PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais e Jogos de Opções

Parte 7: Método Integral de Otimização sob Incertezas. Jogos de Opções Reais.

Marco Antonio Guimarães Dias,
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2005

Jogos de Opções Reais: Introdução

- **Os primeiros artigos a analisarem o efeito da competição em modelos de opções reais fizeram adaptações dos modelos de opções reais, sem usar a teoria dos jogos:**
  - **Tempo de expiração da opção real é reduzido pela possibilidade de entrada de concorrentes (Kester, 1984)**
  - ***Preemption* de competidores é modelado através de "dividendos" adicionais perdidos (Trigeorgis, 1986, 1991)**
  - ***Preemption* de competidores é modelado incluindo *jumps-down* no processo estocástico (Trigeorgis, 1986, 1991)**
  - **Em geral a ação do rival era *aleatória* em vez de *racional*.**
- **A partir da tese de Smets (1993, WP em 1991), *em vez de exógeno*, o efeito da competição é *modelado de forma endógena*, combinando a *teoria dos jogos* com OR.**
  - **Dixit & Pindyck (1994, cap.9) popularizaram esse modelo e Huisman & Kort (1999) fizeram uma análise mais rigorosa e detalhada.**
  - **Jogos de OR é um tópico recente de crescente pesquisa.**
- **Livros textos: Huisman (2001) e Smit & Trigeorgis (2004).**

Classificação dos Jogos de Opções Reais

- **Os jogos de opções de opções reais podem ser classificados de diversas formas. Em relação ao tempo:**
  - ***Jogos de OR em tempo discreto*: geralmente mais intuitivos, podem ser associado a processos de difusão tipo binomial.**
    - **Smit & Ankun (1993); livro do Smit & Trigeorgis (2004); Dias (1997); Kulatilaka & Perotti (1998); Amram & Kulatilaka (1999) …**
  - ***Jogos em tempo contínuo*: matematicamente mais complexo, permite conclusões mais gerais e software mais profissionais.**
    - **Smets (1993); Dixit & Pindyck (1994); Grenadier (vários); Huisman & Kort (1999); livro do Huisman (2001); Joaquin & Buttler (2000).**
  - **Iremos ver apenas jogos de OR em tempo contínuo.**
- **Outras classificações e aplicações:**
  - **Informação completa x informação incompleta (Bayesianos).**
    - **Jogos de OR com informação assimétrica é um tema "quente".**
  - **Externalidades negativas (*vantagem da primeira movida*) ou externalidades positivas (*guerra de atrito*, *efeito de rede*).**
  - **Duopólio x oligopólio; simétrico ou não …**

Teoria dos Jogos de Opções Financeiras

- **Na área financeira também existem aplicações que combinam a teoria dos jogos com a teoria de opções.**
- **O primeiro livro-texto é de Ziegler (1999): "*A Game Theory Analysis of Options – Contributions to the Theory of Financial Intermediation in Continuous Time*".**
- **Alguns conceitos são válidos para OR. Por ex., em relação à diferença entre a teoria dos jogos e jogos de opções, Ziegler (p.133) escreveu:**
  - **"*a teoria dos jogos com análise de opções substitui a maximização da utilidade esperada encontrada nos modelos de teoria dos jogos clássica com a maximização do valor de uma opção … a abordagem de opções tem a vantagem que leva em conta o valor do dinheiro no tempo e o risco, automaticamente*".**
  - **Ele também destaca a "*ligação entre mercados e organizações*" com as opções determinando o valor baseado no mercado, e a teoria dos jogos levando em conta a estrutura da organização.**

Jogos de Opções Reais: *Timing Games*

- **No contexto dinâmico de OR, a classe mais importante de jogos é a de "*timing games*" ou *jogos de parada ótima.***
  - **As *estratégias puras* são *tempos de parada* (de exercício de OR)**
- **Timing games podem ser de *externalidades negativas* ou *positivas*, dependendo do efeito advindo do exercício da OR de um jogador no valor das OR dos *outros jogadores***
  - **Iremos ver três jogos de parada ótima com externalidades *negativas*, incluindo o clássico modelo de Smets (DP, cap.9).**
- **Nos jogos de OR serão consideradas apenas as *estratégias simples de gatilhos*, que darão t*, os *tempos ótimos de exercícios* das OR. <u>Proposição (8, Dias 2005)</u>:**
  - **Seja um jogo de OR em tempo contínuo com ENPS dado por estratégias de gatilhos, então existem ao menos dois métodos de solução, o método *diferencial* e o método *integral***
    - **O método diferencial é o método que temos visto, com equações diferenciais e condições de exercício e/ou equilíbrio nas cc.**
    - **O método integral usa *integrais* com t* nos *limites de integração.***

Método Integral de Otimização sob Incerteza

- **Motivação: resolver jogos de opções reais (ex.: duas firmas disputando um mercado) com integrais do tipo:**

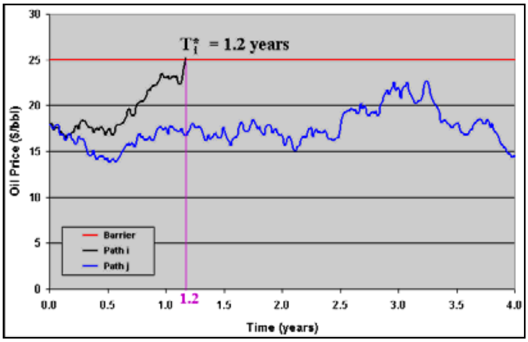
$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,0)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I$$

$$F(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(0,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

- **O método integral também pode resolver problemas só de OR, pois é um método de *otimização sob incerteza*.**
  - **Usa <u>métodos tradicionais de otimização</u>.**
  - **Em problemas de (jogos de) OR perpétuas, esse método tem vantagens de ser mais simples e intuitivo.**
  - **Baseado no tempo t* que um processo estocástico toca uma barreira (um gatilho), usa muito o valor esperado do *fator de desconto estocástico* E[exp(– r t*)].**

Tempo de Toque t* Numa Barreira

- **Vimos na parte 2 o conceito "*first hitting time*" ou "*first passage time*" que denota o primeiro instante t* em que um processo estocástico toca uma barreira (ou gatilho).**



$$t^* = \inf\{t \geq 0;\ P(t) \geq P^*(t)\}$$

- **Na figura, P*(t) é constante (independe de t), o que ocorre no caso de opções perpétuas. Mas poderia ser uma curva P*(t), no caso de OR finitas.**

- **No caso mais comum, essa barreira é *absorvente* no sentido que é um gatilho P* em que uma OR é exercida e o processo estocástico deixa de ter interesse.**
  - **Mas poderia ser uma *barreira refletora* (já vista p/ competição perfeita) ou uma *barreira elástica* (absorção parcial, não vista).**

Valor Esperado do Tempo de Toque E[t*]

- **O valor de E[t*] <u>depende da tendência</u> do processo estocástico. Ex.: p/ uma barreira superior P*, o processo NR demora mais do que o processo real para atingir P*.**
- **O cálculo do valor esperado desse tempo de toque, E[t*], é relevante p/ *planejamento de portfólio* (processo é *real*):**
  - **Quando é esperado o exercício da OR de investir num projeto?**
- **Se o valor do ativo básico V segue um MGB com drift α e valor inicial V_0, então E[t*] até uma barreira superior b é:**

$$E[\,t^*(V = b)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2} \ln\left(\dfrac{b}{V_0}\right) & \text{se } \alpha > \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \infty & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2}\sigma^2 \end{cases}$$

(com $b > V_0$)

  - **Mais detalhes: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html**
  - **Ver planilha simula-hit_time.xls que inclui fórmulas (MGB) p/ densidade de probabilidade de t*, probabilidade acumulada de atingir b e probabilidade de eventual toque p/ 1 e 2 barreiras.**

Valor Esperado do Fator de Desconto

- **Mas, para *resolver* problemas de OR, veremos que é bem mais útil saber o *fator de desconto esperado* E[exp(- r t*)]**
  - **Saber E[t*] não é suficiente: E[exp(- r t*)] > exp(- r E[t*]).**
  - **Note que não há problema em ter caminhos com t* = ∞, pois exp(- r ∞) = 0. Logo, E[exp(- r t*)] ∈ [0, 1], é sempre finito.**
- **Pode-se provar a <u>importante fórmula</u> p/ X seguindo MGB:**

$$E\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X}{X^*}\right)^{\beta_1}$$

