Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Análise de Investimentos com Opções Reais IND 2072

Parte 2: Opções em Tempo Discreto

Marco Antonio Guimarães Dias
Professor Adjunto (tempo parcial)

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2008

Arbitragem

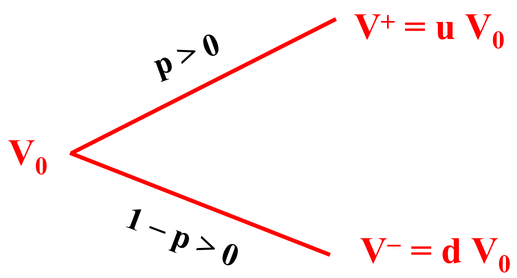
- Definição informal: arbitragem é a possibilidade de ter *lucro* no mercado *sem risco* e *sem investimento líquido* (sem ter dinheiro).
  - É uma *máquina de fazer dinheiro* sem risco ("moto-perpétuo").
    - Em t = 0 fazer um investimento líquido igual a zero e em t = 1 não ter risco de perder em nenhum cenário, mas *podendo ganhar* em algum.
- Uma das definições + formais de oportunidade de arbitragem:
  - *É um plano de consumo que tem custo inicial não-positivo* e que *é sempre não-negativo e estritamente positivo em pelo menos um cenário* (Huang & Litzemberger, *Foundations for Financial Economics*, 1988, p. 226).
- Uma condição *necessária* (suficiente se o mercado for completo) para o *mercado estar em equilíbrio* é os preços não gerarem oportunidades de arbitragem, pois num mercado competitivo:
    - Se existir uma oportunidade de arbitragem, ela logo desaparecerá devido a pressão de compra do ativo barato e a pressão de venda do ativo caro: os preços desses ativos retornariam ao equilíbrio.
  - Modelos de valoração de ativos têm de ser livre de arbitragem.

Arbitragem

- O conceito de arbitragem foi popularizado com Black-Scholes e Merton, mas foi usado antes em trabalhos famosos. Exs.:
  - Teoremas de Modigliano & Miller (Nobel) sobre irrelevância da estrutura de capital; Hotteling sobre o preço de recursos naturais.
- Mas o conceito de arbitragem é bem mais antigo:
  - Rubinstein (2006, *The History of the Theory of Investments*): o conceito de arbitragem é conhecido pelo menos desde 1657 (C. Huygens, *Calculating in Games of Chance*). Já p/ Lyuu (*Financial Engineering and Computation*, p. 91) o conceito de arbitragem vem de Pascal (16??).
- O conceito de arbitragem é muito usado em valoração de opções/derivativos (mas tb. na *teoria de equilíbrio da economia*).
  - O preço justo da opção não permite ganhos de arbitragem (idéia básica de Merton usada por Black-Scholes). Para isso se constrói um portfólio sem risco, composto de opções e do ativo básico.
    - O retorno desse portfólio sem risco tem de ser a taxa livre de risco, senão os "*arbitrageurs*" (pessoas com 2 telefones na mão e três telas de computador na frente) farão lucro sem risco e sem colocar seu $.

Exemplo de Não-Arbitragem: Binomial

- Um exemplo de uso desse conceito é no modelo de difusão binomial para preços de um ativo de risco V dado uma taxa de juros sem risco r. Se uma ação hoje vale V_0 e daqui a um período vale V^+ ou V^- (ambos com probabilidades > 0), isto é:



Onde:

$$u = \text{“upside”} = \frac{V^+}{V_0}$$

$$d = \text{“downside”} = \frac{V^-}{V_0}$$

- Assumindo r > 0, para não ter oportunidades de arbitragem é *necessário e suficiente* que *qualquer* esquema binomial atenda a desigualdade: $0 < d < (1 + r) < u$. Provar sem ver a solução.
  - Provaremos a *condição necessária*: não-arbitragem $\Rightarrow$ $d < (1 + r) < u$

Exemplo de Não-Arbitragem: Binomial

- A 1ª desigualdade, $d > 0$, tem a ver com a "*responsabilidade limitada*" (e não com arbitragem), pois não há preços negativos p/ ativos como ações (investidor perde no máximo o investido).
- A desigualdade $1 + r > d$ é requerida, pois se $d \geq 1 + r$, então a investidora faria arbitragem: em $t = 0$ ela pega emprestado V_0 e compra a ação. Na pior das hipóteses em $t = 1$ (ocorrer cenário V^-) ela pelo menos pagaria o empréstimo e no cenário favorável (V^+) ela obtém lucro > 0 após pagar o empréstimo. Com $p > 0$ e $1 - p > 0$, é *esperado* lucro *sem risco* e *sem colocar seu próprio $.*
- A desigualdade $u > 1 + r$ é requerida, pois se $1 + r \geq u$, então em $t = 0$ a investidora venderia a ação a descoberto e usaria o $ p/ investir no título sem de risco com taxa r. Em $t = 1$, mesmo no cenário V^+ ela usaria o dinheiro que rendeu r para no mínimo recomprar a ação e zerar sua posição. No cenário V^- ela teria lucro > 0 após recomprar a ação. De novo ela faria arbitragem.

Paridade de Opções Européias: Arbitragem

- A equação de *paridade* em opções européias é um exemplo de valoração por arbitragem. Para opções sobre a mesma ação V, com mesmo K e mesmo T: $c - p = e^{-\delta T} V - e^{-r T} K$
- Suponha duas carteiras, uma só formada por c e a outra por p + V – valor presente de K. Assuma aqui $\delta = 0$.
  - ➡A tabela abaixo mostra que essas carteiras têm valores iguais.

	Fluxo de Caixa em t = 0	Fluxo de Caixa no Vencimento	
Carteira	Ativos de Cada Carteira	Cenário $V \leq K$	Cenário $V > K$
1	Compra Opção de Compra ($-c$)	0	$V - K$
2	Compra Opção de Venda ($-p$)	$K - V$	0
	Compra a Ação ($-V$)	V	V
	Pega Emprestado o valor presente de K (+VP de K)	$-K$	$-K$
	Total da Carteira 2	0	$V - K$

Paridade de Opções Européias e Exercício

- Repare que coloquei "valor presente de K", i. é, a paridade vale tanto com taxa de juros em tempo discreto como contínuo.
- Repare também que não assumi nenhuma distribuição de probabilidades para o ativo básico V: pode ser qualquer uma.
- A relação de paridade de opções européias é tb. bem antiga:
  - Rubinstein (2006): a relação de paridade de opções é conhecida desde 1688 (de la Vega, *Confusion de Confusiones*) para gerar a *put*.
  - Conforme Haug (2007), a paridade de opções européias já era bem discutida nos livros Higgins (1902, *The Put-and-Call*) e Nelson (1904, *The A B C of Options and Arbitrage*, The Wall Street Library, NY).
  - Já a paridade/simetria de opções americanas é bem recente (McDonald & Schroder, *working paper* de dezembro de 1990).
- Exercício: Refaça a demonstração da paridade, mas assumindo taxa em tempo contínuo e que a taxa de dividendos $\delta \neq 0$.
  - Dica: Para obter V em T é só comprar a quantidade $V \exp(-\delta T)$ de ativos básico em $t = 0$ e usar os dividendos para reinvestir em V.

