



IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais e Jogos de Opções

Parte 2: Processos Estocásticos

**Marco Antonio Guimarães Dias,
Professor Adjunto**

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2005

Opções Reais x F.C.D.: Preços/Custos de Mercado

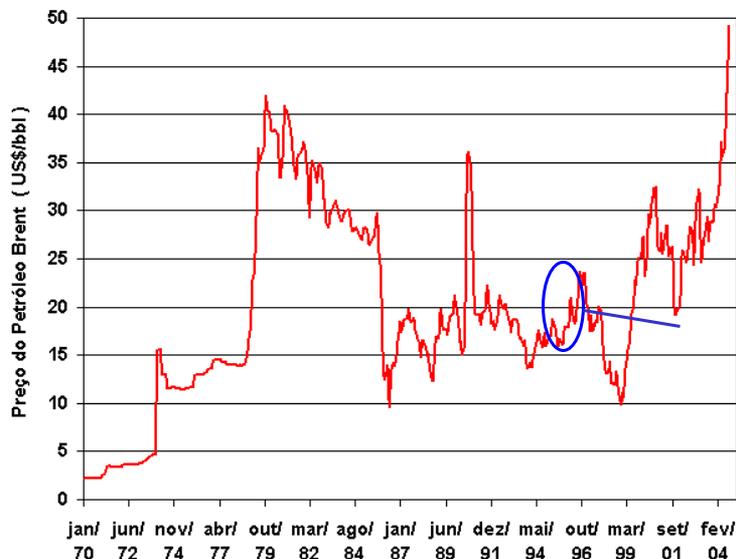
- ◆ **Fluxo de Caixa Descontado (FCD):**
 - ➔ Trabalha com valores esperados dos preços futuros de commodities e/ou de custos (valor único ou tendência).
- ◆ **Opções:**
 - ➔ Considera a natureza estocástica dos preços e/ou custos e, mais importante, as ações gerenciais que são tomadas nos projetos devido a essas variações nos preços.
- ➔ **A abordagem por opções é mais realista e mais adequada do ponto de vista teórico, ao considerar a incerteza e a reação racional frente a ela.**

Processos Estocásticos

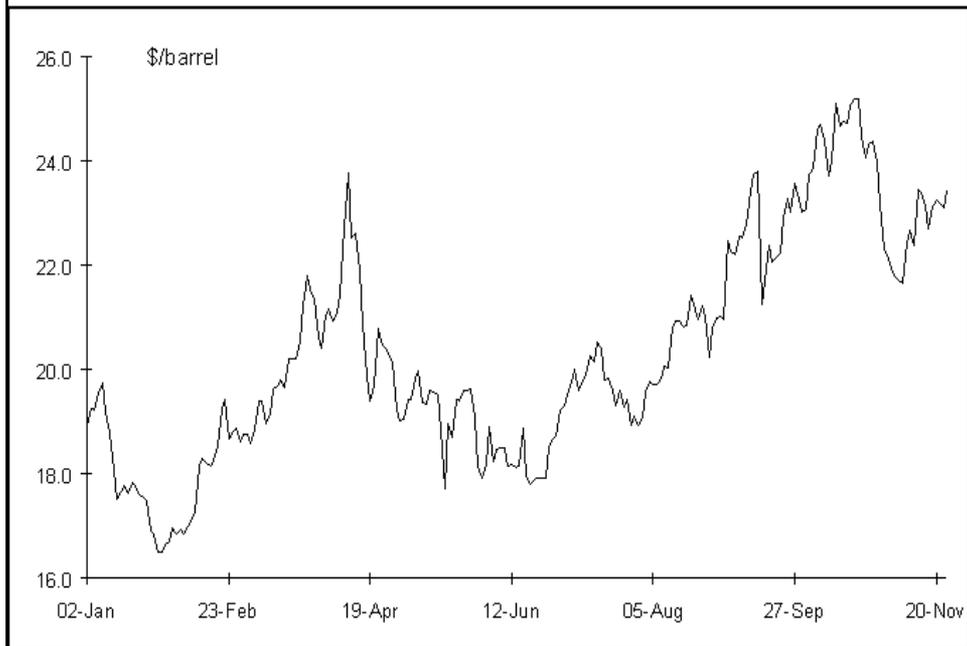
- ◆ Um processo estocástico $X = \{ X(t), t \in T \}$ é uma coleção de variáveis aleatórias. Ou seja, para cada t no conjunto de índices T , $X(t)$ é uma variável aleatória. Frequentemente nós interpretamos t como *tempo* e chamamos $X(t)$ de *estado do processo* no tempo t (Ross, 1996, p.41).
 - Quando o conjunto de índices T é um conjunto contável, temos um *processo estocástico em tempo discreto*. Se esse conjunto é incontável/contínuo, temos um *processo estocástico em tempo contínuo*.
 - ➔ Qualquer realização de X é chamada de *amostra de caminho* (“*sample path*”), que pode ser discreta ou contínua.
 - Mas no caso de *incerteza técnica* o índice não é tempo
 - ➔ São eventos, tais como *exercícios de opções de aprendizagem*

Exemplo: Preço do Petróleo 1970-2004

- ◆ Preços do óleo Brent (Londres) e similares de jan/1970 a out/2004, valores nominais (fontes: FMI/IFS e Pratts).



Preços do Petróleo em 1996 (Brent)



OPEP e a Reação dos Preços em 1999

- ◆ Pouco depois de alguns cenaristas (ex.: CERA, em The Economist 6 de março/99) preverem a queda de preços até 5 \$/bbl, a OPEP mostra força retirando cerca de 2 milhões de bpd do mercado (menos de 3% do consumo mundial) no final de fevereiro de 1999.

IPE Brent Crude - Daily Closing in 12 previous months



Processo Estocástico (indexado pelo tempo)

Processo Estocástico = Tempo + Aleatoriedade

Num intervalo dt , a variação será :

d (variável) = Fator $\times d$ (tempo) + Fator $\times d$ (aleatoriedade)

- ◆ Ex: Valor do projeto V segue um Movimento Geométrico Browniano (processo estocástico mais popular)

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz$$

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad \rightarrow \quad \text{Incremento de Wiener}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1) \quad dz \sim N(0, dt)$$

$$dV \sim \text{Log N}(\alpha V dt, \sigma^2 V^2 dt)$$

Processos Estocásticos e Previsão

- ◆ Pode-se ver um processo estocástico $X(t)$ como uma previsão $E[X(t)]$ mais um erro dessa previsão. Ou seja:

- $X(t) = E[X(t)] + \text{erro}(t)$

- ◆ No caso do Movimento Geométrico Browniano (MGB):