- **Onde β_1 é a raiz positiva da eq. quadrática p/ o caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR (r – δ) e taxa de desconto livre de risco r:** $\beta_1 = ½ - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,r/\sigma^2}$
- **No caso de usar tendência *real* α e taxa de desconto exógena (ajustada ao risco) ρ, i.é, E[exp(– ρ t*)], só muda o β_1:**

$$\beta_1 = ½ - \alpha/\sigma^2 + \sqrt{[\alpha/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,\rho/\sigma^2}$$

- **Prova: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html#proof**

Método Integral de Otimização

- **O método é particularmente útil p/ jogos de OR *perpétuos*.**
  - **Usa uma <u>soma de integrais</u> estocásticas para descrever os valores dos jogadores, em que os limites de integração são <u>tempos de parada ótima</u> t* combinados com tempos limites triviais (0 e ∞).**
  - **Embora esse método tenha aparecido parcialmente no cap. 9 de DP, ele foi melhor desenvolvido em Dixit & Pindyck & Sodal (1997), inclusive p/ outros processos estocásticos.**
- **O problema clássico de *otimização sob incerteza* pode ser visto assim: A firma irá esperar até o primeiro instante t* no qual o valor do projeto V atinge um nível V* (gatilho), alto o suficiente para ser ótimo investir (exercer a OR), i.é:**

$$F = \underset{V = V^*}{\text{máximo}} \left\{ E[\exp(-\,r\,t)\,(V - I)] \right\}$$

  - **Sujeito a V seguir um MGB neutro ao risco. No ótimo V = V*, t = t*.**
  - **Assim, o problema de otimização tem um *trade-off* entre a espera por um *valor maior de V* e a redução de F com a espera por exp(– r t)**
  - **Vamos provar que se obtém o mesmo resultado para F e V* obtido antes por *contingent claims*.**

Otimização com o Fator de Desconto Estocástico

- Vamos chamar o *fator de desconto esperado* p/ o tempo que o projeto leva para atingir um valor V, começando em V_0, como sendo $D(V_0, V) = E[\exp(-\, r\, t)]$. Logo,

$$F \;=\; \underset{V = V^*}{\text{máximo}} \{ D(V_0, V)\,(V \,-\, I) \} \;=\; D(V_0, V^*)\,(V^* \,-\, I)$$

- Usaremos um ***método tradicional de otimização*** p/ resolver: a *condição de primeira ordem* (*derivada parcial de F em relação a V e iguala a zero em V = V**). "Algebrando":

$$D(V_0, V^*) + D_{V^*}(V_0, V^*)\,.\,V^* \;=\; D_{V^*}(V_0, V^*)\,.\,I \qquad \text{(eq. 1)}$$

  - O 1º termo já foi visto que é $(V_0/V^*)^{\beta_1}$, o 2º termo é sua derivada:

$$D_{V^*}(V_0\,,\,V^*) \;=\; -\,\beta_1\,\frac{V_0^{\beta_1}}{(V^*)^{\beta_1 + 1}}$$

  - Agora, basta substituir $D(V_0, V^*)$ e $D_{V^*}(V_0, V^*)$ na (eq.1), que encontramos o valor de V*. Substituindo V* e $D(V_0, V^*)$ na eq. de maximização de F, obtemos dois resultados conhecidos:

$$\boxed{V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\,.\,I} \qquad \boxed{F = \left(\frac{V_0}{V^*}\right)^{\beta_1}\frac{I}{\beta_1 - 1}} \qquad \text{c.q.d}$$

Duopólio Simétrico sob Incerteza

- Vamos analisar o modelo de Smets (DP, cap. 9), mas na versão mais detalhada de Huisman & Kort (1999)
  - O modelo do DP é de *novo mercado*, i.é, as duas firmas estão fora do mercado. Exercendo a opção de investir entra-se em um novo mercado. <u>Não há fluxo de caixa antes de investir</u>.
  - Aqui (Huisman & Kort) as duas firmas já estão no mercado e avaliam se é ótimo o exercício de uma *opção de expansão*.
- As firmas são *simétricas* (*homogêneas*, com *mesmos custos*), *neutras ao risco* e tem *expectativas racionais* sobre a demanda
  - Firmas NR: drift α com taxa de desconto r. *Poderia* ser $(r - \delta)$ e r.
- A função inversa da demanda dá o preço $P = Y(t)\,.\,D(Q)$
  - D(Q) é determinístico e função da produção *total* Q.
  - O choque estocástico multiplicativo da demanda Y(t), segue um MGB: $dY/Y \;=\; \alpha\,dt \;+\; \sigma\,dz$.
- O ENPS do jogo é obtido *backwards*. Primeiro acha-se o valor do seguidor (dado que o líder entrou) e depois o valor do líder.

Duopólio Simétrico: Notação e Premissas

- Assuma a notação adicional: $D(Q) = D(N_i, N_j)$, sendo:
  - D(0, 0) sendo o caso de ambas as firmas não tendo investido ainda, mas existe um fluxo de caixa Y D(0, 0), pois ambas as firmas já estão ativas no mercado (em DP, cap.9, D(0, 0) = 0);
  - D(1, 0) significa que a firma i investiu (exerceu a opção de expansão) e é a "líder" porque a firma j ainda não investiu;
  - D(0, 1) significa que a firma i é a "seguidora", pois apenas a outra firma (j) já investiu e se fez líder; e
  - D(1, 1) significa que ambas as firmas investiram no mercado (*investimento simultâneo*). Isso pode ser *ótimo* ou ser um *erro*.
- *Externalidade Negativa*: D(1, 0) > D(1, 1) > D(0, 0) > D(0, 1)
- *Vantagem do primeiro lance*: D(1, 0) – D(0, 0) > D(1, 1) – D(0, 1)
- Lucro perpétuo *sem exercício*: $Y\, D(0, 0) / (r - \alpha)$, $r > \alpha$
  - O valor de cada firma é esse lucro mais uma *opção de expansão*
- Para exercer a opção, deve-se pagar o investimento irreversível I

Valor do Seguidor e Gatilho: 1º Método

- Método diferencial. O valor do seguidor (F) é dado pela EDO:

$$0{,}5\, \sigma^2 Y^2 F_{YY} + \alpha Y F_Y - r F + Y\, D(0, 1) = 0$$

  - A parte não homogênea (azul) é devido ao fluxo de lucro do seguidor para o caso da outra firma ter investido. Solução:

$$F(Y) = A\, Y^{\beta 1} + Y\, D(0, 1) / (r - \alpha) \qquad \text{se} \quad Y \le Y_F$$

$$F(Y) = Y\, D(1, 1) / (r - \alpha) - I \qquad \text{se} \quad Y \ge Y_F$$

    - Onde Y_F é o *gatilho* ótimo de investimento do *seguidor*
  - Os dois desconhecidos (A e Y_F) são determinados pelas condições de contorno (cc) "continuidade" e "suavidade":

$$F(Y = Y_F) = Y_F\, D(1, 1) / (r - \alpha) - I$$

$$F_Y(Y = Y_F) = D(1, 1) / (r - \alpha)$$

  - Aplicando as cc obtemos 2 eq. e 2 incógnitas, com solução:

$$A = \frac{Y_F^{1 - \beta_1}}{\beta_1} \frac{D(1, 1) - D(0, 1)}{(r - \alpha)} \qquad \Big| \qquad Y_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha)\, I}{D(1, 1) - D(0, 1)}$$

Valor do Seguidor: 2º Método

- <u>Método integral</u>: vamos usar os conceitos de *tempo de primeiro toque* T* e *fator de desconto esperado* exp(– r T*)
  - T* é o primeiro instante que Y(t) toca o nível superior Y_F
  - O valor do seguidor tem dois componentes (líder entrou em t = 0):

$$F(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(0,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

perpetuidade de t = T* a ∞.

$$\Rightarrow F(Y) = D(0,1)\ E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, dt\right] + E\left[e^{-rT^*}\right]\left[\frac{Y_F\, D(1,1)}{r-\alpha} - I\right]$$

Onde: $E\left[e^{-rT^*}\right] = \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1}$ e $E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, dt\right] = \frac{Y}{r-\alpha}\left[1 - \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1 - 1}\right]$

- O *segundo valor esperado* também aparece em DP, p/ prova ver: http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly.html#second_expectation
- Substituindo esses valores esperado na equação de F(Y), obtemos a mesma solução de F(Y) obtida antes com o 1º método.
  - Note que em DP, D(0, 1) = 0 e, logo, a primeira integral é zero.

