Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais e Jogos de Opções

Parte 3: Lema de Itô; otimização sob incerteza; contingent claims; modelos de opções reais em tempo contínuo.

Marco Antonio Guimarães Dias,
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2005

Modelagem de Opções em Tempo Contínuo

- **Para modelar um problema de opção (ou qq. derivativo) em tempo contínuo, deve-se obter a *equação diferencial parcial* (EDP) da opção F(V, t) e suas condições de contorno (cc.). Para isso são necessárias as ferramentas:**
  - **Lema de Itô que permite escrever as relações entre a variável de interesse (F) e as variáveis de estado (X, t), onde X é um vetor de variáveis estocásticas (ex.: valor do ativo básico V e investimento I), que seguem processos estocásticos específicos;**
    - **O Lema de Itô permite expandir dF em termos de dX e dt;**
    - **Usa-se o Lema de Itô pois um processo de Itô é contínuo, mas não é diferenciável no senso convencional (não existe dV/dt, por ex.).**
  - **Otimização sob incerteza. Exs.: a programação dinâmica sob incerteza; contingent claims; método integral; e outros.**
    - **Os dois primeiros métodos + o Lema de Itô permitem contruir a EDP e suas cc. O método integral será visto depois.**
    - **D&P: contingent claims é usado para mercado completo e a programação dinâmica é usada para mercado incompleto.**

O Lema de Itô

- **O Lema de Itô está para o cálculo estocástico, assim como a expansão de Taylor está para o cálculo ordinário.**
  - **O termo em $(dV)^2$, desprezado em Taylor, é considerado, pois é de ordem dt se V for variável estocástica. Seja a função F(V, t):**

$$\text{Taylor: } dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + 1/2 \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}}}_{\to 0} (dV)^2 + \ldots$$

$$\text{Itô: } dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + 1/2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} [\, f(V, t)\, dt \,]$$

Onde $f(V, t)$ é uma função que depende do processo estocástico escolhido. O lema de Itô mostrado é a versão mais simples (1 variável estocástica).

- **Ex. (MGB): $dV = \alpha\, V\, dt + \sigma\, V\, dz$, logo $(dV)^2$ é:**
  - **$(dV)^2 = \alpha^2\, V^2\, (dt)^2 + 2\, \alpha\, \sigma\, V^2\, dt.dz + \sigma^2\, V^2\, (dz)^2$, mas os termos de ordem $(dt)^2$ e $(dt)^{3/2}$ (como dt.dz) são desprezíveis frente ao termo dt**
  - **$\Rightarrow (dV)^2 = \sigma^2\, V^2\, (dz)^2$; prova-se que $(dz)^2 = dt \Rightarrow (dV)^2 = \sigma^2\, V^2\, dt$**

Prova de que $(dz)^2 = dt$

- **A prova de que $(dz)^2 = dt$ é dividida em duas partes:**
  - **Primeiro se prova que $E[(dz)^2] = dt$ e depois se prova que $Var\, [(dz)^2] = 0$. Isso implicará que $(dz)^2 = dt$.**

❶ Lembrando que o *incremento de Wiener* $dz = \varepsilon\, (dt)^{½}$,
  - **$E[(dz)^2] = E[\varepsilon^2\, dt] = dt\, E[\varepsilon^2]$; mas a variância de ε é por definição igual a 1 (normal padronizada), ou seja:**
  - **$Var(\varepsilon) = 1 = E[\varepsilon^2] - (E[\varepsilon])^2 = E[\varepsilon^2] - 0 \Rightarrow E[\varepsilon^2] = 1 \Rightarrow$**
  - **Substituindo $\Rightarrow$ $E[(dz)^2] = dt$ □**

❷ Para provar que $Var[(dz)^2] = 0$,
  - **$(dz)^2 = \varepsilon^2\, dt \Rightarrow Var[(dz)^2] = Var[\varepsilon^2\, dt] = dt^2\, Var[\varepsilon^2]$**
  - **Mas $dt^2 \cong 0 \Rightarrow Var[\varepsilon^2\, dt] = 0\, .\, Var[\varepsilon^2] \Rightarrow Var[\varepsilon^2\, dt] = 0$ □**

- **Ou seja, embora dz seja variável aleatória com distrib. normal, o seu quadrado $(dz)^2$ é determinístico!**
  - **➡ Em geral $(dz)^n = \varepsilon_n (dt)^{n/2} + O\{(dt)^n\}$ (Ingersoll, 1987, p. 348)**