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz$$

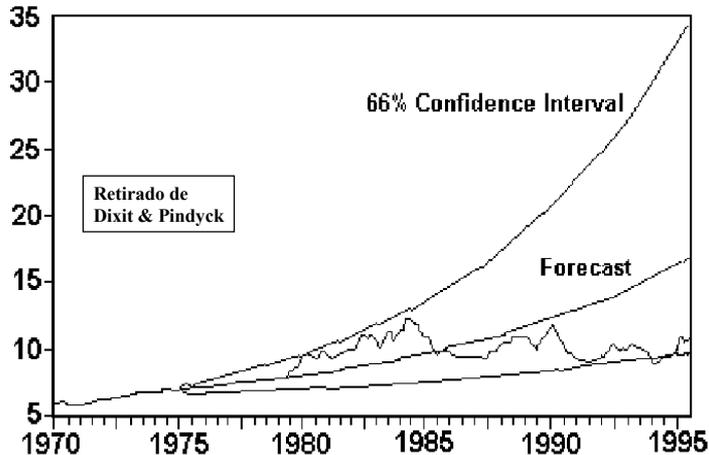
↓		↓		↓
Retorno da Variável Estocástica	=	Parcela de Valor Esperado	+	Parcela de Desvio (variância)

- ◆ É comum também traçar intervalos de confiança da previsão, usando percentis das distribuições

- No caso de $P(t)$ seguir MGB, dP/P tem distribuição Normal e $P(t)$ tem distribuição lognormal

Movimento Geométrico Browniano

- ◆ No MGB, a variância cresce com o tempo de previsão
 - Quanto mais longe se tenta prever os preços, mais incerta é a previsão. A variância da distribuição lognormal aumenta
 - Tendência: exponencial de crescimento ou de queda



Movimento Geométrico Browniano

- ◆ No MGB o valor esperado de V no instante t , dado o valor corrente V_0 , é: $E[V(t)] = V_0 e^{\alpha t}$
 - Para mostrar isso, toma-se o valor esperado de dV e o termo aleatório (segundo termo) da equação do MGB desaparece (pois $E(dz) = 0$). Logo:

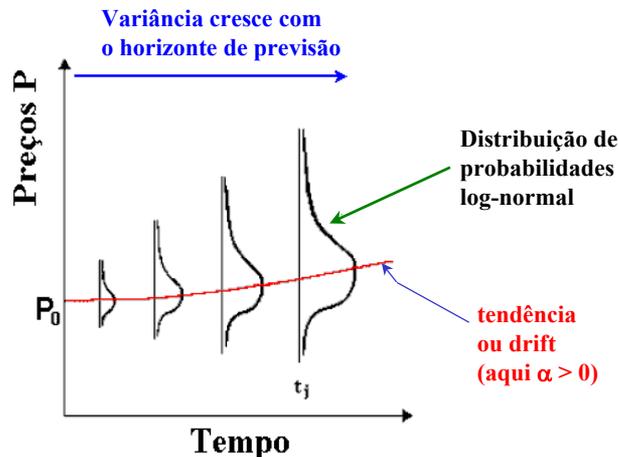
$$E(dV) = \alpha V dt \Rightarrow \frac{E(dV)}{V} = \alpha dt \Rightarrow \int_{V_0}^{\bar{V}} \frac{dV}{V} = \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \ln \bar{V} - \ln V_0 = \alpha (t - 0)$$

$$\Rightarrow \ln \bar{V} = \ln V_0 + \alpha t \Rightarrow e^{\ln \bar{V}} = e^{\ln V_0 + \alpha t} \Rightarrow \bar{V} = e^{\ln V_0} \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow E[V] = V_0 \cdot e^{\alpha t}$$
- ◆ Ou seja, espera-se que V cresça exponencialmente à taxa α . Já a variância de V , dado V_0 em $t = 0$, é:

$$\text{Var}[V(t)] = V_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$
- ◆ Note que se $t \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Var}[V] \rightarrow \infty$ (variância ilimitada)

Movimento Geométrico Browniano (MGB)

- ◆ Um processo estocástico indexado pelo tempo é um mapeamento de probabilidades ao longo do tempo.
 - No caso do MGB, a tendência é um crescimento (ou queda) exponencial e os preços tem uma distribuição lognormal com variância crescendo (sem limites) com o horizonte temporal.



Movim. Geométrico Browniano: Exemplo

- ◆ Seja um projeto cujo valor V segue um MGB, com um crescimento exponencial esperado α igual a 3% ao ano e tem uma volatilidade de 20% ao ano.
- ◆ Se o valor corrente do projeto é igual a 100, qual o valor esperado desse projeto e seu desvio padrão daqui a 5 anos?

$$E[V] = V_0 \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow E[V] = 100 \cdot e^{0,03 \times 5} \Rightarrow E[V(t)] = 116,18$$

$$\text{Var}[V(t)] = 100^2 \cdot e^{2 \times 0,03 \times 5} (e^{0,20 \times 0,20 \times 5} - 1) = 2988,6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Desvio Padrão}[V(t)] = 2988,6^{1/2} \Rightarrow \text{Desvio Padrão}[V(t)] = 54,67$$

- ◆ Escreva a equação estocástica do projeto:

$$dV = 0,03 V dt + 0,2 V dz$$

Martingale e Martingale Descontado

- ◆ Um processo estocástico $X(t)$ é um martingale sob a medida de probabilidade P se o seu valor esperado (sob essa medida P) é o seu valor corrente $X(0)$.
 - $E^P[X(t)] = X(0)$, $t > 0$; em geral: $E^P[X(t) | \mathcal{F}(s)] = X(s)$, $\forall t > s$, onde $\mathcal{F}(s)$ representa o conhecimento/informação no instante s
 - Ex.: se $X(0) = 10$ e $X(t)$ é martingale $\Rightarrow E[X(t)] = 10$, para todo $t \geq 0$.
 - Martingale é um processo estocástico *sem tendência* ($\alpha = 0$).
 - Essa teoria é ligada à teoria das *expectativas condicionais*.
- ◆ A importância aqui é porque prova-se que se o processo do valor descontado de um ativo é um martingale sob a medida Q , então o processo do valor *descontado* de um *derivativo* desse ativo também é um martingale sob Q .
 - Essa medida em que se toma valores esperados é chamada de *medida neutra ao risco* e o desconto é com a taxa livre de risco.
 - $E^Q[e^{-rt} V(t) | \mathcal{F}(0)] = V(0)$; p/ a opção $F(V)$: $E^Q[e^{-rt} F(t) | \mathcal{F}(0)] = F(0)$

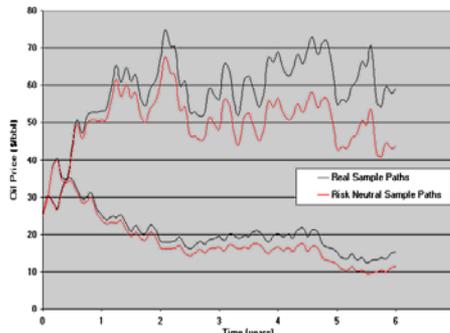
Processos Estocásticos Reais x Neutros ao Risco

- ◆ Na parte 1 foi vista que subtraindo o prêmio de risco π da tendência real α , se obtém a tendência neutra ao risco $\alpha - \pi$ e foi mostrado que $\alpha - \pi = r - \delta$.
 - Assim, um MGB neutro ao risco (sob medida de martingale) é:

$$\frac{dP}{P} = (r - \delta) dt + \sigma dz'$$

- ◆ Processos neutros ao risco são usados em opções/derivativos

- ◆ Dois *sample-paths* dos processos reais e NR são mostrados ao lado:



Processos de Markov, de Itô e MGB

- ◆ Processos de Markov independem da história passada, i. é, toda a informação relevante está contida no valor corrente da variável estocástica
 - A distribuição de probabilidade para x_{t+1} depende somente de x_t e não do que ocorreu antes do tempo t (não depende de x_s , onde $s < t$).
 - O MGB é um tipo particular de processo markoviano, com *incrementos independentes* (variação num Δt é independente da variação que ocorreu em outro Δt) e com *incrementos estacionários* (distr. probab. dos incrementos dependem só do tamanho do intervalo de tempo) tendo distr. normal.
 - Um processo Browiano (também chamado processo de Wiener) generalizado chama-se *processo de Itô*
 - $dV = a(V, t) dt + b(V, t) dz$

Movimento de Reversão à Média (MRM)

- ◆ O movimento de reversão à média é um processo de Markov, mas, ao contrário do MGB, o sentido e a intensidade da tendência dependem do preço corrente.
- ◆ O MRM aritmético, chamado *Ornstein-Uhlenbeck*, é:

$$dx = \eta (\bar{x} - x) dt + \sigma dz$$

- ◆ Onde: η = velocidade de reversão e \bar{x} = média de longo prazo (valor de equilíbrio)
- ◆ Na equação acima, é comum fazer os preços P sofrerem reversão usando a relação $x = \ln(P)$.
- ◆ Outros modelos de reversão à média são o MRM geométrico (Dixit & Pindyck) e o de Battacharya. Resp.:

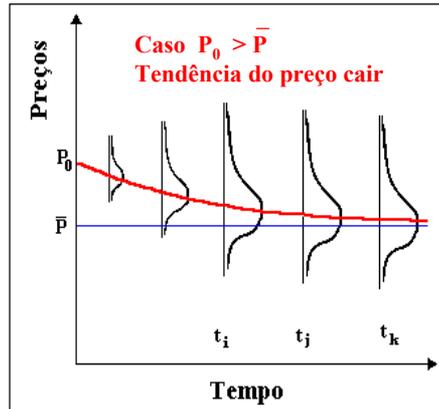
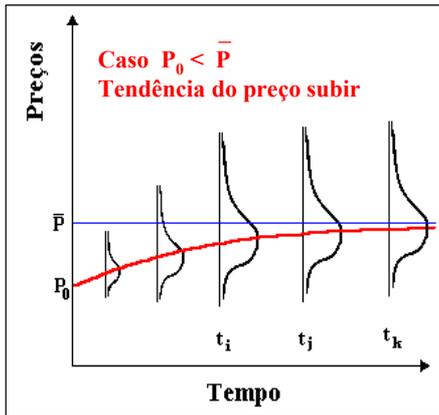
$$\frac{dP}{P} = \eta (\bar{P} - P) dt + \sigma dz \quad | \quad dP = \eta (\bar{P} - P) dt + \sigma P dz$$

- ◆ Ver também www.puc-rio.br/marco.ind/revers.html

Reversão à Média de Longo Prazo

◆ No caso do processo de reversão à média, a tendência é o preço reverter para um nível de equilíbrio do mercado, \bar{P} , chamada de média de longo prazo. Analogia: mola.

- Nesse caso a variância cresce inicialmente e depois se estabiliza
- Figura: variâncias ~ iguais em t_i, t_j, t_k (i. é, ~ estáveis após t_i)



Reversão à Média e Microeconomia

◆ Se os preços do petróleo (ou de outra commodity) estão “baixos” (abaixo do preço de equilíbrio de longo prazo):

- A demanda tende a aumentar e a oferta tende a diminuir
 - ➔ Empresas e pessoas tendem a consumirem mais derivados de petróleo por estarem “baratos” (ex: “carrões” nos EUA/anos 90);
 - ➔ Oferta tende a cair pois os projetos são postergados; manutenção em poços são adiados; OPEP tende a reduzir cotas de produção;
 - ➔ Campos marginais/maduros começam a apresentar prejuízo e podem ser fechados; companhias de petróleo pequenas fecham.
- A depleção aumenta e a exploração tende a ser reduzida
 - ➔ Apesar da atividade ser de longo prazo, firmas tendo menores receitas e tendo de ter lucro, reduzem o investimento em exploração

◆ Se os preços estão “altos” (2005), ocorre o inverso.

◆ A reversão, no entanto, é tipicamente lenta.

- Se os preços do petróleo estão “altos”, leva tempo até para desenvolver um campo já descoberto (~ 3 anos no mar)

Reversão à Média nos Preços do Óleo

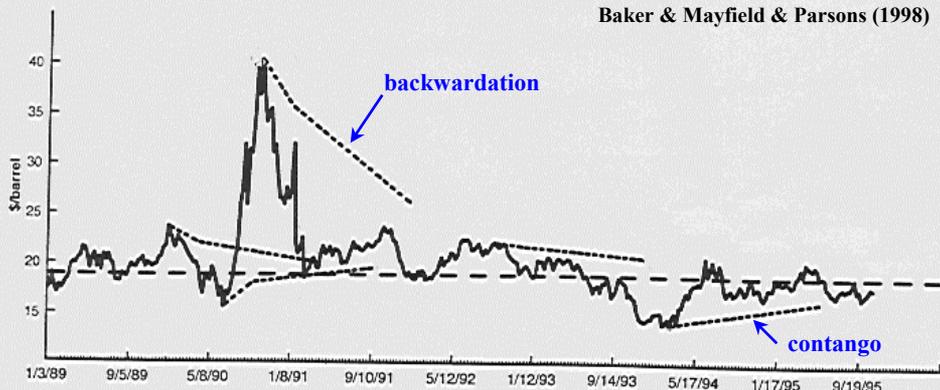
- ◆ Evidências empíricas e lógica microeconômica (forças de oferta x de demanda, etc.) indicam o processo estocástico do preço do óleo como tendo o *componente* de MRM
- ◆ No entanto, testes econométricos só rejeitam o MGB para séries muito longas (ex.: Pindyck & Rubinfeld usaram série com 117 anos e rejeitaram o MGB)
 - Com séries de 30 a 40 anos não se consegue rejeitar o MGB!
- ◆ Preços do *mercado futuro* (estrutura a termo) é outro indicativo da presença do processo de reversão à média, pelo menos dentro do horizonte de até ~ dois anos
 - Estruturas *backwardation* para preços “altos” e de *contango* para preços “baixos”, são coerentes com a hipótese de MRM
 - Volatilidade maior dos preços spot e menor para preços futuros é mais coerente com a reversão à média
- ◆ “Filme” da [estrutura a termo do mercado futuro de petróleo](#)

Preços do Óleo no Mercado Futuro

- ◆ A *estrutura à termo* dos preços do mercado futuro indica a existência de forças de reversão para um nível de equilíbrio

Figure 3. Term Structure of Oil Futures Prices at Various Dates

Baker & Mayfield & Parsons (1998)



Spot

Estimated
Trend Line

Term Structure
of Futures

Qual o Melhor Modelo Estocástico?