Exercícios: Arbitragem

1) Mostre por arbitragem que:
   - Se existisse a tecnologia de *viagem no tempo* (para o futuro e para o passado); e
   - Se os custos de transação, inclusive os *custos das viagens no tempo*, fossem iguais a zero,
   - Então a taxa de juros da economia seria zero ou poderia haver lucro por arbitragem.

- Use a imaginação. Existem infinitas soluções!

2) Na peça da Broadway "*The Producers*", os produtores *não colocaram seu próprio dinheiro* na sua peça de teatro e ilegalmente *venderam* para um grupo de senhoras *muito mais do que os 100% dos direitos* sobre os lucros da peça (~ 2000 %).
   - Com o *propósito da peça dar prejuízo* e não terem de pagar os lucros das cotas compradas pelas senhoras idosas, eles escolheram o pior roteiro de teatro disponível e contrataram um diretor decadende.
   - Por que eles não fizeram arbitragem e foram parar na cadeia?

Recordação de Taxa de Desconto: CAPM

- Num mercado em equilíbrio, risco e retorno são ligados.
  - A taxa ajustada ao risco é o retorno esperado (ou exigido) pelos investidores p/ assumir o risco dum ativo. Quanto maior o risco sistemático, maior é o retorno exigido pelo investidor.
  - Em mercados competitivos, qualquer redução desse risco é compensada por uma redução do retorno.
- A taxa ajustada ao risco é composto de duas parcelas, a taxa livre de risco r_f (valor do dinheiro no tempo) mais a parcela de prêmio de risco, conforme o CAPM (Capital Asset Pricing Model), assumindo que os investidores são diversificados:

$$\mu = \underbrace{r_f}_{\text{Prêmio temporal (adiamento de consumo)}} + \underbrace{\beta (r_m - r_f)}_{\text{Prêmio de risco}}$$

Investimento

- Definição de investimento (Dixit & Pindyck):

  É o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios.

- Retorno do Investimento = Ganho de Capital + Dividendos
  - ➡ Taxa de retorno total = taxa de ganho de capital + taxa de dividendos

$$\mu = \alpha + \delta$$

- Pelo CAPM, retorno total esperado = taxa ajustada ao risco, é:

$$\mu = r + \underbrace{\beta (r_m - r)}_{\text{prêmio de risco } (\pi)}$$

Onde: r = taxa livre de risco; r_m = retorno do mercado

β = "beta" do projeto (ou do ativo) = medida de covariância

Uma Importante Relação

- Igualando as duas equações para o retorno total μ, obtém-se a seguinte importante relação:

$$\alpha - \pi = r - \delta$$

- Em palavras, a tendência α penalizada pelo prêmio de risco π é igual à taxa livre de risco r menos a taxa de dividendos δ.
  - Essa tendência $\alpha - \pi$ é chamada *tendência neutra ao risco*.
  - Assim, $r - \delta$ também é uma *tendência neutra ao risco*.
  - Essa relação será muito usada para o caso em tempo contínuo e em simulações de Monte Carlo, a serem vistas.

Qual a Taxa de Desconto da Opção?

- A teoria tradicional (ex.: CAPM) permite calcular o prêmio de risco de um ativo de risco V e logo uma taxa de desconto ajustada ao risco de V.
  - Uma opção F(V) sobre esse ativo V, também é um ativo de risco. Sendo uma função de V, o risco desse ativo F está *vinculado* ao risco de V, mas o risco de F(V) é *diferente* do risco de V.
  - O risco de F(V) pode ser >, <, ou = ao de V. Em geral, a taxa de desconto da opção F(V) NÃO é igual à taxa de desconto de V.
    - Esse foi um erro comum antes de Black & Scholes e Merton em 1973.
- Qual a taxa de desconto da opção? Varia, é muito complicada!
  - A boa notícia é que não precisaremos dela! (ver 4 slides p/ frente)
- Mas podemos dar uma idéia da taxa de desconto das opções:
  - Para uma opção de compra (call) essa taxa é sempre maior ou igual a taxa μ do ativo básico (assume $\mu > r$). Ver próximo slide.
  - No caso da put essa taxa é sempre menor que r (desde que $\mu > r$).

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Compra

- **Mesmo sem precisar, apresentarei o resultado clássico (Merton, 1970 e 73) p/ essa taxa de desconto (retorno esperado) da opção.**
- **No caso de uma opção de compra americana C, escrita sobre o ativo V com retorno total μ, o retorno de C, r_C, é maior que μ:**

$$r_C = r + \varepsilon_C (\mu - r) \geq \mu \geq r$$

- **Onde a elasticidade ε_C é interpretado como o "beta" relativo da opção (relativo ao *retorno de V*, em vez do retorno do *mercado*):**

$$\varepsilon_C = \frac{\partial C}{\partial V} \frac{V}{C} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_C = \frac{\partial C / C}{\partial V / V} \geq 1$$

- **É intuitivo que quando um ativo V varie x % no mercado, a variação da opção C seja maior (risco é amplificado) $\Rightarrow \varepsilon_C \geq 1$.**
  - **Coloquei na Pasta 76 um artigo curto do Shackleton & Sodal sobre isso.**
- **Note que r_C varia com o valor de V e com o tempo para expiração.**
- **Ver livro do Cox & Rubinstein (*Option Markets*, p.185-196) e o anexo.**

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Venda

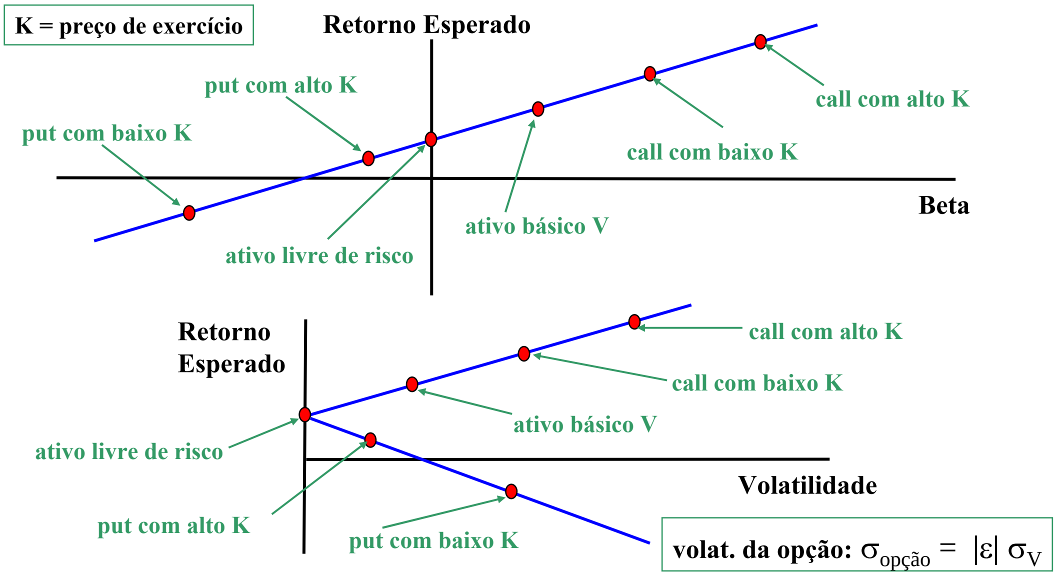
- **O caso da *opção de venda* (put, P) é talvez menos intuitivo, pois se o ativo básico tem uma variação positiva, a put tem variação negativa e vice-versa. Ou seja, *as variações são opostas*.**
  - **Uma *grande* variação positiva em V leva a uma *grande* (e ainda maior) variação negativa de P. Isso sugere que P pode ter até retornos negativos! Isso é uma conseqüência das variações opostas.**
    - **Dados mostram que freqüentemente as puts têm retornos negativos (anexo).**
- **A fórmula do retorno esperado da put (= taxa de desconto ajustada ao risco no mercado em equilíbrio) é análoga a da call:**

$$r_P = r + \varepsilon_P (\mu - r)$$

  - **Onde ε_P é interpretado como elasticidade ou "beta relativo" da opção de venda (put) e é igual a: $\varepsilon_P = (\partial P / \partial V)\ V/P < 0$.**
  - **A diferença é que para a put o beta relativo é *negativo*, pois $\partial P / \partial V < 0$.**
  - **Logo, quanto *maior* for μ (retorno esperado de V), *menor* é r_P. É o oposto que ocorre com a call. Se μ for *bem* maior que r, então r_P pode ser *negativo*. De novo, r_P varia com V e com o tempo, mesmo se μ é constante.**

