PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Análise de Investimentos com Opções Reais e Jogos de Opções

IND 2072

Parte 1: Conceitos Básicos

Marco Antonio Guimarães Dias, Professor Adjunto

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2005

Visão Geral do Curso

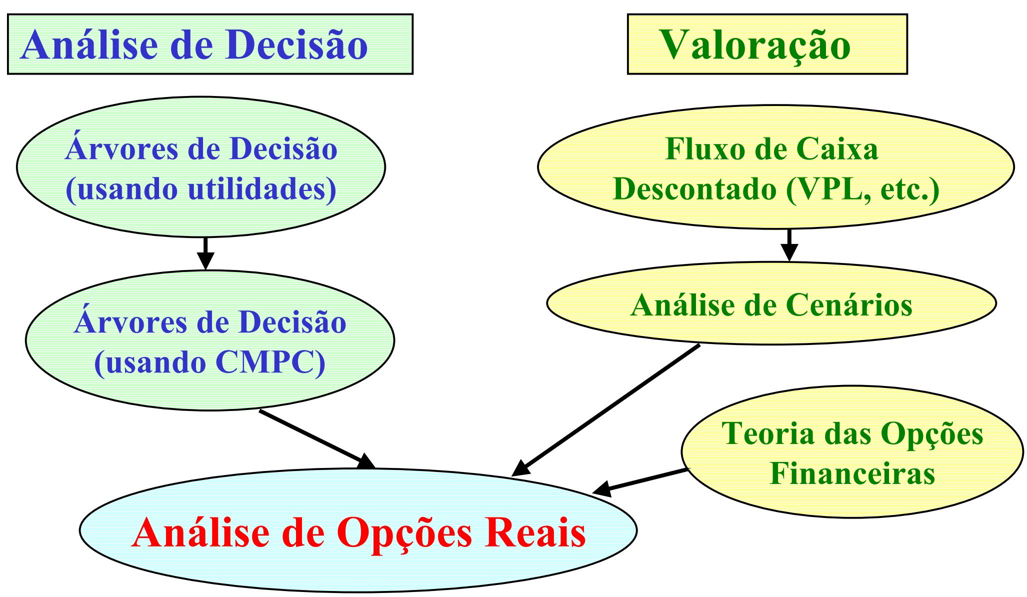
- Terças-feiras de 18:30 às 21:00 hrs. Sala 952 L.
- Pasta com materiais do curso: "xerox" do sub-solo, Pasta 76
- Livro-texto: DP = Dixit & Pindyck (1994): "Investment under Uncertainty". Livro clássico, vale a pena comprar.
- Avaliação e programa: ver a ementa do curso.
- Divisão dos trabalhos: final de abril. Será levado em conta os interesses temáticos de cada aluno (ou grupo de 2 alunos).
- Professor Adjunto, tempo parcial, Marco Antonio Guimarães Dias
  - Duas teses de opções reais na PUC-Rio (mestrado e doutorado).
  - Experiência de mais de 22 anos na Petrobras, sendo mais de 16 anos em análise econômica de projetos na sede da Petrobras.
  - Instrutor de opções reais (OR) na Petrobras desde 1996.
  - Cursos e seminários de OR no MIT, PUC-Rio, UFRJ, Unicamp, etc.
  - Criou o primeiro website de OR (1995): www.puc-rio.br/marco.ind/
  - E-mail: marcoagd@pobox.com

Conceito de Opções

- **<u>Opção é o oposto de obrigação</u>. Opção é direito, é liberdade de decisão, é flexibilidade gerencial**
  - **1973: Início de negociação de opções na CBOE (Chicago); ano de publicação dos artigos de Black & Scholes e de Merton.**
  - **1997: Prêmio Nobel em Economia p/ Scholes & Merton (Black faleceu em 1995): <u>referência explícita às aplicações em projetos</u>**
- **Três conceitos de opções na literatura:**
  - ***tradição financeira*, que <u>enfatiza o cálculo do valor da opção</u>, como no modelo de Black & Scholes & Merton**
  - ***tradição econômica*, que <u>enfatiza a regra de decisão</u> (fazer uma decisão reversível ou irreversível), como em Arrow & Fisher (1972) e de Henry (1974)**
  - **escola de Schmalensee, Bohm e Graham, ênfase na escolha econômica mas opção pode ser negativa, sem interesse prático para nós.**
  - **Vamos combinar os conceitos financeiro e econômico**

Raízes da Análise por Opções Reais

- **Esta é a visão do Prof. Triantis (palestra em Chicago, 2000)**



Objetivo da Firma e Teoria da Utilidade

- **Análise de decisão (AD) clássica usa a maximização da utilidade do investidor. Opções: maximização de valor.**
  - **Outra diferença (AD x OR) é o tratamento da taxa de desconto**
- **Numa corporação, existem diversos acionistas com interesses diversos, diferentes níveis de riqueza e portanto, com diferentes funções utilidades.**
- **É impossível gerenciar a firma de forma a maximizar simultaneamente as utilidades de todos acionistas**
  - **O melhor para uma firma é adotar como meta a maximização da riqueza dos acionistas e não a utilidade do gerente.**
  - **Cada acionista usa sua parte para maximizar sua utilidade.**
- **Usando referências (valores) de mercado na análise econômica, equivale a adotar uma "utilidade <u>agregada</u> de mercado", que reflete a preferência relativa ao risco.**

A Evolução da Teoria de Opções Reais

- **S. Myers (1977): Projetos e ativos reais corporativos como OR.**
- **Primeiro modelo de OR (1979): <u>brasileiro</u> Tourinho, tese de Ph.D., University of California, Berkeley (recursos naturais).**
- **Artigos mais importantes da década de 80:**
  - **Kester (1984), opções de crescimento; McDonald & Siegel (1986), o valor da opção de espera; Brennan & Schwartz (1985): opções de abertura e fechamento duma mina; Paddock & Siegel & Smith (1988), valoração de reservas de petróleo; Dixit (1989), "entry-exit"**
- **Década de 90: rápido crescimento na academia e indústria**
  - **Artigos importantes: Pindyck (1993); Trigeorgis (1993) e outros.**
  - **Primeiro livro texto de OR em 1994: Dixit & Pindyck**
    - **Depois Trigeorgis (1996); e mais de uma dezena de livros**
  - **Graham & Harvey (2001): pesquisa com 392 CFO's dos EUA e Canadá: 26,6% já usam "sempre ou quase sempre" as OR.**
  - **"Bolha" da internet: muita gente usando sem saber os conceitos.**

Pesquisa de Graham & Harvey (2001)

- **Maior pesquisa já feita sobre práticas corporativas, com 392 CFO's dos EUA e Canadá: crescimento surpreendente de OR.**
  - **Journal of Financial Economics, vol.60, 2001, pp.187-243**

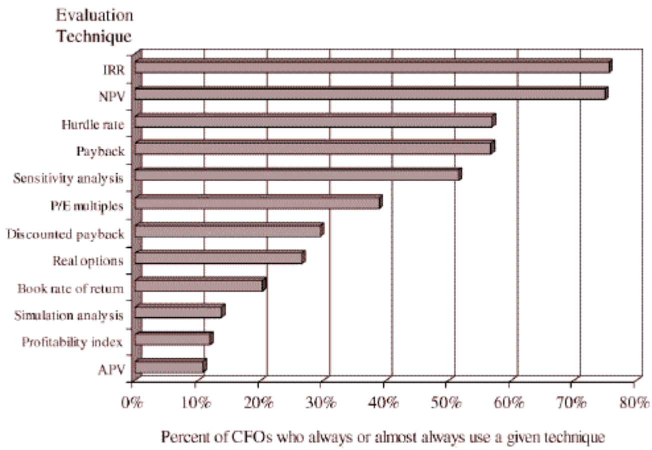


Fig. 2. Survey evidence on the popularity of different capital budgeting methods. We report the percentage of CFOs who always or almost always use a particular technique. IRR represents internal rate of return, NPV is net present value, P/E is the price-to-earnings ratio, and APV is adjusted present value. The survey is based on the responses of 392 CFOs.

Visão Gerencial de Opções Reais (OR)

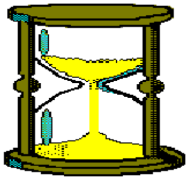
- **OR é uma metodologia moderna para análise econômica de projetos e decisões de investimento sob incerteza**
  - **OR *complementa* (não *substitui*) as ferramentas corporativas (ainda)**
  - **Difusão corporativa de OR toma tempo e treinamento**
- **Considera as incertezas e as opções (*flexibilidades gerenciais*) relevantes e dá duas respostas:**
  - **O *valor da oportunidade de investimento* (o *valor da opção*)**
  - **A *regra de decisão ótima* (*gatilho*)**
- **Pode ser visto como um problema de <u>otimização</u>:**
  - **Maximizar o VPL (função objetivo típica) através do gerenciamento ótimo das opções (flexibilidades gerenciais) relevantes, sujeito a:**

  a) **Incertezas de mercado (ex.: preço do óleo, demanda);**

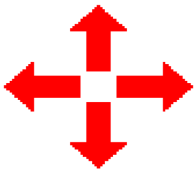
  b) **Incertezas técnicas (ex.: reserva de óleo, sucesso em P&D);**

  c) **Incerteza nas ações de outros *players* (competição).**

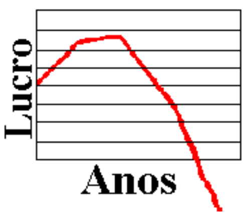
Principais Tipos de Opções Reais



- **Opção de Espera (de "Timing")**
  - Aguarda novas informações e aprende, antes de investir. Espera proativa.



- **Opção Seqüencial e de Expansão**
  - Valora o aspecto "estratégico" do projeto de forma consistente.



- **Opção de Abandono**
  - Gerentes não são obrigados a seguir um plano de negócios, se ele se tornar não-lucrativo.
  - O programa de investimento seqüencial pode ser abandonado se a informação gerada nesse processo for desfavorável.

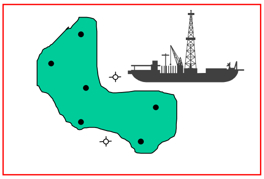
Outros Tipos de Opções

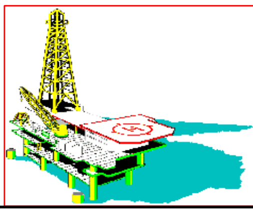
- **Opções de mudança de uso (*switch-use*), baseadas na múltipla aplicabilidade de um ativo ou capacidade; e opções de mudança de insumo (*switch-input*). Exs.**
  - O navio P.P. Moraes construído para viagens domésticas, foi convertido p/ viagens internacionais, depois foi convertido em unidade de processo na Bacia de Campos e agora produz petróleo em águas profundas;
  - Automóveis "flex-fuel" (dois ou + combustíveis): OR para o consumidor;
  - Terreno com casa pode ser redesenvolvido (edifício, shopping);
  - Unidade industrial podendo usar gás ou óleo combustível.
- **Opções de modificação: capacidade de mudar a escala, a locação ou as características de um projeto. Exs.:**
  - Campanha publicitária do Banco do Brasil (Guga, seleção de vôlei) pode ser ampliada, reduzida ou modificada ao longo do tempo.
  - Geradoras térmicas móveis (barcaças, containers, caminhões), em geral de ~100 MW. Existem 7000 MW no mundo (O Globo, 22/7/01).
  - Terceirização de parte da mão de obra permite eventual contração da escala produtiva (em caso de baixa demanda) a um custo menor.

Opções Reais Seqüenciais em Exploração e Produção de Petróleo

Fator de chance (FC) p/ achar petróleo/gás

Volume esperado de reservas = B





⇒ Bloco (prospecto): Opção de perfurar o pioneiro

Investimento em Exploração

⇒ Campo Não Delimitado: Opção de delimitar

Investimento em Delimitação

⇒ Reservas Não-Desenvolvidas: Opção de desenvolver (colocar em produção) a reserva

Investimento em Desenvolvimento

⇒ Reservas Desenvolvidas: Opções de expansão (perfurar mais poços, aplicar nova tecnologia); de parar temporariamente e de abandonar

Opcionalidade e Revelação de Informação

- Esse exemplo simples ilustrará os conceitos de *opcionalidade* e *revelação de informação*, que aumentam o valor de ativos reais
- O valor de um prospecto exploratório é dado pelo VME (valor monetário esperado), função do custo e do benefício esperado:

$$VME = -I_W + FC \cdot VPL$$

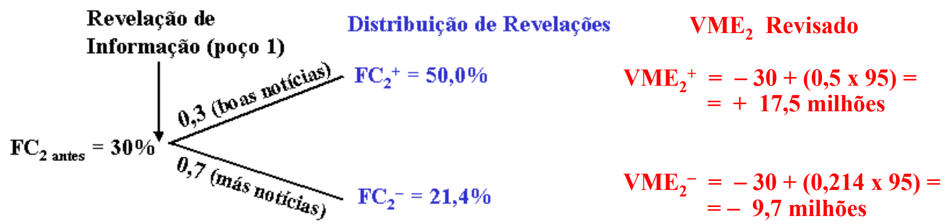
  - Onde: I_W = investimento na perfuração do poço pioneiro ("wildcat")
  - FC = fator de chance (probabilidade de sucesso)
  - VPL = *valor presente líquido* do desenvolvimento da produção
- A firma de petróleo X tem dois prospectos <u>iguais</u>, os quais são correlacionados. Os VMEs (em MM$) são negativos e iguais:

$$VME_1 = VME_2 = -30 + [30\% \text{ x } 95] = -1{,}5 \text{ milhões \$}$$

- Assim parece melhor não perfurar, os prospectos nada valem
  - Mas não foi considerado o fato dos prospectos serem dependentes!
  - Outra firma (Y) de petróleo oferece 2 MM$ pelos dois prospectos.
    - ➨ Deve a firma aceitar? Quanto vale o bloco com os dois prospectos?