- ◆ Um razoável mapeamento probabilístico ao longo do tempo (processo estocástico), mesmo não sendo perfeito, é melhor do que nenhum mapeamento.
 - Erro com a visão determinística é, em geral, bem maior
- ◆ O modelo mais simples (matematicamente) e mais usado é o Movimento Geométrico Browniano (MGB)
 - A rigor o MGB é um ótimo processo para preços de ações, ouro, índice Ibovespa, etc. (ativos financeiros em geral), mas também para *demanda* de novos produtos, terrenos
- ◆ O modelo de reversão à média é considerado o mais lógico para commodities e para taxa de juros
 - No entanto, o processo puro de reversão para um nível fixo é demasiado “previsível” e pode ser pior que o MGB
 - Por isso é mais realista *combinar* o MRM com um MGB para o nível de equilíbrio ou com processo de saltos

Processos Estocásticos para Preços do Óleo

- ◆ Existem vários modelos de processos estocásticos para preços do óleo na literatura de opções reais. Eu classifico eles em três classes

Type of Stochastic Model	Name of the Model	Main Reference
Unpredictable Model	Geometric Brownian Motion (GBM)	Paddock, Siegel & Smith (80's)
Predictable Model	Pure Mean-Reversion Model (MRM)	Schwartz (1997, model 1)
More Realistic Models	Two and Three Factors Model	Gibson & Schwartz (1990), and Schwartz (models 2 and 3)
	Reversion to Uncertain Long-Run Level	Pindyck (1999) and Baker, Mayfield & Parsons (1998)
	Mean-Reversion with Jumps	Dias & Rocha (1998)

- ◆ As propriedades adequadas do Movimento Geométrico Browniano (poucos parâmetros, homogeneidade) é um grande incentivo prático para seu uso.
 - Pindyck (1999) escreveu: “*é improvável que a premissa do MGB leve a erros significativos na regra ótima de investimento*”

Simplicidade do Mov. Geométrico Browniano

- ◆ O uso do MGB em modelos de opções é mais simples por ter menos parâmetros para estimar e por causa da homogeneidade da equação diferencial
 - Temos de estimar somente os parâmetros r , δ e σ
 - Na rever. à média temos de estimar ao menos r , σ , μ , η e \bar{P}
- ◆ A homogeneidade ocorre tanto na equação do valor da opção como na própria equação original do MGB:
 - Ex.: Se o preço P segue um MGB e o valor do projeto V é proporcional a P (isto é, $V = k P$), então V segue também um MGB e com os mesmos parâmetros do MGB de P
 - $dP = \alpha P dt + \sigma P dz$ e $V = k P \Rightarrow k dP = \alpha k P dt + \sigma k P dz \Rightarrow$
 - $d(k P) = \alpha (k P) dt + \sigma (k P) dz \Rightarrow dV = \alpha V dt + \sigma V dz$
 - Uma demonstração usando o Lema de Itô pode ser vista em www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html#business_model

Processos de Saltos de Poisson

- ◆ É um *processo de Markov* que conta o número de eventos aleatórios independentes ao longo do tempo, $N(t)$.
 - É um *processo de contagem* particular, com incrementos independentes e estacionários (só depende de Δt), com $N(0) = 0$ e com o número n de eventos em Δt tendo uma *distribuição de Poisson*: $\text{Prob}\{N(t + \Delta t) - N(t) = n\} = \exp(-\lambda \Delta t) \cdot (\lambda \Delta t)^n / n!$;
 - $E[N(\Delta t)] = \lambda \Delta t$; λ é a frequência de ocorrência de um evento;
 - Se o intervalo Δt é pequeno, $\text{Prob}\{n \geq 2\} \cong 0$ (ou $o(\Delta t)$);
 - O tempo entre ocorrências de eventos tem *distribuição exponencial* com média $1/\lambda$.
 - Processo usado para modelar a ocorrência de eventos raros, tais como a ocorrência de um sinistro (indústria de seguros), a entrada de um concorrente (visão exógena), uma crise, etc.
- ◆ Em finanças/opções reais ele é mais usado combinado com um processo de difusão (*jump-diffusion* ou *Poisson-Gaussian*).

Exemplo de Saltos de Poisson: Salário

- ◆ Seja uma trabalhadora que irá trabalhar 40 anos. Seu salário inicial é $S_0 = \text{R\$ } 1.000,00$ por mês. Ao longo de sua vida ela terá reajustes que ocorrem aleatoriamente com frequência de Poisson $\lambda = 1$ por ano.

- O percentual de reajuste (salto percentual no salário) é uma variável aleatória ϕ com a seguinte distribuição discreta:

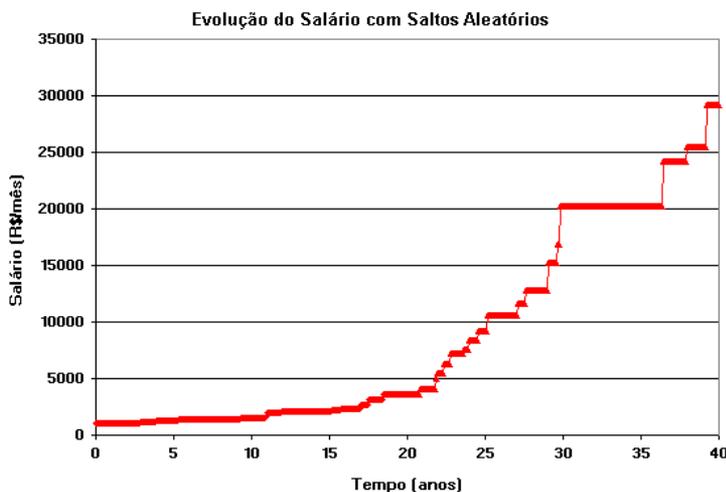
Tamanho do Reajuste (jump-size) ϕ	jump-size	probabil.
	0	10%
5%	25%	
10%	30%	
15%	25%	
20%	10%	

- ◆ O salário ao longo do tempo $S(t)$ pode ser descrito pela equação diferencial $dS = S dq$, onde:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \phi & \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases}$$

Simulação do Processo Puro de Saltos

- ◆ A figura mostra uma possível *amostra de caminho* (*sample-path*) do processo de Poisson puro do exemplo.



