



IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais e Jogos de Opções

Parte 4: Modelos e aplicações de opções reais. Simulação de Monte Carlo para avaliar opções.

**Marco Antonio Guimarães Dias,
Professor Adjunto, tempo parcial**

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2005

Processos Estocásticos Correlacionados

- ◆ Em problemas de opções reais pode ser de interesse a interação entre várias fontes de incerteza econômica:
 - Preço, custo operacional, custo de investimento, taxa de câmbio, taxa de juros, taxa de dividendos, etc.
 - Modelagem: processos estocásticos correlacionados
- ◆ As correlações entre incertezas econômicas podem ser:
 - Positivas (caso geral): em média oscilam na mesma direção (se uma variável aumenta é mais provável que a outra também aumente e vice-versa);
 - Negativas: Ex.: Juros e Ações. Mais raro em opções reais.
- ◆ Valor do projeto (V) e Custo de investimento (D)
 - Essa análise dará intuição sobre o efeito de outras incertezas
 - Suponha que V e D seguem 2 movimentos geométricos Brownianos correlacionados (com coeficiente de correlação ρ)
$$dV = \alpha_V V dt + \sigma_V V dz_V \quad \text{e} \quad dD = \alpha_D D dt + \sigma_D D dz_D$$

Valor e Custo: Incertezas Correlacionadas

- Com os dois incrementos de Wiener:

$$dz_V = \varepsilon_V \sqrt{dt} \quad ; \quad e \quad dz_D = \varepsilon_D \sqrt{dt}$$

- Onde os processos de Wiener dz_V e dz_D são correlac.:

$$E(\varepsilon_V \cdot \varepsilon_D) = \rho \Rightarrow E(dz_V \cdot dz_D) = dz_V \cdot dz_D = \rho dt$$

- ◆ A versão do lema de Itô para a opção $F(V, D, t)$, com duas variáveis estocásticas é:

$$dF = F_t dt + F_V dV + \frac{1}{2} F_{VV} (dV)^2 + F_D dD + \frac{1}{2} F_{DD} (dD)^2 + F_{VD} (dV dD)$$

Novidade: só o termo que entra a correlação: $dV dD = \sigma_V \sigma_D V D \rho dt$

- ◆ Com a eq. do portfólio ($\Phi = F - nV - mD$), etc., se obtém a EDP:

$$\frac{1}{2} (\sigma_V^2 V^2 F_{VV} + 2 \rho \sigma_V \sigma_D V D F_{VD} + \sigma_D^2 D^2 F_{DD}) + (r - \delta_V) V F_V + (r - \delta_D) D F_D - r F = - F_t$$

- Depois coloca as cc. (note que tem dois gatilhos, V^* e D^*), etc.

- ◆ Mas existe uma maneira bem mais simples: a redução da dimensionalidade devido à homogeneidade (vale p/ MGBs)

→ DP (cap. 6, seção 5) mostra caso similar (mas com P em vez de V)

Simplificação do Modelo: Homogeneidade

- ◆ Podemos tratar V e D estocástico com o mesmo modelo unidimensional anterior (com pequenas adaptações)

- ◆ Isso é possível devido a homogeneidade de grau 1 da opção F em relação a V e D: $F(c \cdot V, c \cdot D) = c \cdot F(V, D)$

$$\rightarrow F(V, D, t) = D \cdot F/D(V/D, 1, t) = D \cdot f(p, 1, t) \quad ; \quad \text{onde:}$$

$$f = F/D \quad (\text{valor da opção por unidade de investimento})$$

$$p = V/D \quad (\text{valor do projeto por unidade de investimento})$$

- ◆ Assim, temos uma opção f sobre uma única variável estocástica p, com preço de exercício = 1.
- ◆ O gatilho normalizado $p^* = (V/D)^*$ é homogêneo de grau 0 em V e D (vale p/ MGBs, ver McDonald & Siegel, 1986).
 - Isso significa que a regra $p^* = (V/D)^*$ permanece válida para *qualquer* V e D. O gatilho $(V/D)^*$ só muda se mudar um ou mais *parâmetros do processo estocástico neutro ao risco* r, δ, σ .
 - Isso simplificará muito um caso que combina incertezas técnicas.

Redução da Dimensionalidade da EDP

◆ Seguindo passos similares a DP (p. 210), i. é, derivando $F(V, D, t) = D f(p, 1, t)$ para achar $F_V, F_{VV}, F_D, F_{DD}, F_{VD}$ e F_t , e substituindo na EDP anterior $F(V, D, t)$, obtém-se a seguinte EDP para a opção normalizada $f = F/D$:

$$\frac{1}{2} \sigma_T^2 p^2 f_{pp} + (\delta_D - \delta_V) p f_p - \delta_D f = -f_t$$

Obs: Em geral se assume que o “dividend yield” do custo D é a taxa de juros, i. é, $\delta_D = r$, mas poderia usar outro valor (ex.: $\delta_D = \mu_D - \alpha_D$)

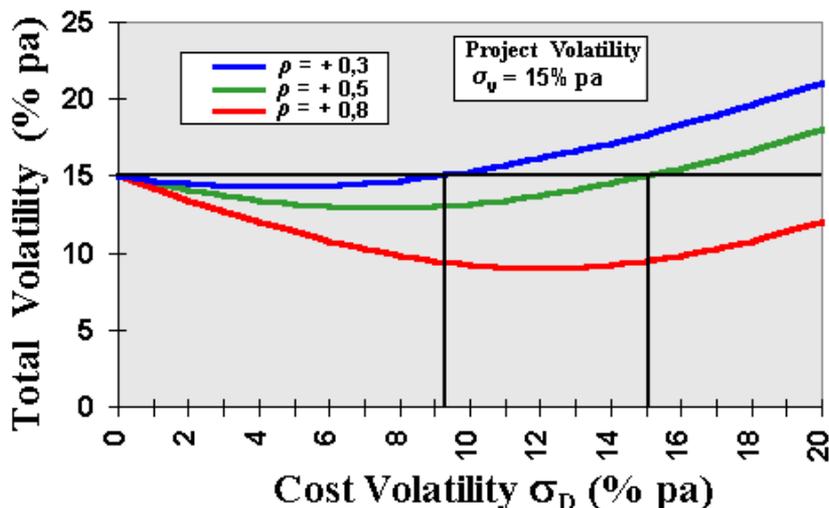
◆ Onde aparece a volatilidade total (da razão p) ao quadrado:

$$\sigma_T^2 = \sigma_V^2 + \sigma_D^2 - 2\rho\sigma_V\sigma_D$$

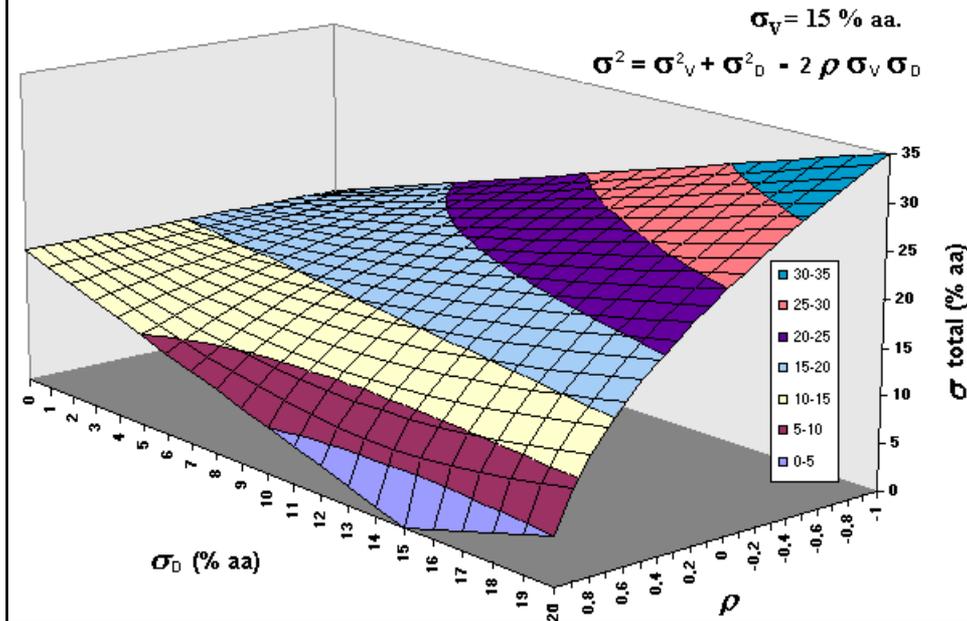
- ◆ Esse tipo de recurso (homogeneidade) foi usado em opções perpétuas (McDonald & Siegel, 1986; DP) e em opções finitas (Myers & Majd, 1990). Em D&P é para P (em vez de V).
- ◆ Logo, uma planilha como a “Timing” resolve o problema com V e D estocásticos, usando volatilidade σ_T , investim. = 1, etc.

Efeito da Incerteza do Custo na Incerteza Total

- ◆ A introdução da incerteza do custo D pode até reduzir a incerteza total σ_T (desde que $\rho > 0$ e σ_D não seja muito alto)
 - Em muitos casos, mesmo com $\rho > 0$, σ_T aumenta e, logo, ↑ a espera



O Efeito da Incerteza do Custo D (3D)



O Efeito da Incerteza no Custo

- ◆ O efeito da introdução dessa segunda fonte de incerteza econômica (em adição a incerteza de V):
 - O efeito tanto na regra de decisão como no valor da opção de investir será determinada pela volatilidade total (comparada com a volatilidade só de V)
 - Para o caso geral de correlação positiva e da volatilidade de D menor que a de V, a volatilidade total σ_T pode ser próxima de σ_V (pode até ser um pouco menor)
 - Se a correlação fosse negativa, a volatilidade total sempre aumentaria com a volatilidade do custo D.
 - Se as volatilidades individuais de V e D forem iguais e se a correlação for positiva perfeita ($\rho = +1$), então a volatilidade total é zero! Não há incerteza?
 - ➔ V e D oscilam, mas V/D não oscila! Ou seja, se o VPL for positivo, ele sempre será positivo e não há valor na espera.