Exemplo de Aplicação do Lema de Itô

- **Seja a variável estocástica P seguindo um MGB:**
  - $dP = \alpha\, P\, dt + \sigma\, P\, dz$. **Sabemos que** $(dP)^2 = \sigma^2\, P^2\, dt$
- **Seja uma variável p dada pela função:** $p = \ln(P)$.
- **Prove que p segue um movimento *aritmético* Browniano (MAB) e ache a equação estocástica que descreve dp.**
  - **As derivadas a serem usadas no Lema de Itô são:**
    - $\partial p/\partial t = 0$; $\partial p/\partial P = 1/P$; $\partial^2 p/\partial P^2 = -\,1/P^2$.
  - **Aplicando o Lema de Itô para p(P, t):**
  - $dp = (1/P)\, dP - \frac{1}{2}\,(1/P^2)\,(dP)^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow\; dp = \alpha\, dt + \sigma\, dz - \frac{1}{2}\,\sigma^2\, dt \;\Rightarrow$

  $\Rightarrow\; dp = (\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2)\, dt + \sigma\, dz$
  - **Ou seja, um MAB com a mesma volatilidade de dP/P, mas diferentes drifts** $\Rightarrow dP/P \neq d(\ln(P))$, **i. é,** $dP/P > d(\ln(P))$.

Lema de Itô para Duas Var. Estocásticas

- **Sejam V(t) e I(t) dois processos estocásticos de Itô (exs.: MGB, reversão, etc.) correlacionados com coeficiente ρ:**
  - $dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$ (ex.: $dV = \alpha_V\, V\, dt + \sigma_V\, V\, dz$)
  - $dI = c(V, t)\, dt + d(V, t)\, dw$ (ex.: $dI = \alpha_I\, I\, dt + \sigma_I\, I\, dw$)
- **Para 2 var. estocásticas, o Lema de Itô da opção F(V, I, t) é:**
  - $dF = F_t\, dt + F_V\, dV + \frac{1}{2}\, F_{VV}\,(dV)^2 + F_I\, dI + \frac{1}{2}\, F_{II}\,(dI)^2 + F_{VI}\,(dV \cdot dI)$
    - **Onde os subscritos denotam derivadas parciais (ex.:** $F_t = \partial F/\partial t$**)**
    - **Aplicação: em caso de exercício da opção, VPL = V – I**
    - **Processos correlacionados:** $dz\, dw = \rho\, dt$, **pois** $E(\varepsilon_V \cdot \varepsilon_I) = \rho$, **etc.**
- **Regras de multiplicação úteis para usar com o lema de Itô:**

Multiplicação	dt	dz	dw
dt	0	0	0
dz	0	dt	ρ dt
dw	0	ρ dt	dt

Lema de Itô para Processos de Poisson

- **Considere um processo <u>puro</u> de Poisson (saltos) de V**
  - **Estamos interessados no derivativo F(V, t). Como é dF?**
  - **Se o salto na variável estocástica V ocorre no intervalo infinitesimal entre t e dt, a variação nesse derivativo é:**
  - **$dF = F(V_{t+dt}, t) - F(V_t, t)$, mas em caso de evento (salto), V irá saltar para $V + V\Phi$, onde Φ é o tamanho do salto (Φ pode ser aleatório) $\Rightarrow$ $dF = F(V + V\Phi, t) - F(V, t)$**
  - **A probabilidade da ocorrência do salto no intervalo dt é dado por $\lambda\, dt$. Logo, o valor esperado da variação dF é:**

$$E[dF]_{saltos} = \lambda\, dt\, E[F(V + V\Phi, t) - F(V, t)]$$

- **Para o caso mais relevante de processos estocásticos combinados (*difusão de Itô* + *saltos de Poisson*), basta aplicar o Lema de Itô para cada processo e somar:**

$$E[dF]_{total} = E[dF]_{difusão} + E[dF]_{saltos}$$

Otimização Dinâmica Sob Incerteza

- **Foi visto que um problema de opção real pode ser visto como um problema de otimização dinâmica sob incerteza**
  - **É "dinâmica" pois considera a variável de estado "tempo".**
- **Os dois métodos mais usados: Ativos Contingentes ("contingent claims") e Programação Dinâmica**
  - **No métoda da EDP, usa-se a *condição de suavidade* ("smooth pasting"): prova-se (McKean, apêndice sofisticado do paper de Samuelson, 1965) que é uma condição <u>suficiente</u> para o ótimo**
- **Ativos Contingentes: usa o conceito de não-arbitragem**
  - **Montagem de um portfólio livre de risco**
  - **No caso do MGB, não precisa de saber a taxa ajustada ao risco**
- **Programação Dinâmica: usa a equação de Bellman**
  - **Não precisa de mercado completo, trabalha *backwards***
  - **Usa uma taxa de desconto exógena ρ (custo de capital!?) para atualizar os valores otimizados dos cenários probabilísticos.**
- **Iniciaremos com o método do "contingent claims"**