Revelação de Informação e Fator de Chance

- No cálculo do VME não foi considerado que se o prospecto 1 for perfurado, <u>revela informação para o prospecto 2</u>, que revisa o seu fator de chance para cima em caso de boas notícias (FC_2^+) e para baixo em caso de más notícias (FC_2^-) da 1ª perfuração.
  - Considere que a dependência é tal que os cenários revelados são:



- O valor esperado do <u>bloco</u> (dois prospectos), considerando que:
  - A perfuração do poço 1, *revela informação* para o poço 2, <u>e</u>
  - A perfuração é *opcional* (é um direito, não é obrigação)

$$VME_1 + E[opção(VME_2)] = -1{,}5 + [(0{,}3 \times 17{,}5) + (0{,}7 \times zero)] = +\ 3{,}75\ MM\$$$

- Por que aumentou o valor? Revelação de informação <u>e</u> opcionalidade!

Negociações e Interação Estratégica

- No exemplo, os prospectos valem mais que aparentam graças à revelação de informação + opcionalidade
  - Sem a revelação o bloco valeria zero. Sem a opcionalidade, – 3 MM$
  - Recuse a oferta da firma Y (2 < 3,5 MM$)! Mas dê a contraproposta:
    - Firma Y ganha o prospecto 1 *de graça*, mas perfura logo o poço e <u>dá toda a informação</u> para firma X sobre essa perfuração. Valor para a firma X?

$$\text{Valor para Firma X} = zero + [(0{,}3 \times 17{,}5) + (0{,}7 \times zero)] = +\ 5{,}25\ MM\$ > 3{,}75$$

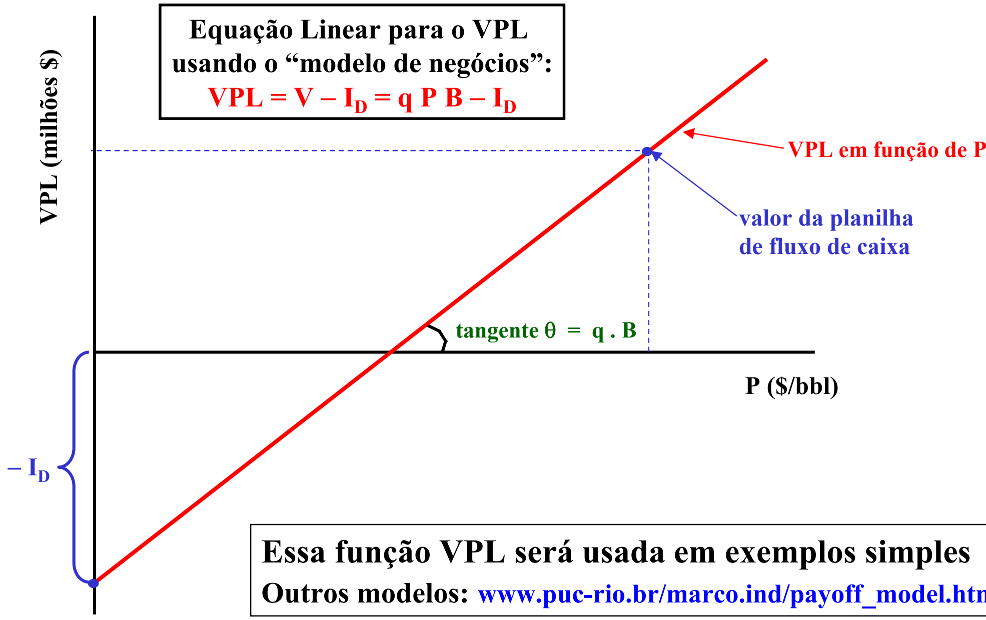
  - Logo: informação + opcionalidade = oportunidades de bons negócios!
- Suponha agora que cada firma tem um dos dois prospectos
  - A firma X pode *esperar* a firma Y perfurar primeiro, pois ganharia 5,25 MM$. Mas a firma Y também pode esperar a firma X perfurar
    - Esse jogo da espera chama-se *guerra de atrito*. Pode nenhuma perfurar.
- A alternativa é negociar um contrato de *parceria* (ganha-ganha)
  - Dividir o valor U = 3,75 MM$ da união dos dois prospectos
    - Esse jogo cooperativo chama-se *jogo da barganha*. Ambos ganham.

Exemplo em Petróleo e Qualidade da Reserva

- **Imagine que você quer comprar 100 milhões de barris de reservas desenvolvidas. O valor da reserva claramente depende da expectativa de preço de longo-prazo do petróleo, mas não só.**
- **Quanto você pagaria por barril de reserva já desenvolvida?**
  - **Isso depende de vários fatores tais como a qualidade da rocha-reservatório (produtividade da jazida), qualidade dos fluidos (óleo pesado x leve, etc.), país (regime fiscal, risco político), localização (águas profundas tem maior custo operacional que as reservas onshore), o capital *in place* (velocidade de extração e logo o valor presente da receita depende do número de poços), etc.**
- **Quanto maior é o valor do barril de reserva em relação ao barril de óleo (na superfície), maior é a qualidade econômica: valor de um barril de reserva = v = q . P**
  - **Onde q = qualidade econômica da reserva desenvolvida**
  - **O valor da reserva desenvolvida é v vezes o *tamanho da reserva* (B)**
  - **Logo, vamos usar a equação para o VPL = V – I_D = q P B – I_D**
    - **I_D = custo de investimento de desenvolvimento (ou *preço de exercício da opção*)**

Uma Função VPL Simples para Produção de Petróleo

Equação Linear para o VPL usando o "modelo de negócios":
VPL = V – I_D = q P B – I_D



Essa função VPL será usada em exemplos simples
Outros modelos: www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html

Intuição (1): Incerteza de Mercado e Valor da Opção

- Seja um campo já descoberto. O VPL de desenvolvimento do campo é dado pelo simples *modelo de negócios* visto antes:

$$VPL = V(P) - I_D = q\,B\,P - I_D$$

  - Sejam os dados: $q = 0{,}2$; $B = 500$ (MM bbl); $I_D = 2750$ (MM\$)
  - Se em $t = 0$, $P_0 = 27$ \$/bbl $\Rightarrow$ VPL = 0,2 . 500. 27 – 2750 = – 50 MM\$
  - Suponha que o investimento pode ser adiado por 1 ano e os <u>preços podem subir ou descer</u> 1 \$/bbl (pequena incerteza no preço).
  - A firma X oferece US\$ 3 milhões por esse campo de petróleo. Você venderia?

$t = 0$

$E[P_0] = 27$ /bbl
$VPL(t=0) = -50$ MM \$

$t = 1$

50%: $E[P^+] = 28 \Rightarrow VPL^+ = +50$ MM \$

50%: $E[P^-] = 26 \Rightarrow VPL^- = -150$ MM \$

Gerente racional não irá exercer essa opção $\Rightarrow$ Max $(VPL^-, 0)$ = zero

Logo em $t = 1$, o VPL opcional é positivo: (50% x 50) + (50% x 0) = + 25 milhões \$

Intuição (2): Opção de Timing e Valor da Espera

- Suponha o mesmo caso mas com um VPL um pouco positivo (preço inicial um pouco maior).
  - $VPL = q\,B\,P - I_D = 0{,}2 \times 500 \times 28 - 2750 = +50$ milhões \$.
  - Assuma uma taxa de desconto $\mu = 10\%$ para um período.
  - O que é melhor: desenvolver agora ou “esperar e ver”?

$E[P_0] = 28$ /bbl
$VPL(t=0) = +50$ MM \$

50%: $E[P^+] = 29 \Rightarrow VPL^+ = +150$ MM \$

50%: $E[P^-] = 27 \Rightarrow VPL^- = -50$ MM \$

$\Rightarrow$ Não exerce! $\Rightarrow$ Max $(VPL^-, 0)$ = zero

Logo em $t = 1$, o VPL opcional é: (50% x 150) + (50% x 0) = + 75 milhões \$
Se a *taxa de desconto* = 10%, o valor presente é: $VPL_{espera}(t=0) = 75/1{,}1 = 68{,}2 > 50$

Logo é melhor “esperar e ver”, exercendo a opção somente no cenário favorável.
Apesar do VPL positivo, a opção em t = 0 não está madura para o exercício imediato (no jargão de opções, a opção não está “deep-in-the-money”).

Intuição (3): Opções "Deep-in-the-Money"

- No exemplo anterior *a espera é mais valiosa*, mesmo com VPL positivo em t = 0. Agora suponha que em t = 0 o preço seja maior, P_0 = 29 \$/bbl $\Rightarrow$ VPL = 0,2 . 500. 29 – 2750 = 150 MM\$
  - Estará a opção madura para o imediato exercício (*deep-in-the-money*)?
  - Suponha que o preço pode subir ou descer 1 \$/bbl em t = 1 e μ = 10%

50% → $E[P^+] = 30 \Rightarrow VPL^+ = + 250$ MM \$

$E[P_0] = 29$ /bbl
VPL(t=0) = + 150 MM \$

50% → $E[P^-] = 28 \Rightarrow VPL^- = + 50$ MM \$
$\Rightarrow$ Exerce do mesmo jeito!

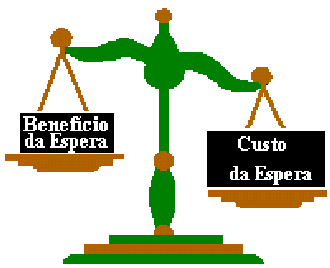
Logo, em t = 1 o VPL esperado é: (50% x 250) + (50% x 50) = 150 milhões \$
O valor presente é: $VPL_{esperar}(t=0) = 150/1,1 = 136,4 < 150 \Rightarrow$ exercer em t = 0

- Nesse caso a opção já está madura e o exercício imediato é ótimo
  - Logo, existe um P*(t = 0) entre 28 e 29 \$/bbl onde a opção fica madura
    - Esse P* é chamado gatilho, que dá a *regra ótima de exercício da opção*

Opção Real "Deep-in-the-Money" e Gatilho

- Para que valor do preço de longo-prazo P* se ficaria indiferente entre esperar e investir no exemplo anterior?
  - Esse preço P* é chamado de gatilho ou valor crítico da opção.
- Ver planilha Excel gatilho.xls. Usar a função "atingir metas".
  - O gatilho nesse exemplo é P* = 28,18 \$/bbl (já o preço de "break-even", que zera o VPL é 27,5 \$/bbl).
    - No exemplo a incerteza é particularmente pequena. Mas a idéia de gatilho para exercício da opção é um conceito geral.
    - A diferença entre o gatilho da opção e o preço de "break-even" (regra do VPL) é maior quanto maior for a incerteza.
- Note que o valor da opção e a regra de decisão (gatilho) estão ligados.
  - No exemplo, quando a opção está "deep-in-the-money" (P ≥ P*), o valor da opção é igual ao VPL do imediato exercício. Caso contrário, é o valor presente esperado da alternativa "esperar".

O Balanço Custo-Benefício da Espera



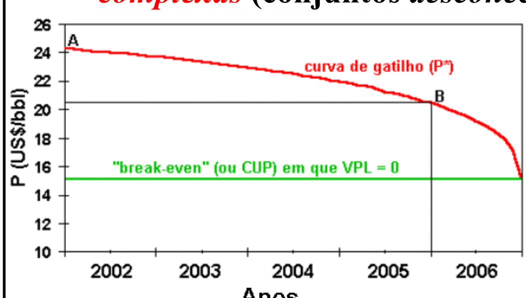
Projeto "deep in the money"

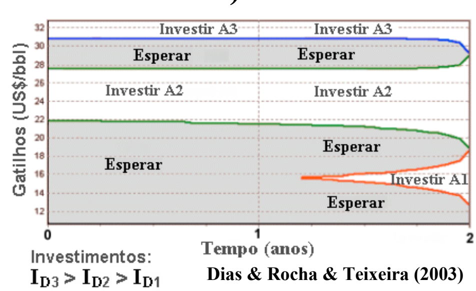
Projeto "in the money" ou "out of money"

- **O benefício da espera é maior, quanto maior for a incerteza econômica e a liberdade de timing (tempo de expiração).**
- **Quanto maior o VPL do projeto em relação ao investimento (mais "deep in the money"), menor o benefício da espera.**

Curva de Gatilhos: Tipos e Como Calcular

- **A curva de gatilhos dá a regra de decisão para exercício ótimo das opções reais (OR). Ela depende da incerteza de mercado.**
  - **Essa regra de exercício ótimo pode ser *simples* (curva de gatilhos) ou *complexas* (conjuntos *desconectados* de exercícios):**





- **A curva ou regiões de gatilho podem ser obtidas de vários modos:**
  - **<u>Tradicional</u>: resolve um equação diferencial parcial (EDP) através de diferenças finitas ou aproximações analíticas**
  - **Simulação de Monte Carlo + método tradicional de otimização**
  - **Simulação de Monte Carlo + método de inteligência computacional**

As Regras do FCD e as Opções Reais

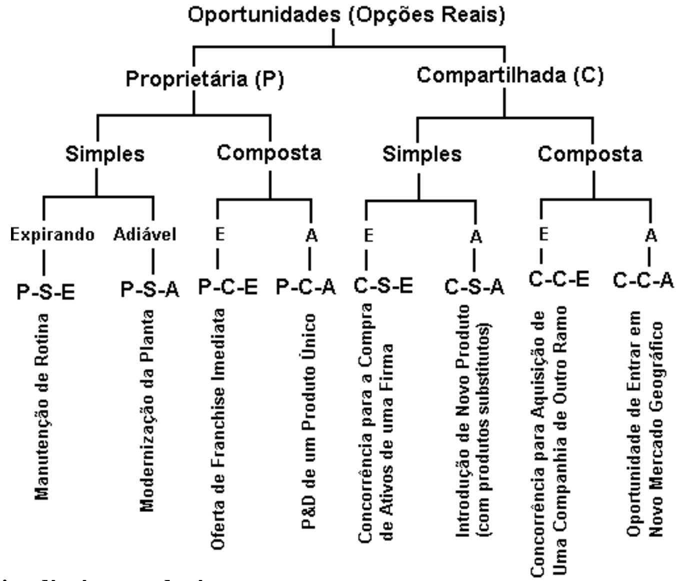
- **O Fluxo de Caixa Descontado (FCD) estabelece:**
  - **Investir em todos os projetos com VPL > 0**
    - **Opções: Investir só quando o projeto está "deep in the money"**
  - **Rejeitar projetos com VPL < 0**
    - **Opções: Pode recomendar projetos "estratégicos" (ex: com opção de expansão) e iniciar investimentos em projetos seqüenciais que *revelem informações* (incerteza técnica)**
  - **Entre dois projetos mutuamente exclusivos, escolher o de maior VPL**
    - **Opções: Muitas vezes escolhe projetos menores mas que estão "deep in the money" ou que tem *maior flexibilidade***
- **"*A verdadeira dificuldade está não em aceitar idéias novas, mas em livrar-se das idéias antigas*"**

John Maynard Keynes (1883-1946), famoso economista.