Considerações e Extensões do Modelo

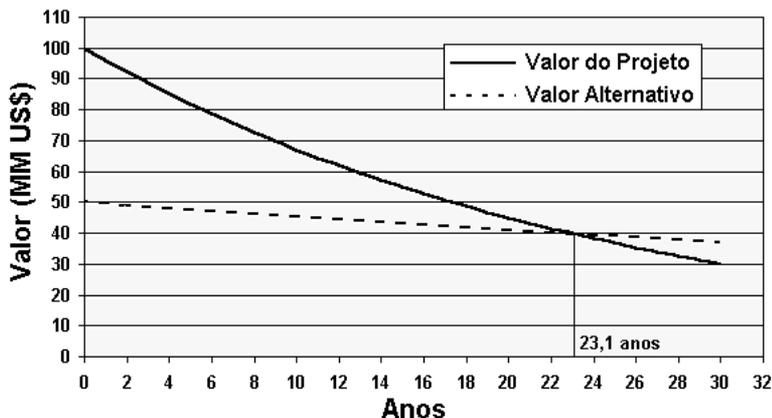
- ◆ Se em vez do quociente $p = V/D$ tivéssemos um produto $s = x.y$ (ex.: x seria o preço em R\$, y a taxa de câmbio US\$/R\$ e $s = x y$ o preço em US\$), onde x e y seguissem MGBs correlacionados, a volatilidade total σ seria:

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y$$

- Aqui ao contrário do caso anterior, as correlações positivas aumentam a volatilidade total.
- ◆ O modelo de V e D estocástico (analogia com a “call”) pode ser estendido para o caso de opção de abandono (analogia com a “put”) em que tanto o valor do projeto (V) como o valor de uso alternativo (E) são estocásticos. Na verdade é uma *opção de troca* (“switch”) entre dois ativos de risco V e E
 - Pode usar o mesmo software, explorando a simetria *call-put*

Valor do Projeto e de Uso Alternativo

- ◆ Suponha que o valor corrente do projeto tem a tendência de cair exponencialmente, assim como o de uso alternativo, mas com diferentes taxas de declínio. Mas existem incertezas
 - Ex.: navio petroleiro atuando em transporte de petróleo tem uso alternativo convertendo para unidade estacionária de produção de petróleo na Bacia de Campos (caso famoso do navio P.P. Moraes).



Opções de Abandono e de Mudança de Uso

- ◆ Modelo de opção de mudança de uso de Myers & Majd (1990): analogia com uma opção de venda americana
 - O valor V do ativo/projeto segue um MGB. O projeto pode ser abandonado e os ativos serem usados em um outro projeto. O valor alternativo E também é estocástico e segue um MGB.
- ◆ A planilha Excel “Timing” também resolve esse caso:
 - Reduzir a dimensionalidade (de 2 para 1 variável estocástica) considerando valores normalizados $p = V/E$, opção $f = F/E$, volatilidade total, preço de exercício normalizado = 1, etc.
 - Com o conceito de simetria entre opções americanas de call e put (inverte p com 1 e δ_V com δ_E [ou r]), pode-se obter o gatilho p^* de exercício da opção de troca e o valor da opção f .
- ◆ Assim, a mesma planilha resolve OR tradicional (call) de espera em projeto e opção de abandono para uma variável estocástica ou para duas variáveis estocásticas.

Abandono: Modelo de Entrada e Saída

- ◆ Esse modelo “histerese” ou de “entrada-saída” (cap. 7 do D&P) considera a interação entre a decisão de investir (“entrada”) e de abandonar (“saída”), de forma que se abandonar tem a opção de investir de novo.
 - Modelo de Brennan & Schwartz (1985) melhorado por Dixit.
- ◆ É um modelo de opções compostas:
 - Se investir tem a opção de parar temporariamente ou de abandonar; se parar tem a opção de reativar ou de abandonar; se abandonar tem opção de reinvestir. No caso mais geral (seção 2) tem 4 gatilhos: entrada, saída, parada e reativação
 - São considerados custos de mudar de status operacional: custo fixo + custo de preservação em caso de parada temporária (shut-down); custo fixo de reativar; custo fixo de abandono.
- ◆ Cap.7, seção 1: pode ser escolhido para trabalho de aluno(s). A metodologia é similar à do DP, cap. 6, que será apresentada agora (F em função de P , em vez de V).

Projeto com Opção de Shut-Down

- ◆ Seguindo DP, cap. 6, seção 2, veremos agora um modelo de opção em função da variável mais básica, o preço P .
 - Primeiro será visto o $V(P)$ com *opção de parada temporária* (opção de “shut-down”) e depois a opção composta: opção $F(P)$ (call) de investir I num projeto $V(P)$ com opção de shut-down
 - ➔ A análise é feita backwards: primeiro analisa o caso de já ter investido no projeto $V(P)$ (com opção de shut-down) e depois se analisa a opção de investir nesse projeto $F(P)$.
 - Esse exemplo simples também irá ilustrar o caso de EDO $p/ V(P)$ com um termo adicional devido ao fluxo de caixa.
- ◆ Por simplicidade, assuma que o projeto tem uma vida *infinita*, produz uma unidade por ano que é vendida por um preço $P(t)$, que segue um MGB. Além disso:
 - Existe um custo operacional C (determinístico) para produzir uma unidade. Logo, o fluxo de lucro da produção é $P - C$.

Projeto $V(P)$ com Opção de Shut-Down

- ◆ Sem a opção de shut-down, o valor desse projeto $V(P)$ de vida infinita é (lembrar que P cresce à taxa α no MGB):

$$V(P) = \int_0^{\infty} [(P e^{\alpha t} e^{-\mu t}) - (C e^{-r t})] dt = \frac{P}{\mu - \alpha} - \frac{C}{r} = \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$$

- ◆ Exercício: mostre que se obtém o mesmo resultado se usar a tendência *neutra ao risco* ($r - \delta$) em vez de α , e a taxa de desconto livre de risco r (em vez de μ). Por que?
- ◆ Agora considere que existe uma *opção de shut-down* sem custo (nem para parar e nem para voltar a produzir), de forma que essa opção é sempre exercida quando $P < C$.
 - Logo, o fluxo de lucro com opção é: $\pi(P) = \max\{P - C, 0\}$
- ◆ Agora iremos deduzir a EDO de $V(P)$ pelo método dos *contingent claims*. Note que tanto V como P têm dividendos.
 - Para tal, considere o portfólio: $\Phi = V - n$ unidades de P

EDO de V(P) por Contingent Claims

- ◆ A carteira sem risco é: $\Phi = V - n P$ (com uma escolha *conveniente* de n para torná-la sem risco)
- ◆ No intervalo dt , o retorno é: $r \Phi dt = r (V - n P) dt$
- ◆ Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:
 - Agora V varia (dV) e também distribui dividendos $\pi(P) dt$
 - O retorno de P em dt é a soma do ganho de capital dP com o dividendo $\delta P dt$, onde δ é o *convenience yield*.
 - ➔ Convenience yield pode ser estimado com o *mercado futuro*
 - Logo, retorno da carteira = $dV + \pi dt - n (dP + \delta P dt)$
 - Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r (V - n P) dt = dV + \pi dt - n (dP + \delta P dt)$$
 - Agora precisamos de dV : expansão com o Lema de Itô

EDO de V(P) por Contingent Claims

- ◆ Note que $V(P)$ não é função do tempo (produção perpétua) $\Rightarrow \partial V / \partial t = V_t = 0 \Rightarrow$ Lema de Itô p/ dV , é:

$$dV = V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2$$
 - Para obter $(dP)^2$, basta elevar ao quadrado a equação do MGB, $dP = \alpha P dt + \sigma VP dz$. Logo, $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$
 - Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

$$dV = V_P dP + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} dt$$
 - Substituindo a equação de dV na eq. do retorno de Φ

$$r (V - n P) dt = V_P dP + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} dt + \pi dt - n (dP + \delta P dt)$$

$$\Rightarrow r (V - n P) dt = (V_P - n) dP + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} dt + \pi dt - n \delta P dt$$
 - Mas para essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dP . Para tal, faz $n = V_P$
 - *Algebrando* se chega à EDO com o termo de cash-flow π :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta) P V_P - r V + \pi = 0$$

Equação Diferencial Ordinária de V(P)

- ◆ Essa EDO tem uma *parte homogênea* (em V, em azul) e uma *parte não-homogênea* (em vermelho):

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta) P V_P - r V + \pi = 0$$

- A parte homogênea tem *solução geral* do tipo $A P^\beta$ que deve ser somada a alguma *solução particular* devido à parte não-homogênea. Uma simples substituição mostra que a solução $P/\delta - C/r$ atende a EDO (típico).
- ◆ Como $\pi = 0$ quando $P < C$ e $\pi > 0$ quando $P > C$, a solução será dividida em duas regiões de valores de P:
 - Na região $P < C$, o “cash-flow” desaparece e a solução é:
 - $V(P) = K_1 P^{\beta_1} + K_2 P^{\beta_2}$; onde $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$ são raízes da eq. quadrática (ver parte 3): $\frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + (r - \delta) \beta - r = 0$
 - Na região $P > C$, soma-se as soluções geral e particular:
 - $V(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r$; (β_1 e β_2 são os mesmos)

