



## IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais

### Parte 6: Simulação de Monte Carlo e Uso em Derivativos e Opções Reais.

Marco Antonio Guimarães Dias,  
Professor Adjunto, tempo parcial

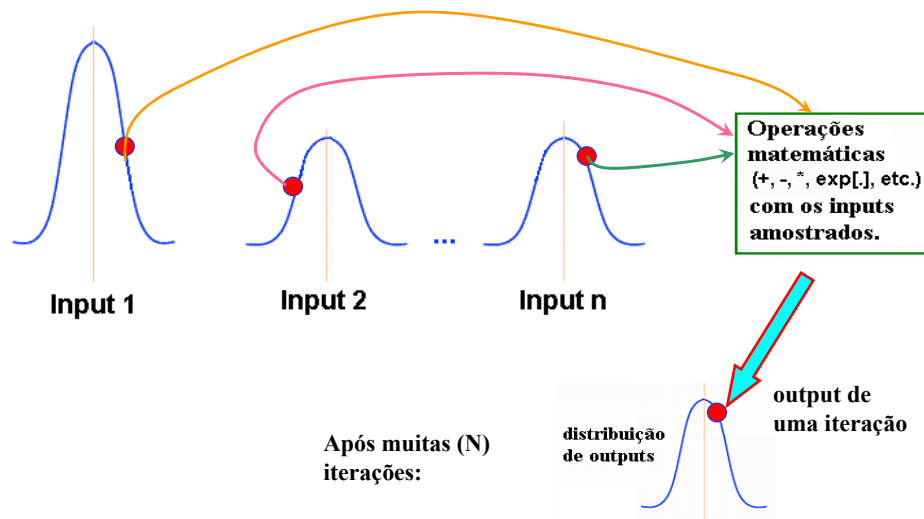
Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2007

## Simulação de Monte Carlo: Introdução

- ◆ Simulação de Monte Carlo (MC) é um método crescentemente popular para valorar derivativos complexos, inclusive OR.
  - O método de MC resolve o problema pela *simulação direta do processo físico*, de forma que *não é preciso escrever a equação diferencial da OR*.
    - Não precisamos do Lema de Itô, mas podemos “ver” os seus efeitos.
  - É uma **ferramenta flexível** para manusear vários detalhes específicos de problemas da vida real, incluindo várias restrições (condições de fronteira e outras) e payoffs complexos, e **várias fontes de incertezas**.
    - Veremos simulações de processos estocásticos p/ as incertezas de mercado.
  - Em resumo, é um antídoto para a “maldição da dimensionalidade” (*curse of dimensionality*) e da “maldição da modelagem” (*curse of modeling*) que dificulta a solução de problemas reais complexos.
  - Tenho usado em vários casos reais na Petrobras.
- ◆ A idéia e o nome MC são atribuídos a S. Ulam e N. Metropolis, respectivamente, no Projeto Manhattan nos laboratórios de Los Alamos durante o tempo da segunda grande guerra.
  - O 1º paper, “The Monte Carlo Method”, por Metropolis & Ulam, foi publicado em 1949 no *Journal of the American Statistical Association*.

## Como Funciona a Simulação de Monte Carlo

- ◆ O método de Monte Carlo (MC) é ilustrado abaixo, sendo que a priori temos de ter as distribuições de entradas (*inputs*) e as equações que as ligam ao resultado (*output*):



## Passos da Simulação de Monte Carlo

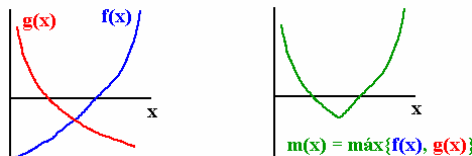
- ◆ O método de Monte Carlo (MC) consiste basicamente de:
  - (a) Especifique as **distribuições das variáveis de entrada** (incluindo seqüências temporais de distribuições, i.é, processos estocásticos) e suas correlações/dependências;
  - (b) **Amostre** as distribuições de dados de entradas (inputs);
  - (c) Faça **operações matemáticas** com as amostras dos inputs (+, -, \*, ^, /, exp[.], etc.) **para calcular o resultado (output)** gerado por essas amostras;
  - (d) **Repita** os passos anteriores **N vezes**, gerando N outputs; e
  - (e) Calcule a média e outras propriedades probabilísticas da resultante **distribuição de outputs**.
- ◆ Esses passos foram mostrados na figura anterior.

## Incerteza em Funções Côncavas e Convexas

- ◆ Vimos que o efeito da incerteza em funções depende se a função é linear, côncava ou convexa. Esse efeito pode ser visto com o *lema de Itô* ou com a *desigualdade de Jensen*.
  - Desigualdade de Jensen: se  $x$  é variável aleatória (v.a.) e  $f(x)$  é uma função (estritamente) *convexa* de  $x$ , então:
 
$$E[f(x)] > f(E[x])$$
    - ➔ Logo, se o valor esperado de  $x$  permanece o mesmo, mas sua variância aumenta, então  $E[f(x)]$  aumenta.
    - ➔ Se  $g(x)$  é função (estritamente) *côncava* de  $x$ , e  $x$  for v.a., basta inverter a desigualdade:  $E[g(x)] < g(E[x])$
    - ➔ Se  $h(x)$  é função *linear* da v.a.  $x$ , então:  $E[h(x)] = h(E[x])$
- ◆ A simulação de MC permite visualizar esse efeito e verificar que a desigualdade de Jensen é maior (diferença entre  $E[f(x)]$  e  $f(E[x])$ ) quanto maior for a incerteza.
  - Isso permite “ver” que um aumento da volatilidade (e logo da variância) aumenta o valor da opção.

## Efeito da Incerteza no Valor da Opção

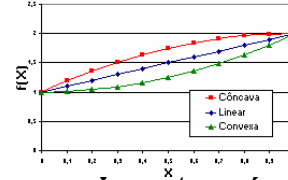
- ◆ Como a *opção real*  $F$  é geralmente uma *função convexa do ativo básico*  $V$ , um aumento na incerteza (volatilidade), aumenta o valor da opção.
  - Ex.: no caso de opção de compra perpétua, a função  $F(V)$  é uma *função potência convexa*  $F = A V^{\beta_1}$ , com  $A$  positivo
  - A função  $F(V, t = T) = \max\{V(T) - I, 0\}$  é *convexa* em  $V$ .
  - A **função máximo de uma função com v.a.** geralmente é *convexa*, explicando o *valor da espera* (DP, p.98).
    - ➔ Lembrar da parte 3:  $E[\max\{V(t) - I, 0\}] \geq \max\{E[V(t)] - I, 0\}$
  - **Máx{exercício imediato,  $e^{-r \Delta t} E[\text{espera}]$ }** ou, em geral, a função  $m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  é convexa em  $x$  se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem funções lineares ou convexas em  $x$ .



## Efeito da Incerteza e o Lema de Itô

◆ No caso de funções contínuas 2 vezes diferenciáveis ( $C^2$ ):

- F(x) é **côncava** se  $\partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx} \leq 0$
- F(x) é **linear** se  $\partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx} = 0$
- F(x) é **convexa** se  $\partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx} \geq 0$



◆ A desigualdade de Jensen é tornada precisa através do **lema de Itô** (termo *derivada segunda*). Ex.: MGB:

- $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$ . Seja  $\alpha = 0 \Rightarrow dx = \sigma x dz \Rightarrow E[dx] = 0$
- Mas para uma função F(x) qualquer,  $E[dF(x)] \neq 0$ . Note que dF é dada pelo lema de Itô, que resulta em (DP, p.80):

$$dF = [0,5 \sigma^2 x^2 \partial^2 F / \partial x^2] dt + [\sigma x \partial F / \partial x] dz$$

- Logo,  $E[dF] > 0$  se  $\partial^2 F / \partial x^2 > 0$ , i.é, se F(x) for estr. *convexa*; e
- $E[dF] < 0$  se  $\partial^2 F / \partial x^2 < 0$ , i. é, se F(x) for estr. *côncava* em x.
- O Lema de Itô *quantifica* o efeito (=  $[0,5 \sigma^2 x^2 \partial^2 F / \partial x^2] dt$ ), que é maior quanto maior for a incerteza (medida por  $\sigma$ ).