O Gatilho do Seguidor: 2º Método

- Seja $VPL_F = V(Y) - I$ o VPL com o exercício da opção de F
  - A maximização do VPL do seguidor é um *trade-off* entre a espera por um maior valor de Y e o custo da espera dado pelo fator de desconto:

$$G(Y) = \underset{Y}{\text{Max}}\ E\left[e^{-rt}\right] . \left[V(Y) - I\right]$$

- *Benefício* do exercício: $V(Y) = Y\, [D(1,1) - D(0,1)] / (r - \alpha)$
- Fator de desconto: $R(Y, Y_F) = E[\exp(-r\,T^*)] = (Y/Y_F)^{\beta_1}$
- Logo, o problema de maximização escolhendo Y_F torna-se:
  - $G(Y) = \text{Max}\ R(Y, Y_F) . (\{ Y\, [D(1,1) - D(0,1)] / (r - \alpha)\} - I)$
- *Condição de 1ª ordem*: derivar G(Y) em relação a Y_F:

$$R(Y, Y_F).[D(1,1) - D(0,1)]/(r-\alpha) + R_{Y_F}(Y, Y_F).Y_F\,[D(1,1) - D(0,1)]/(r-\alpha) = R_{Y_F}(Y, Y_F) . I$$

  - Onde o derivativo de R(.) é: $R_{Y_F}(Y, Y_F) = -\beta_1\, Y^{\beta_1} / [Y_F^{(\beta_1 + 1)}]$
- Substituindo a equação de $R(Y, Y_F)$ e sua derivada na equação de 1ª ordem, obtemos a mesma equação obtida com o primeiro método para o gatilho do seguidor Y_F

Valor de se Tornar Líder (L): Dois Métodos

- O 2º método tem sido usado (DP) para achar o valor do *líder*:

$$L(Y) = E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,0)\, dt\right] + E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right] - I$$

Lucro esperado na fase de monopólio — Lucro esperado na fase de duopólio

- Entretanto, o método da equação diferencial também é possível (talvez + fácil). Considere o valor do líder *durante a fase monopolista*, denotado por $V(Y) = L(Y) + I$. Logo,

$$0.5\, \sigma^2\, Y^2\, V_{YY} + \alpha\, Y\, V_Y - r\, V + Y\, D(1, 0) = 0$$

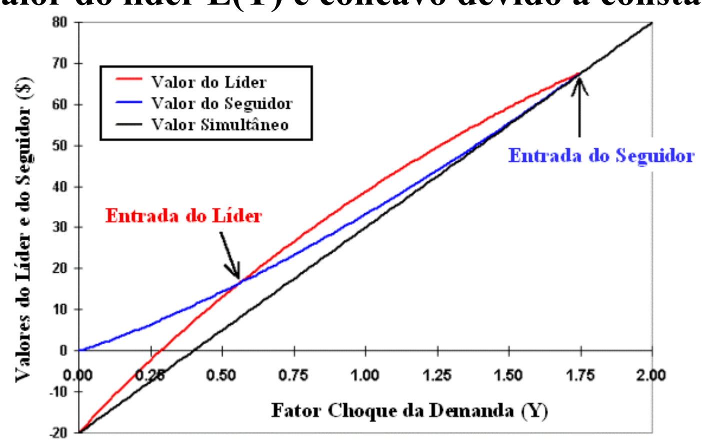
  - Onde o termo *não-homogêneo* (azul) é o fluxo de caixa ganho pelo líder durante a fase monopolista. A solução dessa EDO é:

$$V(Y) = B\, Y^{\beta_1} + \frac{Y\, D(1,0)}{r - \alpha}$$

- A constante B é negativa (devido à redução esperada do lucro com a entrada do seguidor) e precisa só da cc de *continuidade* na entrada do seguidor: $V(Y_F) = Y_F\, D(1, 1) / (r - \alpha)$
  - Aplicando essa condição, obtemos o valor do líder L facilmente

Gráficos L(Y), F(Y) e o Gatilho do Líder

- O valor do líder L(Y) é côncavo devido a constante B < 0



- O gatilho do líder é dado quando Y cresce e L(Y) se iguala com F(Y), i.é: $Y_L = \{\, 0 < Y < Y_F \mid L(Y) = F(Y) \,\}$
- A figura mostra tb. o valor do *exercício simultaneo* S(Y) (que é um *erro* se $Y < Y_F$). Payoff: $S(Y) = [Y\, D(1, 1)/(r - \alpha)] - I$.

Valor e Gatilho da Colusão Tácita

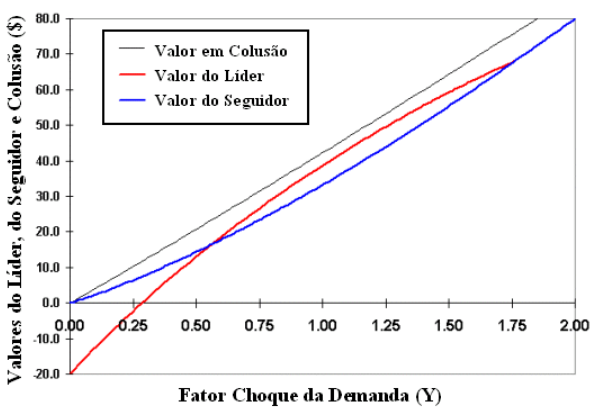
- **Uma outra análise é verificar a possibilidade de *colusão tácita* entre os jogadores, i.é, sem contrato formal e sem comunicação entre os jogadores, poder ser um ENPS.**
  - **Eles podem considerar esperar mais, até um *gatilho de colusão* Y_C, onde ambos investiriam simultaneamente.**
  - **Denote $C(Y, Y_C)$ o valor de cada jogador em colusão.**
  - **A colusão só é equilíbrio se não houver incentivo para desviar.**
  - **Aqui desviar é parar a espera e investir se tornando líder. Assim, devemos verificar se pode ocorrer $C(Y, Y_C) > L(Y)$.**
  - **Se isso ocorrer p/ todos $Y \in (0, Y_F)$, então existiriam *infinitos* ENPS em colusão. Desses, o Pareto ótimo seria p/ $C(. , .)$ e Y_C:**

$$C(Y,Y_C) = \begin{cases} \dfrac{Y\,D(0,0)}{(r-\alpha)} + \left(\dfrac{Y}{Y_C}\right)^{\beta_1}\left[\dfrac{Y_C[D(1,1)-D(0,0)]}{(r-\alpha)} - I\right], & \text{se } Y < Y_C \\ \dfrac{Y\,D(1,1)}{(r-\alpha)} - I, & \text{se } Y \geq Y_C \end{cases}$$

$$\boxed{Y_C = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\;\frac{(r-\alpha)\;I}{D(1,1)-D(0,0)}}$$

Caso com Colusão Tácita como ENPS

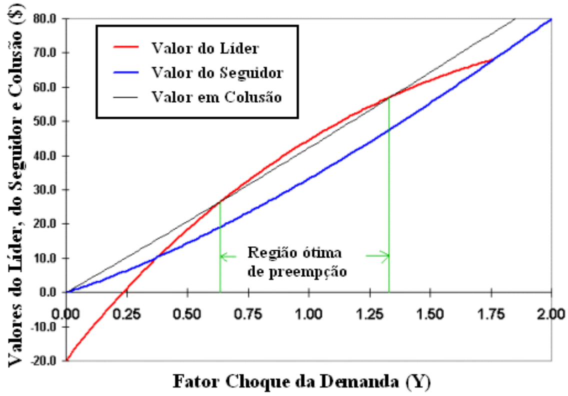
- **No caso base de Huisman & Kort, a colusão é ENPS, conforme fica claro na figura (não é ótimo o desvio p/ L)**



  - **Valores do caso-base: $\alpha = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $r = 10\%$, $Y(t = 0) = 1$, $I = 20$ (p/ cada firma), $D(0, 1) = 1$, $D(0, 0) = 2$, $D(1, 1) = 2.5$ e $D(1, 0) = 4$.**
  - **O valor do gatilho em colusão está fora da figura (contato suave se dá em $Y_C = 5{,}29$). Colusão ótima é como no *monopólio***

Caso 2: Colusão Tácita Não É ENPS

- Se a *vantagem de ser líder* for *suficientemente grande*, a colusão pode ser destruída por preempção de uma das firmas.
- Ex.: se aumentar a vantagem de ser líder para D(1, 0) = 5:



- Existe uma região onde a preempção é ótima e as firmas têm incentivo p/ trair e assim a colusão nesse caso não é ENPS.
- Em DP (modelo de *novo mercado*) a colusão tácita nunca é EN.