Processos Mistos de Difusão com Saltos

◆ Um processo misto de difusão com saltos de Poisson:

- $dV = a(V, t) dt + b(V, t) dz + V dq$
- Com dz (Wiener) e dq (Poisson) independentes; e

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \phi & \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases}$$

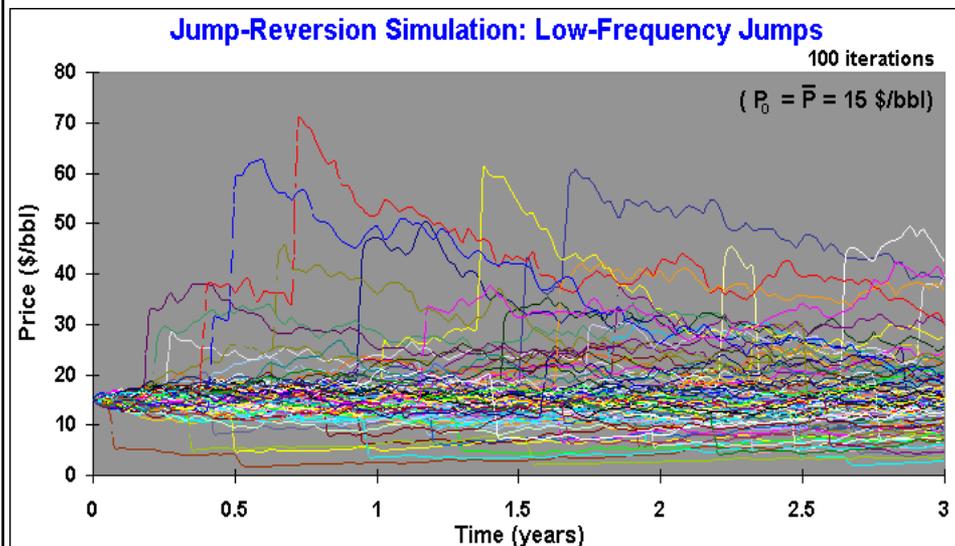
◆ Merton (1976) justificou o modelo para ações V :

- Em caso de notícias normais, V segue um processo de difusão (MGB em Merton), mas em caso de notícias anormais (raras, mas de muito impacto) ocorre o evento de Poisson (salto em V)
 - Para opções europeias sob um processo de MGB + Poisson em que o tamanho dos saltos tem distribuição lognormal, Merton (1976) encontrou uma solução analítica.
- ### ◆ Em vez do MGB, pode-se usar um processo de *reversão à média*. Ex.: modelos para taxa de juros e para câmbio
- Reversão + jumps em OR: Dias & Rocha (1998) os pioneiros.

Processo de Jump-Reversão: os *Sample Paths*

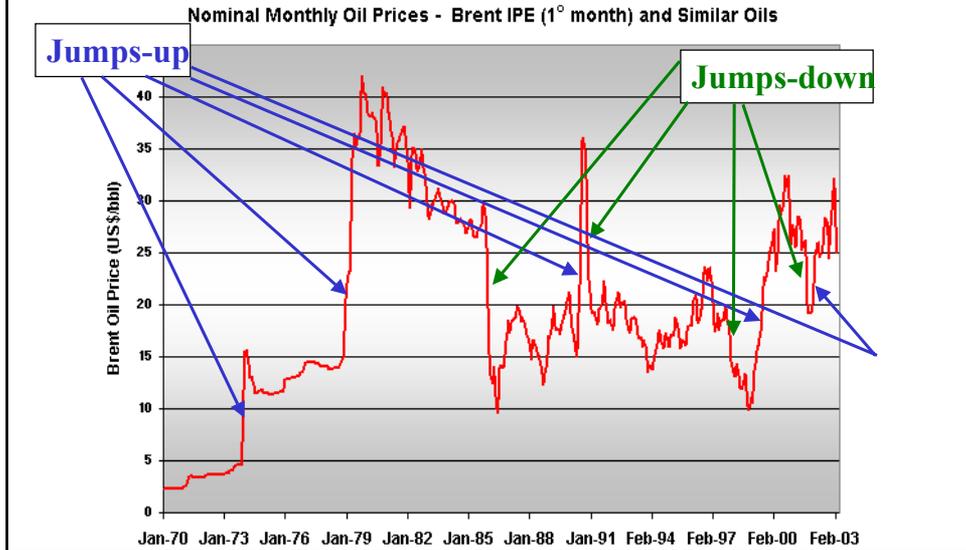
◆ Um outro modelo de reversão + jumps foi usado no financiamento de Marlim. Ver www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html

- Na simulação de preços do petróleo, a frequência é de 1 salto a cada 5 a.



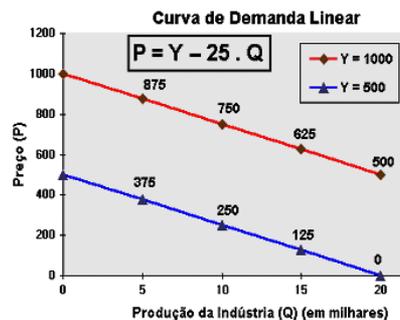
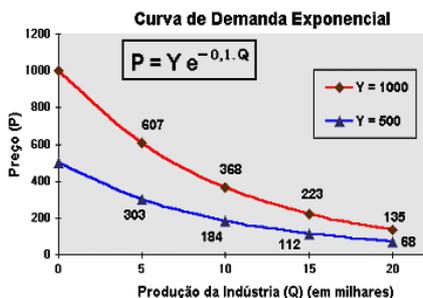
Motivação para Processos de Saltos de Poisson

- ◆ Vemos saltos (jumps) nos preços do óleo em ambas direções, dependendo do tipo de notícia anormal: *jumps-up* em 1973/4, 1978/9, 1990, 1999, 2002; e *jumps-down* em 1986, 1991, 1997, e 2001



Incerteza na Curva de Demanda

- ◆ Suponha uma curva de demanda de um produto qualquer. Ela relaciona preços com a demanda. Preço mais baixo significa maior demanda e preços altos reduzem a demanda pelo produto.
- ◆ Veja os gráficos abaixo das curvas de demanda exponencial e linear.
- ◆ Existe incerteza na curva de demanda, ou seja, a curva de demanda futura pode estar mais elevada refletindo uma economia aquecida ou pode estar mais baixa refletindo um desaquecimento do consumo
- ◆ Existem várias maneiras de modelar a incerteza na curva de demanda. Ex.: o valor do fator Y nas curvas abaixo é estocástico.