V(P) e Condições de Contorno

- ◆ As cc. determinarão as constantes K_1, K_2, B_1 e B_2 .
 - No caso de $P < C$, se P ficar próximo de 0 o valor de V deve tender a zero também. Para isso é necessário que $K_2 = 0$ (caso contrário o termo com o expoente negativo β_2 iria a infinito);
 - No caso de $P > C$, se P for muito grande o valor de V deve ficar apenas um pouco maior que o fluxo de caixa $P/\delta - C/r$, pois a opção de shut-down torna-se muito menos valiosa. Assim, é necessário que $B_1 = 0$ (caso contrário o termo “de opção” com o expoente positivo β_1 se tornaria cada vez maior com P).
 - Termos do tipo $A P^\beta$ são termos de *opção* (aqui de “shut-down”).
- ◆ Logo, o valor do projeto implantado V(P) se reduz a:

$$V(P) = \begin{cases} K_1 P^{\beta_1} & \text{se } P < C \\ B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} & \text{se } P > C \end{cases}$$

- ◆ Interpretação: se $P < C$, V(P) é o valor da *opção de reativar a produção* (já que existe probab. de P voltar a ser $> C$); já se $P > C$, além do fluxo de caixa, existe a *opção de shut-down* se P vier a cair

V(P) e Condições de Contorno

- ◆ Para determinar as constantes restantes (K_1 e B_2) usaremos cc. similares às *condições de continuidade e de suavidade* no valor de gatilho, que aqui é $P^{**} = C$
 - Por continuidade em $P = C$, podemos igualar as duas eqs. de $V(P)$: $K_1 C^{\beta_1} = B_2 C^{\beta_2} + C/\delta - C/r$
 - As derivadas em $P = C$ também devem ser iguais para as duas eqs. de $V(P)$ (função deve ser suave, sem quinhas):
 $\Rightarrow \beta_1 K_1 C^{\beta_1 - 1} = \beta_2 B_2 C^{\beta_2 - 1} + 1/\delta$;
 - ➔ Teorema: se $V(P)$ é função contínua e P segue um MGB, então $V(P)$ é duplamente diferenciável (C^2) em relação a P .
- ◆ Temos duas variáveis e duas equações *lineares*. Logo:
$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right) \quad \Bigg| \quad B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right)$$
- ◆ Note que essas constantes tem de ser *positivas* para as opções também serem positivas (DP mostra isso matematicamente).

Valor da Opção de Investir em V(P)

- ◆ O valor da opção perpétua $F(P)$ de investir I no projeto $V(P)$ e a regra ótima de investimento (gatilho P^*) segue os passos usuais (portfólio $\Phi = F - n P$; lema de Itô, etc.)
 - Note que iremos escrever $F(P)$ e não $F(V)$, por ser mais fácil:
$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 F_{PP} + (r - \delta) P F_P - r F = 0$$
 - Note que a opção F (ao contrário de V), não tem termo de fluxo de caixa. De novo, a solução é do tipo: $F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$
 - ➔ De novo, com a cc. $F(P = 0) = 0$ (barreira absorvente) $\Rightarrow A_2 = 0$.
- ◆ Naturalmente a opção não deve ser exercida se $P < C$:
 - Não tem sentido exercer a opção (gastar I) apenas para ficar esperando o preço melhorar, sem produzir.
 - Assim, deve ser considerada apenas a região de $V(P)$ em que tem $P > C$ para a busca do valor do gatilho de investimento P^*
 - ➔ Ou seja, $P^* > C$ (na verdade $P^* > C + r I$, o custo de Marshall);
 - ➔ Assim, se exercer a opção em P^* : $F(P^*) = B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r - I$

Valor da Opção F(P) e Gatilho P*

- ◆ As cc. de continuidade e suavidade no gatilho P* irão determinar o valor do gatilho P* e da constante A₁, que dá o valor da opção (pois $F(P) = A_1 P^{\beta_1}$). As cc. são:

$$F(P^*) = A_1 (P^*)^{\beta_1} = B_2 (P^*)^{\beta_2} + P^*/\delta - C/r - I$$

$$\beta_1 A_1 (P^*)^{\beta_1 - 1} = \beta_2 B_2 (P^*)^{\beta_2 - 1} + 1/\delta$$

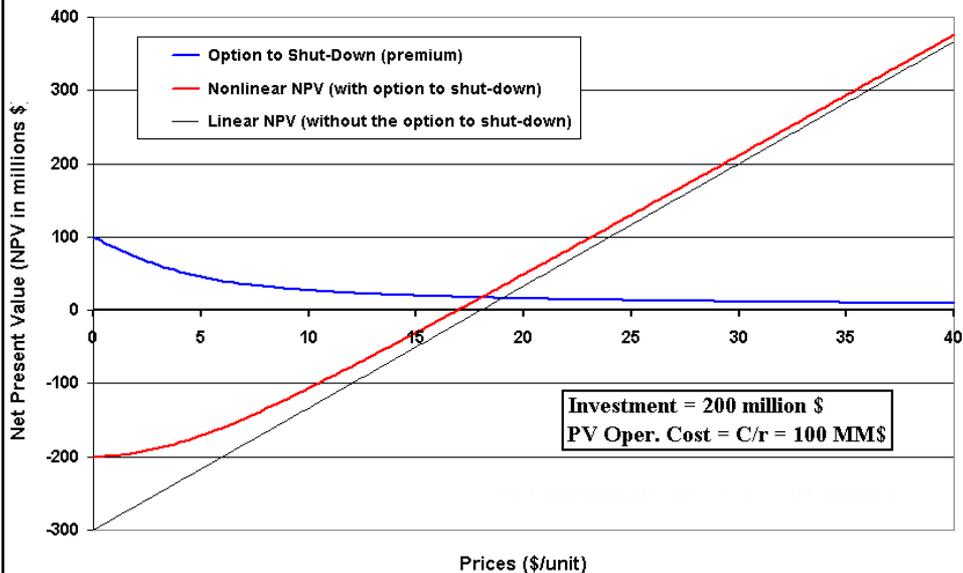
- Como B₂ é conhecido, temos duas equações e duas incógnitas (P* e A₁). Eliminando A₁, obtém-se a equação não-linear de P*:

$$(\beta_2 - \beta_1) B_2 (P^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1) P^*/\delta - \beta_1 (C/r + I) = 0$$

- Essa equação tem solução única $P^* \geq C/r + I$ e pode ser obtida por métodos numéricos simples de rápida convergência (3 a 5 iterações) tais como o *método de Newton-Raphson*:
 - Pasta 76: explicação intuitiva do método de Newton-Raphson.
- Com P*, substituindo numa das cc., se obtém A₁ e, logo, F(P).
- Planilha [dp-chapter6-2.xls](#) calcula a opção F(P), o gatilho P*, a função $VPL = V(P) - I$ com e sem a opção de shut-down, etc.

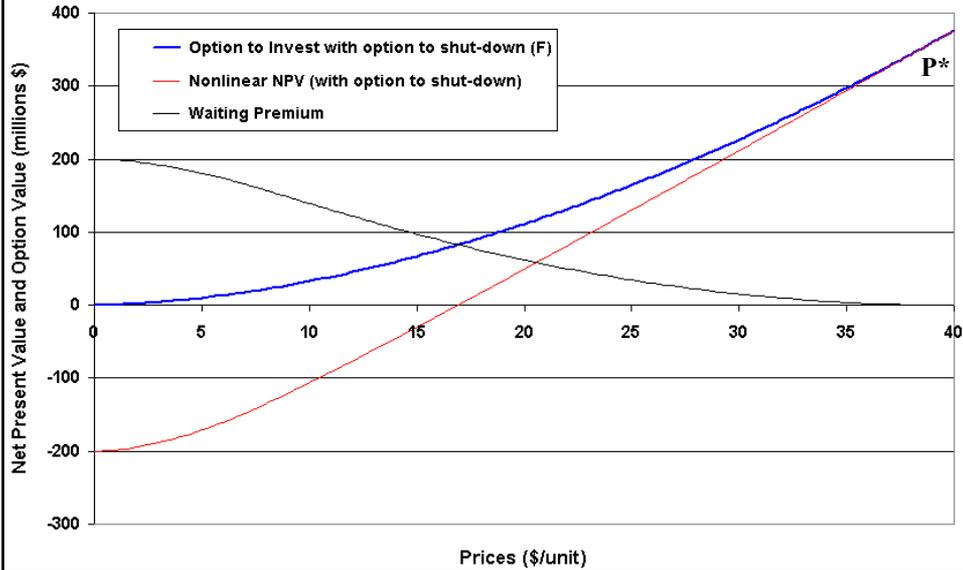
VPL Com e Sem Opção de Shut-Down

- ◆ Note que a opção é mais valiosa para baixos preços P



Opção de Investir em V(P) com Opção de Shut-Down

- ◆ Note a suavidade do contato da opção com a curva do VPL em P^* . Note também a variação com P do prêmio da espera.