Risco de Equívoco e Estratégias Mistas

- Em DP se considera que existem 50% de chances p/ cada firma se tornar a líder. Isso é verdade se o estado *inicial* da demanda é baixo, i.é, se $Y(t=0) < Y_L$.
  - No entanto, o que ocorre se $Y_L < Y(t=0) < Y_F$? Ambas as firmas têm incentivo para se tornarem líder pois L > F.
    - Não tem lógica pensar que, sem qualquer comunicação, uma firma irá deixar a outra firma se tornar líder, mesmo com cada firma temendo haver o investimento simultâneo por "equívoco".
    - Assim, o mais lógico é pensar que existe uma probabilidade positiva de haver investimento simultâneo por "equívoco".
    - Essa é a principal correção de Huisman & Kort sobre DP.
  - Para verificar, temos de analisar o *equilíbrio em estratégias mistas*, em que os jogadores jogam um *jogo simultâneo*, com a firma i jogando "investir" com probabilidade p_i.
    - A passagem de tempo discreto p/ tempo contínuo nesse caso deve ser muito cuidadosa p/ não "haver perda de informação" que ocorre quando se usa ferramentas convencionais de limites.

Estratégias Mistas e Jogo Simultâneo

- **Huisman & Kort usaram uma ferramenta já adotada por Fudenberg & Tirole (1985) em jogo de timing:**
  - **Especificaram "probabilidades" chamadas de "átomos" $p(\tau)$ que, se positivo, indicam que a *probabilidade acumulada de exercício* $G_i(\tau)$ é igual a 1.**
    - **Esse recurso foi tirado da literatura de *controle ótimo estocástico*.**
    - **A idéia fundamental é que *controle não toma tempo* (como um otimizador automático instantâneo). O jogo simultâneo, *mesmo se repetido infinitas vezes*, é jogado *instantaneamente*.**
  - **Logo, <u>τ é definido como o primeiro instante que algum jogador exercerá a opção, dado que ninguém exerceu antes</u>.**
    - **Nesse exato instante τ, o jogo simultâneo, representado por Γ_N é:**

		Firma 2: $p_2(\tau)$	Firma 2: $1 - p_2(\tau)$
Firma 1	$p_1(\tau)$	S(Y(t)) , S(Y(t))	L(Y(t)) , F(Y(t))
Firma 1	$1 - p_1(\tau)$	F(Y(t)) , L(Y(t))	Repete o jogo

Estratégias Mistas e Jogo Simultâneo

- **Esse jogo simultâneo em τ pode ser repetido infinitas, mas será definido com o exercício em alguma rodada.**
  - **O exercício em τ ocorre pela própria definição de τ.**
- **O valor da firma 1, ainda não otimizado, é:**

$$V_1 = p_1\, p_2\, S + p_1\,(1 - p_2)\, L + (1 - p_1)\, p_2\, F + (1 - p_1)\,(1 - p_2)\, V_1$$

  - **O último termo significa que em caso de repetição, se obtém o valor V_1 devido à definição de τ. Outra maneira de ver isso é:**

$$V_1 = [\, p_1\, p_2\, S + p_1\,(1 - p_2)\, L + (1 - p_1)\, p_2\, F \,] \,.\, [1 + (1 - p_1)\,(1 - p_2) + (1 - p_1)^2\,(1 - p_2)^2 + \dots]$$

  - **O somatório entre os primeiros colchetes é o valor esperado obtido numa rodada em caso de definição nessa rodada. Isso multiplica o outro par de colchetes, em que o 1º termo é em caso de definição na 1ª rodada, o 2º termo é em caso de definição na 2ª rodada [multiplica por $(1 - p_1)\,(1 - p_2)$], etc., até infinito.**
  - **Assim, o valor não-otimizado de V_i é:**

$$V_i = \frac{p_i\, p_j\, S + p_i\,(1 - p_j)\, L + (1 - p_i)\, p_j\, F}{1 - [(1 - p_i)\,(1 - p_j)]}$$

Estratégias Mistas e Jogo Simultâneo

- Agora os jogadores irão calcular as probabilidades ótimas p/ exercício da opção, i. é, a que maximiza V_i.
  - A *condição de primeira ordem* p/ esse problema de otimização é $\partial V_1 / \partial p_1 = 0$, para a firma 1, dado que o rival está planejando exercer a opção com probabilidade p_2.
  - Por simetria, as probabilidades ótima têm de ser $p_1 = p_2 = p^*$.
  - Com essa otimização e a simetria, se obtém a prob. ótima p*:

$$p^* = \frac{L - F}{L - S}$$

  - A probabilidade de *só uma firma exercer a opção* Pr(um = i):

$$\Pr(\text{um} = i) = p(\tau)\,(1 - p(\tau)) + (1 - p(\tau))\,.\,(1 - p(\tau))\,.\,\Pr(\text{um} = i)$$

Logo:

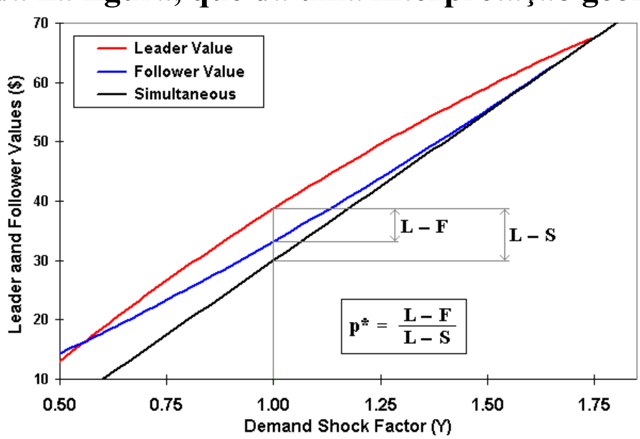
$$\boxed{\Pr(\text{um} = i) = \frac{1 - p(\tau)}{2 - p(\tau)}}$$

  - Por simetria, Pr(um = j) é a mesma. Como Σ probab. = 1, a probabilidade das *duas exercerem simultaneamente* Pr(dois) é:

$$\boxed{\Pr(\text{dois}) = \frac{p(\tau)}{2 - p(\tau)}}$$

Estratégias Mistas: Interpretação Geométrica

- Calculando o jogo simultâneo repetido infinitas vezes, mas instantâneo, achamos a probabilidade ótima de exercício p* indicada na figura, que dá uma interpretação geométrica.



  - Vimos também que existe uma probabilidade positiva de "equívoco" com investimento simultâneo, dado por $\Pr(\text{dois}) = p(\tau) / [2 - p(\tau)]$.

Estratégias Mistas no Duopólio: Conclusão

- **Agora podemos analisar as probabilidade de haver só um líder e só um seguidor e a probabilidade de "equívoco" (investimento simultâneo com $Y < Y_F$).**
  - **Observando as equações (OBS: no ótimo $p(\tau) = p^*$):**

$$p^* = \frac{L - F}{L - S} \qquad \Pr(\text{um} = i) = \frac{1 - p(\tau)}{2 - p(\tau)} \qquad \Pr(\text{dois}) = \frac{p(\tau)}{2 - p(\tau)}$$

  - **Se $Y < Y_L$, ninguém exerce a opção; se $Y = Y_L$, então sabemos que $L = F$ e $L > S \Rightarrow p(\tau) = 0 \Rightarrow \Pr(\text{um} = i) = \Pr(\text{um} = j) = 50\%$, $\Rightarrow \Pr(\text{dois}) = 0$, como indicado pelo livro do D&P.**
    - **Logo, quando o mercado começa com $Y < Y_L$ existem 50% de chances de cada um ser líder e probabilidade zero de "equívoco" quando Y subir e alcançar Y_L.**
  - **Mas se o estado inicial da demanda está entre Y_L e Y_F, a situação muda bastante e a conclusão de D&P deixa de valer:**
  - **Como $L > F$ (e $> S$) $\Rightarrow p^* > 0 \Rightarrow \Pr(\text{dois}) > 0$. Logo, existe uma probabilidade estritamente positiva de "equívoco".**