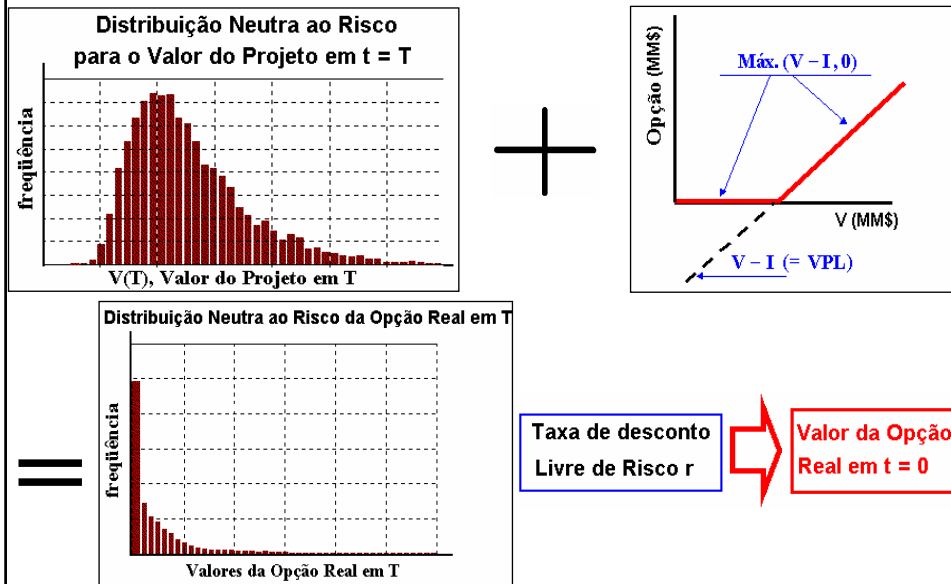
## Simulação de Monte Carlo e Opções

◆ O método de Monte Carlo faz simulação (forward) e não otimização (backward). Mas se tivermos a regra ótima de exercício, o método de MC é mais fácil e mais flexível.

- Até pouco tempo atrás só era usado o método de MC em opções do tipo européia, pois tem regra clara de exercício ótimo em T.
  - Mas se tivermos a curva de gatilho antes, podemos valorar a OR do tipo americana, por ex., combinando várias incertezas.
- Recentemente (de 1993 para cá) começaram a surgir métodos de otimização viáveis para serem acoplados à simulação de MC, de forma a poder usar com opções do tipo americana.
  - Ex.: vimos o *método evolucionário* (simples, mas comput. intensivo).
- Embora alguns dos métodos para opções americanas ainda sejam +- complexos, eles começam a ser usados em opções reais.
  - Um método que vem se tornando popular é o de Longstaff & Schwartz (*mínimos quadrados*). Mas existem mais de 10 métodos.
- Para opções européias (exceto as *path dependent*), podemos simular V apenas na expiração. Nas outras, devemos simular todo o caminho

## Valoração da “Call” Européia por Simulação

- ◆ Se o ativo básico  $V$  é o valor do projeto operando e  $I$  é o preço de exercício (investimento), a *equação visual para a opção real tipo Européia* é:



## Opção Real Européia por Simulação

- ◆ Podemos ver esse problema da call européia como sendo o da avaliação de uma integral por simulação.
  - Seja uma opção européia de compra  $C$  que expira em  $T$  avaliada no instante  $t$ , quando o valor do ativo básico é  $V_t$ .
  - Sejam:  $E_t^Q[\cdot]$  a *expectativa neutra ao risco* do *payoff* condicional a informação em  $t$ ;  $p(V_T, T | V_t, t)$  a *densidade de probabilidade neutra ao risco* de  $V_T$ ; preço de exercício  $I$ ; e taxa livre de risco  $r$ . O valor da opção é a avaliação da integral atualizada:

$$C(V_t, t) = e^{-r(T-t)} E_t^Q[\text{payoff}(V_T)] \Rightarrow$$

$$C(V_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max(V_T - I, 0) \cdot p(V_T, T | V_t, t) dV_T$$

- ◆ Ou seja: se simula a distribuição neutra ao risco de  $V$  (lognormal com a média “neutra ao risco”), se aplica a regra de decisão em  $T$  e atualiza usando a taxa  $r$ . Faz isso para cada amostra NR de  $V$ . □

## Simulação de Processos Estocásticos

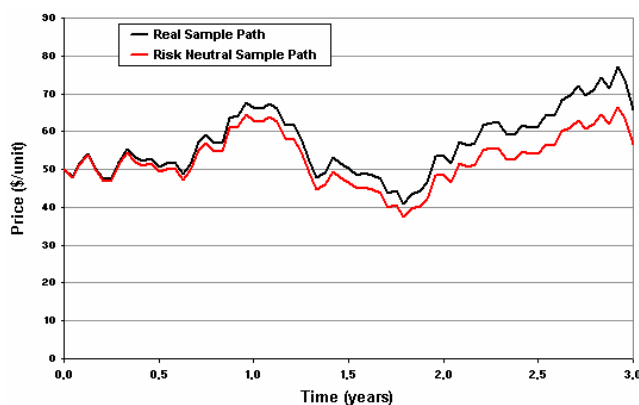
- ◆ A depender da aplicação, podemos simular tanto o processo estocástico real, como o processo estocástico neutro ao risco.
  - Simulação Real: aplicações em *value-at-risk*, simulações para *hedge*, estimativa de probabilidades de exercício de opção, tempo esperado para o exercício, etc. Já falamos sobre isso.
  - Simulação Neutra ao risco: valoração de opções e derivativos.
  - Lembrar: drift neutro ao risco = drift real – prêmio de risco.
    - Vimos que o drift neutro ao risco =  $\alpha - \pi = r - \delta$
- ◆ Foi visto que para o MGB, temos as seguintes equações para os casos *real* e *neutro ao risco*, respectivamente:

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz \quad (\text{processo real})$$

$$\frac{dP}{P} = (r - \delta) dt + \sigma dz' \quad (\text{processo neutro ao risco})$$

## Simulação Real x Neutra ao Risco

- ◆ Típicas amostras de caminho (*sample-paths*) p/ MGBs real e neutro-ao-risco (com os *mesmos choques estocásticos*): a diferença é  $\pi dt$ .



- ◆ Enquanto a simulação neutro-ao-risco é usada para valorar derivativos, a simulação real é útil p/ propósito de *planejamento* (ex., se a espera é ótima, qual a *probabilidade de exercer a opção?*) e para *análise de risco* (ex., VaR, *value-at-risk*) e *hedging*.

## Discretização de Processos Estocásticos

- ◆ Para fazer a simulação é preciso a equação de *discretização* do processo estocástico, i. é,  $P(t) =$  função de  $P(t - 1)$ .
- ◆ A discretização mais simples é a de **Euler de 1ª ordem**, onde  $dP$  vira  $\Delta P$ ,  $dt$  vira  $\Delta t$ , etc. Ex.: MGB *neutro ao risco*:  

$$\Delta P = P_t - P_0 = (r - \delta) P_0 \Delta t + \sigma P_0 \Delta z$$
 ; com  $\Delta z = N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$ 
  - Amostra-se a normal  $N(0, 1)$  e, dado  $P_0$ , obtém-se  $P_t$ .
  - O esquema de Euler tem *erro de discretização* de ordem  $\Delta t$ . Existem discretizações melhores (ex.: Milstein).
- ◆ Mas aqui (MGB) e para alguns processos estocásticos (mas não todos) podemos usar uma *discretização exata*, i. é, uma discretização tal que a *precisão numérica independe do tamanho do passo-tempo* (independe do “ $\Delta t$ ”).
  - Isso é particularmente útil para opções reais, que trabalham geralmente com tempos de expiração longos. Podemos simular muitos anos à frente.
  - Para opções européias podemos simular apenas na expiração ( $t = T$ ).