Contingent Claims: Black-Scholes-Merton

- A equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M) é a solução de uma equação diferencial parcial (EDP).
  - A EDP é a mesma se americana ou européia, se put ou call
  - As cc. da EDP é que dizem se put ou call, amer. ou europ.
- Para chegar na EDP pelo método "contingent claims", a relação de F com V é dada por um portfólio livre de risco:
  - *Compra-se* uma opção de investimento, ou seja, F
  - *Vende-se* "n" unidades do ativo básico V (unidade de projeto), sendo "n" (conhecido por "delta hedge") escolhido de forma a tornar o portfólio sem risco (mostraremos que $n = F_V$)
- Monta-se as equações de retorno desse portfólio no tempo dt
  - Por ser livre de risco, o retorno exigido usa a taxa livre de risco r
- Usa-se o *Lema de Itô* para expandir dF em relação a V e t
- Usa-se a equação do *processo estocástico* de V para $(dV)^2$
- "Algebrando", chega-se à EDP do derivativo F(V, t)

Método dos Ativos Contingentes: B&S&M

- A carteira sem risco é: $\Phi = F - n V$ (com uma escolha *conveniente* de n para torná-la sem risco)
- Num intervalo de tempo infinitesimal dt, o retorno exigido da carteira será: $r \, \Phi \, dt = r \, (F - n V) \, dt$
- Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:
  - A opção pode variar (dF) mas não distribui dividendos
  - O retorno de V em dt é a soma do ganho de capital dV com o dividendo $\delta \, V \, dt$. Assim o retorno da carteira é:
  - Retorno da carteira $= dF - n \, (dV + \delta \, V \, dt)$
  - Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r \, (F - n V) \, dt = dF - n \, (dV + \delta \, V \, dt)$$

  - Agora precisamos de dF: expansão com o Lema de Itô

Método dos Ativos Contingentes

- O Lema de Itô para expandir dF, onde F(V, t), é:

$$dF = F_v\, dV + ½\, F_{v\,v}\, (dV)^2 + F_t\, dt$$

  - Agora precisamos de $(dV)^2$, elevando ao quadrado a equação estocástica $dV = \alpha\, V\, dt + \sigma\, V\, dz$. Assim:

$(dV)^2 = \sigma^2\, V^2\, dt$ (despreza termos em dt de ordem > 1)

  - Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

$$dF = F_v\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v}\, dt + F_t\, dt$$

  - Substituindo a equação de dF na eq. do retorno de Φ

$$r\,(F - n\,V)\,dt = F_v\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v}\, dt + F_t\, dt - n\,(dV + \delta\, V\, dt)$$

$$\Rightarrow r\,(F - n\,V)\,dt = (F_v - n)\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v}\, dt + F_t\, dt - n\,\delta\, V\, dt$$

  - Mas essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dV. Para tal, faz $n = F_V$
  - *Algebrando* se chega à EDP de Black & Scholes & Merton:

$$½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v} + (r - \delta)\, V\, F_V - r\, F = - F_t$$

EDP do Derivativo F(V, t) por Contingent Claims

- Assim, a EDP de um derivativo F(V, t) que não paga dividendos (F não tem fluxo de caixa) sobre um ativo básico V que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ é:

$$½\, \sigma^2\, V^2\, F_{VV} + (r - \delta)\, V\, F_V - r\, F = - F_t$$

- As <u>condições de contorno</u> da EDP é que dirão que F é uma opção que expira em T, o tipo da opção (aqui é americana de compra) e o resultado (payoff) do exercício da opção:

Ação de otimização é inserida no modelo

  - Para $V = 0$, $F(0, t) = 0$
  - Para $t = T$, $F(V, T) = \max[V - I, 0] = \max[VPL, 0]$
  - Para $V = V^*$, $F(V^*, t) = V^* - I$
  - "Contato Suave", $F_V(V^*, t) = 1$