Opção de Investir Sem Opção de Shut-Down

- ◆ Suponha agora que não existe a opção de shut-down quando $P < C$. Logo, desaparecem na função $V(P)$ os termos de opção (do tipo $A P^{\beta_1}$). Nesse caso sem opção:

$$V'(P) = P/\delta - C/r$$

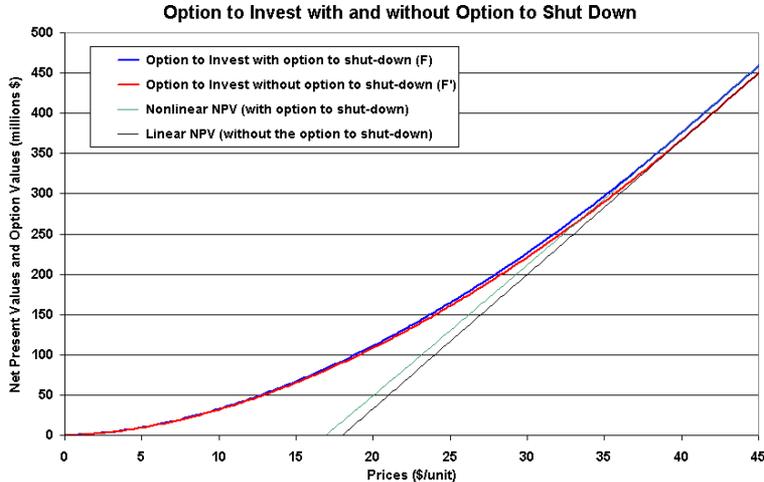
- É fácil ver que a EDO da opção de investir em $V'(P)$, i. é, $F(P)$ é exatamente a mesma do caso anterior (típico, pois o processo estocástico de P é o mesmo, F não tem cash-flow)
- A mudança se dá nas cc. Seja $F'(P)$ o valor da opção de investir em $V'(P)$. A solução da EDO é $F'(P) = A_3 P^{\beta_1}$, com o gatilho P^* e a constante A_3 sendo (exercício: verificar):

$$P^* = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \right) \left(\frac{C}{r} + I \right) \delta \quad \left| \quad A_3 = \frac{\frac{P^*}{\delta} - \left(\frac{C}{r} + I \right)}{(P^*)^{\beta_1}} \right.$$

- ◆ Compare com a solução da opção perpétua $F(V)$ e V^* da parte 3. Note que coincidem se fizer $V^* = P^*/\delta$ e com $I' = C/r + I$.

F(P) Com x Sem Opção de Shut-Down

- ◆ O gráfico mostra o efeito da opção de shut-down no valor da opção (aumenta, pois V aumenta) e no gatilho (reduz a espera).
 - Com opção de shut-down: $P^* = 39,85$ \$/unidade; $F(P = 35) = 297,4$ MMS
 - Sem opção de shut-down: $P^* = 41,74$ \$/unidade; $F(P = 35) = 290,3$ MMS



Interações Entre Opções Reais

- ◆ O caso anterior mostrou que, na presença da opção de espera, o efeito da opção de shut-down é pequeno.
 - A opção de espera está deep-in-the-money se $P \gg C$ e assim a opção de shut-down está distante probabilisticamente;
 - Caso a opção de espera não esteja deep-in-the-money, o valor da opção de shut-down é ainda menor, pois só existe se investir e a probab. de investir no projeto é pequena, precisa de $P \gg C$
 - O mesmo raciocínio vale para a opção de abandono.
 - Tese de doutorado de Bjerksund (1988) para campos de petróleo: o erro é pequeno se desprezar opções operacionais (ex.: abandono) na presença da opção de espera.
- ◆ O valor incremental de uma opção adicional é em geral menor do que seu valor isoladamente, e declina quanto mais opções já tiverem sido consideradas. Ref.: Trigeorgis, 1993.
 - Mas nem sempre é desprezível (ex.: opção de expansão de projeto piloto)

Interações Entre Opções

- ◆ Em um projeto podem coexistir várias opções relevantes
 - Jazidas maduras: necessário considerar as opções operacionais (modelo de histerese, cap. 7). Projeto piloto: investimento pequeno.
- ◆ O grau de aditividade entre as opções reais depende:
 - Se são opções do mesmo tipo (ex.: duas “call”) ou de tipos diferentes (ex.: uma “call” e uma “put”);
 - Do intervalo de separação entre as datas de exercício;
 - Se as opções estão “deep”, “out” ou “in-the-money”;
 - A ordem seqüencial das opções.
- ◆ O sinal da interação pode ser positivo (presença de outras opções aumenta valor da primeira) ou negativo:
 - Positivo: se a primeira é uma opção de compra;
 - Negativo: se vem primeiro uma opção de venda.
- ◆ Opções substitutas e opções complementares
 - Substitutas: reduz o *prêmio* da primeira. Ex.: espera + abandono.
 - Complementares: aumenta a 1ª. Ex.: shut-down + expansão

Opções Inerentes e Opções Criadas

- ◆ Opções inerentes não necessitam de ações para serem obtidas ou mantidas, precisa apenas serem identificadas e gerenciadas adequadamente.
 - Exs.: opções de investir em novos projetos; opção de abandonar um projeto; opção de parada temporária de uma unidade produtiva; opção de expansão; etc.
- ◆ Opções criadas precisam de ações ou investimentos para existirem. Exemplo típico é investir em P&D:
 - Ex.: Investimento em duas tecnologias concorrentes para atender uma demanda atual ou latente. Valoração: “opção de máximo de dois ativos de risco”. No futuro a opção mais valiosa será exercida (desenvolvida).
 - Usa a analogia com opção exótica de máximo de 2 ativos, do tipo européia: só pode exercer após se capacitar (leva 1 ano)
 - Essa opção exótica tem solução analítica conhecida (usa a função distribuição normal *bivariada* acumulada).

Opção de Máximo de Dois Ativos de Risco

◆ O valor da opção de compra sobre o máximo de 2 ativos de risco na expiração é $F_{\max}(T) = \max\{\max\{V_1, V_2\} - I, 0\}$

- Esse é um tipo particular da opção exótica chamada (“two-color”) *rainbow options*, que inclui a opção de mínimo entre dois ativos de risco, com $F_{\min}(T) = \max\{\min\{V_1, V_2\} - I, 0\}$

◆ No caso de V_1 e V_2 seguirem MGBs com correlação ρ , o valor de uma opção européia $F_{\max}(t = 0)$ é dada por:

$$F_{\max}(V_1, V_2; I, T) = V_1 e^{-\delta_1 T} NN(y_1, d; \rho_1) + \\ + V_2 e^{-\delta_2 T} NN(y_2, -d + \sigma T^{1/2}; \rho_2) - \\ - I e^{-r T} [1 - NN(-y_1 + \sigma_1 T^{1/2}, -y_2 + \sigma_2 T^{1/2}; \rho)]$$

- Onde: $NN(a, b; \rho)$ é a distribuição acumul. Normal *bivariada* padrão (probab. que $V_1 < a$ e $V_2 < b$, com corr. ρ , ver Pasta 76); e:

$$d = \left[\ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) + \left(\delta_1 - \delta_2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right] \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \quad \left| \quad y_1 = \left[\ln \left(\frac{V_1}{I} \right) + \left(r - \delta_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) T \right] \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{T}} \quad \left| \quad y_2 = \left[\ln \left(\frac{V_2}{I} \right) + \left(r - \delta_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) T \right] \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{T}} \right.$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \rho \sigma_1 \sigma_2} \quad \rho_1 = \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \quad \rho_2 = \frac{\sigma_2 - \rho \sigma_1}{\sigma}$$

Opções de Tecnologias Concorrentes

◆ O investimento em P&D de duas tecnologias concorrentes pode ser valorado como sendo pelo menos o valor da opção sobre o máximo de dois ativos de risco.

◆ Exemplo: tecnologia ISDN x ADSL para linhas de cobre

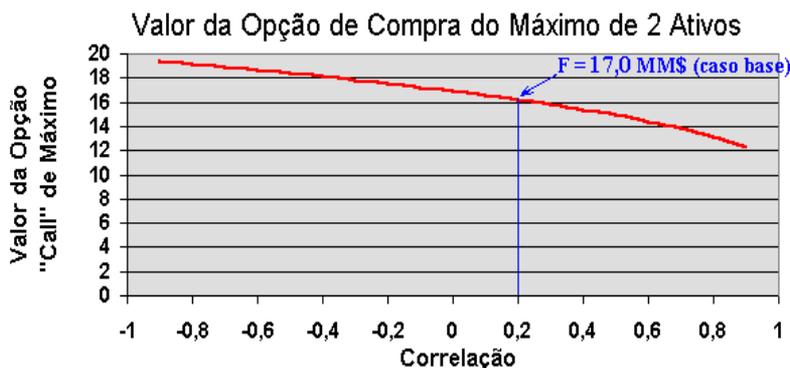
- Inspirado num caso real (1998). Uma operadora de telefonia fixa está avaliando as tecnologias ISDN e ADSL, que permitem o melhor aproveitamento de banda com a malha de linhas de cobre existente.
- Até quanto vale a pena gastar para ter a capacitação que permita daqui a um ano implantar em um grande mercado?
 - Esperar mais de 1 ano: estudo indica a entrada de concorrentes
- Suponha que após a capacitação (leva 1 ano), exista um projeto de desenvolvimento com investimento $D = \$100$ milhões usando a melhor tecnologia. VPL de desenvolvimento é $VPL = V - D$.
- Suponha que a tecnologia ISDN hoje teria um valor $V_1 = \$105$ milhões, enquanto que a tecnologia ADSL geraria $V_2 = 95$ milhões. Os futuros valores de V_1 e V_2 são incertos e seguem MGBs, com volatilidades $\sigma_1 = 20\%$ aa., $\sigma_2 = 25\%$ aa. e correlação $\rho_{1,2} = +0,2$.