Duopólio Assimétrico Sob Incerteza

- **O modelo de duopólio *assimétrico* sob incerteza é uma hipótese mais realista na maioria das industrias.**
  - **As firmas são não-homogêneas, pois, p/ o *mesmo investimento*, uma firma tem *custo operacional menor* do que a outra.**
  - **Assim, uma firma tem *vantagem competitiva* sobre a firma rival**
- **O modelo aqui é a extensão de Dias & Teixeira (2003) sobre o modelo assimétrico de Joaquin & Buttler (2000):**
  - **Duas firmas com diferentes custos operacionais, l = *firma de baixo ("low") custo* e h = *firma de alto ("high") custo*, estão planejando investir no mesmo *novo* mercado estrangeiro.**
  - **Seja $P = a - b\,Q_T$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a > b\,Q_T$, uma função <u>*derminística*</u> *linear inversa da demanda*, com quantidades em equilíbrio (de Nash) dadas pela *competição de Cournot*.**
  - **A taxa de câmbio X(t) é <u>estocástica</u> e segue um MGB.**
    - **A produção total é Q_T e $P(Q_T)$ é o preço do produto *em moeda estrangeira*. Em *moeda doméstica*, multiplica-se $P(Q_T)$ por X(t).**

Duopólio Assimétrico Sob Incerteza

- O *fluxo de lucro* $\pi_i(Q_i)$ da firma i (i = l ou h, se baixo-custo ou alto-custo) em *moeda estrangeira* é:
  - $\pi_i(Q_i) = Q_i\,[\,a - b\,Q_T - c_i\,]$, o qual é determinístico.
- Em *moeda doméstica* o fluxo de lucro é:
  - $X(t)\,.\,\pi_i(Q_i)$, o qual é estocástico (e MGB!) devido a X(t).
- Para achar o valor presente desse fluxo de lucro perpétuo, divida o lucro pelo "dividend yield" δ.
- Os lucros do *monopolista* (π_M) e dos *duopolistas em Cournot* (π_l e π_h) são obtidos por otimização usual e são:

$$\pi_{M_i} = \frac{(a - c_i)^2}{4\,b} \qquad \pi_l = \frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9\,b} \qquad \pi_h = \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9\,b}$$

- Agora podemos usar um dos dois métodos (diferencial e integral) para achar os valores do líder e do seguidor.
  - Fica como *exercício* usar esses métodos para confirmar os resultados

Valores do Líder e do Seguidor e Gatilhos

- Seja o caso mais provável da firma de baixo custo (l) como líder e a firma de alto custo (h) como seguidora:

$$F_h(X) = \begin{cases} \left[\dfrac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b}\,\dfrac{X^*_{F_h}}{\delta} - I\right]\left(\dfrac{X}{X^*_{F_h}}\right)^{\beta_1} & \text{se } X < X^*_{F_h} \\[2ex] \dfrac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b}\,\dfrac{X}{\delta} - I & \text{se } X \geq X^*_{F_h} \quad \text{(= valor do exercício } \textit{simultâneo}\text{)} \end{cases}$$

  - A primeira eq. diz que se $X < X^*_{Fh}$ o seguidor é esperado exercer a opção no gatilho, obtendo o VPL (1º termo, entre colchetes), que é trazido a valor presente com o fator de desconto esperado (2º termo).

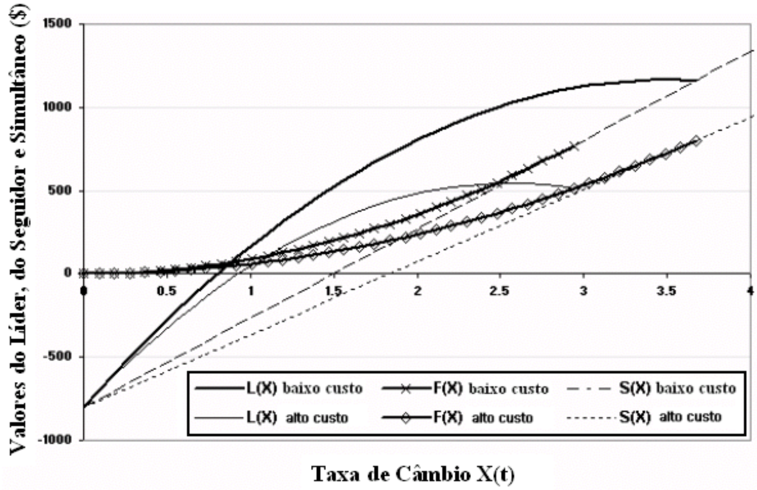
$$X^*_{F_h} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\;\frac{9b\;\delta\;I}{(a - 2c_h + c_l)^2} \longrightarrow \overbrace{X^*_{F_h}\,\frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b\;\delta}}^{V^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\,I$$

$$L_l = \frac{(a - c_l)^2}{4\,b}\,\frac{X}{\delta} + \left[\frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_l)^2}{4\,b}\right]\frac{X^*_{F_h}}{\delta}\left(\frac{X}{X^*_{F_h}}\right)^{\beta_1} - I \qquad \text{se } X < X^*_{F_h}$$

  - Onde $\beta_1 > 1$ é raiz da equação $0{,}5\,\sigma^2\,\beta^2 + (r - \delta - 0{,}5\,\sigma^2)\,\beta - r = 0$.
  - Se $X \geq X^*_{Fh}$, o valor do líder é igual ao valor de *exercício simultâneo*.
  - Para o caso *menos provável* da firma de alto custo ser a líder, basta permutar h e l nas equações acima. Gatilho do líder? A seguir.

Gatilho do Líder no Duopólio Assimétrico

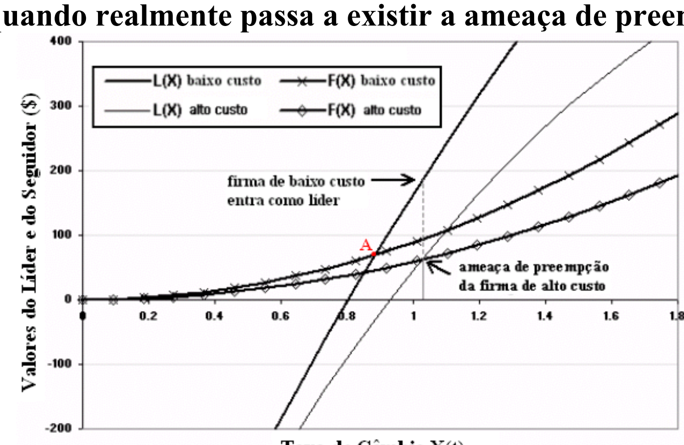
- O gatilho do líder é um pouco mais sutil que no caso simétrico.
- A figura mostra os valores do líder, seguidor e simultâneo p/ ambas as firmas, como função da taxa de câmbio X(t).



- Vamos dar um zoom na região de ameaça de preempção.

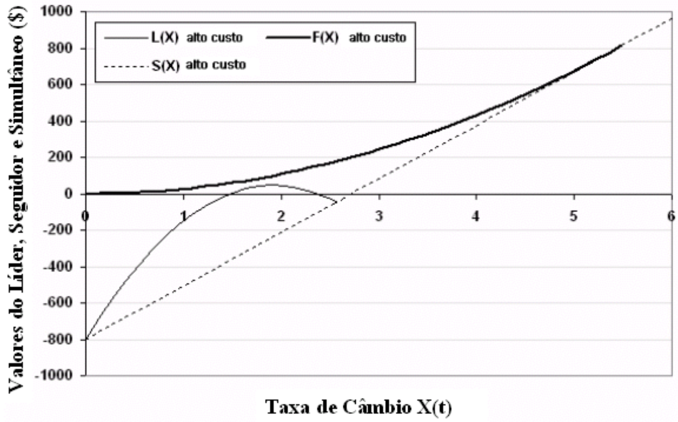
Gatilho do Líder no Duopólio Assimétrico

- A firma de *baixo custo* <u>não precisa</u> exercer no *seu ponto de indiferença* (A, onde $F_l = L_l$), pois *não existe ameaça* de preempção por parte da firma de alto custo ($L_h < F_h$).
  - A firma de baixo custo só vai exercer sua opção de ser líder no ponto (ou um pouco antes) de indiferença <u>do rival</u> ($L_h = F_h$), quando realmente passa a existir a ameaça de preempção.