Exemplo de Escolha da Melhor Alternativa

- **Um empresário vai fabricar um produto com demanda incerta. Ele tem duas alternativas mutuamente exclusivas, A e B.**
  - **A alternativa A usa uma tecnologia "taylor made", com máquinas desenhadas para máxima eficiência em fabricar esse produto. Essa tecnologia usa pouca mão de obra (automação).**
    - **Uma análise de FCD mostrou: VPL_A = 500 – 400 = 100 MM$**
  - **A alternativa B usa uma tecnologia menos eficiente, com máquinas padronizadas (tornos, fresas), usa mais mão de obra (mas é mais flexível). VPL_B = 450 – 355 = 95 MM$**
- **Pela análise tradicional, a alternativa A seria a escolhida.**
  - **No entanto, a alternativa B tem um valor de <u>opção de abandono</u> bem mais valiosa do que a alternativa A, que não foi computada. Isso *pode* inverter o valor das alternativas.**
    - **Se a demanda cair (ex.: entrada de um produto substituto melhor ou mais barato), as máquinas da tecnologia A não tem valor. Já as máquinas da alternativa B tem valor no mercado secundário.**

Classificação das Opções Reais (Trigeorgis)

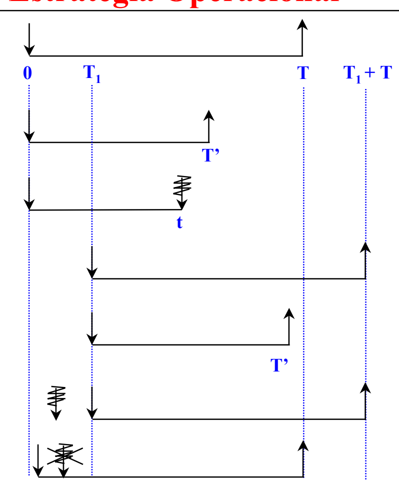


- Opção *proprietária*: direitos exclusivos;
- Opção *compartilhada*: várias firmas a detém

Classificação e Valor das Opções: Alguns Casos

- O valor da opção pode ser vista como a soma do VPL com o valor da(s) opção(ões) e com o efeito competitivo.

Classificação	Estratégia Operacional	Valor da Opção
A) VPL Estático		VPL
B) Método de Opções		
Proprietária-Simples- -Expirando		VPL + opção de abandono
Compartilhada-Simples- -Expirando		VPL – perda competitiva
Proprietária-Simples- -Adiável		VPL + opção de espera
Idem, com abandono		VPL + espera + abandono
Compartilhada-Simples- -Adiável		VPL + espera – perda compet.
Idem, entrando antes		Volta a casos anteriores



Legenda: decisão de investir; decisão de sair; entrada de competidor (fora de controle);
T = vida esperada do projeto; T_1 = período adiável; T' = abandono antecipado devido ao mercado

Finanças em Tempo Contínuo

- **Dividindo-se um intervalo de tempo discreto em um número muito grande (m) de sub-intervalos, se aproxima do tempo contínuo**

$$\lim_{m \to \infty} [1 + (r/m)]^m = e^r$$

- **Note que uma taxa anual de 10% (por ex.) composta anualmente, corresponde a 10,52% se ela fosse continuamente composta, pois $e^{0,10} - 1 = 10,52\%$**
  - **Logo, numa transação dever ser especificada se a taxa é contínua ou discreta. Mas tendo uma se obtém a outra.**
- **Assim, investindo R$ 1 a uma taxa r continuamente composta, após T anos se obtém $e^{r\,T}$**

Finanças em Tempo Contínuo

- **Outra maneira de ver: para uma taxa de 10% anualmente composta, um montante $M_0 = 100$ valerá $M_1 = 110$ daqui a 1 ano (retorno de 10) :**

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{M_1 - M_0}{t_1 - t_0} = \frac{110 - 100}{1 - 0} = 10\% \text{ x } 100 = r\,M$$

- **O caso discreto vira contínuo se Δt for infinitesimal (dt):**

Discreto	Contínuo
$\frac{\Delta M}{\Delta t} = r\,M$	$\frac{dM}{dt} = r\,M$

- **Integrando dM desde o instante t até o instante futuro T:**

$$M(t) = M(T)\, e^{-r\,(T - t)}$$

Finanças em Tempo Contínuo

- Em resumo, o fator de atualização (de desconto) em tempo contínuo é uma exponencial:

Número de Períodos	Fator em Tempo Discreto	Fator em Tempo Contínuo
1	$1/(1+r)$	$1/e^{r}$ (ou e^{-r})
2	$1/(1+r)^{2}$	$1/e^{2r}$ (ou e^{-2r})
n	$1/(1+r)^{n}$	$1/e^{nr}$ (ou e^{-nr})

- Note que os fatores são diferentes se r for o mesmo.

Exemplo em Tempo Contínuo

- Seja V o valor <u>unitário</u> de um projeto implantado, isto é, V = receita líquida de custos operacionais e impostos, por unidade produzida, ou margem líquida unitária.
- V cresce exponencialmente a uma taxa α e vale atualmente V_0 e futuramente $\tilde{V}(t)$. Para se atualizar com a taxa de desconto ajustada ao risco μ, um fluxo de caixa proveniente da produção Q(t) de um projeto, o que importa é a diferença δ (= $\mu - \alpha$) e não μ ou α :

Valor do projeto implantado =

$$E\left[\int_{t=0}^{t=T} Q(t)\,\tilde{V}(t)\,e^{-\mu t}\,dt\right] = \int_{t=0}^{t=T} Q(t)\left(V_0\,e^{\alpha t}\right)e^{-\mu t}\,dt$$

$\Rightarrow$ Valor do projeto implantado = $\int_{t=0}^{t=T} Q(t)\,V_0\,e^{-\delta t}\,dt$

Conceitos Básicos de Derivativos Financeiros

- **Ativo derivativo é aquele cujo fluxo de caixa depende funcionalmente de um outro ativo, chamado de ativo básico. Exemplos de derivativos:**
  - ***Opções*, *contratos a termo*, *contratos futuros* e *swaps***
- **Diferença entre ativos contingentes e derivativos:**
  - **O primeiro é mais abrangente, ativos que depende de qualquer variável (ex: índice de inflação) ativo ou não**
- **Opções: direito de comprar ou vender um ativo V, por um certo valor K, até uma certa data T**
  - **Opção Européia : só pode exercer a opção na data de expiração (valor é menor ou igual a opção Americana)**
  - **Opção Americana: permite o exercício antecipado**

Assimetria de Valor e Tipos de Opção

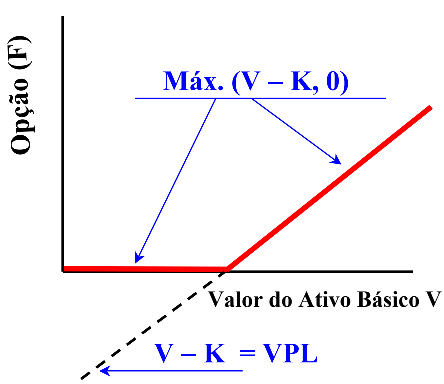
- **Sendo a opção um direito de comprar ou vender um ativo por um certo preço em (ou até) uma certa data, cria a assimetria no valor da opção:**
  - **Direito de exercer sem a contrapartida simétrica da obrigação de exercer, beneficia o detentor da opção**
    - **Investidor racional só exercerá a opção se o preço do ativo básico evoluir favoravelmente para esse exercício**
- **Opção de Compra ("call"): direito de *comprar* o ativo básico (V) pelo preço de exercício (K)**
- **Opção de Venda ("put"): direito de *vender* o ativo básico (V) pelo preço de exercício (K)**
- **Ativo Básico: pode ser ações de firmas, contrato futuro, outra opção, imóveis, um projeto, etc.**

Opções de Compra, de Venda e Exóticas

- **Opção de Compra ("call") será muito usada na <u>analogia com o direito de investir num projeto</u>**
  - **GM tem uma call perpétua: obtém-se uma fábrica de automóveis (ativo básico) pagando o investimento (preço de exercício)**
  - **Petrobras quando descobre um campo tem uma call *com tempo de expiração***
- **Opção de Venda ("put") pode ser pensada como um <u>seguro</u>: o investidor que detém a ação e a opção limita suas perdas, ganha pelo menos K (preço de exercício).**
  - **Analogia com <u>opção de abandono</u> de um projeto ou negócio pelo seu valor residual ou de oportunidade (reversibilidade parcial)**
- **Diversas analogias com <u>opções exóticas</u>, ex.:**
  - **Investir na capacitação em duas tecnologias concorrentes (ex.: em banda larga para telecomunicações) e usar a mais valiosa**
    - **Analogia com a *opção de máximo de dois ativos de risco***

Assimetria na Opção de Compra

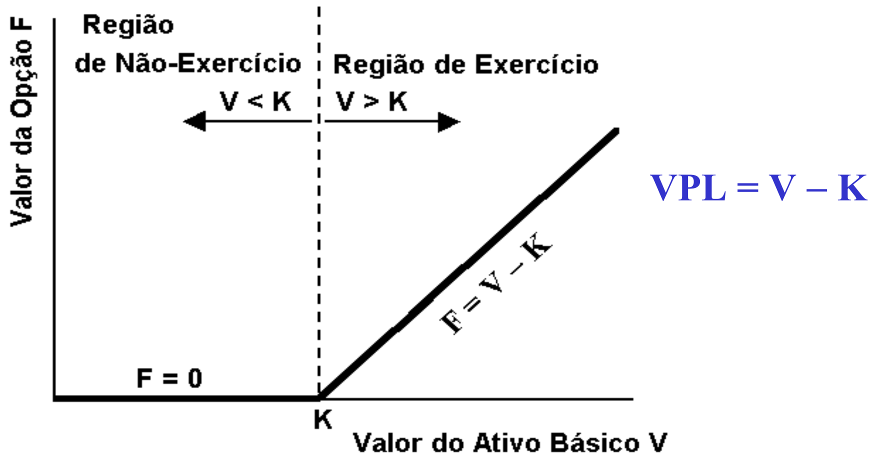
- **Na expiração a opção (F) só deve ser exercida se V > K.**
- **A opção cria uma assimetria, pois as *perdas são limitadas* ao valor de aquisição da opção e o *upside* é teoricamente ilimitado. Quanto mais incerto for o valor futuro do ativo V, mais vale a assimetria.**
  - **Na expiração (T):**



- **Em projetos de investimento, V – K é o VPL e assim pode-se pensar no valor da opção como F(t = T) = Máx. (VPL, 0)**

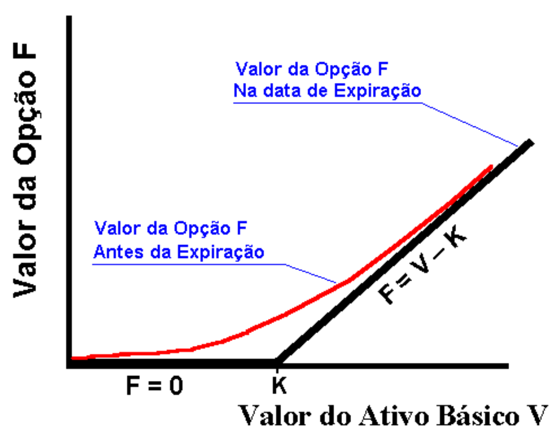
Valor no Vencimento da Opção de Compra (Call)

- Seja o valor do ativo básico V (valor do projeto no contexto de opção real) e o preço de exercício da opção K (investimento).
- Na expiração a opção (F) só deve ser exercida se V > K. Valor da opção F(T) = Máx. [V – K, 0] (em OR: F = Máx.[VPL, 0])



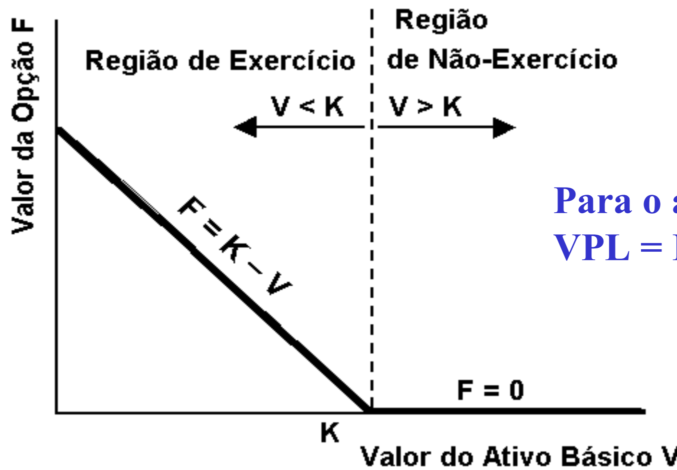
Opção de Compra Antes da Expiração

- <u>Antes da expiração</u> a opção tem valor positivo (> 0) mesmo que o preço do ativo básico V seja menor que o preço de exercício da opção K.
  - Isso ocorre devido à <u>incerteza</u> do valor V na data de vencimento: valor positivo reflete a chance de essa opção se tornar valiosa.