Condições no gatilho V*, onde é ótimo o imediato investimento

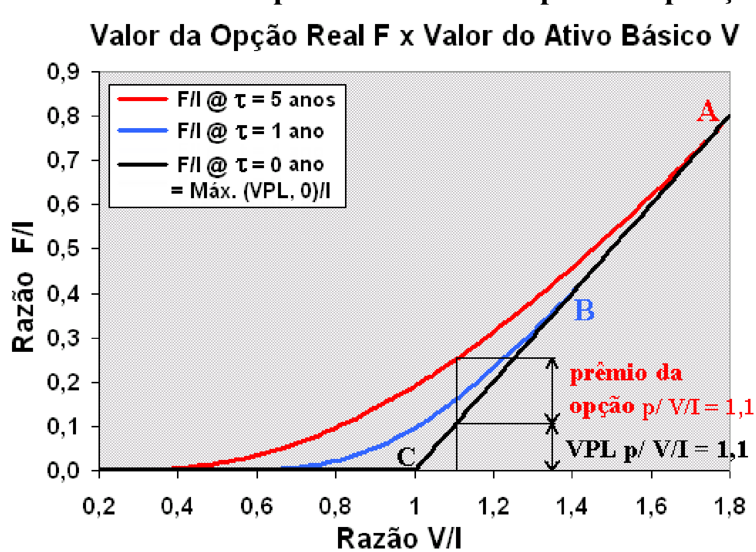
- No caso de opção *européia* de compra, bastam as 2 primeiras cc.
  - As duas últimas cc. dão as condições ótimas de *exercício antecipado* de F

EDP no Contexto da Opção Real

- **Repare (ver segunda cc.) que na expiração ($t = T$), a oportunidade é do tipo "agora ou nunca" e vale**
  - **Máximo entre V – I e zero, ou seja, máx. (VPL, 0)**
  - **Só na expiração vale a regra do VPL (investir se > 0)**
  - **Antes da expiração, a regra é exercer se $V \geq V^*$ (gatilho)**
- **Essa EDP + cc. (opção de compra americana com $\delta > 0$) não tem solução analítica (exceto no caso de opção perpétua). Mas temos as "opções" de solução tais como:**
  - **Métodos numéricos tradicionais, especialmente o método das *diferenças finitas* (ver D&P, cap. 10);**
  - ***Aproximações analíticas*. Existem diversas:**
    - **A mais popular é a de Barone-Adesi & Whaley (ver Hull);**
    - **A de Bjerksund & Stensland (1993) é mais precisa para tempo de expiração grande. Ver detalhes na pasta 76, inclusive para código VBA-Excel para F(V, t) e V*.**

Gráfico da Opção Real F de Investir em V

- **Resolvendo a valor da opção real F(V, t), obtém-se gráficos F x V como o abaixo (valores normalizados pelo investimento I).**
  - **Mostrados os valores para diferentes tempos de expiração τ**

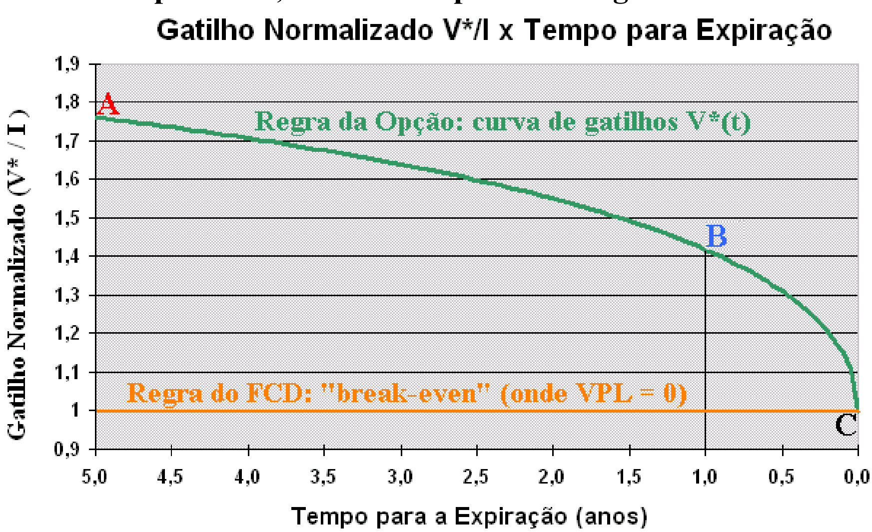


O Valor e a Curva do Gatilho V*

- **As duas últimas cc. são para o caso de V atingir o valor de gatilho V*. Lembrar que o gatilho dá a regra de decisão em opções: investir já se V ≥ V***
  - **A terceira cc. é a *condição de continuidade* (“*value matching*”): só diz que em V* se exerce e obtém F = V* – I**
- **A última cc. é a condição *suficiente* para o ótimo: a condição de suavidade (“smooth-pasting”) em V*.**
  - **Diz que no ótimo a curva da opção F é tangente a curva (aqui é reta) do payoff V – I (i. é, tangente à reta do VPL).**
- **O gatilho V*(t) (curva de exercício antecipado) é muito mais importante em opções reais do que em opções financeiras.**
- **O gráfico da curva de gatilhos V*(τ) a seguir mostra a correspondência dos pontos A, B e C da figura anterior para os tempos de expiração τ de 5 anos, 1 ano e 0 ano, respectivamente.**