ISDN x ADSL: Opção de Máximo

- ◆ Suponha ainda que já existe capacitação na operadora para desenvolver a tecnologia ISDN, mas a sua implantação exclui a tecnologia ADSL que poderá vir a ser a melhor alternativa.
 - Assim existe um custo de oportunidade δ de não implantar a tecnologia ISDN que é adiar os seus fluxos de caixa positivo.
 - Suponha que para a ISDN, temos esse custo de oportunidade igual a $\delta_1 = 10\%$ aa.; enquanto que para a ADSL esse custo de oportunidade é zero ($\delta_2 = 0$) pois ainda não existe capacitação
 - Suponha ainda que a taxa de juros (*after-tax*) $r = 8\%$ aa.
- ◆ Quanto vale a opção ($F_{1,2}$) de desenvolver essa tecnologia e escolher a melhor daqui a um ano? Essa opção vale mais ou menos que ter apenas a opção americana (1 ano) de usar a tecnologia ISDN?
- ◆ O VPL do investir logo na tecnologia ISDN e o seu valor de opção (1 a.) valem $VPL_1 = V_1 - D = 105 - 100 = \$ 5 \text{ MM}$; $F_1 = 10,28 \text{ MM}$
- ◆ Usando o programa de opções do máximo de 2 ativos de risco, tem-se: $F_{1,2} = \$ 17,02 \text{ milhões} > F_1 > VPL_1 \Rightarrow$ O melhor é se capacitar
- ◆ Se pagaria na capacitação até $F_{1,2} - F_1 = \$6,74 \text{ milhões}$

Efeito da Correlação na Opção de Máximo

- ◆ O gráfico mostra a variação no valor da opção do máximo de duas tecnologias do exemplo anterior
 - Assinalado o caso base com correlação $\rho = + 0,2$
 - É provável que a correlação seja positiva, já que uma recessão ou uma expansão afeta o valor das duas tecnologias
 - Existem outros fatores de incerteza, específicos do desenvolvimento das tecnologias (correlação não é perfeita)

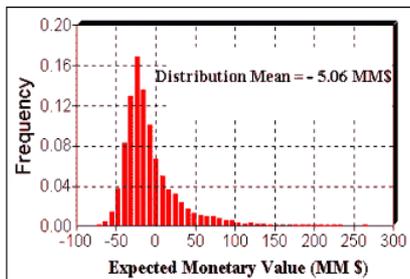


Opções Tipo Européias: Soluções

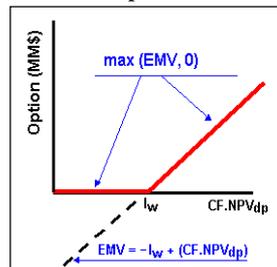
- ◆ Soluções analíticas para *opções européias exóticas* abundam na literatura. Por ex., opções compostas européias (call sobre call, call/put, put/call e put/put).
 - Essas fórmulas assumem que o(s) ativo(s) seguem MGB(s).
 - No entanto, em opções reais, às vezes queremos mudar algum detalhe e com isso pode não existir solução analítica conhecida.
 - Por ex., no caso anterior, foi considerado que o investimento I (preço de exercício de $F_{\text{máx}}$) é o mesmo para os dois ativos.
- ◆ Uma alternativa mais flexível (uso geral) especialmente para opções européias é usar a simulação de Monte Carlo *neutra ao risco* do(s) processo(s) estocástico(s) em T, aplicar a regra de exercício ótimo em T para cada interação e descontar com a taxa livre de risco.
 - Ex. de payoff em T: $F_{\text{máx}}(T) = \max\{\max\{V_1 - I_1, V_2 - I_2\}, 0\}$

Equação Visual para Opções Reais

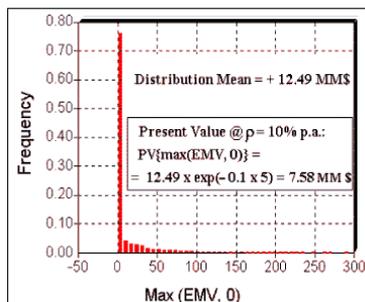
- ◆ O VME dum prospecto exploratório é negativo, mas existem **5 anos** para a decisão de perfurar o pioneiro e cenários serão revelados pela atividade exploratória na bacia.



+



=



Valoração do Prospecto

(em milhões \$)

Valor Tradicional = - 5

Valor de Opção (T) = + 12,5

Valor de Opção (@ t=0) = + 7,6

Valor de 7,6 é um limite inferior, pois a OR pode ser exercida antes (americana)

Simulação de Monte Carlo e Opções

- ◆ O método de Monte Carlo faz simulação (forward) e não otimização (backward). Mas se tivermos a regra ótima de exercício, o método de MC é mais fácil e mais flexível.
 - Até pouco tempo atrás só era usado o método de MC em opções do tipo européia, pois tem regra clara de exercício ótimo em T.
 - ➔ Mas se tivermos a curva de gatilho antes, podemos valorar a OR do tipo americana, por ex., combinando várias incertezas.
 - Recentemente (de 1993 para cá) começaram a surgir métodos de otimização viáveis para serem acoplados à simulação de MC, de forma a poder usar com opções do tipo americana.
 - Embora alguns dos métodos para opções americanas ainda sejam +- complexos, eles começam a ser usados em opções reais
 - ➔ Um método que vem se tornando popular é o de Longstaff & Schwartz (mínimos quadrados). Mas existem mais de 10 métodos
 - Para opções européias (exceto as *path dependent*), podemos simular V apenas na expiração. Nas outras, devemos simular todo o caminho

Opção Real Européia por Simulação

- ◆ Podemos ver esse problema como sendo a avaliação de uma integral usando a simulação para avaliá-la
 - Seja uma opção européia de compra C que expira em T avaliada no instante t, quando o valor do ativo básico é V_t .
 - Sejam: $E_t[\cdot]$ a expectativa neutra ao risco do payoff condicional a informação em t; $p(V_T, T | V_t, t)$ a *densidade de probabilidade neutra ao risco* de V_T ; preço de exercício K ; e taxa livre de risco r . O valor da opção é a avaliação da integral atualizada:

$$C(V_t, t) = e^{-r(T-t)} E_t[\text{payoff}(V_T)] \Rightarrow$$

$$C(V_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max(V_T - K, 0) \cdot p(V_T, T | V_t, t) dV_T$$

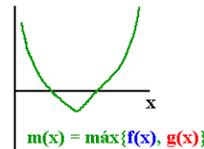
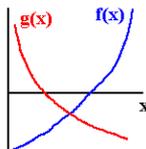
- ◆ Ou seja: se simula a distribuição neutra ao risco de V (lognormal com a média “neutra ao risco”), se aplica a regra de decisão em T e atualiza usando a taxa r. Faz isso para cada amostra NR de V. □

Incerteza em Funções Côncavas e Convexas

- ◆ O efeito da incerteza em funções depende se a função é linear, côncava ou convexa. Esse efeito pode ser mostrado com o *lema de Itô* ou com a *desigualdade de Jensen*.
 - Desigualdade de Jensen: se x é variável aleatória (v.a.) e $f(x)$ é uma função (estritamente) *convexa* de x , então:
$$E[f(x)] > f(E[x])$$
 - ➔ Logo, se o valor esperado de x permanece o mesmo, mas sua variância aumenta, então $E[f(x)]$ aumenta.
 - ➔ Se $g(x)$ é função (estritamente) *côncava* de x , e x for v.a., basta inverter a desigualdade: $E[g(x)] < g(E[x])$
 - ➔ Se $h(x)$ é função *linear* da v.a. x , então: $E[h(x)] = h(E[x])$
- ◆ Ex. (DP, p.49): r é a taxa de desconto e a perpetuidade $f(r)$ de \$1 é $1/r$. Se $r = 10\% \Rightarrow 1/r = \10 . Se r é v.a. com distribuição discreta $\{r = 5\% \text{ com } 50\% \text{ chances; } r = 15\% \text{ com } 50\% \text{ chances}\}$, i. é, $E[r] = 10\%$, o $E[\cdot]$ da perpetuidade é maior que \$10: $E[f(r)] = 50\% (1/0,05) + 50\% (1/0,15) = 13,33 > 10$

Efeito da Incerteza no Valor da Opção

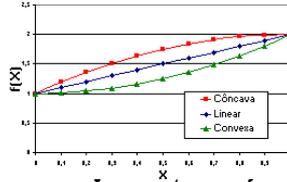
- ◆ Como a opção real F é geralmente uma função *convexa do ativo básico V* , um aumento na incerteza (volatilidade), aumenta o valor da opção.
 - Ex.: no caso de opção de compra perpétua, a função $F(V)$ é uma *função potência convexa* $F = A V^{\beta}$, com A positivo
 - A função $F(V, t = T) = \max\{V(T) - I, 0\}$ é *convexa* em V .
 - A **função máximo de uma função com v.a.** geralmente é *convexa*, explicando o *valor da espera* (DP, p.98). Já o *custo da espera* é dado pelo efeito do fator de desconto sobre $V - I$.
 - ➔ Lembrar da parte 3: $E[\max\{V(t) - I, 0\}] \geq \max\{E[V(t)] - I, 0\}$
 - $\max\{\text{exercício imediato}, e^{-r \Delta t} E[\text{espera}]\}$ ou, em geral, a função $m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ é convexa em x se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções lineares ou convexas em x .