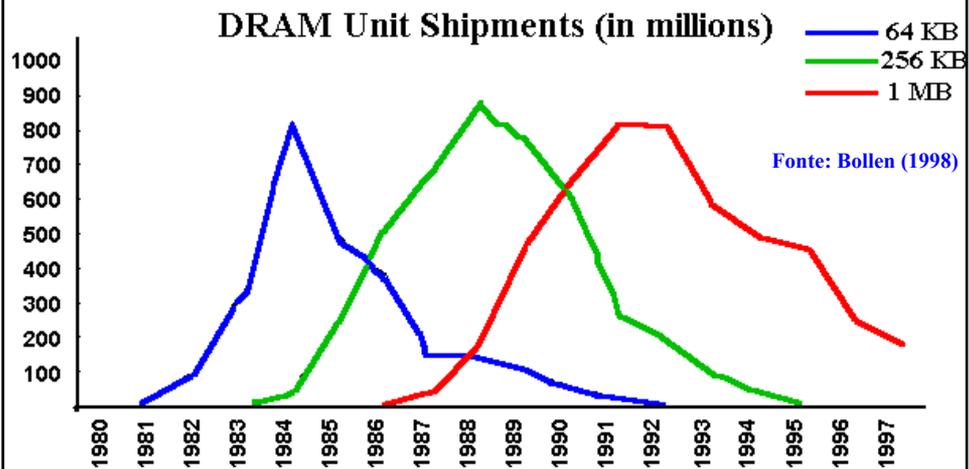


Processos Estocásticos e Sazonalidade

- ◆ Sazonalidade ocorre com algumas commodities tais como gás natural, gasolina (EUA), eletricidade, etc.
 - Verão no Brasil significa aumento na demanda de eletricidade; verão nos EUA significa aumento na demanda de gasolina; etc.
- ◆ Sazonalidade pode ser incorporada nos processos estocásticos usuais de preços (ou demanda) alterando o termo da tendência para incluir esse efeito
 - Ex.: Uma função *periódica* m_t para um processo de reversão à média de preços duma commodity (P). Fazendo $p = \ln P$:
 - $dp = \eta (p - m_t) + \sigma dz$; onde m_t é uma função cíclica em que p reverte (ex.: senóide com o máximo no pico esperado da estação).
 - Dornier and Queruel (2000) modelaram a temperatura (T) de Chicago como: $dT = \eta (T - \theta_t) dt + d\theta_t + \sigma dz$
 - θ_t é a temperatura média (no qual há reversão), uma função do tempo incluindo a sazonalidade e uma tendência linear devido ao *global warming* (aquecimento global), por ex: $\theta_t = a + b \sin(\omega t) + c t$.

Produtos com Ciclo de Vida

- ◆ Produtos com ciclo de vida tais como os chips de memória DRAM tem curva de demanda crescente seguido de curva de demanda decrescente. São modelados com um processo estocástico com mudança de regime.

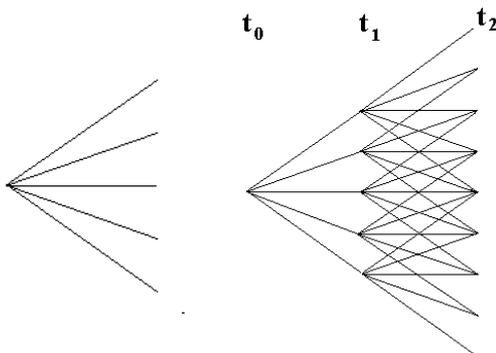


Modelo para Produtos com Ciclo de Vida

- ◆ Para modelar a incerteza na demanda dado que existe mudança de regime (demanda crescente seguida de decrescente), se usa dois movimentos Brownianos, um com tendência α_c positiva e outro com tendência α_d negativa.
- ◆ O instante de troca de regime (crescente para decrescente) é incerto, mas com probabilidade crescente. Exs.:
 - Colocar a probabilidade de mudança como alguma função do parâmetro da demanda θ ou como função das vendas acumuladas
 - Bollen (1998) usa *distribuição acumulada normal do tempo* Φ desde t_0 para a probabilidade de mudança de regime. Ex.: Para uma distribuição Φ com mudança de regime esperada de 5 anos e com desvio-padrão de 1 ano, a demanda é decrescente no ano 4 com 2,28 % de chances; no ano 6 com 50% de chances; e no ano 8 de 97,72 %.
 - Os objetivos são: (a) calcular o valor da firma que tem as opções de expansão e de contração de acordo com o nível de demanda; (b) escolher a capacidade inicial ótima.
 - ➔ Ele calcula para o caso de monopólio, mas a extensão para duopólio (ou oligopólio) não é difícil (especifica equilíbrio, a ser visto).

Árvore Pentanomial

- ◆ Bollen usa uma estrutura pentanomial para modelar a incerteza, sendo os dois ramos superiores representando o crescimento e os dois de cima representando o decaimento da demanda.
- ◆ O quinto ramo (central) é conveniente para a árvore recombinar. Com 4 ramos haveria problemas computacionais já que a árvore não recompina. A árvore de 5 ramos permite grande economia:
 - Ex.: para uma árvore com 500 passos-tempo, com 5 ramos em vez de 4 ramos se obtém uma redução de 99% na quantidade futura de nós.



Número de nós:
1; 5; 9; ... $4t + 1$,
para $t = 0; 1; 2...$

Estimativa de Parâmetros: MGB

- ◆ Seja P_t o preço no instante t . O primeiro passo é pegar os dados (série temporal) e calcular os logaritmos $\ln(P_t)$
- ◆ Se os preços seguem um movimento geométrico Browniano (α, σ) , isso implica na seguinte equação em tempo discreto:

$$\ln(P_t) = a + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t$$

- seqüência i.i.d. $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma^2/N)$; para dados *diários*, $N = 252$
 - Corrigimos com N para obter parâmetros anuais (para dados *mensais*, $N = 12$)
- $\text{Var}[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] = \text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2/N \Rightarrow \sigma^2 = N \text{Var}[\ln(P_t/P_{t-1})]$
- $\alpha = N \{ \text{Média}[\ln(P_t/P_{t-1})] + 0,5 \sigma^2/N \}$ (Winston, 1998, p.328)
- Com dados diários, para calcular a volatilidade no MGB, basta calcular a variância de $\ln(P_t/P_{t-1})$, multiplicar por 252 (para passar para variância anual) e extrair a raiz quadrada
- ◆ O MGB pode ser testado, por ex., checando a hipótese do coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ nessa regressão ser unitário.
 - É chamado de *teste da raiz unitária de Dickey-Fuller*

Estimativa em Reversão à Média

- ◆ Na reversão à média, o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ na equação anterior será menor que um. Seja a equação mais geral:

$$\ln(P_t) = a + b \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t$$

- Deixaremos os dados dizerem sobre b em vez de estipular $b = 1$
- Se $0 < b < 1$, teremos indícios de reversão à média
- ◆ Faça a regressão $[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ versus $\ln(P_{t-1})$:
$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + (b - 1) \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t$$
- ◆ As seguintes fórmulas permitem estimar um processo de reversão para o logaritmo dos preços (Dixit & Pindyck, p.77, corrigido):

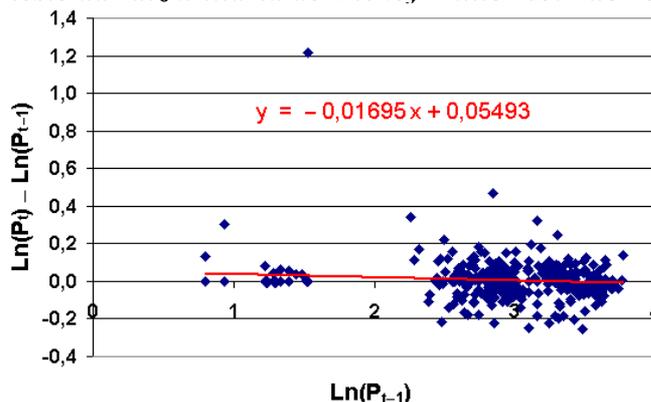
- $\eta = -\ln(b) \cdot N$ e $\sigma = \sigma_s \sqrt{N} \sqrt{\frac{2 \ln b}{b^2 - 1}}$

- ◆ O nível de reversão já em termos de preço de equilíbrio é dado pela equação (prova: Sheldon Ross, 1999, p.171):
 - $\bar{P} = \exp[(a + 0,5 \sigma^2/N) / (1 - b)]$