Curva do Gatilho: A Regra de Decisão Ótima

- **O gráfico abaixo mostra a curva de gatilhos V*(τ) para o mesmo caso do gráfico da opção F(V, t).**
  - **Note os pontos A, B e C e compare com o gráfico anterior.**



Software de Opções Reais: Timing

- **Esse software em Excel-VBA resolve o problema clássico de momento ótimo de investir I num projeto completo V(t), em que V(t) segue um MGB.**
  - **V = valor presente (no início dos investimentos) das receitas líquidas de custos operacionais e impostos.**
  - **I = valor pres. dos investimentos líquidos de benefícios fiscais**
  - **http://www.puc-rio.br/marco.ind/xls/timing-e-97-vba-hqr.xls**
- **Timing usa a aproximação de Bjerksund & Stensland para resolver (F e V*) uma opção de compra americana.**
  - **Dá o valor da opção F(V, t) com gráfico; o valor e a curva de gatilhos V*(t); e, em caso de ser ótimo a espera, qual a probabilidade de exercício e o tempo esperado condicional (a ocorrer algum exercício) para haver exercício. Detalhes:**
  - **http://www.puc-rio.br/marco.ind/timing.html**

Método de Copeland & Antikarov

- **No livro-texto de Copeland & Antikarov é defendida a seguinte abordagem, baseada num teorema de Samuelson (1965), que justifica o uso do MGB para V:**
  - **Mesmo que componentes de V (preços, custos, demanda) sigam processos de reversão à média, o agregado V é MGB.**
  - **Assim, a idéia é fazer simulação dos processos estocásticos desses componentes (que podem ser correlacionados) e calcular a distribuição de valor presente de V na data t + 1**
    - **Essa distribuição é aproximadamente lognormal e a simulação dá a média e a variância dessa distribuição;**
    - **Com a fórmula de valor esperado do MGB pode-se tirar o drift α. Tendo a taxa de desconto μ se tira $\delta = \mu - \alpha$; e**
    - **Com a fórmula da variância do MGB e α, se tira o valor da volatilidade σ. Com isso, temos todos os parâmetros do MGB.**
  - **Copeland & Antikarov usam esse método para resolver o problema de OR com binomial. Mas podemos usar *Timing*.**

Programação Dinâmica: Conceitos

- A formalização da programação dinâmica (PD) nos anos 50 é devida a Bellman. Zermelo é o "avô" da PD com seu algoritmo "*backward induction*" em que analisou o *jogo de xadrêz* (1912).
  - PD quebra a seqüência de decisões em *dois componentes*: a *decisão imediata* (ex.: investir ou não) e uma *função valor* que engloba as conseqüências de todas as decisões posteriores.
- Quando o horizonte é *finito* (rever exemplos da parte 1) existe o *último instante* T para se tomar uma decisão:
  - Em T se usa a otimização tradicional (ex.: máx[VPL, 0])
  - A solução em T é a função valor para a *penúltima decisão* (T - 1)
  - O valor da penúltima decisão vira função valor p/ a antepenúltima, etc. Ou seja, se trabalha "backwards" até t = 0.
- Quando o horizonte é *infinito*, o que poderia parecer mais complicado na verdade é mais simples:
  - Cada decisão leva a outra que é exatamente igual à anterior (i. é, F independe de t), levando a freqüentes <u>soluções analíticas</u>.

Programação Dinâmica: Exemplo

- Seja um caso simples de dois períodos t_0 e t_1:
  - Valor do projeto V em t_1 é incerto, investimento I é fixo;
  - No espírito "backwards" da PD, primeiro se analisa a decisão ótima em $t = t_1$, depois se usa esse resultado como função valor (atualizado por ρ) para a decisão em t_0.
  - Em $t = t_1$: $F_1 = \text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}$. Como $V(t_1)$ é estocástico, iremos trabalhar com $E[F_1] = E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}]$
    - Em geral $E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}] \neq \text{máx}\{E[V(t_1)] - I, 0\}$, na verdade: $E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}] \geq \text{máx}\{E[V(t_1)] - I, 0\}$.
  - Em $t = t_0$: em caso de exercício obtém-se o "termination payoff" $\Omega_0 = V(t_0) - I$; já em caso de não-exercício (espera) se obteria um fluxo de caixa π_0 entre t_0 e t_1 (mas aqui $\pi_0 = 0$) mais o valor descontado de $E[F_1]$, isto é:

$$F_0 = \text{máx}\{\Omega_0,\ \pi_0 + (1/(1 + \rho))\ E[F_1]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ F_0 = \text{máx}\{V(t_0) - I,\ (1/(1 + \rho))\ E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}]\}$$