Efeito da Incerteza e o Lema de Itô

- ◆ No caso de funções contínuas 2 vezes diferenciáveis (\mathcal{C}^2):

- F(x) é **côncava** se $\partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx} < 0$
- F(x) é **linear** se $\partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx} = 0$
- F(x) é **convexa** se $\partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx} > 0$



- ◆ A desigualdade de Jensen é tornada **precisa** através do **lema de Itô** (termo *derivada segunda*). Ex.: MGB:

- $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$. Seja $\alpha = 0 \Rightarrow dx = \sigma x dz \Rightarrow E[dx] = 0$
- Mas para uma função F(x) qualquer, $E[dF(x)] \neq 0$. Note que dF é dada pelo lema de Itô, que resulta em (DP, p.80):

$$dF = [0,5 \sigma^2 x^2 \partial^2 F / \partial x^2] dt + [\sigma x \partial F / \partial x] dz$$

- Logo, $E[dF] > 0$ se $\partial^2 F / \partial x^2 > 0$, i. é, se F(x) for *convexa*; e
- $E[dF] < 0$ se $\partial^2 F / \partial x^2 < 0$, i. é, se F(x) for *côncava* em x.
- O Lema de Itô *quantifica* o efeito ($= [0,5 \sigma^2 x^2 \partial^2 F / \partial x^2] dt$), que é maior quanto maior for a incerteza (medida por σ).

Simulação em Funções Convexas

- ◆ Agora vamos “ver” o lema de Itô e a desigualdade de Jensen usando a simulação de funções de v.a.

- ◆ Nas equações de simulação de processos estocásticos freqüentemente aparecem termos do tipo:

- $P(t) = P(t-1) \exp\{\dots + \dots N(0, 1) \dots\}$
- Como a **função exponencial é convexa**, o “valor esperado” estático (valor mostrado na planilha antes da simulação) é menor do que o valor esperado dinâmico (valor esperado da distribuição obtida após a simulação). Ver a [simulação](#).
 - Se $X = \exp(Y)$ e $Y \sim N(m; v)$, sendo $m =$ média e $v =$ variância, então $X \sim \text{LogN}(\exp[m + 0,5 v]; \exp[2 m + v] \cdot \{\exp[v] - 1\})$.
 - Lembrar da parte 3: $p = \ln(P) \Leftrightarrow P = \exp(p)$ e pelo *lema de Itô*: $dp = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz \Leftrightarrow dP/P = \alpha dt + \sigma dz$. Sabemos que $P \sim \text{Lognormal}$, $dp \sim \text{Normal}$ e $dP/P \sim \text{Normal}$. Apesar das variâncias de dp e dP/P serem iguais ($\sigma^2 dt$), as médias dessas normais diferem por $\frac{1}{2} \sigma^2 dt =$ **a metade da variância de dp** .

Simulação de Processos Estocásticos

- ◆ Simulação de Monte Carlo para processos estocásticos permite visualizar e entender melhor determinados resultados apresentados no curso
 - Vantagens da simulação: flexibilidade de modelagem (facilidade para o usuário incluir detalhes da realidade) e facilidade para manusear várias fontes de incertezas
 - ➔ Resolve os problemas de modelos que procuram retratar a complexidade da realidade: a “maldição da dimensionalidade” (várias fontes de incertezas) e a “maldição da modelagem” (muda um detalhe do modelo, pode ter de rever a EDP e/ou as cc, mudando o software, etc.)
 - Desvantagens: custo computacional elevado (mas cada vez menos) e dificuldade de incluir otimização em *backward*.
 - Porém com o crescimento da capacidade de processamento dos computadores e com o desenvolvimento de técnicas para otimizar opções americanas, esse método vem se tornando cada vez + popular

Simulação de Processos Estocásticos

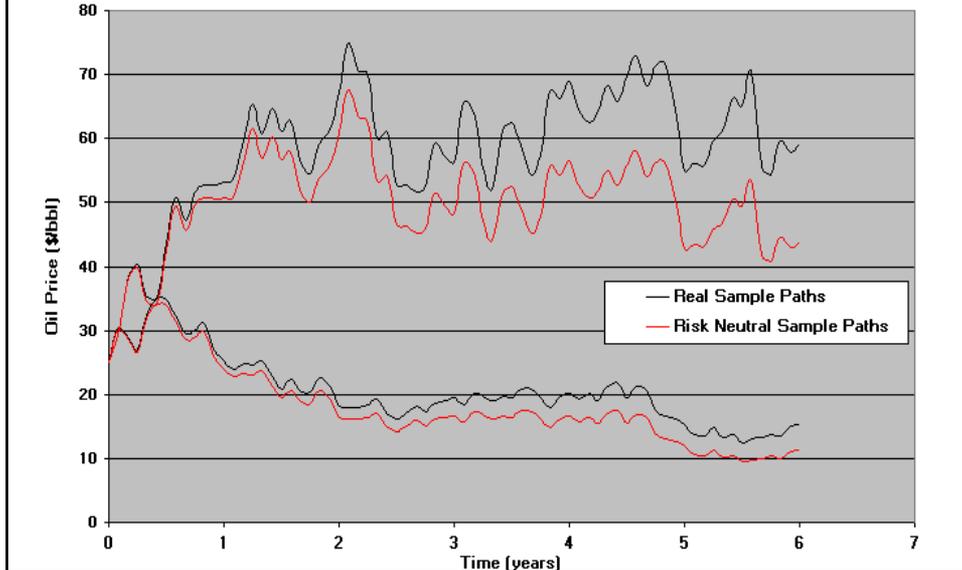
- ◆ Podemos simular tanto o processo estocástico real, como o processo estocástico neutro ao risco
 - Simulação Real: aplicações em *value-at-risk*, simulações para *hedge*, estimativa de probabilidades de exercício de opção, tempo esperado para o exercício, etc.
 - Simulação Neutra ao risco: valoração de opções e derivativos
 - Lembrar: drift neutro ao risco = drift real – prêmio de risco
 - ➔ Lembrar também que: $\alpha - \pi = r - \delta$
- ◆ Foi visto que para o MGB, temos as seguintes equações para os casos *real* e *neutro ao risco*, respectivamente:

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz$$

$$\frac{dP}{P} = (r - \delta) dt + \sigma dz'$$

Simulação Real x Neutra ao Risco

- Dependendo da aplicação, simula-se o processo estocástico *real* (drift real α) ou o *processo equivalente neutro ao risco* (drift NR = $r - \delta$)



Simulação Neutra ao Risco do MGB

- O processo neutro ao risco cresce a uma taxa penalizada pelo risco (ou neutralizada ao risco) igual a $\alpha' = r - \delta$

$$\Delta P = P_t - P_0 = (r - \delta) P \Delta t + \sigma P \Delta z ; \text{ com } \Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

- A discretização acima é a de Euler (dP vira ΔP , dt vira Δt , etc.). Mas essa discretização tem erro de ordem Δt .
- Mas aqui é melhor usar a discretização exata, através da transformação logarítma: $p = \ln P$, que resulta no MAB:

$$\Delta p = (r - \delta - 0,5 \sigma^2) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

- Assim, podemos simular o preço P_t no instante futuro t :

$$P_t = P_0 \exp\{ (r - \delta - 0,5 \sigma^2) \Delta t + \sigma N(0, 1) \sqrt{\Delta t} \}$$

- Bastar amostrar a $N(0, 1)$ e obter os P_t correspondentes geram uma distribuição lognormal. Ver [simulação](#).

Exemplo: Desenvolvimento de Campo de Petróleo

- ◆ Suponha que o desenvolvimento de um campo de petróleo tem dois anos para ser decidido, mas devido a falta de recursos a decisão será tomada só na expiração:
 - ➔ Na expiração, o valor da opção é $F(T) = \max\{VPL, 0\}$
- ◆ Assim convenientemente temos uma opção europeia e podemos usar a simulação de Monte Carlo facilmente
- ◆ Assuma o modelo: $VPL = V - D = (q P B) - D$; e os dados:
 - ➔ Tempo de expiração dos direitos dado pela ANP: $T = 2$ anos
 - ➔ Reserva estimada: $B = 120$ milhões de barris
 - ➔ Qualidade Econômica da Reserva $q = 20\%$
 - ➔ Custo de desenvolvimento $D = 480$ MM\$
 - ➔ Preço corrente do petróleo $P_0 = 20$ \$/bbl
 - ➔ Volatilidade dos preços do petróleo $\sigma = 30\%$ aa.
 - ➔ Taxa de juros livre de risco $r = 10\%$ a.a.
 - ➔ Taxa de dividendos (convenience yield de P) $\delta = 10\%$ a.a.
 - ➔ Taxa ajustada ao risco $\mu = 15\%$ aa. Logo drift $\alpha = \mu - \delta = 5\%$ aa

Exemplo: Opção Real Europeia

- ◆ O valor presente do ativo básico $VP[V_T]$ é o mesmo nas duas simulações, desde que se use a taxa de desconto:
 - Taxa de desconto *ajustada ao risco* μ na simulação *real*
 - Taxa de desconto *livre de risco* r na simulação *neutra ao risco*
- ◆ Já para o valor da opção *não* dá o mesmo resultado
 - Lembrar do caso analisado em tempo discreto (ex. do seguro)
- ◆ Iremos fazer tanto a simulação neutra ao risco como a simulação real e iremos comparar o valor da opção obtido com o resultado da fórmula do Black-Scholes
 - No modelo B&S o mercado é completo, logo a simulação *neutra ao risco* deverá dar o mesmo resultado de B&S
 - ➔ Estamos assumindo MGB (pois é B&S)
 - ➔ Podemos usar um software comercial, por ex. o @Risk, ou um simulador de *quase-Monte Carlo* do meu website que resolve opção europeia simples.