Caso Sem Perigo de Preempção pelo Rival

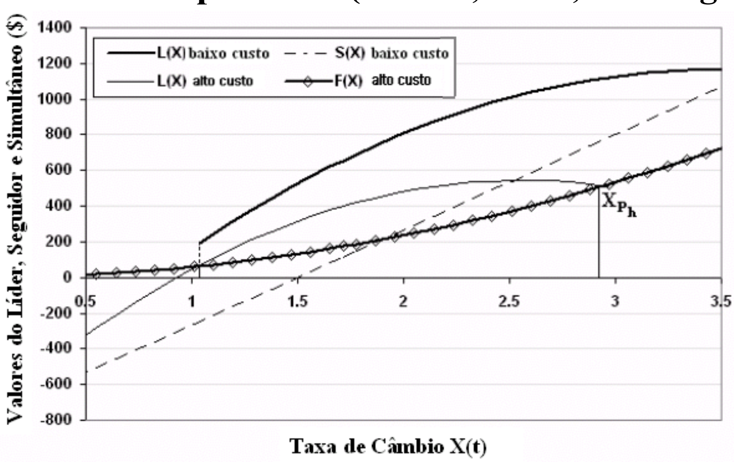
- Se a *vantagem competitiva* da firma de baixo-custo for *muito alta* (como na figura abaixo), pode *desaparecer a ameaça de preempção* antes do gatilho ótimo do *monopolista* $X = X_{Ml}$.
- Nesse caso a firma l ignora a firma rival h e exerce em $X^* = X_{Ml}$.



- Logo, o gatilho do líder é o *mínimo* entre o seu *gatilho de monopólio* e o *valor mínimo em que a firma rival tem incentivo p/ se tornar líder*.

Região de Preempção da Firma de Alto Custo

- Imagine que a vantagem competitiva não é tão grande, e logo existe uma região de X(t) onde a firma de alto custo tem incentivo p/ entrar (entre 1,03 e 2,94 na figura):



- Se a condição inicial X(t=0) pertence a essa região, existe probabilidade positiva de "equívoco" (exercício simultâneo).

Colusão, Estratégias Mistas e "Equívoco"

- Como esse é um modelo de "novo mercado", a *colusão nunca é ENPS*. A assimetria só reforça esse resultado.
- Estratégias mistas: usando um procedimento análogo ao caso simétrico, obtém-se as probabilidades ótimas:

$$p_l = \frac{L_h - F_h}{L_h - S_h} \quad \Big| \quad p_h = \frac{L_l - F_l}{L_l - S_l}$$

  - Se X(t = 0) pertence a região em que ambas as firmas tem L > F, então as probabilidades que só a firma de baixo-custo exerce a opção, só a firma de alto-custo exerce a opção e ambas as firmas exercem as opções (por "equívoco") são, respectivamente:

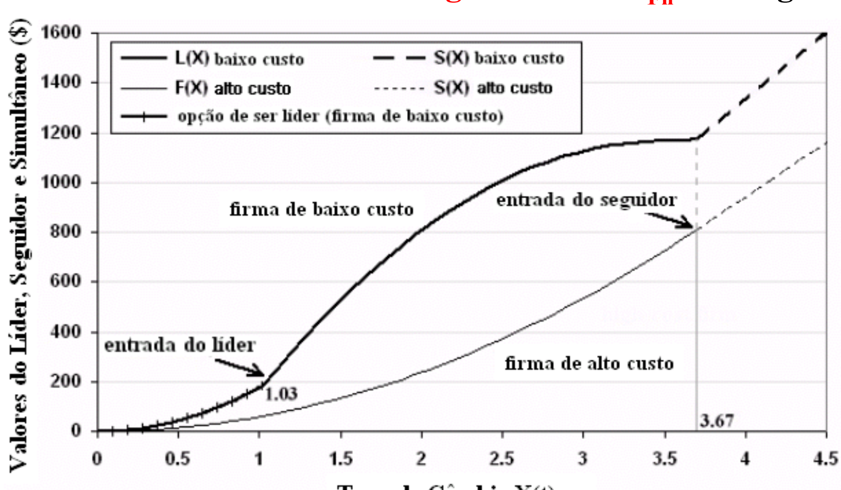
$$\boxed{pr(\text{baixo-custo}) = \frac{p_l\,(1 - p_h)}{p_l + p_h - p_l\,p_h}} \quad \Big| \quad \boxed{pr(\text{alto-custo}) = \frac{p_h\,(1 - p_l)}{p_l + p_h - p_l\,p_h}}$$

$$\boxed{pr(\text{ambas}) = \frac{p_l\,p_h}{p_l + p_h - p_l\,p_h}}$$

  - Logo, dependendo das condições iniciais, mesmo para o duopólio assimétrico existe uma probabilidade positiva de "equívoco".

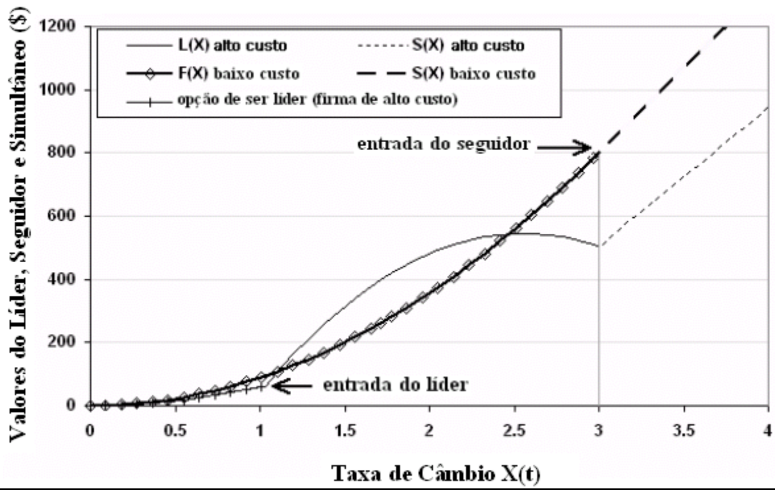
Principal Equilíbrio Perfeito em Subjogos

- Se inicialmente (X(t=0)) está *abaixo da região de preempção* (ou se essa região é um conjunto vazio), *quase certamente* o ENPS é a firma de baixo custo entrando como líder e a firma de alto custo entrando como seguidora em X_{Fh}. Ver figura:



Equilíbrio Perfeito em Subjogos Secundário

- Mas, o muito *menos provável* (mas não impossível) ENPS com a firma de alto-custo entrando como líder pode ocorrer para algumas condições (não existe incentivo unilateral para desviar em todos os subjogos):



Oligopólio Sob Incerteza

- Esse modelo de oligopólio sob incerteza é baseado em Grenadier (2002). Ver detalhes e planilha em:
  http://www.puc-rio.br/marco.ind/oligopoly_gren.html
- Esse artigo tem pelo menos duas contribuições relevantes:
  - Extensão do *princípio do comportamento míope ótimo* (*principle of optimality of myopic behavior*) de Leahy p/ o caso de oligopólio; e
  - A determinação das estratégias de exercício em oligopólio usando uma indústria "artificial" em *competição perfeita*, através de uma *função demanda modificada*.
  - Os dois "truques" simplificam a solução dos problemas porque "*o jogo de exercício pode ser resolvido como um problema de otimização de um único agente*", de forma que novamente podem ser aplicadas as ferramentas usuais de OR em tempo contínuo.
- Considere uma indústria oligopolística com n firmas iguais
  - Faremos simulações de MC da demanda, de forma a comparar oligopólios com poucas firmas (n = 2) e com muitas firmas (n = 10), em termos de níveis de investimento e produção industrial.