Retorno Esperado das Opções e do Ativo V

- **Essas figuras foram baseadas no livro do Cox & Rubinstein e mostram os retornos esperados versus o beta e a volatilidade.**



Qual a Taxa de Desconto da Opção?

- **A taxa de desconto da opção é um problema difícil, mas pode-se "by-passar" esse problema através dos métodos:**
  - **Construção de um portfólio sem risco, formado pelo derivativo F e por n unidades do ativo básico V, onde n é escolhido de forma tal que o portfólio $\Phi = F - n\ V$ é livre de risco.**
    - **Se o portfólio é sem risco, a taxa de desconto adequada (para calcular o valor presente do portfólio) é a taxa livre de risco r (senão, arbitragem).**
  - **Método da neutralidade ao risco: penaliza-se o valor esperado futuro de V *subtraindo-se um prêmio de risco* de sua tendência (certeza equivalente) ou, de forma equivalente, *reduzindo-se a probabilidade de ocorrência dos cenários favoráveis* e aumentando a probabilidade dos cenários desfavoráveis do ativo básico.**
    - **Prova-se que assim pode-se usar a taxa de desconto livre de risco para calcular o valor presente de qualquer ativo que seja uma função de V, i. é, de qualquer derivativo F(V).**
- **Veremos os dois métodos com exemplos numéricos.**

Medida Equivalente de Martingale

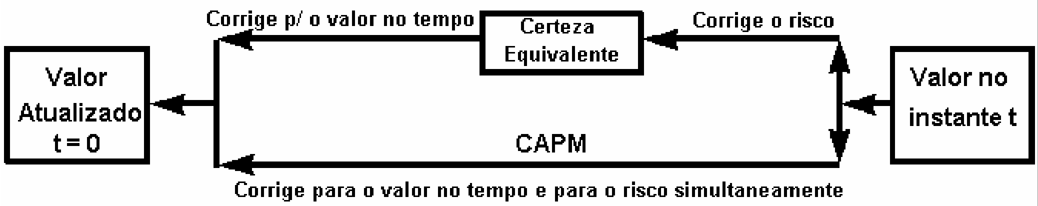
- Definição de *medida equivalente* (de probabilidade):
  - Sejam duas medidas de probabilidade P e Q do mesmo espaço de probabilidades (Ω, Σ), onde Ω é o espaço amostral (conjunto de possíveis eventos) e Σ é a σ-álgebra de todos os sub-conjuntos de Ω.
    - σ-álgebra é uma *família de eventos* $\mathcal{E}$ compreendendo o conjunto vazio $\varnothing$, complementos de conjuntos que pertencem a Σ e uniões contáveis de seqüências de conjuntos $\mathcal{E}_n \in \Sigma$. Notação avançada muito usada em papers.
  - P e Q são ditos medidas equivalentes se para todo conjunto $A \in \Sigma$:

$$P(A) = 0 \text{ se e somente se } (\Leftrightarrow)\ Q(A) = 0$$

    - Em palavras, 2 medidas são equivalentes se atribuem probabilidade zero aos mesmos eventos ou conjunto de eventos. Logo, medidas equivalentes atribuem probabilidades > 0 (embora diferentes) para os mesmos eventos.
- Uma variável aleatória X(t) é um martingale sob medida Q se seu valor esperado for o valor corrente: $E^Q[X(t)] = X(0)$, $\forall\ t > 0$.
- Definição de *medida equivalente de martingale* (Q): essa medida Q, equivalente à medida *real* P, é tal que o valor esperado sob Q *descontado* dum ativo é um martingale: $E^Q[e^{-rt}\ X(t)] = X(0)$.

Valor Presente e Taxas de Desconto: O Método da Neutralidade ao Risco

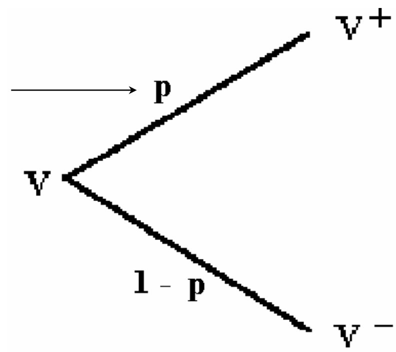
- Duas maneiras de usar taxas de desconto:
  - Pode-se descontar com a <u>taxa ajustada ao risco</u> (CAPM), usando <u>probabilidades reais</u>, ou
  - Descontar com a <u>taxa livre de risco</u>, usando certezas equivalentes (método da *neutralidade ao risco*), obtidas com uma mudança de medida: a *medida equivalente de martingale*, uma probabilidade *artificial* também chamada de *<u>probabilidade neutra ao risco</u>*.



Método da Neutralidade ao Risco

- Como calcular a probabilidade neutra ao risco (medida equiv. de martingale), para poder usar a taxa livre de risco?
- Considere um caso simples: hoje o valor de um projeto é V e em t = 1 ele pode assumir dois valores, V^+ e V^- (não há dividendos):

probabilidade real de subida



Cenário de Subida

Upside : $u = V^+/V$

Cenário de Descida

Downside : $d = V^-/V$

Probabilidade Real e Taxa Ajustada ao Risco

- Pode-se calcular o valor presente usando a *taxa ajustada ao risco* μ para descontar o *valor esperado* de V em t = 1 (ou seja E [V(t = 1)]). Nesse cálculo, usa-se probabilidades <u>reais</u>.

$$V = \frac{E[\,V(t=1)\,]}{1+\mu} = \frac{p\,V^+ + (1-p)\,V^-}{1+\mu}$$

- Pode-se tirar o valor da taxa ajustada ao risco em função da probabilidade real p, já que μ também é a taxa de retorno esperada do ativo de risco (CAPM):

$$\mu = \frac{E[\,V(t=1)\,]}{V} - 1 = \frac{p\,V^+ + (1-p)\,V^-}{V} - 1$$

Probabilidade Artificial e Taxa Livre de Risco

- A pergunta é: <u>sob que probabilidades o retorno desse ativo seria igual à taxa livre de risco</u>?
- Seja q essa probabilidade *artificial* neutra ao risco do cenário V^+ tal que o retorno seja livre de risco:

Taxa Livre de Risco (r_f): $$r_f = \frac{E^Q[\,V(t=1)\,]}{V} - 1$$

OBS: E^Q é um operador de valor esperado sob probabilidades artificiais neutras ao risco q e $(1 - q)$

$$\Rightarrow r_f = \frac{q\,V^+ + (1-q)\,V^-}{V} - 1$$

fazendo $u = V^+/V$, $d = V^-/V$ e tirando o valor de q $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