Simulação da Opção Real Européia

- ◆ Podemos simular todo o path (usando pequenos Δt) ou, diretamente só em $t = T$, pois a discretização é exata nesse caso
 - Mostraremos que dá aproximadamente o mesmo valor
- ◆ O valor teórico por Black & Scholes da opção é:
 - $F = 66,02084$ MMS
- ◆ Com 50.000 iterações no @Risk foi obtido (neutro ao risco):
 - Simulando todo o path: $F = 66,50$ MMS (erro BS = - 0,7%)
 - Simulando só em T: $F = 66,01$ MMS (erro BS = 0,01%)
- ◆ Valor presente do ativo básico V em T:
 - ➔ Simulação neutra ao risco: $480,25 * \exp(-0,1*2) = 393,20$ MMS
 - ➔ Simulação real: $530,7589 * \exp(-0,15*2) = 393,20$ MMS (igual!!)

Simulação Real e Opções

- ◆ Já para o valor da opção, a simulação *real* não vale. O valor de opções obtido pela simulação *real* e descontando com a taxa *ajustada ao risco* μ do ativo básico foi de:
 - Simulação só em T: “F” = 83,29 MMS
 - Simulação em todo o path: “F” = 83,71 MMS
 - Logo não bate com o resultado teórico (= 66,02)
- ◆ Conclusão: para o ativo básico pode usar um dos dois métodos (simulação real + taxa ajustada ao risco ou simulação neutra ao risco + taxa livre de risco),
 - Mas para a opção deve-se usar simulação NR + r, pois não se sabe a priori qual a taxa ajustada ao risco da opção.
- ◆ Pode-se achar a taxa de desconto ajustada ao risco da opção:
 - Nesse exemplo, usando uma taxa de 26,6 % para atualizar a opção (em vez da taxa do ativo básico de 15%), obtém-se aproximadamente o valor teórico de B&S.

Precisão da Simulação de Monte Carlo

- ◆ Fazendo uma simulação do mesmo problema mas com 1.000.000 de iterações no @Risk, foi obtido:
 - $F = 66,01711$ (erro BS = 0,0057 %)
 - Fazendo 20 vezes mais iterações, o erro caiu apenas cerca da metade (redução de erro por um fator 2).
 - O erro teórico da simulação de Monte Carlo é da ordem de $n^{-0,5}$, ou seja, para reduzir 10 vezes o erro temos de multiplicar o número de iterações n por 100 (!)
 - Existem métodos que podem reduzir esse erro:
 - Técnicas de *redução de variância* (ex.: *Latin Hypercubic*)
 - Uso de números quase-randômicos (“Quase-Monte Carlo”)
 - Em vez de usar números aleatórios ou pseudo-randômicos se usa seqüências determinísticas de *baixa discrepância* (Sobol, Faure, Halton). Vamos olhar as animações do website na PUC para entender esse método

Simulação de Quase-Monte Carlo

- ◆ Comparação das propriedades da seqüência pseudo-random tradicional com a de quase-Monte Carlo
 - Para uma distribuição Uniforme [0, 1], cujas propriedades teóricas são mostradas para benchmarking, vemos a superioridade da seqüência de baixa discrepância de *van der Corput* na base 2 em relação a 2 seqüências pseudo-random

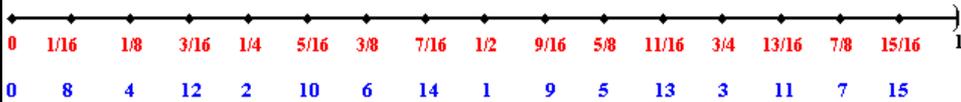
Statistical Properties of Quasi-Random x Uniform x Pseudo Random
N = 1,000 simulations

	Quasi-Random (b2)	Uniform [0, 1]	Pseudo-Random (2 series)	
Minimum	9.76563e-4	0	1.81917e-5	3.27922e-4
Maximum	0.998047	1	0.999004	0.999982
Mean	0.498866	0.5	0.492246	0.512323
Median	0.498047	0.5	0.484037	0.521946
Standard Deviation	0.288661	0.288675	0.2851	0.291302
Variance	0.083325	0.083333	0.081282	0.084857
Skewness	2.042816e-3	0	0.039117	-0.077605
Kurtosis	1.794803	1.8	1.833614	1.773279

Simulação de Quase-Monte Carlo

- ◆ Sequência de van der Corput na base 2 (16 primeiros números) vai preenchendo de forma mais uniforme o intervalo $[0, 1)$:

van der Corput Sequence Base 2: distributed over the interval $[0, 1)$
The first 16 numbers of the sequence (from $n = 0$ to 15)



- ◆ Cuidado com o Excel! O gerador de números aleatórios dele é ruim e pior ainda é a função Normal inversa, `NORMSINV()`
 - Melhor é usar a inversão de Moro (código VBA a ser fornecido)

Excel apresenta erro grosseiro nas caudas da distribuição

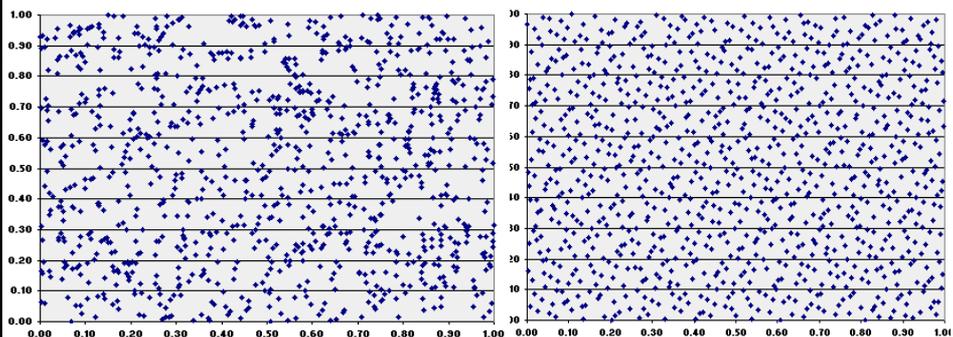
u	Excel NORMSINV	Exact	Moro's Inv.
0.001	-3.09024	-3.09023	-3.09023
0.0001	-3.71947	-3.71902	-3.71902
0.00001	-4.26546	-4.26489	-4.26489
0.000001	-4.76837	-4.75342	-4.75342
0.0000003	-7.15256	-4.99122	-4.99122
0.0000002	-5000000.0	-5.06896	-5.06896

Simulação de Quase-Monte Carlo

- ◆ Compare o caso 2-D da seqüencia tradicional pseudo-random (esquerda) com a seqüencia quase-random (direita). A última preenche o grid mais uniformemente.

Pseudo-Random

Quase-Random (Halton)



MATERIAL

ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Opção de Abandono e Flexibilidade

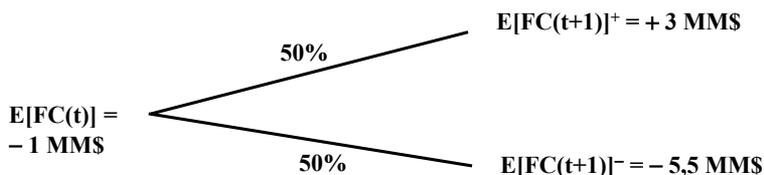
- ◆ A opção de abandono de um projeto é valiosa:
 - Para investir em projetos de curta duração; e
 - Para projetos que usa tecnologia com flexibilidade.
- ◆ A opção de abandono é análoga a uma opção de venda (“put”), do tipo americana:
 - o preço de exercício dessa opção é igual ao valor de mercado ou de uso alternativo dos ativos do projeto;
 - esse valor pode ser uma função decrescente com o tempo ou mesmo um valor também incerto; e
 - o tempo de expiração da opção pode ser o tempo de vida útil dos equipamentos.
- ◆ Uma tecnologia mais eficiente nem sempre é a melhor. A incerteza valoriza a tecnologia flexível.

Decisões de Desinvestimento

- ◆ As *decisões de abandono* ou *desinvestimento*, na presença de custos de abandono, são similares às *decisões de investimento*.
- ◆ Dixit & Pindyck, 1994, p.3 (*Investment under Uncertainty*):
 - “Investimento é o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios”
 - “uma firma que fecha uma planta que gera prejuízos está também ‘investindo’ ... benefício é a redução de perdas futuras”
- ◆ Assim os princípios da decisão de abandono são similares às decisões de investimento. As perguntas são:
 - Serão os *benefícios do abandono* (em valor presente) suficientes para justificar o gasto imediato do custo de abandono?
 - Qual a alternativa de data de abandono que maximiza o VPL?
 - Note que “abandonar na data t ” ou “abandonar na data $t + 1$ ” são alternativas mutuamente exclusivas. Logo temos de ver a de maior VPL
 - Uma vez que o fluxo de caixa passado (antes de t) é comum às duas alternativas, podemos comparar as mesmas olhando apenas para frente.

OR de Abandono e Cálculo da Reserva

- ◆ As companhias de petróleo subestimam o volume de reservas de um campo quando usam o método do fluxo de caixa descontado, pois, devido a incerteza, em OR a previsão de abandono se dá numa data posterior à calculada pelo FCD.
- ◆ Ex.: para simplificar suponha que o *custo de abandono seja zero*, taxa de desconto = 13% e a incerteza tenha 2 cenários:



- ◆ A alternativa de abandonar em t evita o prejuízo de 1 MMS e tem $VPL = 0$
- ◆ A alternativa esperar mais um período ($t+1$) incorre em um prejuízo de 1 MMS mas se ocorrer o cenário de *upside* continuamos mais um ano e ganhamos $3 / 1,13 = 2,65 \text{ MMS}$. Se ocorrer o cenário de *downside* podemos abandonar
- ◆ O VPL da opção de *não abandonar* em $t = -1 + 50\%(2,65) + 50\%(0) = + \$ 0,33 \text{ MM} > 0$. Logo, é melhor não abandonar em t (e sim esperar produzindo).