Opção de Venda: Valor no Vencimento

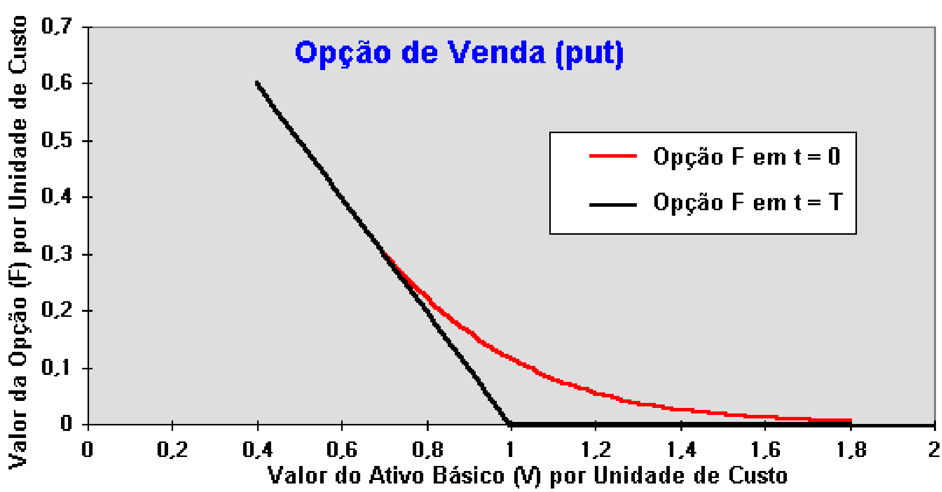
- Na expiração, a opção de venda sobre um ativo que vale V e com preço de exercício K valerá:
  - Máx. [0 , K – V] ou seja, só exerce a opção se V < K



Para o abandono:
VPL = K – V

Opção de Venda Antes da Expiração

- Analogamente, o valor da opção de venda americana antes da expiração vale mais do que na expiração



Equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M)

- **O valor da <u>opção *européia* de compra</u> antes do vencimento é dada pela equação de B&S&M (a *versão com dividendos*), deduzida por arbitragem, que só <u>depende só de 6 parâmetros</u> de mercado:**
  - **preço do ativo básico (ação), V ;**
  - **preço de exercício da opção, K ;**
  - ***volatilidade* do ativo básico (desvio-padrão da taxa de retorno do ativo básico, isto é, de dV/V), σ ;**
  - **o tempo que falta para a expiração da opção, τ ;**
  - **a taxa de juros livre de risco, r ; e**
  - **a taxa de distribuição de dividendos do ativo básico, δ (*dividend yield* em % p.a. de V).**

Equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M)

- **A equação de Black & Scholes, *versão com dividendos* (Merton), para uma opção de <u>compra européia</u>, é dada pela seguinte solução de uma EDP:**

$$C = V\, e^{-\delta\tau}\, N(h) - K\, e^{-r\tau}\, N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\right)$$

- **Onde:** $$h = \left[\ln\left(\frac{V}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

  N(.) = função distribuição normal padrão acumulada (obtida em tabela ou como função de planilha)

- **Para o caso sem dividendos, basta fazer $\delta = 0$**
- **Repare que não entra "taxa ajustada ao risco" ou "taxa de crescimento esperada" da ação**

Interpretação de Black & Scholes & Merton

- Podemos interpretar os termos da equação de B&S&M, observando valores presentes de expectativas sob probabilidades neutras ao risco, que consideram a ação ótima (opção) nos cenários possíveis de V em t = T, faltando τ anos para a expiração da opção:

Probabilidades neutra ao risco (com ponderação de valor) de V > K na expiração

$$C = \underbrace{V\, e^{-\delta\tau}}_{\text{Valor presente do valor do ativo básico}} N(h) - \underbrace{K\, e^{-r\tau}}_{\text{Valor presente do custo de exercício}} N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\,\right)$$

h é função de V, K, r, δ, σ, τ

Valor presente esperado de V se V > K na expiração (usando prob. neutra ao risco)

Valor presente de K se V > K na expiração

Fatos Sobre Opções Americanas

- Numa opção americana pode haver o <u>exercício antecipado</u>. O exercício ótimo é dado pelo *gatilho* V*:
  - Exerce a opção de *compra* se $V \geq V^*$ (opção *deep-in-the-money*)
  - Exerce a opção de *venda* se $V \leq V^*$ (opção *deep-in-the-money*)
  - Gatilho é o nível de exercício que maximiza o valor da opção
  - Na expiração é como no caso da opção européia ($V^* = K$)
- Opções americanas são em geral resolvidas numericamente (EDP) ou em aproximações analíticas usando relações como:

  opção americana = opção européia + prêmio de exercício antecipado

  - ➡ Valor da opção americana ≥ valor da opção européia
- Opção de *compra* americana: uma <u>condição necessária</u> para ser ótimo o exercício antecipado é $\delta > 0$, onde δ = *dividend yield*.
  - ➡ Essa propriedade é <u>muito importante em opções reais</u>.
  - ➡ Se $\delta = 0 \Rightarrow$ valor da opção de compra americana = opção européia

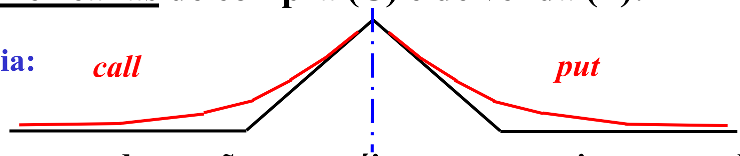
Paridade/Simetria de Opções Americanas

- Na literatura é muito conhecida (ex.: ver Hull) a paridade entre as opções <u>européias</u> “call” (c) e “put” (p), com mesmo preço de exercício K e com mesma expiração T e dado o preço inicial V_0:

$$c - p = V_0 \, e^{-\delta T} - K \, e^{-r T}$$

- Menos conhecido é a simetria (um tipo de paridade) entre as opções <u>americanas</u> de compra (C) e de venda (P):

Simetria:



- Tanto no caso das opções européias como americanas, a relação de paridade/simetria permite que um software que resolva opções de compra, automaticamente resolva opções de venda e vice-versa
  - No caso das opções americanas isso se dá através duma *permutação* específica dos dados de entrada (V com K e r com δ).
  - Por ex., para calcular a *call* americana dado um software que calcula *put*:

$$C(V, K, r, \delta, \sigma, \tau) = P(K, V, \delta, r, \sigma, \tau)$$

Paridade/Simetria de Opções Americanas (2)

- O gatilho de uma call V* dado o gatilho da put V** é:

$$V^*(K, r, \delta, \sigma, \tau) = \frac{V \, . \, K}{V^{**}(V, \delta, r, \sigma, \tau)}$$

- Existe uma relação de simetria ainda mais geral
  - Relação válida para o mesmo tempo de expiração τ e <u>para o mesmo *grau de lucratividade*</u> $V_c/K_c = K_p/V_p$

$$P(V_P, \tau ; K_P, r, \delta) = \sqrt{\frac{V_P \, K_P}{V_C \, K_C}} \; C(V_C, \tau ; K_C, \delta, r)$$

Cálculo do gatilho é igual: $\sqrt{V^*(K_C ; \delta, r) \, V^{**}(K_P ; r, \delta)} = \sqrt{K_C \, K_P}$

Onde: V_C e V_P = valores das ações sobre as quais estão escritas as opções de compra e de venda, respectivamente

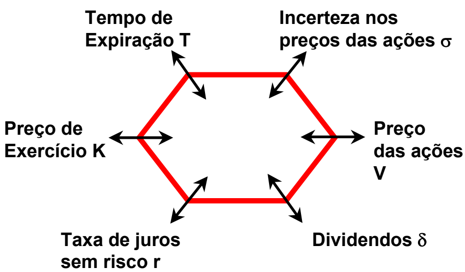
K_C e K_P = preços de exercício das opções de compra e de venda, resp.

V* e V** = valores de gatilho das opções de compra e de venda, resp.

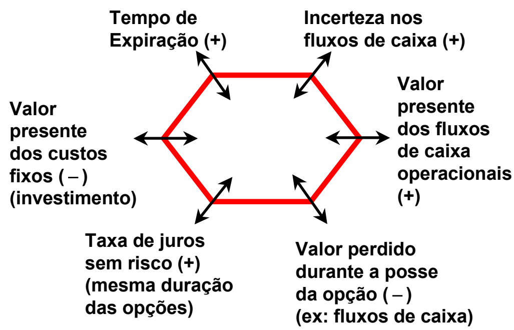
Analogia Opções Financeiras x Reais

- Os seis parâmetros usados na equação de Black-Scholes & Merton e em opções americanas call, tem a seguinte analogia com opções reais:

- **Opções financeiras**



- **Opções reais**



  - OBS: Entre parênteses está mostrado o efeito da sensibilidade do valor da opção

- O tempo de expiração pode ser perpétuo (terreno) ou finito; estipulado por lei (petróleo, patente) ou estimado em função da concorrência

Opções Financeiras x Opções Reais

- Nas opções reais, os ativos básicos são do tipo não-financeiros ou "reais" ou "produtivos"
  - Exs.: projeto de produção de petróleo; de aços planos; de uma novela de TV; de um remédio; etc.
- As analogias entre opções financeiras e reais tem de respeitar as <u>diferenças</u> entre as duas:
  - Tipicamente as opções financeiras são de curto prazo (< 1 ano) enquanto que as opções reais podem ser até perpétuas.
  - Ativos financeiros, tais como as ações, não podem ter valores negativos. Um projeto pode ter valor negativo.
  - Opções reais são mais complexas que as financeiras: preço de exercício pode ser incerto; é comum ter opções reais compostas; presença de incertezas técnicas além da incerteza de mercado; e interações estratégicas com outras firmas.
  - No exercício de opções reais existe o tempo de construção.

Analogia Opção Financeira-Opção Real

- **Uma diferença entre o caso financeiro e o caso de projeto, é que no segundo caso existe o "tempo de construção" (não se obtém o ativo imediatamente)**
  - **Isso pode ser considerado usando o valor presente do invest.**
  - **Existem modelos mais sofisticados de tempo de construção**
- **O cálculo de δ (taxa de distribuição de fluxo de caixa):**
  - **Média das razões anuais entre o fluxo de caixa e o valor do projeto (FC_t/V_t) (ex.: aluguel de imóvel/seu valor)**
  - **Em petróleo e recursos minerais tem de considerar a depleção da jazida. Usa-se aqui também o *convenience yield.***
- **Valor do projeto implantado (V):**
  - **É a melhor *estimativa de mercado* para V. Ela pode ser obtida observando valores correntes do mercado (preço de um imóvel, preço de uma reserva desenvolvida de petróleo) ou, na falta de valor direto do mercado, pelo FCD (fluxo de caixa descontado) com a taxa de desconto apropriada.**

Principais Características de uma Decisão de Investimento

- **Algumas características importantes na tomada de decisão de investimentos ou de alocação de recursos:**
  - **Irreversibilidade parcial ou total: o comprometimento de recursos (investimento) é em geral irreversível**
  - **Sujeito a incertezas diversas (especialmente nos benefícios)**
  - **Graus de liberdade gerencial (opções) especialmente o "timing": em geral não se é obrigado a investir imediatamente. Raramente uma oportunidade é do tipo "agora ou nunca"**
- **As palavras chaves são:**

Irreversibilidade, Timing e Incerteza

Irreversibilidade

- **Irreversibilidade pode ser *total* (ex.: perfuração de um poço) ou *parcial* (aquisição de um torno)**
- **Conceito vem da literatura de economia ambiental (artigos de Arrow & Fischer, e de Henry, ambos de 1974)**
- **Valoriza a espera antes de fazer uma ação irreversível: a <u>espera é reversível</u>**
- **Conceito se aplica a decisões sociais/políticas e até individuais (ex.: casamento, divórcio, suicídio)**
- **Negociação: se você tiver dúvida se deve ou não abrir uma informação, não abra!**
  - **A abertura da informação é irreversível. A espera é reversível, você sempre tem a *opção* de dar a informação depois.**