## Equações para Simular Processos Estocásticos

- ◆ Uma lista de processos estocásticos que admitem discretizações exatas está no livro de Kloeden & Platen (“*Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*”, 1992, tópico 4.4).
  - Uma delas é o Mov. Aritmético Browniano (MAB). Mas usando o **lema de Itô** podemos transformar um MGB em MAB através de uma transformação logarítmica,  $p = \ln P$ , que resulta no MAB. Após isso, podemos aplicar Euler que para o MAB é exato:  

$$\Delta p = (r - \delta - 0,5 \sigma^2) \Delta t + \sigma N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$
- ◆ “Algebrando”, obtemos as equações de discretização exata para simular tanto o MGB **real** como o MGB **neutro ao risco**:  

$$P_t = P_0 \exp\{(\alpha - 0.5 \sigma^2) \Delta t + \sigma N(0, 1)\sqrt{\Delta t}\} \quad \text{Real}$$

$$P_t = P_0 \exp\{(r - \delta - 0.5 \sigma^2) \Delta t + \sigma N(0, 1)\sqrt{\Delta t}\} \quad \text{Neutro ao Risco}$$
- ◆ Bastar amostrar  $N(0, 1)$  e obter os  $P_t$  correspondentes (*lognormal*)
- ◆ Processos estocásticos com discretização exata incluem *reversão à média*. Ver: [www.puc-rio.br/marco.ind/sim\\_stoc\\_proc.html](http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html)

## Exemplo: Simulação de Opção Européia

- ◆ Iremos calcular o valor da opção **européia** por simulação e comparar com o resultado analítico de Black-Scholes-Merton.
  - Para tal pode-se simular N caminhos do processo estocástico de V
  - Mas como só interessa a distribuição de probabilidades na expiração, é  muito melhor simular apenas na expiração.
- ◆ Resolve-se o problema com a [OMC Black Scholes.xls](#) planilha que tem um simulador de MC embutido (logo, só precisa do Excel para simular).
  - Planilha tem código VBA aberto (ver menu do Excel: ferramentas/macro/Editor do Visual Basic)
  - Planilha usa tanto o Monte Carlo tradicional como o mais preciso Quase-Monte Carlo (usa números quase-aleatórios), que será visto em breve.
  - Veremos que é necessário usar um algoritmo para transformar um número aleatório de distribuição uniforme em distribuição  $N(0, 1)$ .
    - ➔ O código VBA da *Inversão de Moro* é também apresentada.

## Simulação em Funções Convexas

- ◆ Nas equações de simulação de processos estocásticos frequentemente aparecem funções convexas do tipo:
  - $P(t) = P(t - 1) \exp\{\dots + \dots N(0, 1) \dots\}$
  - Isso foi visto, por ex., na equação da simulação de MGBs.
- ◆ Como a *função exponencial é convexa*, o “valor esperado” estático (valor mostrado na planilha antes da simulação) é menor do que o valor esperado dinâmico (valor esperado da distribuição obtida após a simulação). Ver a [simulação](#).
- ◆ Alguns lembretes/dicas são úteis para simulação de MGBs:
  - Se  $X = \exp(Y)$  e  $Y \sim N(m; v)$ , sendo  $m =$  média e  $v =$  variância, então  $X \sim \text{LogN}(\exp[m + 0,5 v]; \exp[2 m + v] \cdot \{\exp[v] - 1\})$ .
  - Lembrar da parte 4:  $p = \ln(P) \Leftrightarrow P = \exp(p)$  e pelo *lema de Itô*:  $dp = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz \Leftrightarrow dP/P = \alpha dt + \sigma dz$ . Sabemos que  $P \sim \text{Lognormal}$ ,  $dp \sim \text{Normal}$  e  $dP/P \sim \text{Normal}$ . Apesar das variâncias de  $dp$  e  $dP/P$  serem iguais ( $\sigma^2 dt$ ), as médias dessas normais diferem por  $\frac{1}{2} \sigma^2 dt =$  a metade da variância de  $dp$ .



### Exemplo: Desenvolvimento de Campo de Petróleo

- ◆ Suponha que o desenvolvimento de um campo de petróleo tem dois anos para ser decidido, mas devido a falta de recursos a decisão será tomada só na expiração:
  - ➔ Na expiração, o valor da opção é  $F(T) = \max\{VPL, 0\}$
- ◆ Assim convenientemente temos uma opção europeia e podemos usar a simulação de Monte Carlo facilmente
- ◆ Assuma o modelo:  $VPL = V - D = (q P B) - D$ ; e os dados:
  - ➔ Tempo de expiração dos direitos dado pela ANP:  $T = 2$  anos
  - ➔ Reserva estimada:  $B = 120$  milhões de barris
  - ➔ Qualidade Econômica da Reserva  $q = 20\%$
  - ➔ Custo de desenvolvimento  $D = 480$  MM\$
  - ➔ Preço corrente do petróleo  $P_0 = 20$  \$/bbl
  - ➔ Volatilidade dos preços do petróleo  $\sigma = 30\%$  aa.
  - ➔ Taxa de juros livre de risco  $r = 10\%$  a.a.
  - ➔ Taxa de dividendos (convenience yield de P)  $\delta = 10\%$  a.a.
  - ➔ Taxa ajustada ao risco  $\mu = 15\%$  aa. Logo drift  $\alpha = \mu - \delta = 5\%$  aa

### Exemplo: Opção Real Europeia

- ◆ O valor presente do ativo básico  $V.P.[V_T]$  é o mesmo nas duas simulações, desde que se use a taxa de desconto:
  - Taxa de desconto *ajustada ao risco*  $\mu$  na simulação *real*
  - Taxa de desconto *livre de risco*  $r$  na simulação *neutra ao risco*
- ◆ O mesmo *não* ocorre para a opção, pois não sabemos a taxa da opção ( $\mu$  é ajustado ao risco de  $V$  e não da opção).
  - Lembrar do caso em tempo discreto (ex. do seguro, tópico 1)
- ◆ Iremos fazer tanto a simulação neutra ao risco como a simulação real e iremos comparar o valor da opção obtido com o resultado da fórmula do Black-Scholes
  - No modelo B&S&M o mercado é completo, logo a simulação *neutra ao risco* deverá dar o mesmo resultado de B&S&M.
    - ➔ Estamos assumindo MGB (pois é B&S&M).
    - ➔ Podemos usar um software comercial, por ex. o @Risk, ou o simulador de *quase-Monte Carlo* do meu website.

## Simulação da Opção Real Européia

- ◆ Podemos simular todo o path (usando pequenos  $\Delta t$ ) ou, diretamente só em  $t = T$ , pois a discretização é exata nesse caso.
  - Mostraremos que dão aproximadamente os mesmos valores
- ◆ O valor teórico por Black & Scholes da opção é:
  - $F = 66,02084$  MM\$
- ◆ Com 50.000 iterações no @Risk foi obtido (neutro ao risco):
  - Simulando todo o path:  $F = 66,50$  MM\$ (erro BS = - 0,7%)
  - Simulando só em T:  $F = 66,01$  MM\$ (erro BS = 0,01%)
- ◆ Valor presente do ativo básico  $V$  em T:
  - ➔ Simulação neutra ao risco:  $480,25 * \exp(-0,1*2) = 393,20$  MM\$
  - ➔ Simulação real:  $530,7589 * \exp(-0,15*2) = 393,20$  MM\$ (igual!!)

## Simulação Real e Opções

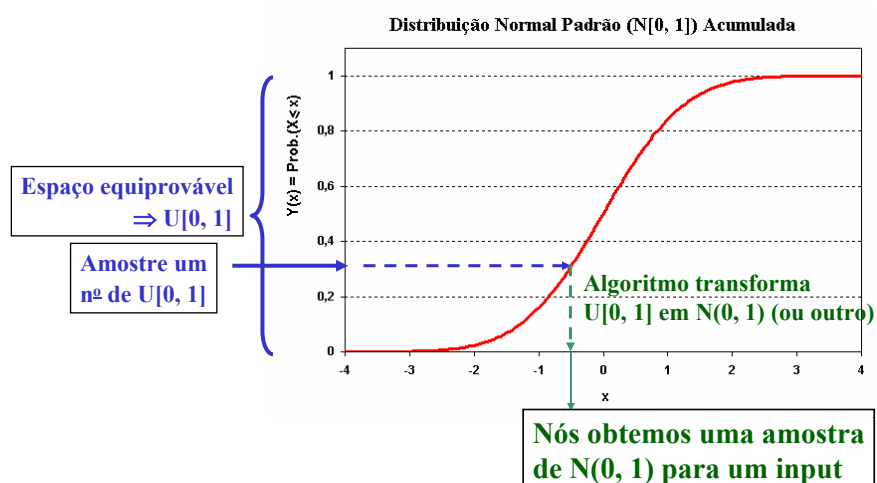
- ◆ Já para o valor da opção, a simulação *real* não vale. O valor de opções obtido pela simulação *real* e descontando com a taxa ajustada ao risco  $\mu$  do ativo básico foi de:
  - Simulação só em T: “F” = 83,29 MM\$
  - Simulação em todo o path: “F” = 83,71 MM\$
  - Logo não bate com o resultado teórico (= 66,02)
- ◆ Conclusão: para o ativo básico pode usar um dos dois métodos (simulação real + taxa ajustada ao risco ou simulação neutra ao risco + taxa livre de risco),
  - Mas para a opção deve-se usar simulação NR + r, pois não se sabe a priori qual a taxa ajustada ao risco da opção.
- ◆ Pode-se achar a taxa de desconto ajustada ao risco da opção:
  - Nesse exemplo, usando uma taxa de 26,6 % para atualizar a opção (em vez da taxa do ativo básico de 15%), obtém-se aproximadamente o valor teórico de B&S.