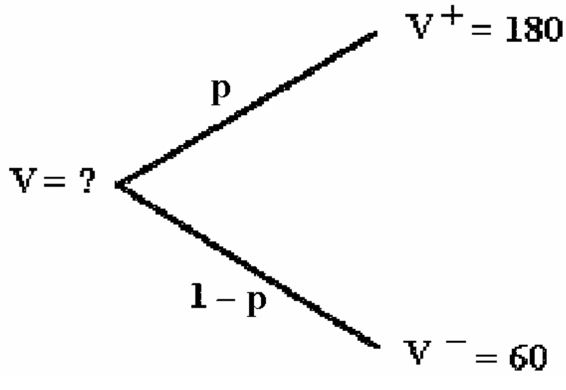
Medida equivalente de martingale
q = probabilidade artificial neutra ao risco de V subir

Exemplo de Taxas de Desconto

- Agora será visto um exemplo usando os dois métodos de taxa de desconto, que resultam no mesmo valor.
  - Inicialmente considere um caso sem dividendos.

$\mu = 20\%$ (taxa ajustada ao risco ou retorno esperado)

$r = 8\%$ (taxa livre de risco)

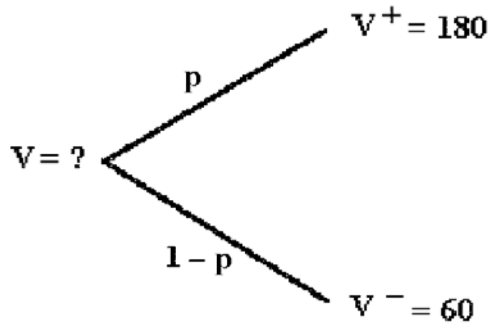


- Para usar μ precisa saber probab. real *p*
- Poderia também dar p e V e pedir μ
- Suponha p = 50%, quanto vale V?

Exemplo Numérico de Taxas de Desconto

μ = 20% Taxa ajustada ao risco

r = 8% Taxa livre de risco



- Considere que os valores de probabilidades reais p e (1 – p) são iguais a 50%
- Usando a taxa ajustada ao risco, o valor presente é:
  V = (0,5 x 180 + 0,5 x 60)/(1 + 0,20)
- Logo, **V = 100**
- Agora será encontrado o mesmo valor usando o método da neutralidade ao risco ou de medida equiv. de martingale.

Exemplo: Método da Taxa Livre de Risco

- No método da neutralidade primeiro tem de calcular a probabilidade artificial de martingale :

$$\boxed{q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

Onde o processo de difusão é dado por:

$u = V^+ / V = 180/100 = 1{,}8$

$d = V^- / V = 60/100 = 0{,}6$

$\Rightarrow$ q = (1 + 0,08 – 0,6) / (1,8 – 0,6) $\Rightarrow$ q = 0,4 = 40%

- Agora pode-se calcular V(t = 0) com a taxa sem risco r_f:

$$V = \frac{E^Q[\,V(t=1)\,]}{1 + r_f} = \frac{q\,V^+ + (1 - q)\,V^-}{1 + r_f}$$

$\Rightarrow$ V = [(0,4 x 180) + ((1 – 0,4) x 60)] / (1+0,08) $\Rightarrow$ **V = 100**

- Confere: é o mesmo resultado obtido com a taxa μ.

Exemplo das Taxas de Desconto: p e q

- **Os métodos são equivalentes. Para que dois métodos?**
  - **Veremos que o método da neutralidade ao risco será muito útil na valoração de derivativos (taxa de desconto complexa).**
- **No exemplo, e se a probabilidade real for diferente de 50%, qual o valor de V e de q ? Ver tabela abaixo:**

Probabilidade real p para V^+ (%)	Probabilidade de martingale q para V^+ (%)	Valor presente esperado do projeto V
50	40	100
60	49	110
40	31	90

- **Fica como exercício verificar. Note que sempre $q < p$.**

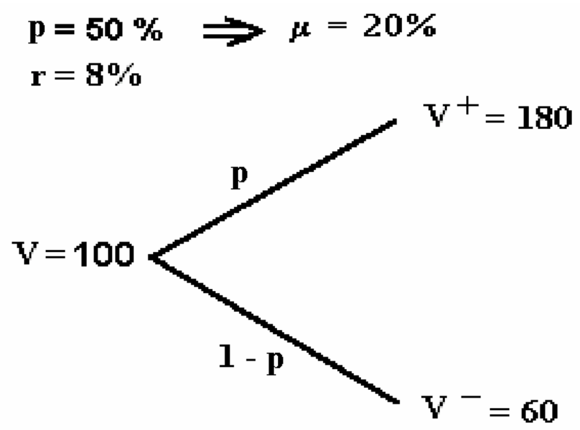
Método da Neutralidade ao Risco

- **Mas se já é sabido o valor presente de V (ou é necessário saber *u* e *d*), qual a vantagem do método?**
  - **R: Determinar Q que irá valer também para a função F(V).**
  - **Observando valores de mercado, <u>se sabe (ou se estima) o valor corrente do projeto</u> V; o problema é valorar o derivativo F(V);**
  - **Para isso tem de se estimar o processo de incerteza da variável V (ex.: log-normal). Isso é feito aqui com *u* e *d* (a ser detalhado) e p;**
  - **Com esses dados (*V*, *p*, *u* e *d*) se tem as expectativas reais de valores futuros de V (logo o retorno de V). No entanto, não podemos usar as probabilidades reais p e a taxa ajustada ao risco <u>de V</u>, para calcular o valor presente da opção F, pois V e F têm riscos diferentes;**
  - **Com esses dados (*V*, *u* e *d*, e as taxas *r* e δ) pode-se estimar a probabilidade "neutra ao risco" q, que gera certezas equivalentes;**
  - **Chave: <u>Sob *expectativas neutras ao risco* Q se pode atualizar o valor de ativos derivados do ativo básico usando a taxa livre de risco</u>.**
    - **Veremos um exemplo de um derivativo (um seguro = put) p/ *mostrar* isso.**

Aplicação em Derivativos: Valor do Seguro

- Considere o processo de incerteza de V com dois cenários V^+ e V^- em t = 1. Seja p a probabilidade real e μ a taxa ajustada ao risco de V:

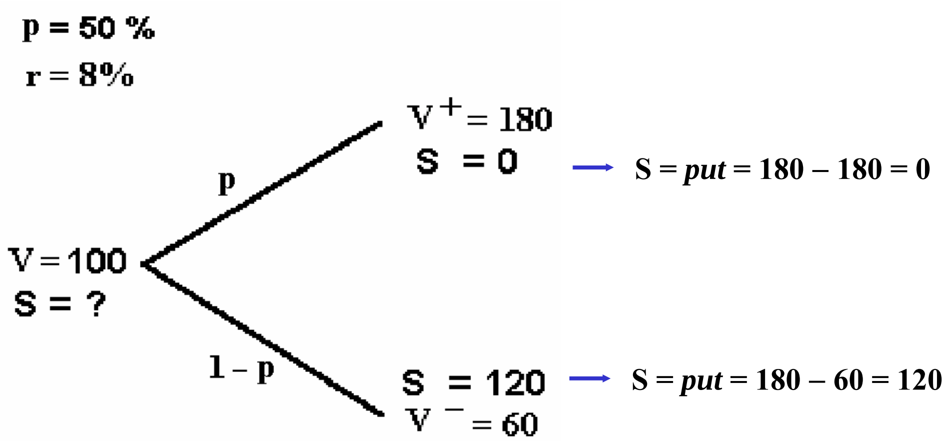
r = taxa livre de risco
p = probabilidade real de subir de V para V^+
μ = taxa ajustada ao risco de V = retorno total esperado de V.