Timing: Tempo de Expiração da Opção

- **Raramente um investimento é do tipo "agora-ou-nunca". Pode-se <u>esperar e observar</u> o mercado.**
- **Em P & D, as patentes tem uma duração estabelecida pela lei. No Brasil a duração é de 20 anos, depois cai em domínio público.**
  - **Um *desenho industrial* tem proteção de 10 + 15 anos (prorrogação)**
- **No caso de concessões de exploração de petróleo é estabelecida em lei (geralmente de 5 a 10 anos)**
  - **No caso de regime de monopólio do petróleo, o tempo era infinito (oportunidade perpétua). Agora é até 9 anos.**
- **Concessões de longa duração (> 10 anos) geralmente podem ser tratadas como opções perpétuas. Ex.: <u>direitos autorais</u> (lançar um disco dos "maiores sucessos"), vida do autor + 70 anos.**
- **Em muitos casos o tempo é estimado considerando a entrada de novos concorrentes que podem até destruir sua opção de investimento (Kester, 1984).**

Tipos de Incertezas

- **Incerteza Econômica: Correlacionado aos Movimentos Gerais da Economia**
  - **Valoriza a Espera por Informações Externas ("learning by waiting"). Ex: preço do petróleo; câmbio (crise Argentina); juros.**
- **Incerteza Técnica: Não Correlacionado aos Movimentos Macroeconômicos**
  - **Incentiva o investimento seqüencial, para revelar o verdadeiro cenário e reduzir a variância da incerteza ("learning by doing")**
  - **Ex.: Volume de petróleo na jazida; Custo de projeto de P&D**
- **Incerteza Estratégica: Relacionado à ação de outras empresas no mercado**
  - **Pode tanto incentivar como adiar os investimentos**
  - **Ex.: leilões de privatização/concessões; ameaça de entrada de concorrentes (ou de substitutos); jogo da espera na exploração e/ou revelation; timing-games em P&D**

Teoria da Valoração

- **Existem dois tipos de teoria da valoração de ativos, segundo Constantinides (Univ. Chicago)**
- **Teoria Livre de Preferências: opções, proposições de Modigliani & Miller**
  - **Equilíbrio: oportunidades de arbitragem no mercado não sobrevivem. Eficiência no uso de informações.**
  - **Só se supõe que o investidor tem um comportamento maximizador de riqueza (prefere mais a menos)**
  - **Independe das atitudes do investidor em relação ao risco (avesso, neutro, ou mesmo amante do risco)**
  - **Função utilidade: qualquer, basta ser crescente com a riqueza**
- **Teoria Dependente de Preferências: ex.: CAPM**
  - **Equilíbrio: especifica as preferências do investidor**
  - **Além de assumir aversão ao risco, especifica a função utilidade**

Arbitragem

- **Definição de oportunidade de arbitragem:**
  - ***É um plano de consumo que tem custo inicial não-positivo*** **e que *é sempre não-negativo e estritamente positivo em pelo menos um cenário*** **(Huang & Litzemberger, 1988, p.226)**
    - **Ex.: em t = 0 fazer um investimento líquido igual a zero e em t = 1 não ter risco de perder em nenhum cenário, mas *podendo ganhar*.**
- **Conceito muito usado em cálculo de opções/derivativos e na análise de equilíbrio do mercado.**
  - **Num mercado competitivo os preços dos ativos são tais que:**
    - **Se existir uma oportunidade de arbitragem, ela logo desaparecerá: devido a pressão de compra do ativo barato e a pressão de venda do ativo caro, os preços desses ativos retornariam ao equilíbrio**
  - **O preço justo da opção não permite ganhos de arbitragem (idéia básica do Black-Scholes-Merton). Para isso se constrói um portfólio sem risco, composto de opções e do ativo básico.**
    - **O retorno desse portfólio sem risco tem de ser a taxa livre de risco**

Investimento

- **Definição de investimento (Dixit & Pindyck):**

  É o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios.

- **Retorno do Investimento = Ganho de Capital + Dividendos**
  - **Taxa de retorno total = taxa de ganho de capital + taxa de dividendos**

$$\mu = \alpha + \delta$$

- **Pelo CAPM, retorno total esperado = taxa ajustada ao risco, é:**

$$\mu = r + \beta\,(r_m - r)$$

prêmio de risco (π)

Onde: r = taxa livre de risco; r_m = retorno do mercado

β = "beta" do projeto (ou do ativo) = medida de covariância

Uma Importante Relação

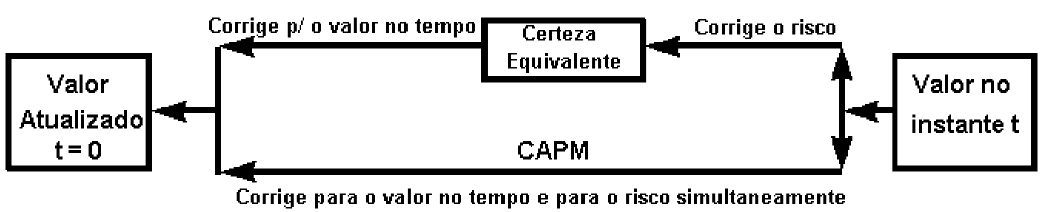
- Igualando as duas equações para o retorno total μ, obtém-se a seguinte importante relação:

$$\alpha - \pi = r - \delta$$

- Em palavras, a tendência α penalizada pelo prêmio de risco π é igual à taxa livre de risco r menos a taxa de dividendos δ.
  - Essa tendência $\alpha - \pi$ é chamada *tendência neutra ao risco*
  - Essa relação será muito usada para o caso em tempo contínuo e em simulações de Monte Carlo, a serem vistas.

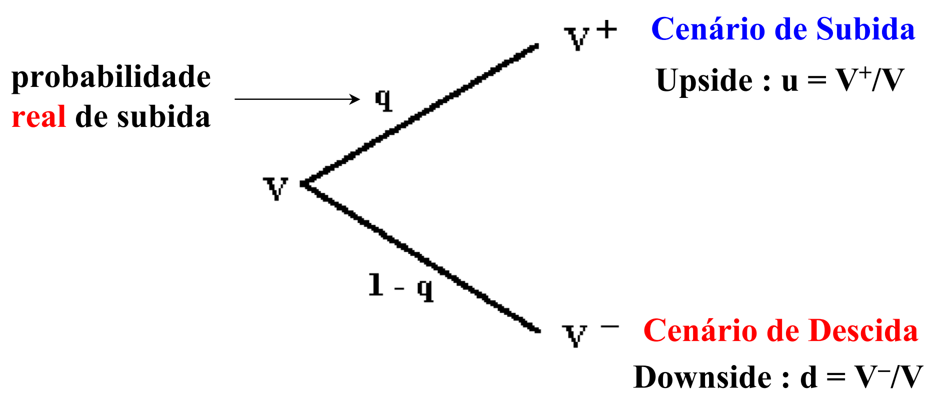
Valor Presente e Taxas de Desconto: O Método da Neutralidade ao Risco

- Duas maneiras de usar taxas de desconto
  - Pode-se descontar com a taxa ajustada ao risco (CAPM), usando probabilidades reais, ou
  - Primeiro corrige o risco para depois descontar com a taxa livre de risco, é o método da *neutralidade ao risco*
    - O truque matemático é usar a probabilidade artificial chamada de *medida equivalente de martingale* (ou probab. neutra ao risco)



Método da Neutralidade ao Risco

- Como calcular a probabilidade artificial de martingale, para poder usar a taxa livre de risco?
- Considere um caso simples, em que o valor V de um projeto no instante posterior t = 1 pode assumir só dois valores V^+ e V^- :



Probabilidade Real e Taxa Ajustada ao Risco

- Pode-se calcular o valor presente usando a *taxa ajustada ao risco* μ para descontar o *valor esperado* de V em t = 1 (ou seja E [V(t = 1)]). Nesse cálculo, usa-se probabilidades <u>reais</u>

$$V = \frac{E\,[\,V(t=1)\,]}{1+\mu} = \frac{q\,V^+ + (1-q)\,V^-}{1+\mu}$$

- Pode-se tirar o valor da taxa ajustada ao risco em função da probabilidade real q :

$$\mu = \frac{E\,[\,V(t=1)\,]}{V} - 1 = \frac{q\,V^+ + (1-q)\,V^-}{V} - 1$$

μ também é a taxa de retorno esperada do ativo de risco (CAPM)

Probabilidade Artificial e Taxa Livre de Risco

- A pergunta é: <u>sob que probabilidades o retorno desse ativo seria igual à taxa livre de risco</u>?
- Seja p a probabilidade <u>artificial</u> de subida (V^+) tal que o retorno seja livre de risco:

Taxa Livre de Risco (r_f): $$r_f = \frac{E'[\,V(t=1)\,]}{V} - 1$$

OBS: **E'** é um operador de valor esperado sob probabilidades artificiais neutras ao risco p e (1 – p)

$$\Rightarrow \quad r_f = \frac{p\,V^+ + (1-p)\,V^-}{V} - 1$$

fazendo $u = V^+/V$, $d = V^-/V$ e tirando o valor de p $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

Medida de martingale

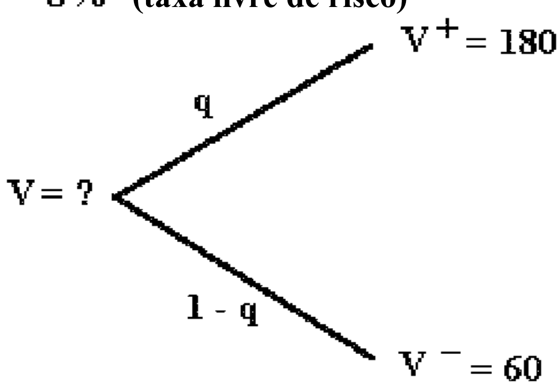
p = probabilidade artificial neutra ao risco de V subir

Exemplo de Taxas de Desconto

- Agora será visto um exemplo usando os dois métodos de taxa de desconto, que resultam no mesmo valor.
  - Inicialmente considere um caso sem dividendos.

μ = 20% (taxa ajustada ao risco ou retorno esperado)

r = 8% (taxa livre de risco)

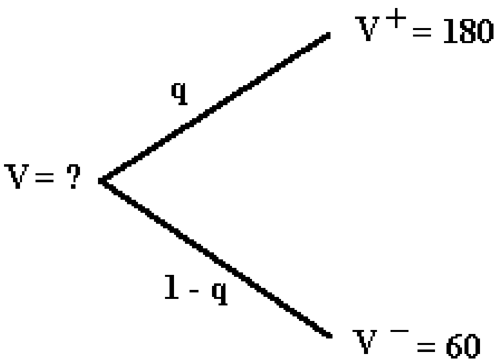


- Para usar μ precisa saber probab. real *q*
- Poderia também dar q e V e pedir μ
- Suponha q = 50%, quanto vale V?

Exemplo Numérico de Taxas de Desconto

μ = 20% Taxa ajustada ao risco

r = 8% Taxa livre de risco



- Considere que os valores de probabilidades <u>reais</u> q e (1 – q) são iguais a 50%
- Usando a taxa ajustada ao risco, o valor presente é:

  V = (0,5 x 180 + 0,5 x 60)/(1 + 0,20)
- Logo, **V = 100**
- Agora será encontrado o mesmo valor usando o método da neutralidade ao risco ou de martingale

Exemplo: Método da Taxa Livre de Risco

- No método da neutralidade primeiro tem de calcular a probabilidade artificial de martingale :

$$p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}$$

Onde o processo de difusão é dado por:

$u = V^{+} / V = 180/100 = 1{,}8$

$d = V^{-} / V = 60/100 = 0{,}6$

$\Rightarrow$ p = (1 + 0,08 – 0,6) / (1,8 – 0,6) $\Rightarrow$ p = 0,4 = 40%

- Agora pode-se calcular V(t = 0) com a taxa sem risco r_f:

$$V = \frac{E'\,[\,V(t = 1)\,]}{1 + r_f} = \frac{p\,V^{+} + (1 - p)\,V^{-}}{1 + r_f}$$

$\Rightarrow$ V = [(0,4 x 180)+((1 – 0,4) x 60)]/(1+0,08) $\Rightarrow$ **V = 100**

- Confere: é o mesmo resultado obtido com a taxa μ

Exemplo das Taxas de Desconto: q e p

- **Os métodos são equivalentes. O método da neutralidade ao risco é útil na teoria de opções**
- **No exemplo, e se a probabilidade real for diferente de 50%, qual o valor de V e de p ?**

Probabilidade real *q* para V^+ (%)	Probabilidade de martingale *p* para V^+ (%)	Valor presente esperado do projeto V
50	40	100
60	49	110
40	31	90

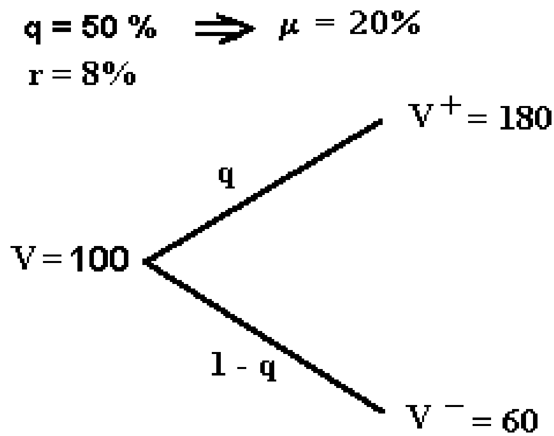
- **Fica como exercício verificar. Repare que p < q**