## Precisão da Simulação de Monte Carlo

- ◆ Fazendo uma simulação do mesmo problema mas com 1.000.000 de iterações no @Risk, foi obtido:
  - $F = 66,01711$  (erro BS = 0,0057 %)
  - Fazendo 20 vezes mais iterações, o erro caiu apenas cerca da metade (redução de erro por um fator 2).
  - O erro teórico da simulação de Monte Carlo é da ordem de  $n^{-0,5}$ , ou seja, para reduzir 10 vezes o erro temos de multiplicar o número de iterações  $n$  por 100 (!)
  - Existem métodos que podem reduzir esse erro:
    - ➔ Técnicas de *redução de variância* (ex.: *Latin Hypercubic*)
    - ➔ Uso de números quase-aleatórios (“Quase-Monte Carlo”)
      - Em vez de usar números aleatórios ou pseudo-aleatórios se usa seqüências determinísticas de *baixa discrepância* (Sobol, Faure, Halton). Vamos olhar as animações do website na PUC para entender esse método.

## Simulação de MC e Processo de Amostragem

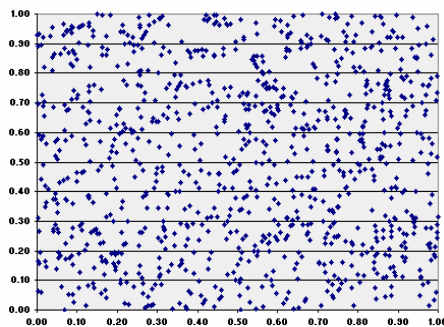
- ◆ A qualidade numérica da simulação depende do processo de amostragem. A figura (Normal padrão acumul.) mostra que, em geral, **precisaremos só da distribuição uniforme no intervalo [0, 1]**.
  - Algoritmo transforma a amostra  $U[0, 1]$  em amostra de outra distribuição.



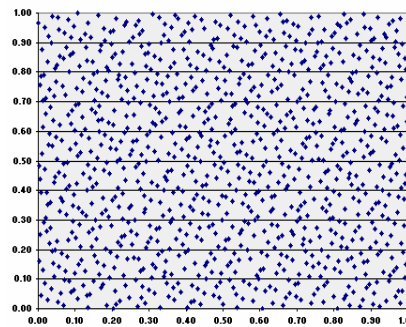
## Gerando U[0, 1]: Pseudo x Quase-Aleatório

- ◆ Vimos que a qualidade numérica da simulação depende do processo de amostragem de U[0, 1]. O método tradicional para gerar U[0, 1] é o *pseudo-aleatório*, ex., a função Excel Aleatório().
- ◆ Um método melhor para gerar U[0, 1] é o dos **números quase-aleatórios** (seqüências de *baixa discrepâncias*). É o Quase-MC.
  - As figuras comparam os 2 métodos p/ a dist. uniforme bi-dimensional. Note que o caso quase-aleatório apresenta pontos mais igualmente dispersos (menos “clusters” de pontos que no caso pseudo-aleatório).

Pseudo-Aleatório



Quase-Aleatório



## Simulação de Quase-Monte Carlo

- ◆ Discussão, algoritmos e comparação das propriedades da seqüência de quase-Monte Carlo são mostradas no website em: [http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi\\_mc.html](http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi_mc.html)
- Para uma distribuição Uniforme [0, 1], cujas propriedades teóricas são mostradas para benchmarking, vemos a superioridade da seqüência de baixa discrepância de *van der Corput* na base 2 em relação a 2 seqüências pseudo-random

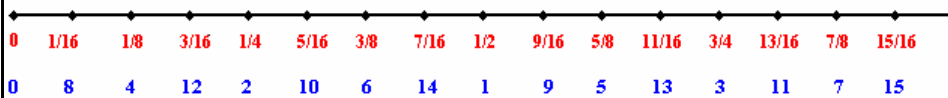
Statistical Properties of Quasi-Random x Uniform x Pseudo Random  
N = 1,000 simulations

	Quasi-Random (b2)	Uniform [0, 1]	Pseudo-Random (2 series)	
<b>Minimum</b>	9.76563e-4	0	1.81917e-5	3.27922e-4
<b>Maximum</b>	0.998047	1	0.999004	0.999982
<b>Mean</b>	0.498866	0.5	0.492246	0.512323
<b>Median</b>	0.498047	0.5	0.484037	0.521946
<b>Standard Deviation</b>	0.288661	0.288675	0.2851	0.291302
<b>Variance</b>	0.083325	0.083333	0.081282	0.084857
<b>Skewness</b>	2.042816e-3	0	0.039117	-0.077605
<b>Kurtosis</b>	1.794803	1.8	1.833614	1.773279

## Simulação de Quase-Monte Carlo

- ◆ Seqüência de van der Corput na base 2 (16 primeiros números) vai preenchendo de forma mais uniforme o intervalo [0, 1):

**van der Corput Sequence Base 2: distributed over the interval [0, 1)**  
The first 16 numbers of the sequence (from n = 0 to 15)



- ◆ Cuidado com o Excel! O gerador de n<sup>os</sup> aleatórios dele é ruim e pior ainda é a função Normal inversa, NORMSINV()

- Melhor é usar o algoritmo da *inversão de Moro* (código VBA fornecido).

Com o Excel XP, o erro mais grosseiro foi corrigido.

Excel (antes do XP) apresenta erro grosseiro nas caudas da distribuição

u	Excel NORMSINV	Exact	Moro's Inv.
0.001	-3.09024	-3.09023	-3.09023
0.0001	-3.71947	-3.71902	-3.71902
0.00001	-4.26546	-4.26489	-4.26489
0.000001	-4.76837	-4.75342	-4.75342
0.0000003	-7.15256	-4.99122	-4.99122
0.0000002	-5000000.0	-5.06896	-5.06896

## Simulação de Reversão à Média

- ◆ Uma discussão detalhada, assim como as equações de simulação estão em:

- ◆ [http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim\\_stoc\\_proc.html](http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html)

- Lá obtemos equações de simulação tanto real como neutra ao risco de duas variantes (próximas, Dias e Schwartz) do processo de reversão à média mais conhecido (OU).

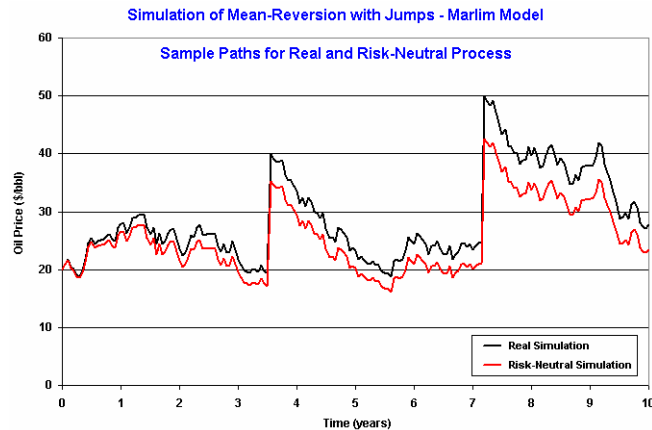
- ➔ No caso da **neutra ao risco** (variante “Dias”) temos a seguinte equação, onde entra a taxa ajustada ao risco do ativo básico  $\mu$ :

$$P(t) = \exp \left\{ \left[ \ln[P(t-1)] \exp[-\eta \Delta t] + \left[ \ln(\bar{P}) - \frac{(\mu - r)}{\eta} \right] (1 - \exp[-\eta \Delta t]) \right] - \left[ (1 - \exp[-2 \eta t]) \frac{\sigma^2}{4 \eta} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp[-2 \eta \Delta t]}{2 \eta}} N(0, 1) \right] \right\}$$

- A equação para a simulação real é muito parecida: basta suprimir o termo em **vermelho** na eq. acima. Esse termo é um prêmio de risco normalizado que penaliza  $\ln(\bar{P})$ .

## Simulação do Modelo de Marlim

- ◆ Vimos na parte 2 o Modelo de Marlim: um processo estocástico de reversão à média combinado com saltos (Poisson). Veremos agora uma planilha e *sample-paths*.
  - A planilha [simulation-reversion-jumps-marlim-real x rn.xls](#) permite uma simulação ilustrativa com saltos p/ cima ou p/ baixo de ocorrência aleatória, mas de tamanhos fixos.