Regressão Para Preços do Petróleo

- ◆ Fazendo a regressão $[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ versus $\ln(P_{t-1})$ para os preços do petróleo Brent (de jan/1970 a out/2004), se a inclinação da reta for \sim zero, não se pode rejeitar a hipótese de MGB. Se a inclinação for negativa, é indício de MRM

- A figura mostra a inclinação \cong zero (MGB não é rejeitado)
- O teste da raiz unitária de Dickey-Fuller tb. não rejeita o MGB

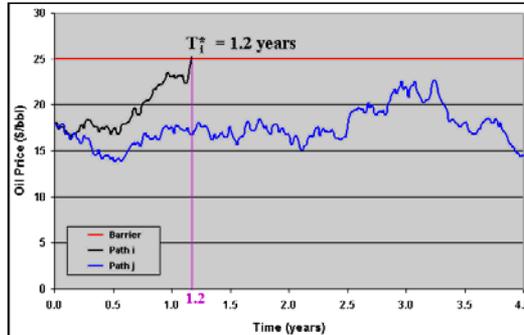


Crítérios para Escolha do Estimador

- ◆ Pindyck (1999) e Dixit & Pindyck (1994) recomendam uma série longa de preços para estimar parâmetros de tendência
 - Com apenas 30 a 40 anos não se rejeita a hipótese de MGB
 - Com série longa se observa uma reversão lenta ($H = 5$ anos)
 - Tem muita gente estimando parâmetros de reversão com série temporal de apenas dois a 5 anos: estimadores não-confiáveis
- ◆ O livro de econometria de Campbell & Lo & MacKinlay (1997, p.364) demonstra isso. O melhor estimador é o estimador de menor variância e critério depende do parâmetro a estimar:
 - **Drift:** quantidade de dados não resolve. O melhor estimador é aquele baseado no maior intervalo de tempo. $\text{Var}(\widehat{\text{drift}}) \sim \sigma^2/T$
 - ➔ Usar séries longas (duas ou mais décadas) para estimar tendência.
 - **Volatilidade:** aqui a quantidade de dados é o que resolve e não o intervalo tempo (ao contrário do drift). $\text{Var}(\widehat{\sigma}) \sim 2 \sigma^4/n$
 - ➔ Usar dados diários para estimar volatilidade.

Tempo de Toque de um Processo Estocástico

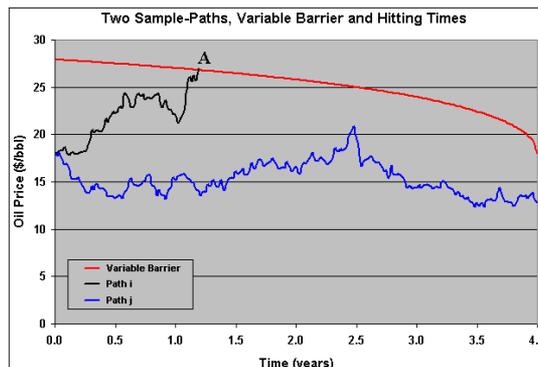
- ◆ “*First hitting time*” ou “*first passage time*” ou “*first exit time*” denotam o primeiro instante em que um processo estocástico toca (ou cruza) um certo valor (ex.: o gatilho)



- ◆ A definição de *first hitting time* $T^*(V = b) = T_b^*$ para um processo estocástico $V(t)$ alcançar (ou cruzar) a barreira b , assumindo que o processo inicia com $V(t = 0) < b$, é:
 $T_b^* = \inf \{ t \geq 0 ; V(t) \geq b \}$; onde o ínfimo de um conjunto vazio é infinito

First Hitting Time: Aplicações

- ◆ Tem inúmeras aplicações em opções e jogos de opções
 - Planejamento: se um projeto não está “deep-in-the-money”, qual o tempo esperado para ele atingir a curva de gatilhos?
 - Cálculo da opção: exerce a opção em t^* (t que atinge o gatilho), o valor da opção $F(0)$ é o payoff descontado por $E[\exp(-r t^*)]$.
 - No primeiro caso se considera o processo real e no segundo caso o processo estocástico neutro ao risco



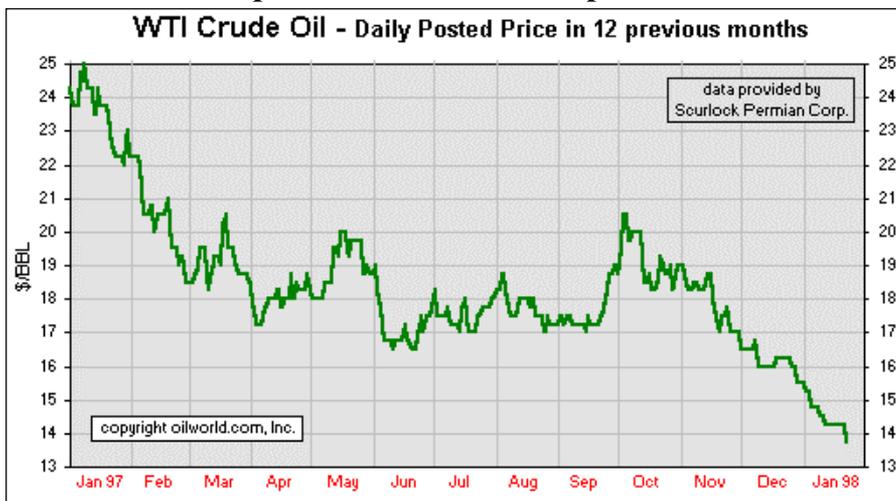
MATERIAL

ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

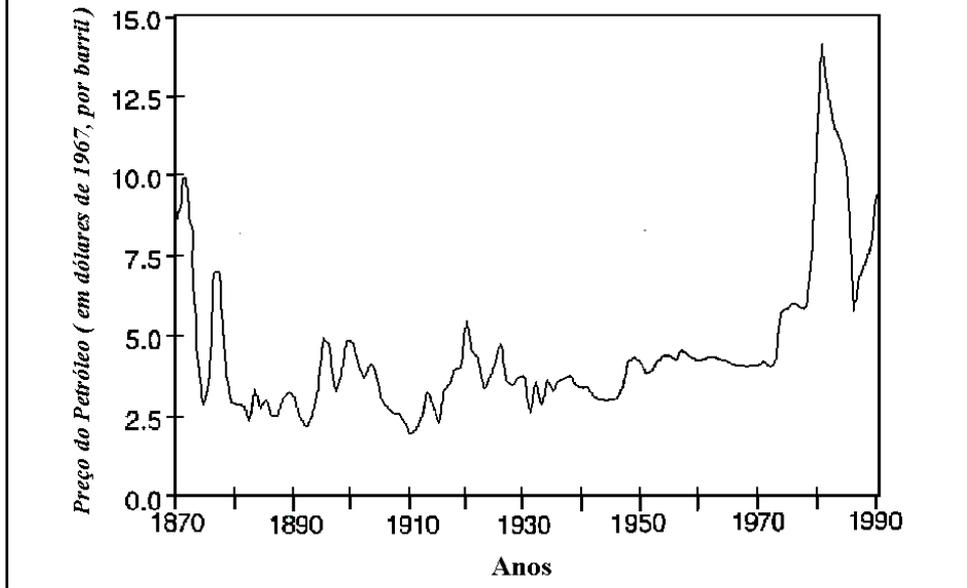
Preços do Óleo em 1997 e a Crise da Ásia