- **Quanto vale o *prêmio por um seguro*** que me permita ter no futuro um valor de 180 em qualquer cenário?

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Qual o valor do prêmio para ter um seguro total? Ou seja, qual o prêmio a pagar para obter 180 em qualquer cenário?



- Esse seguro é análogo a uma opção de venda (*put*) com preço de exercício de 180 (se V cai para 60, a opção é exercida, caso contrário é indiferente entre exercer ou não).

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Trigeorgis mostra que o uso da taxa ajustada ao risco <u>do ativo básico</u> (μ = 20%) para calcular o seguro é um erro:**
  - **S = (0,5 x 0 + 0,5 x 120)/ (1 + 0,20) = 50 (valor errado, ver adiante)**
- **Para vermos que esse valor de S está errado, considere a carteira *ativo básico* + *seguro* (V + S):**
  - **Essa <u>carteira é totalmente sem risco</u>, pois o resultado é o mesmo (= 180) para qualquer cenário.**
  - **Se a carteira (V + S) é sem risco, então o <u>retorno dessa carteira terá de ser a taxa livre de risco</u>.**
    - **Caso contrário o seguro estará ou muito caro ou muito barato, permitindo ganhos por *arbitragem*. Como?**
    - **Se V + S estiver barato, eu empresto dinheiro na taxa r para comprar V + S. Na data T eu vendo V + S, pago o empréstimo e ainda sobra $.**

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Se o retorno da carteira V + S é sem risco, então a taxa de desconto apropriada é a taxa livre de risco.**
- **Usando probabilidades reais e taxa sem risco (8%):**
  V + S = (0,5 x 180 + 0,5 x 180)/ (1 + 0,08) = 166,7
- **Como sabemos que V = 100 (no instante zero), então o valor de S sai por diferença:**
  $\Rightarrow$ S = 166,7 – V = 166,7 – 100 $\Rightarrow$ S = 66,7
- **E não o valor de 50 calculado usando μ = 20%, que subestimou o valor do prêmio do seguro.**
  - **Vimos que achar a taxa ajustada ao risco da opção é complicado.**
- **Agora usaremos um método alternativo para calcular o seguro que também dá o valor correto: as *probabilidades neutras ao risco* ou *medida equivalente de martingale.***

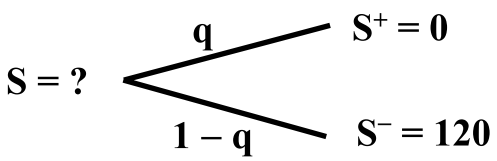
Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Veremos que com o método da neutralidade ao risco (transformando probabilidades), se consegue obter o valor correto para o derivativo (o mesmo valor obtido com o método do portfólio sem risco).
  - A probabilidade artificial neutra ao risco (ou medida de martingale) é:

$$\boxed{q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

r_f = taxa sem risco (aqui = 8%)
u = "up" = V^+/V (aqui 180/100 = 1,8)
d = "down" = V^-/V (aqui 60/100 = 0,6)

$\Rightarrow$ q = (1 + 0,08 – 0,6) / (1,8 – 0,6) $\Rightarrow$ p = 0,4 = 40%



$$S = \frac{(0{,}4 \times 0 + 0{,}6 \times 120)}{1 + 0{,}08}$$

Logo, **S = 66,7**

- Que é o valor correto, igual ao calculado antes, em que foi usado o conceito que um portfólio livre de risco (V + S) tem retorno igual a r_f

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- Assim esse método de transformação de probabilidades (mudança de medida) é prático pois evita que se calcule a taxa ajustada ao risco da opção (ou de qualquer derivativo)
- Mas e se quizermos saber qual a taxa ajustada ao risco da opção (seguro) nesse exemplo?
  - Agora é fácil pois já sabemos o valor presente da opção, temos os valores dos cenários e a probabilidade real:

    66,7 = (0,5 x 0 + 0,5 x 120) / (1 + μ_S) $\Rightarrow$ μ_S = – 10%
- Taxa de desconto ajustada ao risco é <u>negativa</u>?
  - Já vimos que a taxa de desconto (retorno esperado) pode ser negativa no caso de opções de venda (put). Mas *não precisamos dela*.
  - Intuição: a opção nesse contexto (*hedge*) entra para reduzir o risco. No contexto especulativo a opção tem um alto risco mas não teria outro preço (não pode ter dois preços para o mesmo ativo no mercado, senão haveria arbitragem - isso é chamado de *lei de um preço*).

Exemplo do Seguro e a Composição do Porfólio

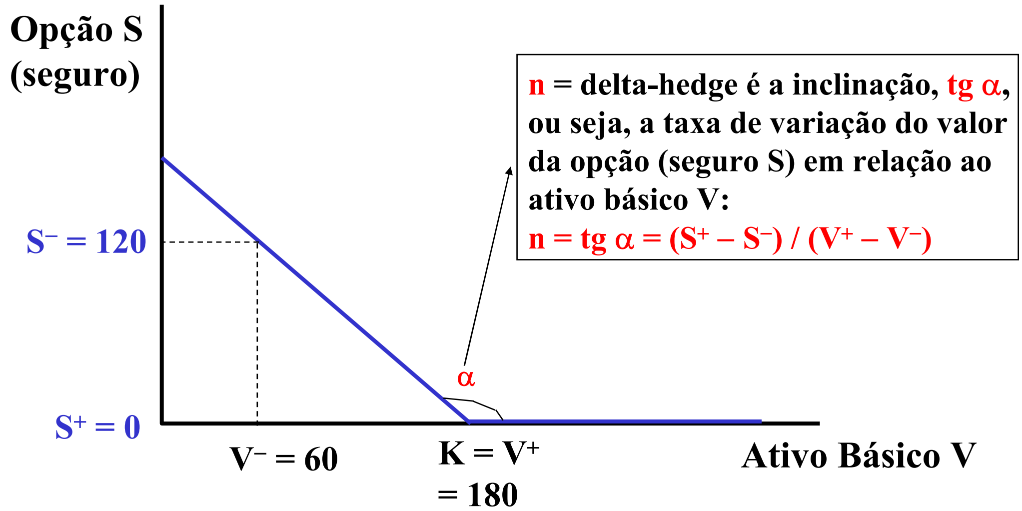
- Foi visto que o valor do seguro foi calculado sabendo apenas o valor corrente e a dinâmica de V, além da taxa sem risco r_f.
- Para isso, no primeiro método se montou um portfólio sem risco. Iremos usar esse portfólio sem risco também quando trabalharmos em tempo contínuo. Teremos de saber montá-lo!
- Note nesse exemplo do seguro (put) que se o portfólio Φ for escrito da seguinte conveniente forma:

$$\Phi = S - n V$$

  - Então, no nosso exemplo esse valor seria $n = -1$ para não ter risco.
- Veremos que n é o chamado "delta hedge" e é igual à derivada da opção em relação ao ativo básico. Sabemos que a put S na expiração vale $S(T) = \text{Max}(K - V, 0)$. Nessa data, se $V < K$ (aqui $K = 180$), então $\partial S/\partial V = -1$ (se $V > K$ a derivada é zero).
  - Veremos que a escolha de $n = \partial F/\partial V$ (onde F é um derivativo qualquer) é sempre usada para obter um porfólio livre de risco.