## Opções Reais Europeias por Simulação

- ◆ Existem muitos problemas práticos da vida real que podemos aplicar a valoração de opções reais europeias por simulação de MC, principalmente [seqüências de opções reais europeias](#) (ex., opções de compra sobre uma *cesta* de ativos).
  - Esse é o melhor caminho para valorar projetos com **flexibilidade de inputs e/ou de outputs**, pois a cada data específica de decisão (ex.: todo mês) a firma tem de decidir o melhor “mix” de inputs e outputs para o próximo período operacional (para maximizar o payoff, ex., para o próximo mês).
  - Veremos alguns casos reais. A idéia é simular, tanto para inputs como para outputs, os processos estocásticos neutros ao risco, os quais não necessariamente são MGBs (ex., pode ser reversão).
  - Além disso, a função payoff de exercício da opção pode ser muito complexa, com vários detalhes da vida real (ex., um input não é disponível no primeiro ano ou em certos meses do ano; uma certa quantidade mínima de um input tem de ser usada por contrato, etc.)
  - Simulação de MC dentro de uma planilha é muito flexível para manusear múltiplos/complexos proc. estocásticos e funções payoff.

## Correlação e a Decomposição de Cholesky

- ◆ Em muitos problemas práticos temos de considerar que as variáveis aleatórias são dependentes.
  - Temos de estimar correlações ou outra forma de dependência probabilística e saber como introduzi-las nas simulaç. de MC.
  - O *coeficiente de correlação* é uma ótima medida de dependência no caso de variáveis normais e em mais alguns outros casos.
    - Como nem sempre a correlação é adequada, o @Risk usa o “*rank correlation de Spearman*”, que é não-paramétrico.
- ◆ No caso de processos MGB e MRM com retornos tendo distribuição normal, o coef. de correlação  $\rho$  faz sentido.
- ◆ Uma maneira prática de usar  $\rho$  é através da decomposição de Cholesky. Veremos apenas o caso de 2 variáveis aleatórias:
  - Se as v.a. normais X e Y tem correlação  $\rho$ , então basta amostrar duas normais independentes  $z_x$  e  $z_w$ , usar  $z_x$  para a v.a. X e usar a fórmula de Cholesky p/ a v.a. Y:

$$z_y = \rho z_x + z_w \sqrt{1 - \rho^2}$$

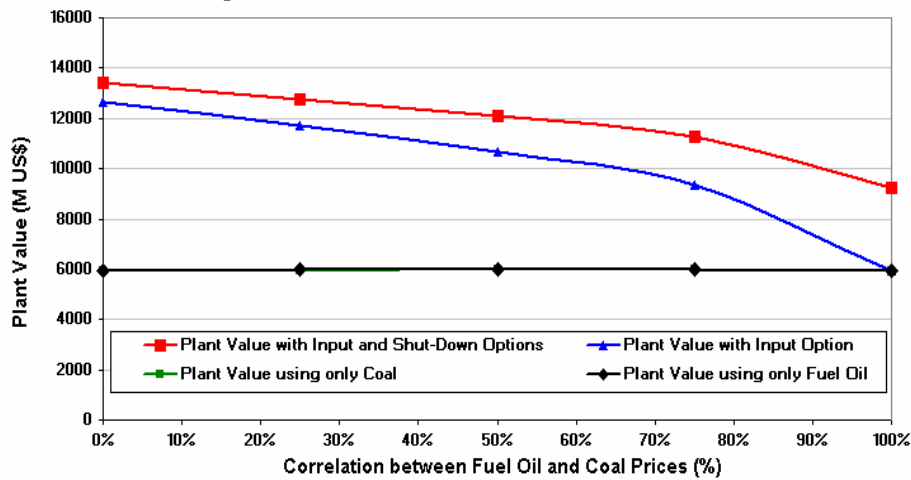
## Planta Flex-Fuel com e sem Opção de Shut-Down

- ◆ Uma firma está pensando em investir numa planta que consome energia. Existem três alternativas de tecnologia:
  - Planta usando só óleo combustível; planta usando só carvão; e planta flex-fuel, i. é, com (sem custo) flexibilidade (óleo ou carvão).
  - “Molho”: planta flex-fuel com *opção de shut-down* (sem custo).
- ◆ Quais são os valores da planta em cada caso considerando que o óleo e o carvão seguem *processos correlacionados de reversão*?
  - A resposta dá uma idéia do máximo valor que uma firma estaria disposta a pagar pela (mais cara) tecnologia flex-fuel.
  - Correlação positiva diminui o valor da opção, mas é necessário uma (improvável) correlação muito alta p/ o valor da opção ser desprezível.
- ◆ Qual é o efeito da opção de shut-down sem custo?
  - Essa opção pode ser muito importante. Existem implicações contratuais
- ◆ A simulação de MC responde facilmente essas questões.
  - Essa é uma *seqüência de opções européias* (escolhe o máximo payoff em cada data de decisão operacional). O próximo slide mostra um exemplo

## Planta Flex-Fuel, Correlação e Valor da Flexibilidade

- ◆ O gráfico mostra um exemplo numérico de reversão à média para ambos os inputs (óleo e carvão), p/ diferentes correlações.

- Os valores foram obtidos por MC na planilha [planta flex-fuel.xls](#).
- Valores de planta com só um input (sem opções) são ~ os mesmos.
- ➔ Valor da planta mostrado é sem o investimento.



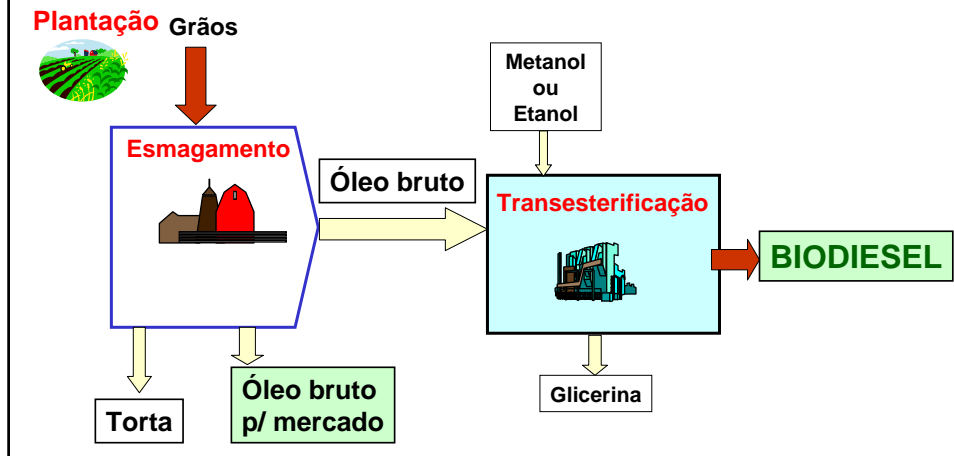
## Caso Real de Opção Real: Biodiesel

- ◆ Nesse caso real, MC foi o método numérico utilizado.
- ◆ O projeto biodiesel usa oleaginosas (mamona, soja, algodão, pinhão-mansão, licuri, etc.) para fabricar biodiesel.
  - O estudo das três primeiras unidades foi concluído em 2005.
- ◆ O preço das oleaginosas e de seus óleos (brutos) oscilam no mercado internacional (commodities), com variada liquidez.
- ◆ Uma importante característica das plantas de biodiesel é que elas são multi-oleaginosas, i. é, existe *flexibilidade de input*.
  - Logo, é natural que a análise dessas plantas inclua o valor das opções reais de usar as oleaginosas mais adequadas ao longo da sua vida útil
- ◆ Além disso, a planta de biodiesel precisa usar um reagente que pode ser tanto o *etanol* como o *metanol*, que também oscilam no mercado. Logo, temos mais OR de input!
- ◆ Assim, não foi à toa que foi solicitada e feita a avaliação por opções reais nesse estudo de viabilidade.



## Projeto Biodiesel

- ◆ Uma planta de biodiesel tem duas unidades principais:
  - A unidade de *esmagamento* da oleaginosa, gerando óleo bruto e resíduo (torta). O óleo bruto é a principal receita dessa planta; e
  - A unidade de *transesterificação*, que usa o óleo bruto gerado no esmagamento (custo), além do reagente, e gera biodiesel e resíduos.