Método da Neutralidade ao Risco

- **Mas se já é sabido o valor presente de V (ou é necessário saber *u* e *d*), qual a vantagem do método?**
  - **Observando valores de mercado, se sabe (ou se estima) o valor corrente do projeto V; o problema é saber o valor da *opção* (F) de investir nesse projeto que tem valor incerto V(t) no futuro;**
  - **Para isso tem de se adotar/estimar um processo de incerteza da variável V (ex.: log-normalidade). Isso é dado aqui por *u* e *d* ;**
  - **Com esses dados (*V*, *u* e *d*) se tem as expectativas reais de valores futuros de V (logo o retorno de V). No entanto, não podemos usar as probabilidades reais e a taxa ajustada ao risco de V, para calcular o valor presente da opção F;**
  - **Com esses dados (*V*, *u* e *d*, e as taxa de juros e de dividendos) pode-se estimar a probabilidade artificial "neutra ao risco", que gera certezas equivalentes;**
  - **Sob expectativas neutras ao risco se pode atualizar o valor de ativos derivados do ativo básico usando a taxa livre de risco.**

Aplicação em Derivativos: Valor do Seguro

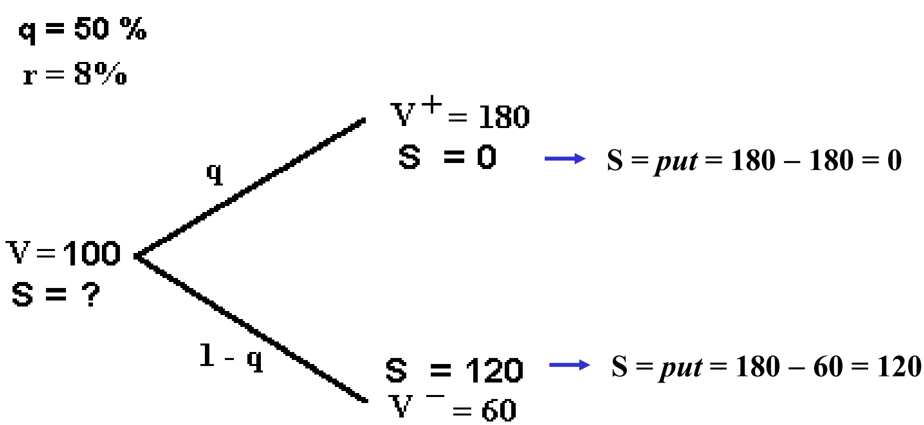
- Inicialmente considere o processo de difusão de V:



- Quanto eu teria de pagar por um seguro (prêmio) que me permita receber no futuro o valor de 180 em *qualquer* cenário?

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Qual o valor do prêmio para ter um seguro total? (ou seja, para obter 180 em qualquer cenário)



- Esse seguro é análogo a uma <u>opção de venda</u> (*put*) com preço de exercício de 180 (se V cai para 60, a opção é exercida)

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Trigeorgis mostra que o uso da taxa ajustada ao risco <u>do ativo básico</u> (μ = 20%) para calcular o seguro é um erro:**
  - **S = (0,5 x 0 + 0,5 x 120)/ (1 + 0,20) = 50 (valor errado, ver adiante)**
- **Para vermos que esse valor de S está errado, considere a carteira *ativo básico* + *seguro* (V + S):**
  - **Essa <u>carteira é totalmente sem risco</u>, pois o resultado é o mesmo (= 180) para qualquer cenário**
  - **Se a carteira (V + S) é sem risco, então o <u>retorno dessa carteira terá de ser a taxa livre de risco</u>**
    - **Caso contrário o seguro estará ou muito caro ou muito barato, permitindo ganhos por arbitragem**

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Se o retorno da carteira V + S é sem risco, então a taxa de desconto apropriada é a taxa livre de risco**
- **Usando probabilidades reais e taxa sem risco (8%):**
  V + S = (0,5 x 180 + 0,5 x 180)/ (1 + 0,08) = 166,7
- **Como sabemos que V = 100 (no instante zero), então o valor de S sai por diferença:**
  $\Rightarrow$ S = 166,7 – V = 166,7 – 100 $\Rightarrow$ S = 66,7
- **E não o valor de 50 calculado usando μ = 20%, que subestimou o valor do prêmio do seguro**
  - **A correta taxa ajustada ao risco da opção é uma tarefa complicada**
- **Agora usaremos um método alternativo para calcular o seguro que dá certo: as *probabilidades de martingale***

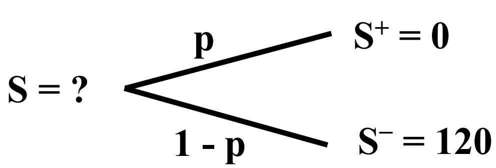
Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Veremos que com o método da neutralidade ao risco (transformando probabilidades), se consegue obter o valor correto para o derivativo (o mesmo valor obtido com o método do portfólio sem risco).
  - A "probabilidade" artificial neutra ao risco (ou de martingale) é:

$$\boxed{p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

r_f = taxa sem risco (aqui = 8%)
u = "up" = V^+/V (aqui 180/100 = 1,8)
d = "down" = V^-/V (aqui 60/100 = 0,6)

$\Rightarrow$ p = (1 + 0,08 – 0,6) / (1,8 – 0,6) $\Rightarrow$ p = 0,4 = 40%



$$S = \frac{(0{,}4 \text{ x } 0 + 0{,}6 \text{ x } 120)}{1 + 0{,}08}$$

Logo, S = 66,7

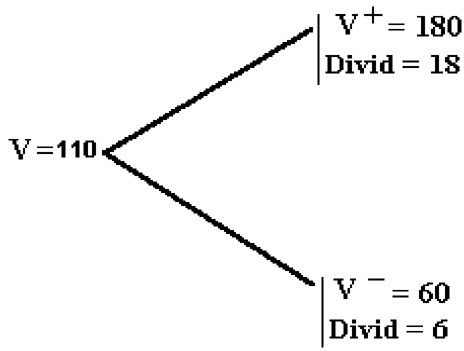
- Que é o valor correto, igual ao calculado antes, em que foi usado o conceito que um portfólio livre de risco (V + S) tem retorno igual a r_f

Medida de Martingale Com Dividendos

- No exemplo anterior não foi considerado os dividendos (fluxos de caixa), apenas o ganho de capital (valorização V^+ e desvalorização V^-)
  - Para usar a técnica de martingale na presença de dividendos, basta somar os dividendos de cada cenário aos valores "ex-dividendos" do ativo (projeto) V^+ e V^-
- Assim, a única diferença será nos valores de "u" e "d", somando dividendos com ganho de capital:
  - u = (V^+ + dividendos no cenário "up")/V
  - d = (V^- + dividendos no cenário "down")/V
- Serão vistos dois exemplos, sendo o 2º para o caso da opção de desenvolver terrenos urbanos, em que entram os "dividendos" como um aluguel de condomínio.
  - O dividendo é um custo de oportunidade de manter a opção de espera aberta.

Exemplo de Martingale Com Dividendos

- **Seja um ativo V que vale \$110 e irá distribuir dividendos δ = 10% dos preços ex-dividendos que valem $V^+ = 180$ e $V^- = 60$. Dado $r_f = 8\%$**
  - **Quanto é a "probabilidade" de martingale?**



$$p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}$$

- **Basta aplicar a fórmula sem esquecer dos dividendos. A "probabilidade" para subir é:**

p = (1 + 0,08 – [(60 + 6)/110])/([(180 + 18)/110] – [66/110]) ⇒ p = 0,4 ou 40% .

Exemplo: Valor de Terreno Urbano

- **Suponha um terreno urbano e que existam duas alternativas de desenvolvimento:**
  - **Condomínio de 6 unidades, a um custo de C_6 = \$80.000/unidade**
  - **Condomínio de 9 unidades, a um custo de C_9 = \$90.000/unidade (mais caro)**
  - **Os custos de construção não variam com o tempo**
  - **O efeito do tempo de construção é considerado supondo que os valores dos custos e preços estão atualizados para a mesma data (início constr.)**
  - **O preço de venda do imóvel hoje é V = \$100.000 por unidade, mas existe incerteza no preço futuro de venda**
- **Construindo hoje a alternativa de maior VPL é a de 6 unidades:**

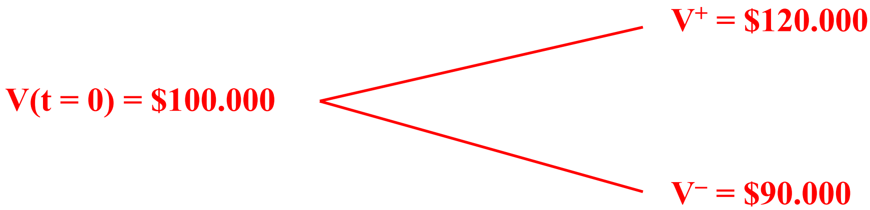
VPL_{C6} = 6 x (100.000 – 80.000) = \$120.000 (= valor do terreno?)

VPL_{C9} = 9 x (100.000 – 90.000) = \$90.000 < VPL_{C6}

- **Veremos que com a incerteza de V, o terreno (que é uma opção) vale mais do que \$120.000**

Valor do Terreno Sob Incerteza

- **Suponha um processo de incerteza simples no valor de V, com 2 cenários e um período dado abaixo:**
  - **Esse processo de incerteza por ser simples é instrutivo e é útil pois pode ser generalizado (método *binomial*)**



- **Com a incerteza, o dono do terreno pode esperar e escolher a melhor alternativa (6 ou 9 unidades) conforme o cenário**
  - **Suponha que o aluguel de uma unidade é de A = \$8.000/ano. Esse é um custo de oportunidade da opção de espera.**
  - **Já o gasto na construção tem o custo de oportunidade da taxa de juros *r* = 12%aa, já que deixa de ganhar *r* (ou empresta a *r*)**
  - **Vamos calcular o valor da opção de espera e comparar com o valor do imediato investimento para ver a melhor ação e o valor da terra**

Valor do Terreno Sob Incerteza

- **Vamos calcular o valor de opção do terreno usando o método da neutralidade ao risco. Para isso temos de calcular o valor das probabilidades artificiais neutras ao risco p e 1 – p**
  - **Na fórmula do martingale temos agora de considerar os dividendos**

$$u' = \frac{120.000 + 8.000}{100.000} = 1,28 \qquad d' = \frac{90.000 + 8.000}{100.000} = 0,98$$

$$p = \frac{1 + 0,12 - 0,98}{1,28 - 0,98} = 0,4667\ (=7/15) \qquad \text{Logo, } 1 - p = 0,5333 = 8/15$$

- **Dado as probabilidades neutras ao risco, podemos calcular o valor presente da opção usando essas probabilidades neutra ao risco. Para o cenário V^+ usa-se p e para o cenário V^- usa-se 1 – p**
- **Para isso considere que o dono do terreno irá agir otimamente e escolherá a alternativa de maior VPL em cada cenário de V**

Valor do Terreno Sob Incerteza

- Com as probabilidades neutras ao risco de $p = 0{,}4667$ e $1 - p = 0{,}5333$ e considerando as ações ótimas que o dono do terreno irá tomar na escolha de alternativas (de maior VPL) em cada cenário, podemos calcular o valor da opção de espera:

$F(t = 0) = ?$

Mercado Favorável ($V^+ = 120M$)

$VPL_{C9} = 9 \times (120.000 - 90.000) \Rightarrow$
$VPL_{C9} = 270.000 > VPL_{C6} = 240.000$
(exerce a opção com 9 unidades)

Mercado Recessivo ($V^- = 90M$)

$VPL_{C6} = 6 \times (90.000 - 80.000) \Rightarrow$
$VPL_{C6} = 60.000 > VPL_{C9} = 0$
(exerce a opção com 6 unidades)

$$F(t = 0) = \frac{(0{,}4667 \times 270.000) + (0{,}5333 \times 60.000)}{1{,}12} \Rightarrow \boxed{F = \$\ 141.071}$$

- Como a opção F é maior que o VPL do imediato investimento, o terreno vale $ 141.071 e não o VPL estático de $120.000

O Que Mostrou o Exemplo

- O procedimento de opções considerando a ação ótima nos cenários incertos calculou valor e regra de decisão:
  - O valor do terreno é maior do que o VPL tradicional se existe incerteza e flexibilidade de resposta (esperar ou não, escolha de escala).
  - A ação ótima sob incerteza em t = 0 (no caso, esperar)
    - Não se deve fazer um projeto logo só por ter VPL positivo! Tem de comparar com a opção de espera.
    - Não se deve escolher uma escala só por *hoje* ser a de maior VPL. Tem de pensar nas escalas ótimas do futuro incerto.
- O cálculo da opção F foi em *backwards*, isto é, primeiro se olhou a ação ótima em cenários futuros e depois se chegou em t = 0, descontando com a taxa de juros, ponderando os cenários com probabilidades adequadas (neutras ao risco)
  - O cálculo em *backwards* é típico da programação dinâmica e da teoria das opções que usa os princípios de *otimização sob incerteza*

Exercício

- Refaça o problema anterior usando o método de arbitragem, isto é, mostre que se obtém o mesmo valor do terreno usando o conceito de arbitragem.
  - Relembre o exemplo (mais simples) do seguro
  - Aqui a carteira de ativos deve incluir o efeito dos dividendos.
- Resposta: no próximo slide (estudar em casa)

- Verificar também que o mesmo VPL ($120 mil) seria obtido se o dono da terra, após construir 6 unidades, em vez de vender as unidades, as aluga por um ano e depois as vende pelos preços de cada cenário. (mostrado daqui a dois slides).