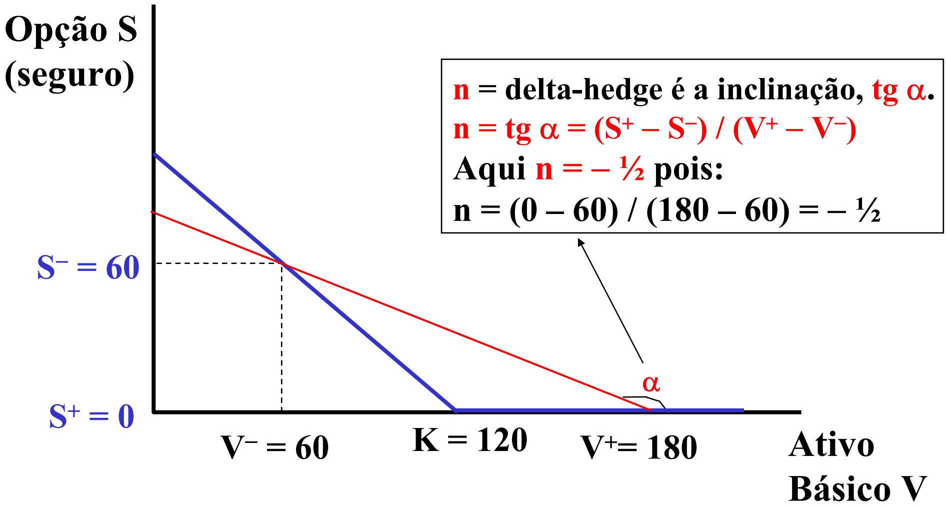
Delta Hedge do Exemplo e o Gráfico da Put

- O gráfico da opção de venda (put) mostra que o delta hedge pode ser visto como a inclinação do valor da opção (aqui seguro S) no gráfico S x V:



Exercício: Delta Hedge e Seguro Parcial

- Agora imagine que o seguro é parcial, garante-se só o valor = \$ 120. Logo temos uma put com preço de exercício $K = 120$, i. é, se V cair para $V^- = 60 \Rightarrow S^- = 120 - 60 = 60$. Calcule o valor do seguro em t = 0. Note que o gráfico da put agora seria:



Hedge e o Valor do Seguro Parcial: Solução

- Note que novamente temos um portfólio sem risco, só que agora o portfólio $= \Phi = S - n\,V = S - (-\tfrac{1}{2})\,V \Rightarrow \Phi = S + V/2$:

$V^+ = 180$
$S^+ = \max[120 - 180;\ 0] = 0$
$\Phi^+ = 0 + 180/2 = 90$

$\Phi(t{=}0) = S(t{=}0) + 100/2$
$\Rightarrow \Phi(t{=}0) = S(t{=}0) + 50$

mesmos valores

$V^- = 60$
$S^- = \max[120 - 60;\ 0] = 60$
$\Phi^- = 60 + 60/2 = 90$

- Mesmo com seguro parcial, temos um portfólio sem risco.
- Valor do prêmio do seguro, $S(t = 0)$, pode ser obtido como antes: $S(t{=}0) + 50 = 90/(1 + 0{,}08) \Rightarrow S(t = 0) = \$\ 33{,}33$.

Observação e Exercício

- Note que nessa solução não foi usada diretamente nenhuma probabilidade para os cenários V^+ e V^-!
  - Mas indiretamente podemos dizer que elas foram usadas, pois usamos V(t=0), V^+ e V^- e podemos dizer que:

$$V(t = 0) = E[V(t = 1)]/(1 + \mu) = [p\, V^+ + (1 - p)\, V^-]/(1 + \mu)$$

    - Ou, se tiver V(t = 0) e a taxa μ, dado os dois cenários V^+ e V^-, a probabilidade p do cenário V^+ está determinada.
- Exercício: Resolva o exemplo anterior do seguro parcial usando o método da neutralidade ao risco (medida equivalente de martingale).
- Responda também a pergunta: foi assumida alguma preferência para o investidor? Foi assumido que os investidores são neutros ao risco, por ex.?

Método da Neutralidade ao Risco

- O método da neutralidade ao risco não supõe que os investidores são neutros ao risco.
  - Vale para avessos ao risco e até para amantes e neutros ao risco.
  - Através de "probabilidades adequadas" q e 1 – q, o valor do ativo básico é penalizado (certeza equivalente) e isso permite que se use a taxa de desconto livre de risco para obter o preço correto.
- O ponto chave é que essa mudança de probabilidade permite calcular o valor de *qualquer* ativo derivado desse ativo básico V.
  - A taxa *ajustada ao risco da opção* não é igual à taxa ajustada ao risco *do ativo básico*. A boa notícia é que não precisamos dela!
- Num contexto mais geral, o método da neutralidade ao risco é provado com ajuda do *teorema de Girsanov* (teorema de mudança de medida): ver uma demonstração na pasta 76.
- Essa probabilidade q é usada para apreçar opções usando o popular método *binomial* (Cox & Ross & Rubinstein, 1979).

Replicação da Opção com Bond e Ativo Básico

- **Usando binomial, podemos replicar o valor duma opção através de um título de renda fixa B ("bond") e n unidades do ativo básico V, onde n é o mesmo delta hedge usado anteriormente!**
  - **O portfólio agora é $\Gamma = n\ V + B$ e mostraremos que Γ é igual ao valor de uma opção S para uma escolha adequada de n e B: $\Gamma = S$.**
  - **É um problema *equivalente* ao portfólio anterior Φ que, por ser um portfólio sem risco, pode ser visto como um bond B. Logo, se fizermos $\Phi = B$ e $\Gamma = S$, temos:**

    $S = n\ V + \Phi \ \Rightarrow\ \Phi = S - n\ V$ **, que é o mesmo portfólio anterior.**
  - **Note que em ambos os portfólios a opção S é linear no ativo básico V.**
- **Iremos demonstrar também que as probabilidades neutras ao risco da *opção* são as mesmas deduzidas para o ativo básico:**

  $S = [q\ S^{+} + (1 - q)\ S^{-}] / (1 + r)$ **, onde q é o mesmo de antes e depende da dinâmica do ativo básico V (i. é, de u e d, além de r) e não de S.**
  - **Embora seja demonstrado p/ o caso particular de um binomial, o teorema de Girsanov e outros extendem para tempo contínuo e distribuições contínuas.**

Replicação da Opção com Bond e Ativo Básico

- **O portfólio $\Gamma = n\ V + B$ em $t = 0$ terá os seguintes possíveis valores em $t = 1$:**

$\Gamma = n\ V + B$

$q > 0$: $\Gamma^{+} = n\ V^{+} + B\ (1 + r)$ **(eq. 1)** $\Rightarrow \Gamma^{+} = n\ u\ V + B\ (1 + r)$

$1 - q > 0$: $\Gamma^{-} = n\ V^{-} + B\ (1 + r)$ **(eq. 2)** $\Rightarrow \Gamma^{-} = n\ d\ V + B\ (1 + r)$