## Projeto Biodiesel: Flexibilidade de Inputs

- ◆ O projeto foi formatado de forma que a Petrobras é dona dos dois negócios (esmagamento e transesterificação), garantindo a qualidade do óleo bruto (input do biodiesel) e *capturando a flexibilidade de escolha das oleaginosas*.
- ◆ Após um período inicial em que a Petrobras irá garantir a compra da safra de determinadas culturas, a Petrobras tem uma opção de escolher livremente qual a oleaginosa usar, a cada período (safra). Essa flexibilidade de input é modelada:
  - Como uma *seqüência de opções européias* de uso da(s) oleaginosa(s) e reagentes (etanol ou metanol) que maximize o lucro a cada período
  - Escolhe as combinações oleaginosas + reagentes de maior valor em t
  - Assim, fazemos *simulações de Monte Carlo* dos *processos estocásticos* dos preços de cada um dos grãos, de cada um dos óleos brutos, de cada uma das tortas, do etanol e metanol e do biodiesel (= diesel) e a cada período escolhe a combinação (opção) que maximiza o lucro.
  - Simulamos diversos *tipos* de processos estocásticos (movimento geométrico Browniano e Marlim = reversão à média + saltos).

## Formato do Projeto Biodiesel

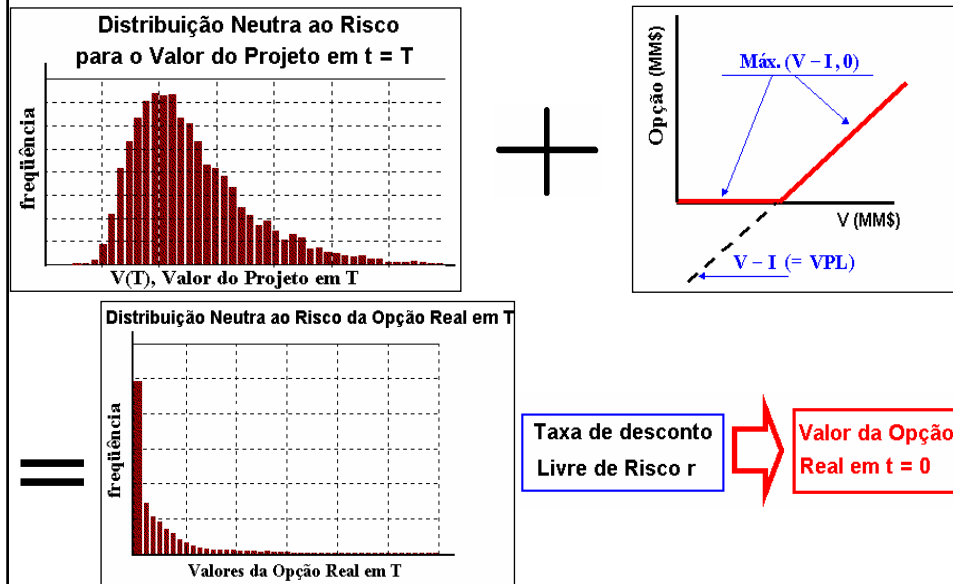
- ◆ Na análise, foi visto que a planta de esmagamento é em geral mais lucrativa do que a unidade de transesterificação.
- ◆ A formatação do negócio sugerido é que a Petrobras entre também no negócio óleo bruto para o mercado com um excesso de capacidade de esmagamento (investimento ~pequeno).
- ◆ Com isso temos dois negócios complementares que fazem um *hedge* (seguro) *natural*:
  - ① O negócio biodiesel, onde o óleo bruto entra como *custo* do biodiesel (e assim, um óleo barato beneficia esse negócio); e
  - ② O negócio óleo para o mercado, onde o óleo bruto entra como *receita* (⇒ se um óleo estiver caro, ele vai p/ o mercado e não p/ biodiesel).
- ◆ Esse formato faz com que sejam aproveitados óleos vegetais tanto num negócio como no outro. É bom para todo mundo:
  - Para a Petrobras que captura o valor das opções reais (flexibilidades); e
  - Para os agricultores, que terão demanda do seu óleo pela Petrobras, seja para fazer biodiesel, seja para vender no mercado de óleo vegetal.
  - Esse formato até reduz a volatilidade no mercado de óleo vegetal bruto.

## MC para Estimar Volatilidade Agregada

- ◆ No caso de opções *americanas* com diversas fontes de incertezas, um método prático é agregar as variáveis em uma variável  $V$  e calcular a volatilidade de  $V$  por MC.
  - Com  $\sigma_V$  (e  $\delta_V$ ), pode-se usar um software tradicional com uma ( $V$ ) ou duas ( $V$  e  $I$ ) fontes de incerteza e resolve OR facilmente.
    - ➔ Planilha Timing pode ser usada para resolver múltiplas incertezas.
- ◆ Eu tenho usado essa abordagem desde início de 1999, baseado na *equação visual de opções reais*.
- ◆ O livro do Copeland & Antikarov (2001) defende um método similar (mas não igual) e dá suas bases teóricas.
  - Esse método é conhecido por **MAD** (*marketed asset disclaimer*) e usa um **teorema de Samuelson** para justificar o uso de **MGB**.
  - C&A: em muitos casos é quase impossível obter o valor de mercado do valor do projeto operando (ativo básico  $V$ ).
    - ➔ Volatilidade de  $V$  é em geral maior que a do preço  $P$  do produto.

## Equação Visual para Opções Reais

- ◆ A 1ª distribuição neutra ao risco do ativo básico  $V$  pode combinar vários processos estocásticos simulados numa data futura  $T$ . É a eq. visual de OR:



## Copeland & Antikarov: MAD

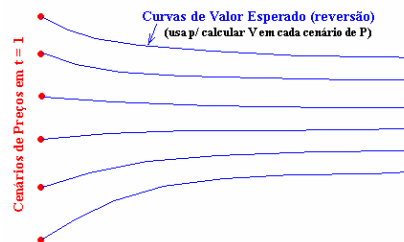
- ◆ MAD (*marketed asset disclaimer*): usa o valor presente do valor do projeto ( $V$ ), sem flexibilidade, como ativo básico da opção real.
  - Hipótese MAD diz que essa é a melhor estimativa não-tendenciosa do valor do ativo básico  $V$ .
- ◆ Vantagem prática: usa a planilha tradicional do fluxo de caixa descontado (FCD) para calcular  $V$ .
  - Assim, não faz premissas mais fortes do que as usadas pelas empresas que tradicionalmente usam o FCD nas suas decisões.
  - Assim, dado um conjunto de variáveis tais como preço(s) de produto  $P_i$ , custos operacionais fixos  $COF_j$  e custos operacionais variáveis  $COV_k$ , conhecidos hoje, a planilha de FCD calcula o VPL. Tendo o investimento  $I$ ,  $V = VPL + I$ .
    - ➔ Esse é a melhor estimativa de mercado para  $V(t = 0)$ .
  - Se o projeto for postergado, os preços  $P_i$  e custos  $COF_j$  e  $COV_k$  irão oscilar no mercado e o VPL (assim como  $V$ ) irão mudar.

## C&A: Teorema de Samuelson e MGB

- ◆ A segunda premissa de Copeland & Antikarov nessa abordagem prática é assumir que  $V$  segue um MGB, baseada num teorema de Samuelson (“*Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*”, 1965):
  - Mesmo que componentes de  $V$  (preços, custos, demanda) sigam processos estocásticos distintos (reversão à média, saltos, etc.) em termos agregado  $V$  segue ~ um MGB.
  - A idéia é fazer simulação dos processos estocásticos desses componentes (que podem ser correlacionados) em  $t = 1$  e calcular a distribuição de valor presente de  $V$  na data  $t = 1$ .
    - ➔ Essa distribuição de  $V$  é aproximadamente lognormal e a simulação de MC dá a média e a variância dessa distribuição;
    - ➔ Com a **fórmula de valor esperado do MGB** tira-se o drift de  $V$ . Se a simulação for real temos  $\alpha$ , se neutra ao risco,  $r - \delta$ ; e
    - ➔ Com a **fórmula da variância do MGB** e o drift, estimamos a volatilidade  $\sigma_V$ . Com isso, temos todos os parâmetros do MGB.

## MAD versus MAD Modificado

- ◆ A maneira que C&A implementam a hipótese MAD e o teorema de Samuelson é meio confusa e inconsistente.
  - C&A simulam todos os anos de fluxo de caixa. MAD-Dias só simula parâmetros de mercado do fluxo de caixa em  $t = 1$  e usa curvas de valor esperado para calcular o valor presente de  $V$ :
    - ➔ A partir do conhecido  $P(t = 0)$ , **simula os preços em  $t = 1$** .
    - ➔ Em cada cenário de  $P(t = 1)$ , fórmula dá a **curva de valor esperado de  $P$**  desde  $t = 1$  até  $t = \text{final da operação}$ .
    - ➔ Calcula  $V(P) = \text{valor presente dos FCs}$  usando a curva de valor esperado de  $P$
  - C&A calcula a distribuição normal do retorno logaritmo e sem postergar o primeiro fluxo de caixa (por que?). MAD-Dias simula a distribuição log-normal de  $V$ , o que é mais simples.
    - ➔ Como pode ocorrer cenários com valor negativo de  $V$ , a maneira de C&A dá problemas computacionais (logarit. de nº negativo).



