 + (k-1)\,\eta_1]^2} \quad \text{e}$$

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\eta_1^2}{[1 + (k-1)\,\eta_1]^2} \right) = 1 - \eta_1$$