Programação Dinâmica: Parada Ótima

- **A firma irá escolher a cada instante t a política ótima u_t que maximiza seu valor presente esperado dos fluxos de caixa. Isso resulta na equação fundamental de Bellman:**

$$F_t(V_t) \;=\; \max_{u_t} \left\{ \pi_t(V_t, u_t) \;+\; \frac{1}{1+\rho}\; E_t[F_{t+1}(V_{t+1})] \right\}$$

- **De grande interesse prático é uma classe *particular* de programação dinâmica (PD) em que a escolha em qualquer período é *binária*: exercer a opção ou não.**
  - **São os problemas de *parada ótima* ("optimal stopping");**
    - **"Parada" significa exercer uma opção obtendo o "*termination payoff*" Ω (ex.: VPL de exercício da opção). Já "continuar" (ou *não parar*), significa esperar (não exerce a opção);**
    - **Se escolher "não parar", no período seguinte haverá um novo problema de decisão binário de parada ótima, etc., até parar.**
  - **A equação de Bellman se torna:**

$$F_t(V_t) \;=\; \max \left\{ \Omega(V_t),\; \pi_t(V_t) + \frac{1}{1+\rho}\; E_t[F_{t+1}(V_{t+1})] \right\}$$

Equivalência das Otimizações Sob Incerteza

- **O que ocorreria se na equação de Bellman tomarmos o valor esperado com probabilidades neutras ao risco e fizermos o desconto com a taxa livre de risco?**
  - **A resposta sugere que os métodos da programação dinâmica e de contingent claims devem ser equivalentes se for feita a *troca da tendência* α por (r – δ) e a troca da *taxa de desconto* ρ por r**
- **As EDPs do valor da opção em cada caso seriam para o problema F(V, t) deduzido antes por contingent claims são:**
  - **Programação Dinâmica (como chegar? Dixit & Pindyck):**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, V^2\, F_{VV} + \alpha\, V\, F_V - \rho\, F = -\, F_t$$

  - **Contingent Claims:**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, V^2\, F_{VV} + (r - \delta)\, V\, F_V - r\, F = -\, F_t$$

- **Lembrar o exemplo do seguro, de mudança de probabilidade (mudar a tendência é fazer uma translação numa distribuição) e uso da taxa de desconto livre de risco!**

EDP para Opção Real Perpétua

- **Se o tempo de expiração é infinito, se cai num caso mais simples, pois o tempo t deixa de ser variável de estado.**
  - **Postergar uma decisão leva a uma nova opção perpétua;**
  - **Assim, o valor da opção do caso anterior é função só de V;**
  - **A derivada parcial da opção em relação ao tempo é zero: $F_t = 0$**
- **Assim, a EDP de F(V, t) se torna uma *equação diferencial ordinária* (EDO), F(V), dada por:**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,V^2\,F_{VV} + (r - \delta)\,V\,F_V - r\,F = 0$$

  - **Com o gatilho V* independente do calendário, as três cc. são:**
  - ❶ **Para $V = 0$, $F(0, t) = 0$**
  - ❷ **Para $V = V^*$, condição de continuidade, $F(V^*) = V^* - I$**
  - ❸ **Para $V = V^*$, condição de "contato suave", $F_V(V^*) = 1$**
- **Essa ODE tem solução analítica do tipo $F = A\,V^{\beta}$ (cc. 1)**
  - **Onde A é uma constante a achar com as cc. e β será visto a seguir**

Equação Quadrática Característica

- **Substituindo a solução $F = A\,V^{\beta}$ na EDO e simplificando se obtém a seguinte equação quadrática fundamental:**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,\beta\,(\beta - 1) + (r - \delta)\,\beta - r = 0$$

  - **Que tem duas raízes, $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$:**

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \tfrac{1}{2}]^2 + 2\,r/\sigma^2}$$

$$\beta_2 = \tfrac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \tfrac{1}{2}]^2 + 2\,r/\sigma^2}$$

- **Assim, a solução da EDO é do tipo: $F = A_1\,V^{\beta_1} + A_2\,V^{\beta_2}$**
  - **As constantes A_1 e A_2 serão determinadas com as cc.**
    - **Por ex., no problema do slide anterior, a primeira cc. implica que $A_2 = 0$ (caso contrário $F = \infty$ em vez de $F = 0$)**
  - **Substituindo a solução $F = A_1\,V^{\beta_1}$ na segunda e terceria cc., se obtém a constante A_1 e o gatilho V* .**