## MAD versus MAD Modificado

- ◆ A maneira que C&A implementam dá inconsistências.
  - Vimos que se  $V = k P$  e  $P$  segue um MGB, então  $V$  também segue um MGB com a mesma volatilidade de  $P$ . A maneira de C&A dá inconsistência nesse caso (volatilidade maior que  $P$ ).
    - ➔ Usuários do método MAD tem reportado volatilidades  $\sigma_V$  demasiadamente altas. Erro é tendencioso para cima.
  - C&A sugere simular também a quantidade  $Q$  p/ calcular  $\sigma_V$ . Isso é inconsistente: se  $Q$  for volume de jazida, então  $Q$  tem incerteza técnica e não contribui p/  $\sigma_V$  (ver tópico 6). Se  $Q$  for quantidade demandada, então é função do preço (já simulado).
- ◆ Outra diferença é que C&A usam a volatilidade de  $V$  estimada no método binomial. Aqui usamos como *input* da planilha Timing (usa EDP) com resposta instantânea.
  - Luiz Brandão em 2005 (após debate com Jim Smith e troca de e-mails comigo e G. Dumrauf) defende um método similar ao MAD-modificado (simula só em  $t = 1$ ), mas ele simula retorno logarítimo (em vez de  $V$ ) e usa binomial (em vez do Timing.xls).

## MAD-Mod.: Simulação Real ou N.R.?

- ◆ Qual a simulação das variáveis estocásticas devemos fazer para estimar  $\sigma_V$ , a real ou a neutra ao risco?
  - A princípio qualquer uma dá estimativa de  $\sigma_V$ , embora sejam um pouco diferentes. Se usar a sim. real, obtemos o drift real  $\alpha$  e se usar a sim. neutra ao risco obtemos o drift n.r.  $r - \delta$ .
    - ➔ Na sim. real usamos as fórmulas  $E[V(t)] = V(0) \exp(\alpha t)$  (obtem  $\alpha$ ) e  $\text{Var}[V(t)] = V(0)^2 \exp[2 \alpha t] (\exp[\sigma^2 t] - 1)$  (obtem  $\sigma$ ); e
    - ➔ Na sim. neutra ao risco:  $E[V(t)] = V(0) \exp[(r - \delta) t]$  (obtem  $\delta$ ) e  $\text{Var}[V(t)] = V(0)^2 \exp[2 (r - \delta) t] (\exp[\sigma^2 t] - 1)$  (obtem  $\sigma$ ).
    - ➔ Prefiro a sim. real, pois ela gera menos valores negativos para  $V$  (e, logo, melhor ajuste da log-normal). Mas veremos as duas.
- ◆ Veremos um exemplo simples com uma ( $P$ ) e duas fontes de incertezas de mercado ( $P$  e custo operacional  $C$ ).
  - Usaremos a equação do modelo “*rigid cash flow (RCF)*”, ver: [http://www.puc-rio.br/marco.ind/payoff\\_model.html](http://www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html)
  - $V = k P - C$  (onde  $C$  é custo operacional). No RCF,  $k = q' B$ .

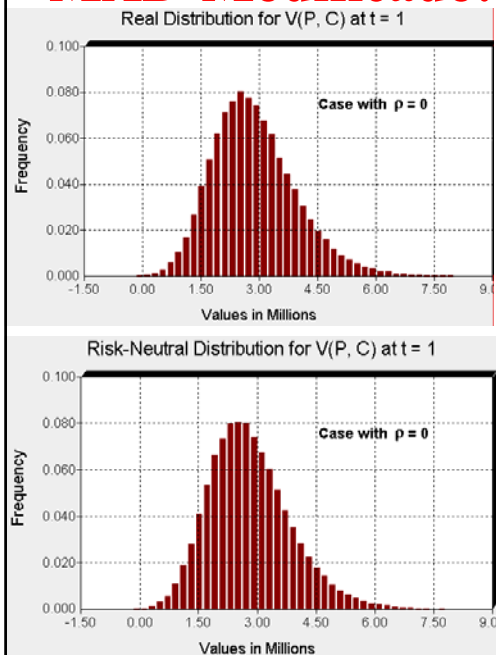
## MAD-Modificado: Exemplo Simples

- ◆ Na equação  $V = k P - C$ , iremos simular  $P$  e  $C$  em  $t = 1$  e gerar a distribuição de  $V$  como nosso output.
- ◆ O exemplo usa a planilha [@Risk-MAD modif RCF.xls](#)
- ◆ Veremos 3 casos distintos:
  - 1)  $P$  e  $C$  estocásticos, seguindo MGBs com correlação zero;
  - 2) Apenas  $P$  estocástico seguindo MGB; e
  - 3)  $P$  e  $C$  estocásticos, mas com correlação perfeita  $\rho = +1$ .
- ◆ Resumo dos valores obtidos (100.000 iterações), sendo usados  $\sigma_P = 25\%$  (todos os casos) e  $\sigma_C = 25\%$  (casos 1 e 3):

Caso:	$\sigma_V$ (sim. real)	$\sigma_V$ (sim. n.r.)	$\alpha_V$ (sim. real)	$\delta_V$ (sim. n.r.)
1) $P$ e $C$ seguem MGBs com $\rho = 0$	36,6%	36,5%	2,0%	6,0%
2) Somente $P$ segue MGB	35,0%	35,3%	2,2%	6,0%
3) $P$ e $C$ seguem MGBs com $\rho = +1$	24,998%	24,998%	2,0%	6,0%

- Exercícios: (1) se no caso 3, fosse  $\rho = -1$ , quanto seria  $\sigma_V$ ?;
- (2) Mostre a consistência do método MAD-modificado com o modelo  $V = k P$ , i. é, se  $P$  segue um MGB então  $\sigma_V = \sigma_P$ .

## MAD-Modificado: Exemplo Simples



- ◆ As figuras mostram as distribuições real (alto) e neutra ao risco (abaixo) de  $V$  p/ o caso 2 do exemplo.
- ◆ Note que elas tem a “cara” de log-normal, apesar de ter alguns cenários com valores negativos.
- Esse problema é ligeiramente menor no caso da simulação real (pois a média é maior).

## MAD-Modificado: Exemplo Simples

◆ Esse método é uma aproximação. No caso 2 do exemplo podemos calcular o valor “teórico” e comparar o erro.

- O valor teórico usa a aproximação analítica de Bjerksund-Stensland adaptada (software timing-rcf\_model-vba-hqr.xls).

	Opção F	Gatilho P*	Gatilho V*
Valores "Teóricos"	645,96	55,91	4367,26
Valores "MAD-Modificado"	625,29	55,80	4355,96
Erro	-3,2%	-0,2%	-0,3%

- Note que o erro no valor da opção foi pequeno e no valor do gatilho foi desprezível.
- *Como adaptar a aproximação analítica de Bjerksund-Stensland:* Chama  $k P$  de  $V'$ . Sabemos que  $V'$  segue o mesmo MGB de  $P$  (mesma  $\sigma$ , etc.). Logo a EDP de  $F(V', t)$  é igual a EDP de  $F(P, t)$ . Chama  $C + I$  de  $I'$ . Logo nas condições de contorno aparecerão casos conhecidos: em  $t = T$ ,  $F(V', T) = \text{Máx}[V' - I', 0] = F(P, T) = \text{máx}[k P - C - I, 0]$ ;  $F(V'^*, t) = V'^* - I' = F(P^*, t) = k P^* - C - I$ , etc.
- Logo,  $F(V, t)$ ;  $F(P, t)$ ;  $F(V', t)$  usa o mesmo software se  $V = k P$ .

## Outro Exemplo: Planta com FCD

◆ A planilha [@risk-mad-m\\_planta\\_rev.xls](#) apresenta um outro exemplo, dessa vez para uma planta que fabrica um produto que tem preço  $P$  e que consome combustível de custo  $C$  por unidade de produto.