Onde:

$$u = \frac{V^{+}}{V}$$

$$d = \frac{V^{-}}{V}$$

- **Para que valores de n e B um derivativo S (i. é, uma função de V) é igual a esse portfólio Γ? Se em todos os (dois) estados da natureza em $t = 1$ esse portfólio tiver o mesmo valor da opção, então $\Gamma = S$. Assim, se fizermos $\Gamma^{+} = S^{+}$ e $\Gamma^{-} = S^{-}$ e subtrairmos a (eq. 2) da (eq. 1), obteremos o mesmo delta hedge n anterior:**

$$n = \frac{\Gamma^{+} - \Gamma^{-}}{V^{+} - V^{-}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{S^{+} - S^{-}}{V^{+} - V^{-}}$$

Replicação da Opção com Bond e Ativo Básico

- Substituindo o valor de n na eq. 1 e subst. V^+ por u V, obtemos o número de bonds B necessários para essa replicação:

$$B = \frac{u\,S^- - d\,S^+}{(u - d)\,(1 + r)}$$

- Ou seja, sabendo os valores da opção S em t = 1 (i. é, S^+ e S^-), saberemos n e B. Com eles obtemos o valor da opção em t = 0, já que S = n V + B. Por ex., no 1º caso do exemplo do seguro:

  n = (0 – 120) / (180 – 60) = – 1; e

  B = [(1,8 x 120) – (0,6 x 0)]/[(1,8 – 0,6) x (1 + 0,08)] = 166,7 ; logo,

  S = Γ = (– 1) x 100 + 166,7 ⇒ S = 66,7 , que é o mesmo valor anterior!

  - OBS: em alguns livros se usa um portfólio Γ′ = n V – B (em vez de +B). O delta hedge n é o mesmo, mas a fórmula de B tem o sinal trocado.
  - Exercício: use a replicação p/ calcular o valor do seguro parcial.

- Agora provaremos que as probabilidades neutras ao risco para a opção são as mesmas do ativo básico e depende de u, d e r.

Replicação da Opção com Bond e Ativo Básico

- Agora queremos saber para que probabilidade q teremos:

$$S = \frac{q\,S^+ + (1 - q)\,S^-}{(1 + r)}$$

- Para isso, basta substituir S, S^+ e S^- pelas equações do portfólio composto por n ativos básicos e o bond:

$(n\,V + B) = \{q\,[n\,V^+ + B\,(1 + r)] + (1 - q)\,[n\,V^- + B\,(1 + r)]\}/\,(1 + r) \Rightarrow$

$(n\,V + B)\,(1 + r) = (q\,n\,u\,V) + q\,B\,(1 + r) + (1 - q)\,n\,d\,V + (1 - q)\,B\,(1 + r)$

(cortando B (1 + r)) ⇒ $n\,V\,(1 + r) = (q\,n\,u\,V) + (1 - q)\,n\,d\,V \Rightarrow$

cortando V e n ⇒ $1 + r = q\,u + d - d\,q \Rightarrow q\,(u - d) = 1 + r - d \Rightarrow$

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

- Que é exatamente a mesma probabilidade neutra ao risco do ativo básico! (c.q.d.) Relembro que essa probabilidade NR depende só da dinâmica do ativo básico V, mas pode ser usada para a função S(V).

Valoração de Opções com Probabilidades Reais

- É possível valorar opções com probabilidades reais e taxa de desconto ajustada ao risco da opção? Sim, é possível!
  - Mas em geral não é prático, pois acaba calculando o valor da opção antes, p/ calcular a taxa de desconto dela, p/ voltar a calcular a opção!
- Coloquei na Pasta 76 um trecho do livro do McDonald que com dois exemplos mostra como valorar no contexto de binomial.
  - Ele, no entanto, usa taxas de desconto em tempo contínuo, por ex., $\exp(-r\,t)$ em vez de taxa em tempo discreto, ex., $1/(1 + r)^t$.
- Exemplo é conceitualmente importante pois mostra:
  - Precisa calcular $B + n\,V$ (vimos que é o valor da opção replicada por n unidades de ativo básico mais o valor do bond) para calcular o retorno (taxa de desconto) da opção. Resolve *duas vezes* o problema!
  - No 2º exemplo, com mais períodos, ele mostra que *a taxa de desconto da opção varia com o estado da natureza* (valor do ativo básico V) *e com a simples passagem de tempo*.
    - Notação dele é um pouco diferente da minha: $n = \Delta$, $V = S$, call = C, $r_C = \gamma$.

Método da Medida Neutra ao Risco

- O método da carteira neutra ao risco parece mais convincente do que o método da probabilidade neutra ao risco, pois é mais intuitivo aceitar o argumento de não-arbitragem (se a carteira sem risco der um retorno diferente da taxa r, gera arbitragem).
  - Mas o método da medida neutra ao risco dá igual resultado! O link será formalizado pelo *teorema fundamental de apreçamento de ativos*.
  - Se o retorno esperado (sob medida real P) de um ativo *em equilíbrio* é μ, matematicamente podemos mudar o cálculo do retorno esperado (usando uma medida Q) para que o retorno seja a taxa livre de risco r.
  - Como uma variável aleatória é um martingale sob medida Q se $E^Q[X(t)] = X(0)$, $\forall\ t > 0$, então queremos que o valor *descontado* por r seja um martingale sob uma certa medida Q. Para quê? Pelo seguinte:
  - Seja o ativo básico V com $\delta = 0$ e seja F(V, t) uma função (*derivativo*) de V. Então o martingale abaixo é um preço F(t = 0) livre de arbitragem:

$$F(t = 0) = E^Q[e^{-r\,t}\,F(V, t)] \quad \text{(onde } Q \text{ é tal que } E^Q[e^{-r\,t}\,V(t)] = V(0))$$

    - Isso foi demonstrado só p/ o caso discreto binomial, mas é bem geral.
    - Além disso, tem um teorema que diz que num mercado *completo* existirá uma *única* medida equivalente Q tal que o preço F é livre de arbitragem.

Teoremas Fundamentais de Preços de Ativos

- Os dois teoremas fundamentais de precificação de ativos são devidos a Harrison & Kreps (1979) e Harrison & Pliska (1981). Esses teoremas unem os conceitos de arbitragem e martingale:
  - ❶ A existência de *alguma* medida neutra ao risco, chamada de medida equivalente de martingale, é igual a ausência de arbitragem. Isto é:

Mercado é livre de arbitragem ⇔ Existe alguma medida equiv. de martingale

    - O valor descontado (por r) de um ativo é um preço livre de arbitragem se e somente se é um martingale sob essa medida equivalente de probabilid.
  - ❷ Quando a medida de martingale é única (para um ativo e seus derivativos), equivale a dizer que o mercado é completo. Ou melhor:

Mercado é completo ⇔ Medida equivalente de martingale Q é única

- O 1º teorema faz uma ligação fundamental entre *arbitragem* e *martingale*, gerando facilidades matemáticas devido à bem desenvolvida *teoria de integração estocástica de martingales*.
    - O nome "*Fundamental Theorem of Asset Pricing*" é devido a Dybvig & Ross (Palgrave Dictionary of Economics, 1987) e é usado amplamente.
    - Ver Battig & Jarrow (1999) p/ uma discussão dos teoremas e teoria + geral.