Solução Analítica e Relevância Prática

- Caso de opção <u>perpétua ou muito longa</u> a EDP vira uma EDO ($F_t = 0$) que tem solução analítica.
  - Patentes (20 anos no Brasil): boa solução aproximada.
  - Desenvolvimento de um terreno urbano.
  - Abrir novas lojas de sua *griffe.*
- O valor da opção F e o gatilho V*, valem:

$$F = A V^{\beta_1} \quad ; \text{ e} \quad V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$$

Onde: $A = (V^* - I) / (V^*)^{\beta 1}$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Exemplo: Terreno Urbano

- Suponha que exista um terreno urbano vazio que pode ser desenvolvido por D = $ 2 MM. O imóvel construído teria hoje um valor de mercado de V = $ 2,2 milhões.
  - Considere que o preço futuro do imóvel é incerto, e a volatilidade do mercado de imóveis é de $\sigma = 40\%$ aa
  - Considere a taxa de juros de $r = 10\%$ aa.
  - Considere que o aluguel <u>anual</u> que se pode obter com o imóvel V é de $\delta = 10\%$ do valor de V
- Qual o valor do terreno? Devemos desenvolver hoje ou esperar por melhores condições?
- O que ocorreria se o governo cria-se uma taxa para terrenos ociosos? Suponha $20.000/ano para esse caso.
- O que ocorreria se o governo criasse normas restringindo o desenvolvimento e reduzisse a incerteza no valor V?

Opção de Desenvolver Terreno

- **Usando as fórmulas da solução analítica de uma opção perpétua, temos os valores da opção F e do gatilho V***

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} = 1{,}72$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} D \Rightarrow \boxed{V^* = \$\ 4{,}76 \text{ milhões}}$$

OBS: D = 2 milhões

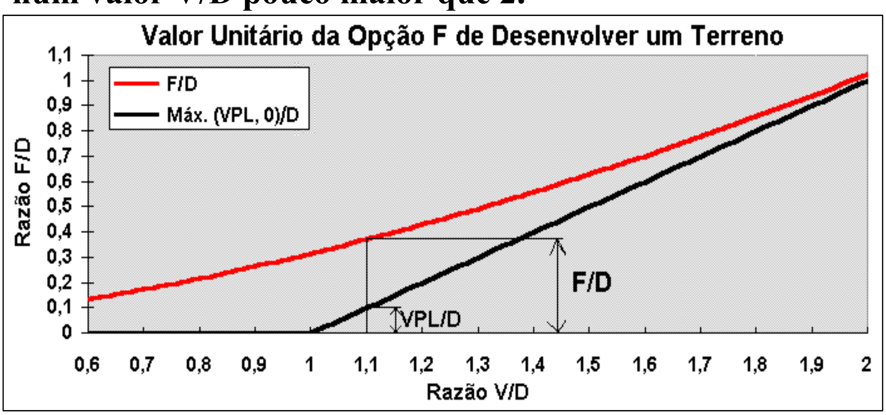
$$\left.\begin{array}{l} A = (V^* - D) / (V^*)^{\beta 1} \\ F = A\, V^{\beta_1} \end{array}\right\} \boxed{F = \$\ 0{,}73 \text{ milhões}}$$

OBS: VPL = 0,2 milhões

- **O valor do gatilho diz que para investir hoje seria necessário que o projeto V valesse mais do dobro do seu custo D (devido a elevado σ)**
- **O valor do terreno é bem maior que o VPL do investimento imediato**

Valor do Terreno (Opção) x Valor do Imóvel

- **O gráfico mostra a curva da opção sendo superior à reta do VPL, sendo que a curva irá tangenciar a reta do VPL em num valor V/D pouco maior que 2.**



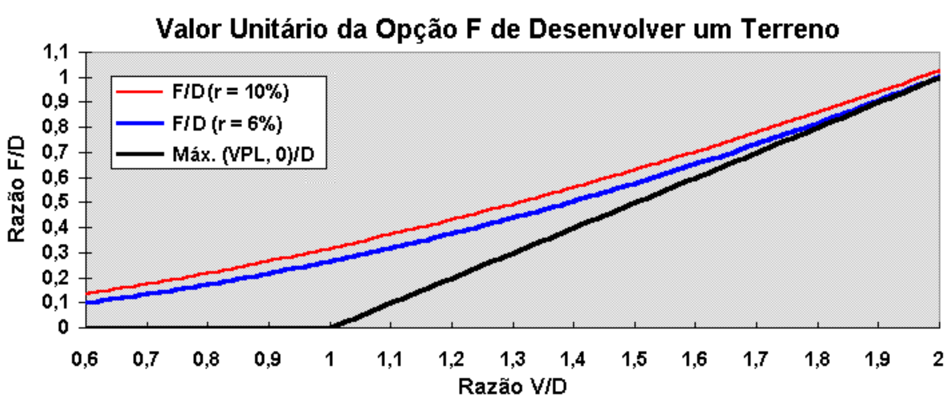
- **Repare que para V = 2,2 milhões (e logo, V/D = 1,1), o valor do terreno urbano é bem maior que seu VPL.**
- **Já para projetos mais lucrativos (V/D maior), o valor de opção fica mais próximo do valor intrísico (VPL) do projeto**