- ◆ Em novembro/97 os preços do petróleo começam a cair muito rapidamente. A crise da Ásia foi o fator mais importante, mas inverno ameno e atuação da OPEP são os outros fatores que fizeram a oferta superar muito a demanda



Preços do Petróleo (120 anos)

- ◆ Preços reais (não-nominais), mas com dólar de 1967

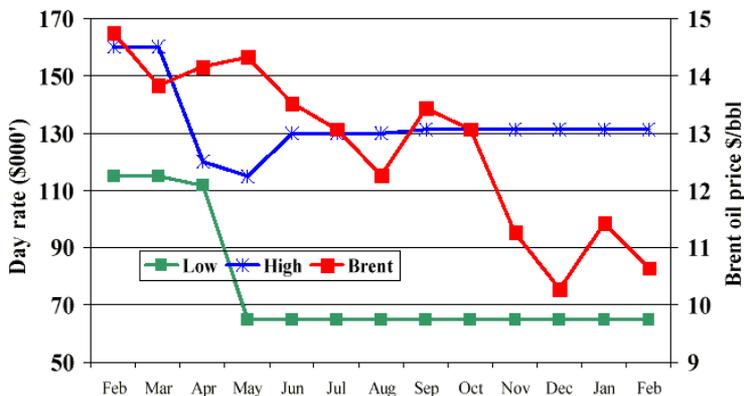


Incertezas em Custos e Preços

- ◆ Custos de sondas e preços do petróleo aparentemente tem correlação positiva (fonte: Petrodata)

OIL PRICE VS DAY RATES

US Gulf semi 2000-4999', February 1998 - February 1999



Exemplo: Movim. Aritmético Browniano

- ◆ Considere a seguinte versão discreta de um movimento aritmético Browniano para V

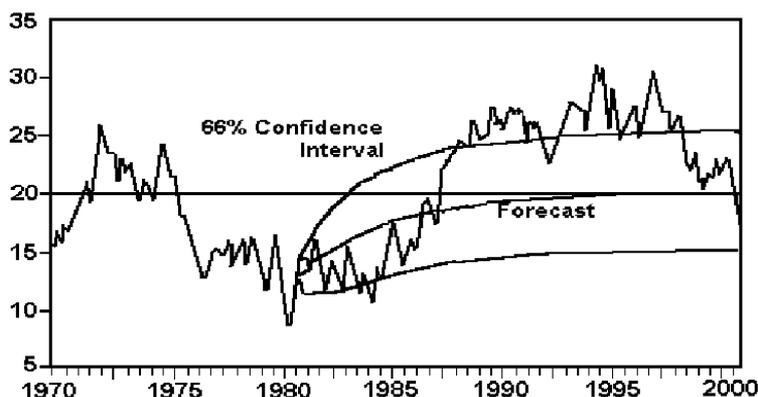
$$\Delta V = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Sendo: valor esperado (ou média) de $\Delta V = V_t - V_0 = a \Delta t$
variância de $\Delta V = b^2 \Delta t$

- ◆ O caixa de uma firma tem hoje \$50, tendência de subir \$20/ano e um desvio padrão anual (b) de $b = \$30/\text{ano}$. Qual o valor esperado e o desvio padrão do caixa da firma daqui a 1 ano, se o caixa segue o processo acima?
 - Daqui a 1 ano a média será de 70 ($= V_0 + a t = 50 + 20 \times 1$)
 - O desvio padrão será de 30 ($= b \sqrt{\Delta t} = 30 \times 1$)
 - Exercício: Resolva para o caso de 6 meses

Reversão à Média de Longo Prazo

- ◆ Variância inicialmente cresce com o tempo e depois se estabiliza devido à força de reversão
 - Tendência é o preço se aproximar da média de longo prazo. Se os preços estiverem “altos”, a tendência é cair; se os preços estiverem “baixos”, a tendência é subir.



Meia Vida do Processo de Reversão

- ◆ Uma medida mais gerencial da velocidade de reversão é o conceito de *meia-vida da reversão* H (*half-life*), que dá uma medida da lentidão do processo.
- ◆ Meia vida H é o tempo em que a variável estocástica leva para percorrer a metade do caminho entre o seu valor corrente e a média de longo prazo.
- ◆ Ex.: se o preço corrente do óleo é 12 \$/bbl, se a média de longo prazo \bar{P} é 20 \$/bbl e se a meia vida $H = 2$ anos, então se espera que os preços em 2 anos subam para 16 \$/bbl [= 12 + (20 - 12)/2]. Nesse exemplo o processo é para P e não $\ln P$.
 - Isso não significa que se espera que os preços atinjam 20 \$/bbl em 4 anos. Em 4 anos se atingiria 18 \$/bbl [= 12 + (20 - 12)/2 + (20 - 16)/2]
- ◆ A relação entre a velocidade de reversão η e a meia vida H para o logaritmo de P é $H = \ln(2)/\eta$

Reversão com Saltos: Dias & Rocha (1998)

- ◆ Assuma que os preços do petróleo (P) seguem o seguinte processo geométrico de reversão + saltos:

$$\frac{dP}{P} = [\eta(\bar{P} - P) - \lambda k] dt + \sigma dz + dq$$

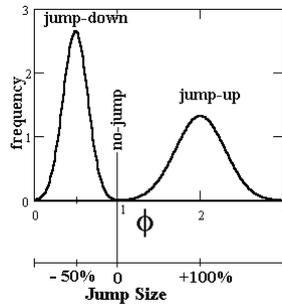
$$dq \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \tilde{\phi} - 1, & \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \quad \text{Logo, } E\left(\frac{dP}{P}\right) = \eta(\bar{P} - P)$$

$$k = E(\tilde{\phi} - 1)$$

- ◆ Notícias normais causa apenas ajustes marginais nos preços do óleo. Notícias anormais (guerra, grandes crises, surpresas da OPEP, ...) causam saltos discretos nos preços do óleo.
- ◆ Incerteza no tamanho/direção dos saltos representada por ϕ
- ◆ O salto pode ser sistemático (não poderia construir um portfólio sem risco) ou não-sistemático (poderia usar *contingent claims*).
 - Dias & Rocha (1998) analisaram os dois casos.

Dias & Rocha: Saltos (Jumps) Incertos

- ◆ O tamanho e sentido dos saltos são incertos e tem a seguinte distribuição de probabilidades (2 normais truncadas):



- ◆ Em caso de ocorrer uma notícia anormal, existem 50% de chances do salto ser positivo (jump-up, aumentando o preço) e 50% de chances de ser negativo (jump-down, reduz o preço)
- ◆ Se ocorrer um jump-up, espera-se que os preços dobrem, e em caso de jump-down, espera-se que os preços caiam à metade. Mas existe incerteza e os saltos podem ser maiores ou menores