- Considere que  $P(t)$  e  $C(t)$  seguem movimentos de reversão à média que podem ser correlacionados.
- ◆ Considere que a função lucro anual é:
- ◆  $\text{Lucro}(t) = [\{\text{Preço}(t) - \text{Custo Energia}(t)\} * \text{Quantidade} - \text{Outros Custos Operacionais}] (1 - \text{alíquota de impostos})$
- ◆ O valor do projeto operando é o valor presente dos lucros atualizados com a taxa ajustada ao risco  $\mu$ .
- ◆ Numa simulação, com  $\sigma_P = \sigma_C = 25\%$  e  $\rho_{P,C} = 0$ , o valor obtido para a volatilidade do projeto dessa vez foi menor que as volatilidades individuais:  $\sigma_V = 23\%$ .

# MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

## Processo de Reversão à Média

- ◆ Considere o processo aritmético de reversão à média

$$dx = \eta (\bar{x} - x) dt + \sigma dz$$

- ◆ Cujas solução é dada pela equação com a integral estocástica:

$$x(T) = x(0) e^{-\eta T} + \bar{x} (1 - e^{-\eta T}) + \sigma e^{-\eta T} \int_0^T e^{-\eta t} dz(t)$$

- ◆ Onde  $\eta$  é a velocidade de reversão. A variável  $x(t)$  tem distribuição normal com média e variância dada a seguir:

$$E[x(T)] = x(0) e^{-\eta T} + \bar{x} (1 - e^{-\eta T})$$

$$\text{Var}[x(T)] = [1 - e^{-2\eta T}] \sigma^2 / (2\eta)$$

- ◆ Para o processo dos preços do petróleo  $P$ , o mesmo terá distribuição **lognormal com média =  $\exp\{E[x(T)]\}$**



## Simulação Neutra ao Risco da Reversão

- ◆ Para o preço do petróleo seguir a lognormal com a média desejada, temos de subtrair a metade da variância (que é uma função determinística do tempo):

$$P(t) = \exp\{x(t) - (0,5 * \text{Var}[x(t)])\}$$

- ◆ Iremos fazer também  $\bar{x} = \ln(\bar{P})$ , onde  $\bar{P}$  o preço de equilíbrio de longo prazo.
- ◆ O processo **neutro ao risco** para a variável  $x(t)$ , considerando a discretização correta AR(1) de  $x(t)$ , que vale mesmo  $p/\Delta t$  grande:

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta\Delta t} + [\bar{x} - ((\rho - r)/\eta)] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{(1 - \exp(-2\eta\Delta t))/(2\eta)} N(0, 1)$$

- ◆ Amostrando a normal padrão  $N(0, 1)$ , obtemos os paths para  $x(t)$ .
- ◆ Usando a equação anterior que relaciona  $P(t)$  com  $x(t)$ , obtemos os paths neutro ao risco para os preços do petróleo seguindo o processo de reversão mostrado.
- ◆ Esse processo de reversão é parecido mas não é igual ao chamado “modelo 1” de Schwartz (Journal of Finance, 1997)

## Reversão à Média com Jumps

- ◆ Parecido com o caso da reversão pura. Relação entre  $P(t)$  e  $x(t)$  é a mesma, mas a equação da variância é:

$$\text{Var}[x(T)] = (1 - e^{-2\eta T}) \cdot \frac{(\sigma^2 + \lambda \cdot E[\phi^2])}{2\eta}$$

- ◆ Lembrando que  $E[\phi^2] \neq (E[\phi])^2$

$$E[\phi^2] = \int \phi^2 \cdot f(\phi) d\phi$$

- ◆ A equação de simulação é ([http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim\\_stoc\\_proc.html](http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html)):

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta\Delta t} + [\ln(\bar{P}) - ((\mu - r)/\eta)] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{(1 - \exp(-2\eta\Delta t))/(2\eta)} N(0, 1) + \text{jumps}$$

- ◆ Onde o termo jumps é dado por:

$$\text{jumps} = \sum_{i=1}^{J(\Delta t)} \phi_i$$

◆ Em que  $J(\Delta t) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot \Delta t)$

◆  $\phi_i$  é a distribuição do jump-size

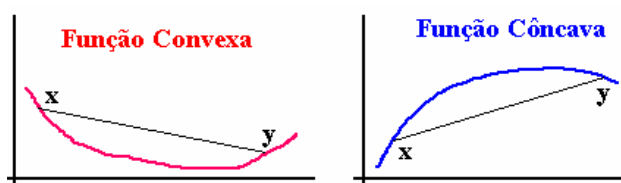
## Funções Côncavas e Convexas

- ◆ Uma função é *convexa* no seu domínio ( $D$ ) se toda corda (reta) ligando dois pontos fica acima da função
- ◆ Uma função é *côncava* no seu domínio ( $D$ ) se toda corda (reta) ligando 2 pontos fica abaixo da função
- ◆ Matematicamente, a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  é *convexa* se e somente se para todos os pontos  $x$  e  $y \in D$  e  $\lambda \in (0, 1)$

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f[\lambda x + (1 - \lambda)y]$$

- Analogamente, a função  $f$  é *côncava* se e somente se:

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f[\lambda x + (1 - \lambda)y]$$



## Caso Real: Gasoduto Bolívia-Brasil

- ◆ Nos anos de 2000 e 2001 houve uma disputa entre a TBG (Transportadora Bolívia-Brasil; Petrobras é o acionista controlador) e as empresas BG e Enersil.
- ◆ A disputa, arbitrada pela ANP, tinha duas questões:
  - Livre acesso ao gasoduto, apesar da Petrobras ter contratado 100% da capacidade com contrato *take-or-pay*.
  - Caso a BG e a Enersil obtivessem livre acesso, qual a tarifa a ser paga? Eles queriam a mesma tarifa, mas sem *take-or-pay*.
    - ➔ Não pode haver dois *take-or-pay* sobre a mesma capacidade.
    - ➔ O acesso seria *interruptível* (caso a Petrobras conseguisse novos contratos num volume suficiente para ocupar *toda* a capacidade), com aviso prévio. Mas os entrantes têm mais flexibilidade.
- ◆ Fizemos uma análise de opções reais para o caso da tarifa:
  - Os entrantes teriam mais flexibilidade, pois em caso de demanda baixa eles não pagariam *take-or-pay*, só pagariam quando usassem o duto.
  - Essa maior flexibilidade deve ser valorada e cobrada na tarifa.

## Tarifa Flexível no GAS-BOL

- ◆ A modelagem para calcular o preço justo da tarifa dos entrantes, considerando a sua maior flexibilidade quando comparado ao caso *take-or-pay*, compreendeu:
  - Simulação da demanda de gás na área de interesse. Usado um movimento geométrico Browniano. Simulação mensal.
  - Determinação do nível de *excesso de demanda* que poderia ser capturada parcialmente pelos entrantes.
  - Modelagem de contratos-padrão que poderiam ser fechados pelos entrantes (de 100.000 m<sup>3</sup>/d, de renovação anual).
    - ➔ Foi colocado um teto de nº de contratos para os entrantes.
    - ➔ Em caso de queda de demanda, um ou mais contratos não seriam renovados, mas os entrantes não seriam penalizados (não é *take-or-pay*).
    - ➔ Horizonte de análise de cerca de três anos.
  - O critério de “tarifa justa” foi o de ter o mesmo lucro (em valor presente) para os casos de *take-or-pay* (tarifa mais baixa) e de tarifa *não-take-or-pay*, interruptível (tarifa mais cara).

## Tarifa Flexível no GAS-BOL

- ◆ A análise de OR mostrou que a tarifa de equilíbrio para os entrantes deveria ser cerca de 20% mais cara (prêmio da flexibilidade) que a tarifa “*take-or-pay*”.
- ◆ Fizemos uma apresentação para a ANP em 11/01/2001 para mostrar os motivos do nosso pleito de 20% prêmio
  - Houve uma ótima receptividade, já que o modelo da planilha era bem transparente e as premissas do estudo eram realistas.
- ◆ A decisão da ANP saiu alguns dias depois e foi:
  - ANP deu livre acesso aos entrantes (“derrota” da Petrobras);
  - ANP reconheceu que os entrantes teriam maior flexibilidade que a Petrobras/*take-or-pay*. Vitória da Petrobras:
    - ➔ No entanto, eles deram um prêmio de 11% (menor do que pleiteamos).
  - Ver o Parecer Técnico ANP de 26/01/01: “*Caso BG vs. TBG Referente ao Conflito Relacionado ao Serviço de Transporte Não Firme*” em [www.anp.gov.br/doc/gas/release\\_BG\\_TB.G.pdf](http://www.anp.gov.br/doc/gas/release_BG_TB.G.pdf)