Valor do Terreno: Taxação

- **O que ocorreria se o governo cria-se uma taxa para terrenos ociosos? Suponha $20.000/ano para esse caso.**
  - **Isso poderia ser pensado como uma maneira de reduzir o ganho dos juros no montante do investimento.**
  - **Assim a posição de espera em vez de ser remunerada a uma taxa de juros r = 10% (= $200.000 / ano), passaria a ser remunerada com r' = 9% (= $200.000 – $20.000 = $180.000)**
  - **O valor da opção e o gatilho seriam então calculados com essa nova taxa de juros r'.**
  - **Haveria uma redução no valor da opção de espera e no gatilho**
- **O que ocorreria se o governo criasse normas restringindo o desenvolvimento e reduzisse a incerteza no valor V?**
  - **A *redução na incerteza*, assim como a *redução* do número de *opções de escala* de desenvolvimento (ex.: limitando a altura do prédio), reduz o valor do terreno, e aumenta a propensão ao investimento no desenvolvimento**

Valor de Opção de um Terreno

- **Em caso de uma taxação na terra ociosa, pode-se pensar que a espera é remunerada por uma taxa de juros reduzida. Na figura, é mostrada uma redução maior dos juros (de 10 para 6%) a fim de ressaltar o efeito.**



MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Métodos Numéricos: Problemas

- **Estabilidade/ Convergência:**
  - **Quando ela converge, não "explode"**
  - **Instabilidade pode ser causada pelos erros de aproximação do computador (se ocorrer amplificação)**
  - **Antídoto: é comum fazer transformações logarítmicas**
- **Consistência:**
  - **Ser uma aproximação do problema original**
  - **Discretização com mesma média e variância que ocorre no caso contínuo, para cada passo-tempo**
- **Eficiência Computacional: evolução de *hardware***

➡ **Muita pesquisa nessa área devido ao mercado financeiro. Análise de projetos se beneficia.**

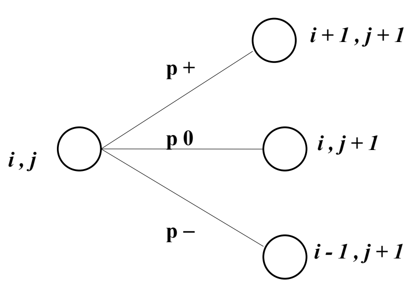
Métodos de Diferenças Finitas

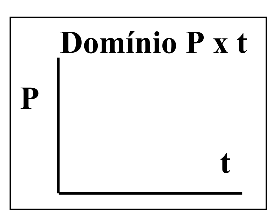
- **Método numérico popular: resolve numericamente a equação diferencial parcial (EDP)**
  - **Binomial resolve diretamente da equação do processo estocástico sem construir a EDP, mas nem sempre é o meio mais prático ("floresta")**
- **A EDP é convertida em um conjunto de equações de diferenças e as mesmas são resolvidas iterativamente**
- **Existem diferenças finitas *explícitas* e *implícitas***
  - **Explícita: problemas de convergência se as probabilidades são negativas (antídoto: Δt suficientemente pequeno).**
    - **É o método mais usado por ser mais intuitivo**
  - **Implícito: conjunto de equações simultâneas, em alguns casos demanda mais tempo de computação**
    - **Tipicamente tem de resolver um sistema de equações com matriz tridiagonal. Talvez o mais promissor com recentes abordagens (método de Crank-Nicholson)**

Diferencas Finitas Explícitas

- **Grid: Espaço de domínio $\Delta P \times \Delta t$**
  - **Discretização $F(P,t) \equiv F(i\Delta P, j\Delta t) \equiv F_{i,j}$**
  - **Com $0 \le i \le m$ e $0 \le j \le n$**
    - **onde $m = P_{max}/\Delta P$ e $n = T / \Delta t$**

$$F_{i,j} = p^{+} F_{i+1,j-1} + p^{0} F_{i,j-1} + p^{-} F_{i-1,j-1}$$





"Probabilidades" p precisam ser positivas para obter a convergência (ver Hull, por ex.)