Processo de Reversão à Média

- ◆ Considere o processo aritmético de reversão à média

$$dx = \eta (\bar{x} - x) dt + \sigma dz$$

- ◆ Cujas soluções são dadas pela equação com a integral estocástica:

$$x(T) = x(0) e^{-\eta T} + \bar{x} (1 - e^{-\eta T}) + \sigma e^{-\eta T} \int_0^T e^{-\eta t} dz(t)$$

- ◆ Onde η é a velocidade de reversão. A variável $x(t)$ tem distribuição normal com média e variância dada a seguir:

$$E[x(T)] = x(0) e^{-\eta T} + \bar{x} (1 - e^{-\eta T})$$

$$\text{Var}[x(T)] = [1 - e^{-2\eta T}] \sigma^2 / (2\eta)$$

- ◆ Para o processo dos preços do petróleo P , o mesmo terá distribuição **lognormal com média = $\exp\{E[x(T)]\}$**

Simulação Neutra ao Risco da Reversão

- ◆ Para o preço do petróleo seguir a lognormal com a média desejada, temos de subtrair a metade da variância (que é uma função determinística do tempo):

$$P(t) = \exp\{x(t) - (0,5 * \text{Var}[x(t)])\}$$

- ◆ Iremos fazer também $\bar{x} = \ln(\bar{P})$, onde \bar{P} o preço de equilíbrio de longo prazo (vamos assumir que ele é US\$ 20/bbl)
- ◆ O processo **neutro ao risco** para a variável $x(t)$, considerando a discretização correta AR(1) de $x(t)$, que vale mesmo $p/\Delta t$ grande:

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + [\bar{x} - ((p-r)/\eta)] (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{(1 - \exp(-2\eta \Delta t))/(2\eta)} N(0, 1)$$

- ◆ Amostrando a normal padrão $N(0, 1)$, obtemos os paths para $x(t)$.
- ◆ Usando a equação anterior que relaciona $P(t)$ com $x(t)$, obtemos os paths neutro ao risco para os preços do petróleo seguindo o processo de reversão mostrado.
- ◆ Esse processo de reversão é parecido mas não é igual ao chamado “modelo 1” de Schwartz (Journal of Finance, 1997)

Reversão à Média com Jumps

- ◆ Parecido com o caso da reversão pura. Relação entre $P(t)$ e $x(t)$ é a mesma, mas a equação da variância é:

$$\text{Var}[x(T)] = (1 - e^{-2\eta T}) \cdot \frac{(\sigma^2 + \lambda \cdot E[\phi^2])}{2\eta}$$

- ◆ Lembrando que $E[\phi^2] \neq (E[\phi])^2$

$$E[\phi^2] = \int \phi^2 \cdot f(\phi) \, d\phi$$

- ◆ A equação de simulação é (http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html):

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + [\ln(\bar{P}) - ((\mu - r)/\eta)] (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{(1 - \exp(-2\eta \Delta t))/(2\eta)} N(0,1) + \text{jumps}$$

- ◆ Onde o termo jumps é dado por:

$$\text{jumps} = \sum_{i=1}^{J(\Delta t)} \phi_i$$

◆ Em que $J(\Delta t) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot \Delta t)$

◆ ϕ_i é a distribuição do jump-size

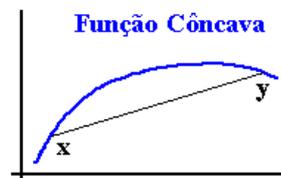
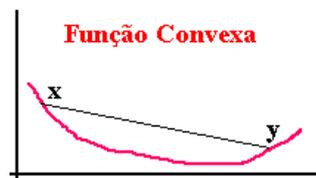
Funções Côncavas e Convexas

- ◆ Uma função é *convexa* no seu domínio (D) se toda corda (reta) ligando dois pontos fica acima da função
- ◆ Uma função é *côncava* no seu domínio (D) se toda corda (reta) ligando 2 pontos fica abaixo da função
- ◆ Matematicamente, a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* se e somente se para todos os pontos x e $y \in D$ e $\lambda \in (0, 1)$

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f[\lambda x + (1 - \lambda) y]$$

- Analogamente, a função f é *côncava* se e somente se:

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leq f[\lambda x + (1 - \lambda) y]$$



O Pensamento Estratégico de Opções

- ◆ O uso de opções permite iniciar a mudança do modo de pensamento do gerente
 - É frequentemente possível *mudar o curso* ou mesmo *abandonar um investimento plurianual* num projeto
 - Mudar a atitude em relação à incerteza. A visão de “mêdo da incerteza/minimizar investimentos” para “ganhar com a incerteza/maximizar aprendizagem”
 - Enfatizar e buscar oportunidades, inclusive os investimentos incrementais derivados dos ativos existentes
 - Alavancagem através de opções de crescimento, que mantém a firma “melhor capacitada para o jogo”.
 - ➔ Ex.: investimento exploratório e/ou sistema piloto são frações do investimento em desenvolvimento global.
 - Essa *alavancagem* diferencia a estratégia de opções da estratégia tradicional de *diversificação* que só reduz o risco. Ambas, diversificação e alavancagem, são relevantes

Plano Estratégico e os Cenários do Futuro

- ◆ Estratégia nos dá as linhas-guia para a ação, mas o ambiente de negócios está em constante mudança
 - Análise de cenários nos faz pensar em vários futuros possíveis, mas se tem de traçar hoje apenas uma estratégia para o futuro incerto;
 - Isso cria uma tensão entre estratégia e cenários;
 - O pensamento de opções ajuda muito nesse aspecto;
- ◆ É necessário construir flexibilidade dentro do plano estratégico: entra o pensamento de opções
 - Muitas vezes o empresário faz isso de forma intuitiva, sem sistematizar e quantificar: paga mais do que aparenta ser razoável por um negócio por “abrir novas oportunidades (opções) de negócios”

Competitividade e Capacidades

- ◆ O investimento é o fator mais importante da vantagem competitiva (Michael Porter)
- ◆ Miopia gerencial: investimento só de curto prazo
- ◆ Causas da Miopia: métodos inadequados de análise de investimento, sistemas de avaliação de executivos
- ◆ Sistema alternativo de incentivo a executivos: uso de opções européias de longa duração (Microsoft)
- ◆ Competitividade requer investimento em capacidades (ativos intangíveis) que dão opções de crescimento para a firma. Exs.: P&D; treinamento; sistemas de informações; relações com clientes e fornecedores; etc
- ◆ Daí surge o conceito de *plataforma de opções*

Plataforma de Opções

- ◆ Plataforma de opções é o resultado do investimento em capacidades, que permite a firma entrar em novos e lucrativos negócios, ou abre perspectivas adicionais. Exs:
 - Capacitação em tecnologia de produção em águas profundas, valoriza suas opções de investimento e permite negociar participações mais vantajosas do que outras oil companies, etc;
 - Capacitação em tecnologias (ex.: sistemas de bombeamento multifásico) que permitem rápido aproveitamento numa situação de mercado favorável, (por ex. preços altos do óleo);
 - Capacitação em microeletrônica e tecnologia wireless dão opções de entrar no mercado de celulares, pagers, smart-cards, walkmans, TV por satélite (DTH), etc;
 - Canais de distribuição de produtos em vários estados e/ou países, permitindo entrega rápida de diferentes produtos (flexibilidade para tipo e quantidade).
- ◆ Quanto mais negócios podem ser abertos por uma plataforma de opções, mais ela é valiosa

Gerenciando Opções Proativamente

Estender a duração da opção:

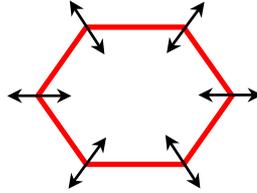
- † Manter barreiras regulatórias
- † Sinalizar habilidade de exercer
- † Inovar para manter liderança
- † Petróleo: pagando valor extra pode estender a exploração

Aumentar a incerteza (upside) dos fluxos de caixa potenciais:

- † Estender a oportunidade para mercados relacionados
- † Encorajar produtos complementares
- † Desenvolver produto inovativo
- † Linha de produtos (blundering)

Reduzir o valor presente dos custos fixos:

- † Alavancar economias de escala
- † Alavancar economias de escopo
- † Alavancar economias de aprendizagem



Aumentar o valor presente dos fluxos de caixa esperados:

- † Desenvolver estratégias de marketing
- † Desenvolver alianças com fornecedores de baixo custo
- † Gerar opções compostas através de negócios sequenciais

Monitorar o impacto nas mudanças da taxa de juros do mercado sobre a opção

- † Altas taxas de juros aumenta o valor da espera (rendimento sem risco mais atrativo)

Reduzir o valor perdido pela espera:

- † Criar dificuldades de implementação para os competidores
- † Reter recursos chave
- † Revelation devido a ação da indústria

O Valor de Manter as Opções Abertas

◆ Quanto mais incerto for o futuro dos negócios:

- Maior o valor das opções abertas, isto é opções não exercidas, mas prontas ou quase prontas para serem exercidas: invista pouco, apenas para ter as opções;
- Mais importante é *não* se comprometer com elevados investimentos irreversíveis:
 - ➔ Não exercer a opção antes de ela estar “deep in the money”
- Em contratos de longo-prazo, é valioso deixar uma porta aberta de saída antecipada: opção de sair do negócio com o menor custo (multa) possível

◆ Considere deixar suas opções “vivas”:

- “Para fazer decisões inteligentes de investimento, os gerentes precisam considerar o valor de manter as suas opções abertas” Dixit & Pindyck, 1995