Características do Modelo de Oligopólio

- **O modelo de Grenadier é relacionado a modelos de DP (cap. 9, seç. 1; caps. 8 e 11), mas com *algumas diferenças*:**
  - **Em DP (cap.9) cada firma produz 1 unidade e a produção total da indústria Q é igual ao número de firmas no mercado;**
  - **Em Grenadier esse número de firmas é fixo (n), mas cada uma pode produzir mais de uma unidade. Isso é mais conveniente:**
    - **Os casos de monopólio (n = 1), duopólio (n = 2) e da competição perfeita (n = ∞), são casos particulares do modelo de Grenadier.**
  - **Mas, p/ o caso de *firmas assimétricas*, o modelo de DP parece melhor, pois a entrada das firmas é só um *problema de ordenação*.**
  - **Mas em ambos os modelos é necessário assumir a premissa que o *investimento é infinitamente divisível*, i.é, firma i pode adicionar uma *capacidade infinitesimal* dq com *investimento infinitesimal* dI.**
    - **Isso é uma aproximação razoável em muitas indústrias, por ex., se o novo investimento é uma fração pequena da capacidade instalada da indústria. É boa p/ estudar o *equilíbrio na indústria*.**
    - **Mas não é tão razoável p/ estudar a *decisão de investir da firma*.**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- **Numa indústria oligopolista com n firmas iguais:**
  - **Cada firma possui *opções compostas perpétuas, americanas de compra*, para *expandir* a sua produção no mercado.**
  - **O preço do produto P(t) é dado por uma curva de demanda inversa D[X(t), Q(t)]. O fator de demanda X(t) segue um MGB.**
  - **Aqui, assuma *ou* que as firmas são neutras ao risco *ou* que o processo estocástico X(t) é neutro ao risco (α seria tendência NR).**
- **No equilíbrio perfeito de Cournot-Nash, as estratégias das firmas são quantidades ótimas $q_i^*(t)$, i = 1, 2, ... n:**
  - **$q_i^*(t)$ maximizam seus lucros, dadas as melhores respostas dos competidores q_{-i}^*. Sendo as <u>firmas iguais</u>, $q_i^* = q_j^*$ p/ todo i, j.**
  - **Se a produção total da indústria <u>em equilíbrio</u> é Q*(t), então:**

$$q_i^*(t) = Q^*(t) / n$$

- **O preço de exercício da opção de adicionar a capacidade dq é o investimento (I . dq), onde I é o custo unitário de investimento.**
  - **A opção é exercida por i quando X(t) alcança o gatilho $X_i^*(q_i, Q_{-i})$.**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- **Grenadier sumariza o equilíbrio na sua "Proposition 1", usando o método diferencial: uma EDP com três cc.:**
  - **Duas cc. são as conhecidas condições de continuidade e de suavidade. Já a terceira cc. é uma condição de equilíbrio:**
    - **Cada firma i maximiza o seu valor $V_i(X, q_i, Q_{-i})$ dada as estratégias dos rivais (gatilhos). Ela é também uma *condição de continuidade, mas no gatilho dos competidores* $X_{-i}(q_i, Q_{-i})^*$ (que é igual ao seu gatilho $X_i(q_i, Q_{-i})^*$, pois o equilíbrio é simétrico).**
    - **Entretanto, essa condição não será necessária ("Proposition 2" de Grenadier), que *estende o conceito de miopia ótima p/ oligopólios*.**
  - **Com isso, na "Proposition 3", Grenadier consegue estabelecer o equilíbrio com apenas duas condições de contorno.**
  - **Denote o *valor da firma míope* por $M^i(X, q_i, Q_{-i})$. Seja o *valor marginal da produção* da firma míope $m^i(X, q_i, Q_{-i})$ dada por:**

$$m^i(X, q_i, Q_{-i}) = \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) / \partial q_i$$

  - **Por simetria, $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$, com $q_i = Q/n$ e $Q_{-i} = (n - 1) . Q / n$.**
  - **ENPS simétrico: cada firma exercerá sua opção no gatilho $X^*(Q)$.**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- **Seja $m(X, Q)$ o *valor marginal do investimento da firma míope*. A seguinte EDO e duas condições de contorno (cc.) são *suficientes* para determinar $X^*(Q)$ e $m(X, Q)$:**

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma(X)^2\, m_{XX} + \alpha(X)\, m_X - r\, m + D(X, Q) + (Q / n)\, D_Q(X, Q) = 0$$

  - **Sujeito às condições de contorno (além da trivial em X = 0):**
  - **$m[X^*(Q), Q] = I$ (condição de continuidade em $X^*(Q)$); e**
  - **$\partial m[X^*(Q), Q] / \partial X = 0$ (condição de suavidade em $X^*(Q)$).**
  - **Os termos "cash-flow" *não-homogêneos* da EDO (vermelho), compreendem a *função demanda modificada* de Grenadier D'.**
  - **O *gatilho estratégico* é ("Proposition 2" de Grenadier) igual ao gatilho "míope" X*.**
  - **O formato da EDP é para qualquer processo estocástico de Itô.**
    - **Para o MGB: $\alpha(X) = \alpha X$ e $\sigma(X) = \sigma X$.**
  - **Vamos assumir uma *função demanda inversa iso-elástica*:**

$$P(t) = X(t) . Q(t)^{-1/\gamma}$$

    - **Onde $\gamma > 1/n$ assegura lucros marginais *decrescentes* em X.**

Oligopólio Sob Incerteza: Modelo

- **Assim, o oligopólio é resolvido mais facilmente como um "single agent optimization problem":**
  - **Basta "fingir" que a indústria é *perfeitamente competitiva*, maximizando uma função objetivo "fictícia", que usa a <u>função demanda artificial</u> $D'(X, Q) = D(X, Q) + (Q / n)\, D_Q(X, Q)$.**
  - **Resolvendo a EDO e as cc., o gatilho ótimo X*(Q) é dado por:**

$$X^*(Q) = v_n \,.\, Q^{1/\gamma}$$

  - **Onde v_n é uma *barreira refletora superior* (um *preço máximo*, lembrar o caso de *competição perfeita*) que é dada por:**

$$v_n = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\right)\left(\frac{1}{1 - 1/n\gamma}\right)(r - \alpha)\, I$$

  - **I. é, v_n é o *preço máximo* em oligopólio, pois, nesse nível, as firmas adicionam capacidade (exercem OR) numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional.**
  - **Enquanto X(t) segue um MGB *irrestrito*, P(t) segue um MGB *restrito*.**
  - **Note que o gatilho X*(Q) decresce com o nº de firmas no oligopólio (n).**

Oligopólio Sob Incerteza: Prêmio da Espera

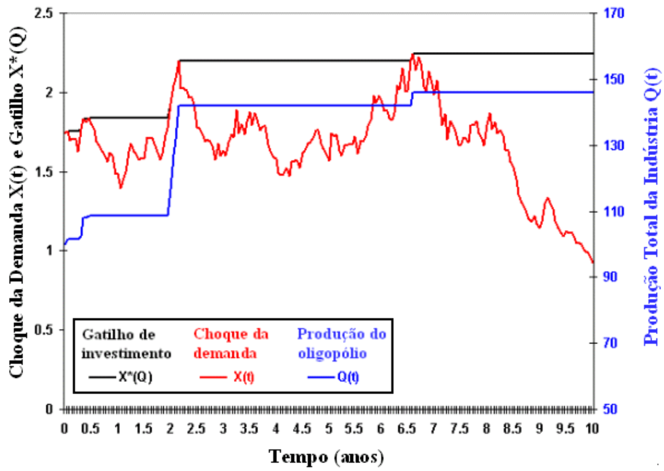
- **Para manter o preço num valor igual ou menor que v_n:**
  - **A adição de capacidade dQ (= n dq) quando X(t) > X*(Q), com custo I dQ, terá de ser maior, quanto maior for a diferença X(t) – X*(Q), i.é, se X(t) > X*(Q), então $Q(t) = (X(t) / v_n)^\gamma$.**
- **Qual o *prêmio da opção* quando se exerce essa opção estratégica no oligopólio de n-firmas?**
  - **Grenadier define esse *prêmio de opção* como o VPL em X* *por unidade de investimento* I, denotado por OP(n) e dado por:**

$$OP(n) = 1 / [(n\,\gamma) - 1]$$

  - **Logo, quando n tende a infinito o prêmio da opção OP(n) tende a zero (consistente com a *competição perfeita*, com VPL = 0).**
  - **Para o caso de número finito de firmas esse prêmio é positivo e é maior quanto menos firmas tiver no mercado.**
- **Agora serão feitas simulações numéricas com os dados do caso-base de Grenadier: $\alpha = 0{,}02$; $r = 0{,}05$; $\sigma = 0{,}175$; $\gamma = 1{,}5$; n = 10 firmas; I = 1; Q(0) = 100; e X(0) = 1,74.**