Valor do Terreno e Arbitragem

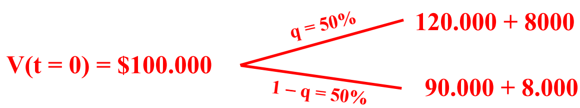
- Outra maneira <u>equivalente</u> de calcular o valor do terreno é através do conceito de arbitragem através da montagem de um *portfólio livre de risco*. Imagine a *venda a descoberto* de 7 unidades em t = 0:

Investimento	Fluxo de Caixa Hoje (em mil$)	<u>Mercado Favorável</u> Fluxo de Caixa em t = 1 (em mil$)	<u>Mercado Recessivo</u> Fluxo de Caixa em t = 1 (em mil$)
Vende 7 unidades	$ 700	– $840 – $ 56	– $630 – $ 56
Compra 1 terreno	– X	$ 270	$ 60
Aplica na renda fixa	– $626/1,12	$ 626	$ 626
Total	Y	$ 0	$ 0

- Se o valor do terreno fosse vendido ao preço do VPL estático, isto é se X = $120 mil, então Y = $21.071 significando um <u>ganho por arbitragem</u> já que em t = 1 o fluxo de caixa é zero *com certeza*.
- Para que não haja arbitragem é necessário que Y = zero. Para isso é necessário que X = $141.071, que é o mesmo valor da opção calculado por outro método (das probabilidades neutras ao risco)

VPL se Construir e Alugar Por 1 Ano

- **O mesmo VPL ($120 mil) seria encontrado se fosse imaginado que o dono da terra tendo construído 6 unidades, em vez de vender as unidades, as aluga por um ano e depois as vende pelos preços de cada cenário**
  - **Nesse caso se colocam probabilidades reais para esses cenários, que implicam numa taxa ajustada ao risco que dá o mesmo VPL**
  - **Imagine que a probabilidade real de subida (up) é q = 50%**
  - **Então obtemos o valor da taxa ajustada ao risco μ (= a taxa de retorno esperado do ativo, que considera os dividendos).**



$$100.000 = \frac{(0,5 \times 128.000) + (0,5 \times 98.000)}{1 + \mu} \Rightarrow \boxed{\mu = 13\%}$$

$$\Rightarrow \quad VPL_{C6} = \frac{[0,5 \times 6 \times (120.000 + 8.000)] + [0,5 \times 6 \times (90.000 + 8.000)]}{1,13}$$

$\Rightarrow$ **VPL_{C6} = \$ 120.000 (que é o mesmo de antes)**

Método da Neutralidade ao Risco

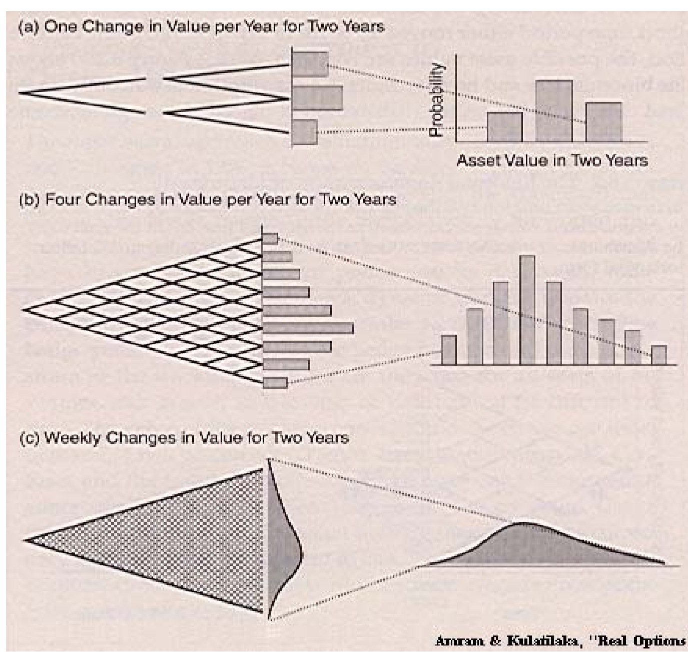
- **O método da neutralidade ao risco <u>não supõe</u> que os investidores são neutros ao risco.**
- **Através de "probabilidades adequadas", primeiro é calculado a certeza equivalente do ativo de risco e depois se desconta com a taxa livre de risco.**
- **Essa probabilidade pode ser usada para calcular ativos derivados (opções) desse ativo básico (V).**
- **A taxa ajustada ao risco de uma opção em geral <u>não</u> é igual a taxa do ativo básico.**
- **Num contexto mais geral, o método da neutralidade ao risco é dado pelo *teorema de Girsanov*.**
- **O método é particularmente útil para apreçar opções com métodos numéricos "lattice" tais como o *binomial*.**

Método Binomial

- Método popular de precificar opções desenvolvido por Cox & Ross & Rubinstein (1979)
  - Usa a *medida equivalente de martingale* (ou *probabilidade neutra ao risco*);
  - Resolve-se de trás para frente ("backwards"): programação dinâmica
- Em relação a uma árvore de decisão tradicional:
  - A teoria das opções (martingale) dá o método correto para estabelecer a taxa de desconto e as probabilidades adequadas dentro da árvore
    - Lembrar que numa árvore de decisão o valor obtido backwards é uma opção e a taxa de desconto da opção não é a mesma que a do ativo básico.
- Método assume que após um intervalo de tempo, a variável V pode assumir apenas dois valores:
  - $V^+ = u\,V$ (cenário de "up" ou de subida)
  - $V^- = d\,V$ (cenário de "down" ou de descida)
  - Dependendo desses parâmetros (u, d), no limite (Δt pequeno) pode virar uma distribuição Log-Normal
    - A distribuição log-normal não permite valores negativos para V

Do Tempo Discreto Para o Contínuo

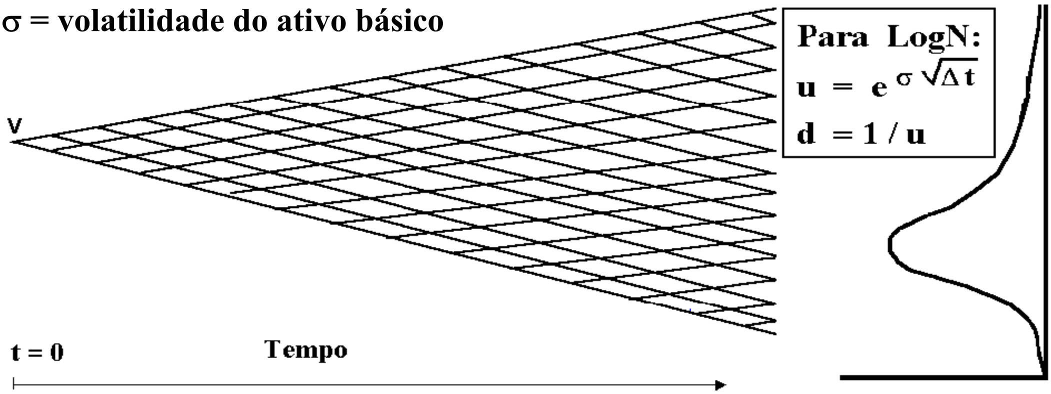
- Binomial trata a incerteza numa visão de cenários discretos.
- Usando o método binomial, o número de cenários é função do intervalo de tempo escolhido
- No limite (Δt pequeno), se tem distribuições de probabilidades em tempo contínuo
- Limite do binomial: distribuição log-normal para *u* e *d* adequados



Binomial e a Distribuição Log-Normal

- Se forem escolhidos intervalos de tempo h bem pequenos, em pouco tempo se terá muitos cenários
- Se além disso escolher os parâmetros de subida e descida convenientes, pode-se obter uma distribuição Log-Normal
  - Os valores convenientes são $u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$ e $d = 1/u$

σ = volatilidade do ativo básico



Teoremas Fundamentais de Preços de Ativos

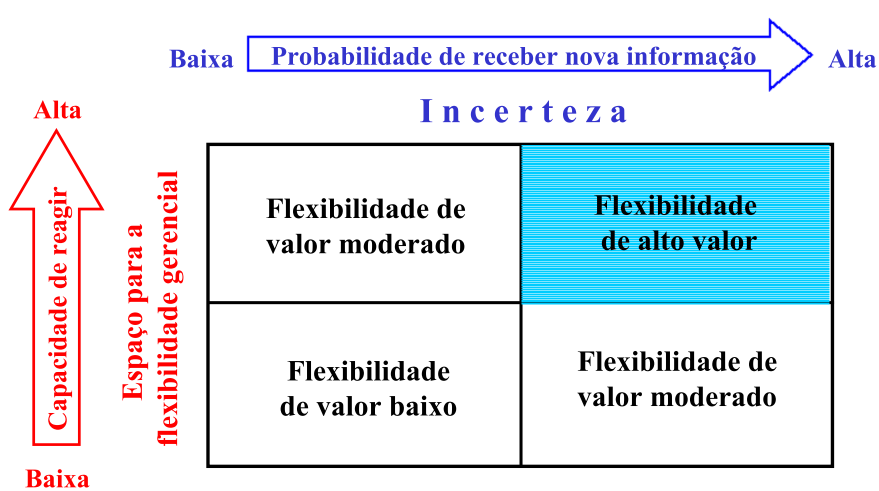
- Os dois teoremas fundamentais de precificação de ativos são devidos a Harrison & Kreps (1979) e Harrison & Pliska (1981). Esses teoremas unem os conceitos de arbitragem e martingale:
  1. A existência de uma medida neutra ao risco, chamada de medida equivalente de martingale, é igual a ausência de arbitragem; e
  2. Quando a medida de martingale é única, equivale a dizer que o mercado é completo
     - Para uma crítica aos teoremas e nova teoria, ver Battig & Jarrow (1999).
- No caso de mercado incompleto, existe mais de uma medida equivalente de martingale. Logo, para mercados incompletos é necessário escolher uma medida de martingale dentre várias.
  - Na prática de opções reais, se adota um dos 4 caminhos: (a) Assuma que o mercado é *aproximadamente* completo; (b) Use o método da programação dinâmica com uma taxa de desconto exógena (D&P); (c) Assuma que as firmas são neutras ao risco e use a taxa livre de risco para desconto com probabilidades reais; e (d) Especifique preferências (single-agent) ou detalhe o equilíbrio (livro do Duffie)

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam <u>exemplos adicionais</u> que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Quando as Opções Reais São Valiosas

- **Baseado no livro "Opções Reais" de Copeland & Antikarov**
  - **Opções reais tem valor quanto maior for a incerteza e a flexibilidade de reação**



Quando as Opções Reais São Mais Valiosas

- A flexibilidade (opções reais) tem mais valor quando:
  - Grande incerteza em relação ao futuro
    - Grande chance de obter novas informações relevantes ao longo do tempo. Informações podem ser obtidas a um custo ou grátis.
  - Muito espaço para a flexibilidade gerencial
    - Permite à gerência responder adequadamente a esta nova informação (exs.: investindo numa capacidade mais adequada; expandir ou contrair o projeto; etc.)
  - O VPL sem flexibilidade está próximo de zero
    - A opção (flexibilidade) de mudar os rumos do projeto tem mais chance de ocorrer nesse caso
- Sob as condições acima, a diferença entre o VPL e o valor de opções reais é substancial (Tom Copeland)

Teorias e Ferramentas Tradicionais

- CAPM: taxas de desconto ajustadas ao risco
  - Teoria é válida mas insuficiente e mais restritiva
  - Problemas práticos: cálculo do(s) beta(s)
  - Taxas de desconto podem variar na presença de opções
- Simulação de Monte Carlo
  - Ferramenta de simulação, <u>não é de otimização</u>
    - Simulação é "forward", otimização é "backward".
    - Precisa de otimizador ou algoritmo complementar de otimização
  - Calcula valor esperado e distribuição de probabilidade
  - Tem sido cada vez mais usada no cálculo de opções reais
    - MC + otimização para opções *americanas* é tema relativamente recente
- Árvore de Decisão
  - Explicita as ações gerenciais e as incertezas
  - Com a correta taxa de desconto + probabilidades, é a teoria das opções em *tempo discreto*. Se resolve "backwards".

Paridade de Opções Européias: Arbitragem

- Paridade em opções européias é um exemplo de valoração por arbitragem. Só vale para opções sobre a mesma ação V, com mesmo K e mesmo T.
- Suponha duas carteiras, uma só formada por C e a outra por P + V + valor presente de K. Assuma $\delta = 0$.
  - A tabela abaixo mostra que essas carteiras são iguais.