Oligopólio Sob Incerteza: Simulações

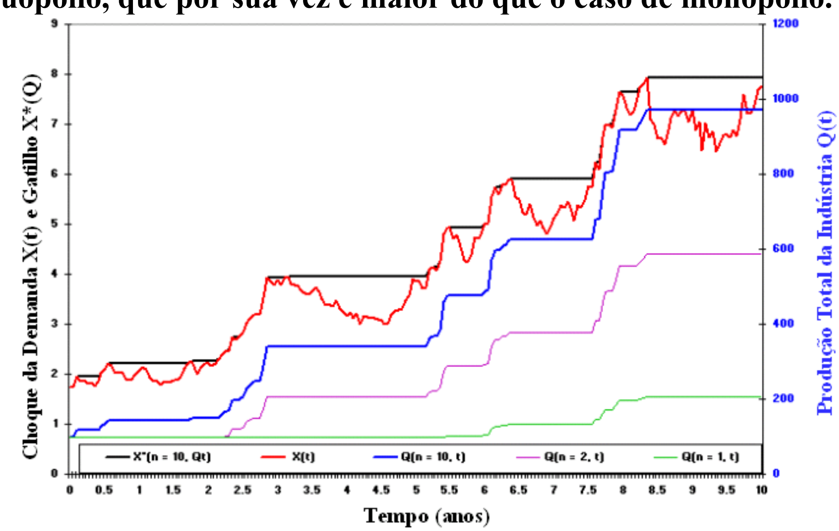
- O *princípio do gatilho míope ótimo* permite usar a <u>simulação de MC</u> para resolver o modelo. Não precisa trabalhar “backwards” porque se sabe o gatilho (“míope”) X*(Q(t)) antecipadamente.



- Quando a demanda X(t) atinge o gatilho X*(Q(t)), aumenta a produção da indústria Q e o novo gatilho passa a ser maior.

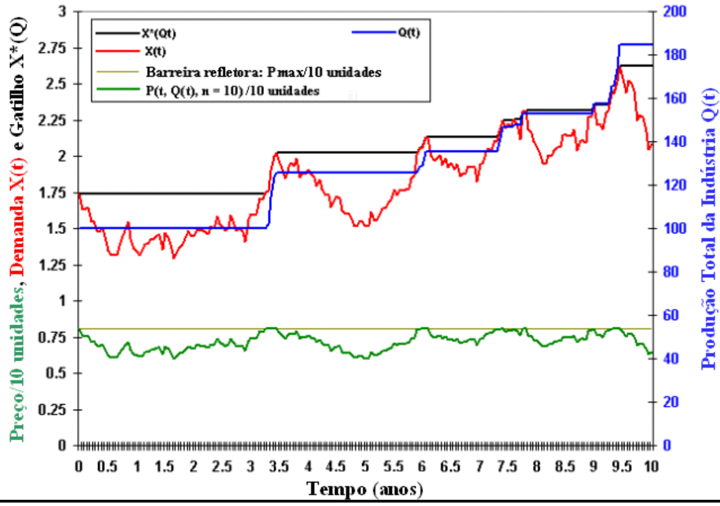
Oligopólio Sob Incerteza: Simulações

- A figura mostra, para uma amostra de caminho da evolução da demanda, que a produção total da indústria Q(t) é muito maior p/ o caso de oligopólio com 10-firmas (n = 10) do que p/ o caso de duopólio, que por sua vez é maior do que o caso de monopólio.



Simulações do Oligopólio Sob Incerteza: Preços

- A figura mostra a <u>evolução dos preços</u>, considerando uma possível evolução da demanda com a respectiva evolução da produção do oligopólio. Note que existe uma <u>barreira refletora superior</u> para esses preços em 0,8081/10 unidades.



Oligopólio Sob Incerteza: Conclusões

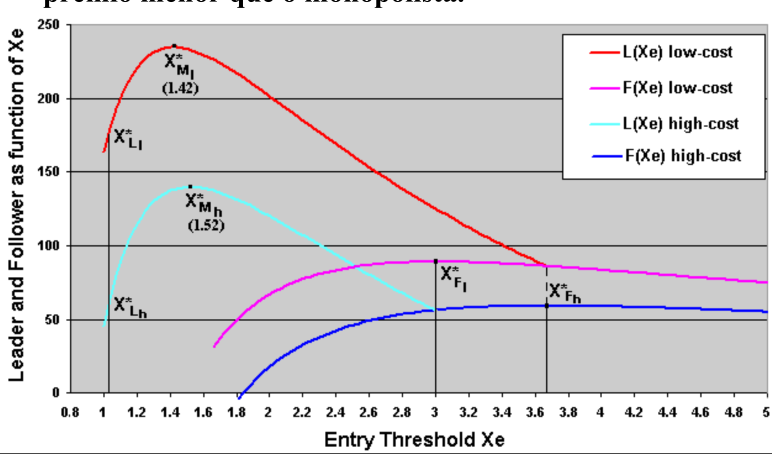
- Todas as figuras apresentadas aqui foram facilmente obtidas com as equações apresentadas e com a simulação de uma possível evolução da demanda incerta.
  - Uma simulação de Monte Carlo mais completa daria as distribuições de probabilidades da produção, dos preços, dos investimentos na indústria, etc., p/ qualquer instante futuro t.
  - Isso permitiria fazer um estudo mais realista dos oligopólios, do que é feito com a abordagem tradicional, que ignora a incerteza dinâmica da demanda.
- Nessa parte do curso foram vistas várias ferramentas relativamente simples para resolver jogos de OR.
  - Os métodos alternativos *diferencial e integral* que resolvem a maioria dos jogos, os quais usam *estratégias simples de gatilhos*.
  - Princípios da *miopia ótima de Leahy* e da *curva de demanda artificial* p/ resolver jogos de OR como uma *maximização de um agente míope* num mercado em "*competição perfeita*".
    - ➡ Isso permitiu usar simulações de MC, pois sabemos o gatilho.

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

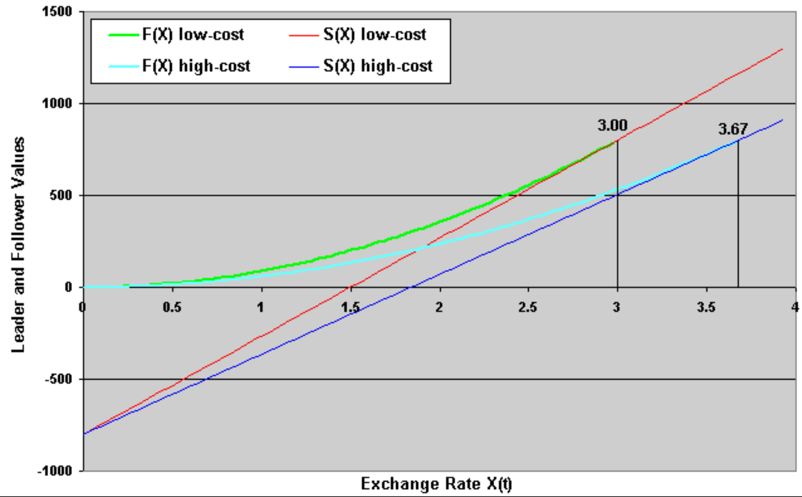
Duopólio Assimétrico de Joaquin & Buttler

- **Essa figura mostra o único gráfico mostrado em Joaquin & Buttler. Ela mostra os gatilhos de monopólio maximizando os valores de líder e os gatilhos de seguidor como máximos das curvas de seguidores.**
  - **A curva do líder é condicional ao rival entrando como seguidor.**
  - **O único interesse é ver que o líder investe demandando um prêmio menor que o monopolista.**



Gatilhos de Seguidor: Duopólio Assimétrico

- O jogo é resolvido "backwards". Assim, imagine que o líder já entrou no mercado. Os gatilhos de seguidor para ambas as firmas são dadas pelas conhecidas condições de "suavidade" ("smooth-pasting").
  - O seguidor tem uma opção real perpétua para investir como seguidor.



Caso Sem Interação Estratégica de Entrada

- Se a *vantagem competitiva* é suficientemente alta p/ a firma de baixo-custo, não existe a ameaça de preempção do rival.
  - A firma de baixo-custo entra como monopolista (estratégia "open-loop", em vez de estratégia "feedback" ou "closed-loop").