Carteira	Ativos de Cada Carteira	Fluxo de Caixa no Vencimento: Cenário $V < K$	Fluxo de Caixa no Vencimento: Cenário $V > K$
1	Compra Opção de Compra ($-C_0$)	0	$V - K$
2	Compra Opção de Venda ($-P_0$)	$K - V$	0
	Compra a Ação ($-V_0$)	V	V
	Pega Emprestado o valor presente de K (+VP de K)	$-K$	$-K$
	Total da Carteira 2	0	$V - K$

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Assim esse método de transformação de probabilidades (certeza equivalente) é prático pois evita que se calcule a taxa ajustada ao risco.
- Mas e se quizermos saber qual a taxa ajustada ao risco da opção (seguro) nesse exemplo?
  - Agora é fácil pois já sabemos o valor presente da opção, temos os valores dos cenários e a probabilidade real:

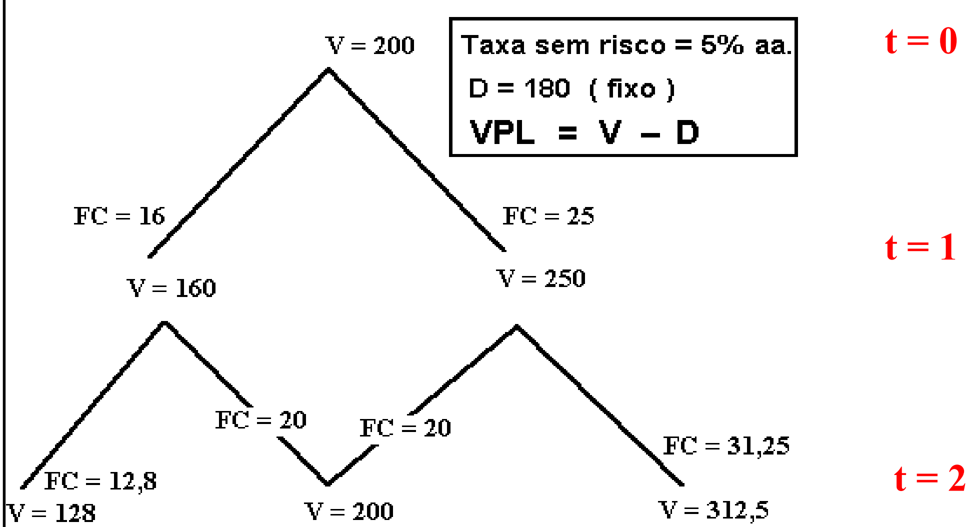
    $66{,}7 = (0{,}5 \times 0 + 0{,}5 \times 120) / (1 + \mu_S) \Rightarrow \mu_S = -10\%$
- Taxa de desconto ajustada ao risco é negativa?
  - Sim pois a opção nesse contexto (*hedge*) entra para reduzir o risco, no caso uma redução total do risco.
  - No contexto especulativo a opção teria um alto risco mas não teria outro preço (não pode ter dois preços para o mesmo ativo no mercado, senão haveria arbitragem).
  - Isso ocorreu para *put*. Já para opção "call" a taxa de desconto ajustada ao risco é em geral maior que a taxa do ativo básico.

Outro Exemplo: Opção de Timing em Tempo Discreto

- Exemplo didático em três instantes (anos 0, 1 e 2) para mostrar que mesmo que o VPL seja positivo, pode ser melhor esperar, assim como pode ser ótimo o exercício da opção antes da expiração se o projeto for suficientemente bom ("deep in the money")
- Considere um projeto de uma jazida de petróleo que se implantado imediatamente valeria V = 200, e os fluxos de caixa (líquidos de CO e taxas) valem δ = 10% de V.
  - Suponha que o fluxo de caixa advindo da produção (δ = 10% de V) é faturado no final do período, um % do valor de V nessa data
  - O investimento necessário para desenvolver o campo é D = 180 (logo o VPL = 200 – 180 = + 20, ou seja é positivo em t = 0) .
  - Os direitos de investir na jazida expiram em t = 2.
- Em que instante é ótimo o exercício da opção? Quanto vale essa oportunidade (opção) de investimento?

Exemplo: Opção de Timing

- Qual o valor da opção F, em cada instante t ?
- Quando é ótimo o exercício da opção de investir?



Exemplo: Opção de Timing

- Opção (F) do tipo americana: pode exercer antes da expiração, no exemplo em t = 0, ou em t = 1, ou em t = 2
- Em t = 2 é a expiração, ou seja é o caso "agora ou nunca" (se não investir, devolve o campo para a agência), e a opção vale o máximo entre o VPL e zero
- Usando o método da neutralidade ao risco, primeiro calcula-se o valor da probabilidade de martingale:

$$p = (1 + 0{,}05 - [176/200])/([275/200] - [176/200]) = 0{,}3434$$

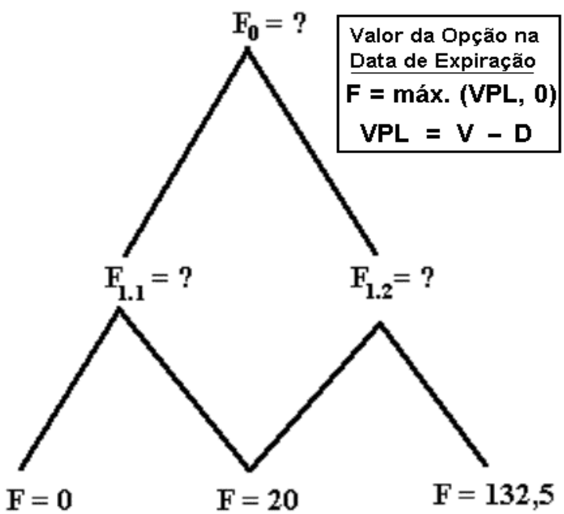
- Embora essa "probabilidade" tenha sido calculada no período 0-1, nesse exemplo obtém-se a mesma probabilidade para o período 1-2 (exercício: verificar)

Exemplo: Opção de Timing

- Tipicamente o cálculo é feito de trás para a frente como na programação dinâmica, com os passos:
  - primeiro se calcula o valor da opção F na expiração (máximo entre VPL e zero), pois o valor é conhecido;
  - a seguir se calcula a opção para o instante anterior (aqui em t = 1), usando a "probabilidade" de martingale para atualizar o valor da opção;
  - o valor calculado deve ser comparado com o valor que se obteria caso a opção fosse exercida. Se esse for maior, é ótimo o exercício da opção, caso contrário a opção vale mais "viva" do que "morta"; e
  - continua o cálculo "backwards" até o tempo t = 0, sempre testando se é melhor o exercício ou a espera.

Exemplo: Opção de Timing

- A figura mostra os valores da opção em $t = 2$, que são o ponto de partida para o cálculo backwards:



Se não exercer em $t = 1$, cenário 1, $F_{1.1}$ valeria:

$$F_{1.1} = \frac{0{,}343 \times 20 + 0}{1{,}05}$$

Logo, $F_{1.1} = 6{,}5$

Aqui o exercício não seria ótimo, já que se obteria um VPL negativo

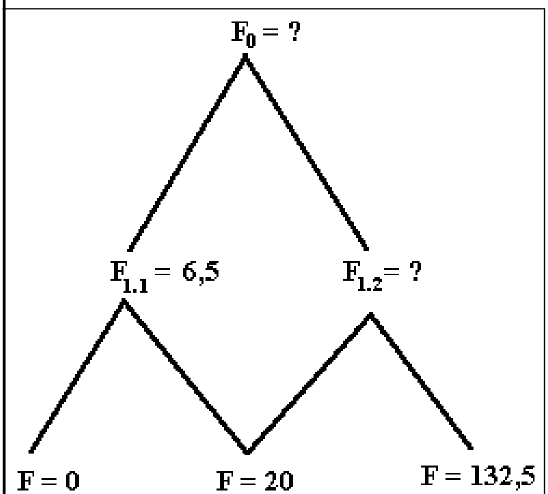
$VPL_{1.1} = 160 – 180 = – 20$ que é menor que 6,5.
Logo esperar é melhor.

Exemplo: Opção de Timing

- Se não exercer em $t = 1$, cenário 2, $F_{1.2}$ valeria:

$$F_{1.2} = \frac{0{,}343 \times 132{,}5 + (1 - 0{,}343) \times 20}{1{,}05}$$

Logo, $F_{1.2} = 55{,}8$



Aqui no entanto, o exercício imediato será ótimo, já que se obteria um VPL maior que o valor da opção "viva":

$VPL_{1.2} = 250 - 180 = 70$

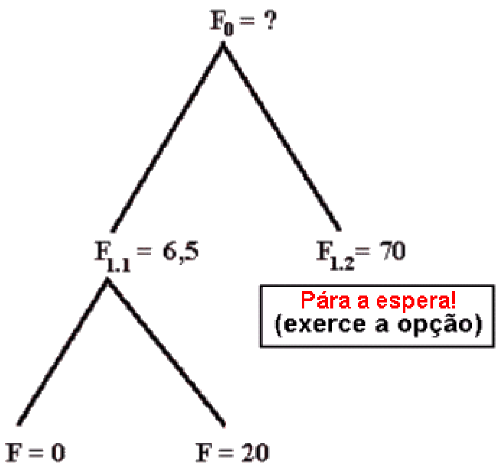
Logo, caso em $t = 1$ ocorra o cenário 2, mais favorável, o projeto estaria "deep in money" e o exercício é o ótimo. $F_{1.2} = VPL_{1.2} = 70$

Exemplo: Opção de Timing

- Se não exercer em t = 0, F_0 valeria:

$$F_0 = \frac{0{,}343 \times 70 + (1 - 0{,}343) \times 6{,}5}{1{,}05}$$

Logo, $F_0 = 26{,}9$



- Aqui no entanto, o exercício imediato não seria ótimo, já que VPL (exercício da opção) vale menos que o valor da opção "viva", e deve-se esperar :

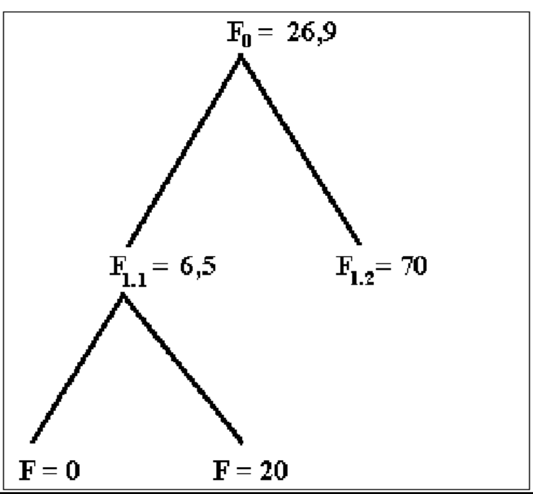
$VPL_0 = 200 – 180 = 20 < 26{,}9$

Logo, realmente $F_0 = 26{,}9$

- Repare na figura que os ramos após o exercício em $F_{1.2}$ foram "podados"

Exemplo: Opção de Timing

- O perfil completo de preços dessa opção americana é mostrado na figura. Repare que se fosse ótimo o exercício em t = 0, a árvore seria toda "podada"



- Se fosse uma opção do tipo européia (só pode exercer na expiração), ela valeria menos, já que não seria podada o path após t = 1 no cenário 2, e logo a opção valeria : $F_{1.2} = 55{,}8$ (e não 70), e portanto em t = 0 a opção européia valeria: $F_0 = 22{,}3$

Exemplo: Resumo da Regra de Decisão

- **A regra de decisão nesse exemplo pode ser escrita:**
  - **Em t = 0 <u>espere e observe</u> o que vai ocorrer com os preços de mercado;**
  - **Em t = 1: (a) <u>caso o preço suba exerça a opção</u>, pois a mesma estará "deep in the money", ou seja, qualquer atraso o custo de adiar o recebimento desses generosos dividendos seria maior que o benefício da espera;**
    (b) em <u>caso do mercado piorar, espere</u> e observe (não exerça a opção);
  - **Em t = 2: (a) <u>caso o mercado piore ainda mais</u>, não faça o investimento e <u>devolva a concessão</u> para a agência do governo; (b) <u>caso o mercado melhore, exerça a sua opção</u> de investimento.**

Recordação de Taxa de Desconto

- **Num mercado em equilíbrio, risco e retorno são ligados**
  - **A taxa ajustada ao risco é o retorno esperado (ou exigido) pelos acionistas. Quanto maior o risco *sistemático* (risco correlacionado com a economia), maior é o retorno exigido pelo mercado.**
  - **Em mercados competitivos, qualquer redução desse risco é compensada por uma redução do retorno**
- **A taxa ajustada ao risco é composto de duas parcelas, a taxa livre de risco r_f (ajuste do valor do dinheiro no tempo) mais uma parcela de prêmio de risco, conforme o CAPM (Capital Asset Pricing Model):**

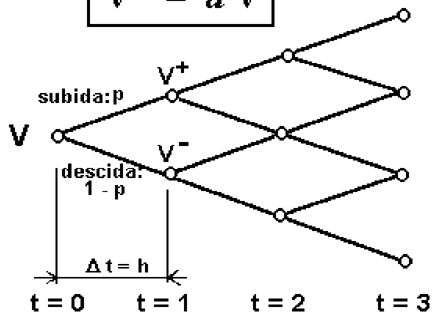
$$\mu = r_f + \beta\,(r_m - r_f)$$

Prêmio temporal (adiamento de consumo) — **Prêmio de risco**

Método Binomial

- Nesse processo a árvore se recombina, ver figura

$$V^{+} = u\,V$$
$$V^{-} = d\,V$$



Cenários em t = 3

valor do projeto	probabilidade
$V u^3$	p^3
$V u^2 d$	$3\,p^2(1-p)$
$V u d^2$	$3\,p(1-p)^2$
$V d^3$	$(1-p)^3$

- Repare no quadro de probabilidades em t = 3 que os cenários centrais são mais prováveis que os extremos

Fatores Que Afetam o Valor da Opção

- Como varia as opções de compra e de venda se variar (*ceteris paribus*) os parâmetros da fórmula de B&S&M?

Fator	Efeito na Opção de Compra	Efeito na Opção de Venda
Aumento de V (valor da ação)	Aumenta	Diminui
Aumento de K (preço de exercício)	Diminui	Aumenta
Aumento da Volatilidade	Aumenta	Aumenta
Aumento do Tempo de Expiração	Aumenta	Aumenta
Aumento na Taxa de Juros	Aumenta	Diminui
Aumento nos Dividendos Pagos	Diminui	Aumenta