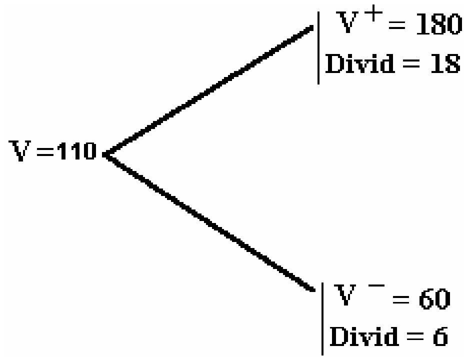
Medida de Martingale Com Dividendos

- Nos exemplos numéricos anteriores não foram considerados os dividendos (fluxos de caixa), só o ganho de capital (valorização V^+ e desvalorização V^-). Agora vamos considerá-los.
  - Para usar a técnica de martingale na presença de dividendos, o método *mais geral* é simplesmente somar os dividendos de cada cenário aos valores "ex-dividendos" do ativo (projeto) V^+ e V^-.
    - Existe uma *outra* maneira, colocando δ na fórmula de q (não mexe em u e d).
- Assim, a única diferença do caso anterior será nos valores de "u" e "d", somando os dividendos com o ganho de capital:
  - u = (V^+ + dividendos no cenário "up")/V
  - d = (V^- + dividendos no cenário "down")/V
- Serão vistos dois exemplos, sendo o 2º para o caso da opção de desenvolver terrenos urbanos, em que entram os "dividendos" como sendo os aluguéis de imóveis a serem construídos.
  - O dividendo é um custo de oportunidade de manter a opção de espera aberta.

Exemplo de Martingale Com Dividendos

- Seja um ativo V que vale $ 110 e irá distribuir dividendos δ = 10% dos preços ex-dividendos que valem $V^+ = 180$ e $V^- = 60$. Dado $r_f = 8\%$.
  - Quanto é a probabilidade equivalente de martingale q?

$$\boxed{q = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$



- Basta aplicar a fórmula sem esquecer dos dividendos. A "probabilidade" para subir é:

q = (1 + 0,08 – [(60 + 6)/110])/([(180 + 18)/110] – [66/110])

$\Rightarrow$ **q = 0,4 ou 40%.**

Exemplo: Valor de Terreno Urbano

- Suponha um terreno urbano e que existam duas alternativas de desenvolvimento:
  - Condomínio de 6 unidades, a um custo de C_6 = $80.000/unidade.
  - Condomínio de 9 unidades, a um custo de C_9 = $90.000/unidade (mais caro).
  - Os custos de construção não variam com o tempo.
  - O efeito do tempo de construção é considerado supondo que os valores dos custos e preços estão atualizados para a mesma data (início constr.)
  - O preço de venda do imóvel hoje é V = $100.000 por unidade, mas existe incerteza no preço futuro de venda.
- Construindo hoje a alternativa de maior VPL é a de 6 unidades:

  VPL_{C6} = 6 x (100.000 – 80.000) = $120.000 (= valor do terreno?)

  VPL_{C9} = 9 x (100.000 – 90.000) = $90.000 < VPL_{C6}
- Veremos que com a incerteza de V, o terreno (que é uma opção) vale mais do que $120.000.

Valor do Terreno Sob Incerteza

- **Suponha um processo de incerteza simples no valor de V, com 2 cenários e um período dado abaixo:**
  - **Esse processo de incerteza por ser simples é instrutivo e é útil pois pode ser generalizado (método *binomial*).**

$$V(t=0) = \$100.000 \quad \begin{cases} V^{+} = \$120.000 \\ V^{-} = \$90.000 \end{cases}$$

- **Com a incerteza, o dono do terreno pode esperar e escolher a melhor alternativa (6 ou 9 unidades) conforme o cenário.**
  - **Suponha que o aluguel de uma unidade é de A = \$8.000/ano. Esse é um custo de oportunidade da opção de espera.**
  - **Já o gasto na construção tem o custo de oportunidade da taxa de juros *r* = 12% aa, já que deixa de ganhar *r* (ou empresta a *r*).**
  - **Vamos calcular o valor da opção de espera e comparar com o valor do imediato investimento para ver a melhor ação e o valor da terra.**

Valor do Terreno Sob Incerteza

- **Vamos calcular o valor de opção do terreno usando o método da neutralidade ao risco. Para isso temos de calcular o valor das probabilidades artificiais neutras ao risco q e 1 – q.**
  - **Na fórmula do martingale temos agora de considerar os dividendos:**

$$u' = \frac{120.000 + 8.000}{100.000} = 1,28 \qquad d' = \frac{90.000 + 8.000}{100.000} = 0,98$$

$$q = \frac{1 + 0,12 - 0,98}{1,28 - 0,98} = 0,4667 \ (=7/15)$$

Logo, $1 - q = 0,5333 = 8/15$

- **Dado as probabilidades neutras ao risco, podemos calcular o valor presente da opção usando essas probabilidades neutra ao risco. Para o cenário V^{+} usa-se q e para o cenário V^{-} usa-se 1 – q.**
- **Para isso considere que o dono do terreno irá agir otimamente e escolherá a alternativa de maior VPL em cada cenário de V.**

Valor do Terreno Sob Incerteza

- Com as probabilidades neutras ao risco de $q = 0{,}4667$ e $1 - q = 0{,}5333$ e considerando as ações ótimas que o dono do terreno irá tomar na escolha de alternativas (de maior VPL) em cada cenário, podemos calcular o valor da opção de espera:

F(t = 0) = ?

Mercado Favorável ($V^+ = 120M$)

$VPL_{C9} = 9 \times (120.000 - 90.000) \Rightarrow$
$VPL_{C9} = 270.000 > VPL_{C6} = 240.000$
(exerce a opção com 9 unidades)

Mercado Recessivo ($V^- = 90M$)

$VPL_{C6} = 6 \times (90.000 - 80.000) \Rightarrow$
$VPL_{C6} = 60.000 > VPL_{C9} = 0$
(exerce a opção com 6 unidades)

$$F(t = 0) = \frac{(0{,}4667 \times 270.000) + (0{,}5333 \times 60.000)}{1{,}12} \Rightarrow \boxed{F = \$\ 141.071}$$

- Como a opção F de espera é maior que o VPL do investimento imediato, o terreno vale $ 141.071 e não o VPL estático de $120.000.

O Que Mostrou o Exemplo?

- O procedimento de opções considerando a ação ótima nos cenários incertos calculou valor e regra de decisão:
  - O valor do terreno é maior do que o VPL tradicional se existe incerteza e flexibilidade de resposta (esperar ou não, escolha de escala).
  - A ação ótima sob incerteza em t = 0 (no caso, esperar).
    - Não se deve fazer um projeto logo só por ter VPL positivo! Tem de comparar com a opção de espera.
    - Não se deve escolher uma escala só por *hoje* ser a de maior VPL. Tem de pensar nas escalas ótimas do futuro incerto.
- O cálculo da opção F foi em *backwards*, isto é, primeiro se olhou a ação ótima em cenários futuros e depois se chegou em t = 0, descontando com a taxa de juros, ponderando os cenários com probabilidades adequadas (neutras ao risco).
  - O cálculo em *backwards* é típico da programação dinâmica e da teoria das opções que usa os princípios de *otimização sob incerteza.*

Exercício

- Verificar que o mesmo VPL ($120 mil) seria obtido se o dono da terra, após construir 6 unidades, em vez de vender as unidades, as aluga por um ano e depois as vende pelos preços de cada cenário.
  - Solução: ver slides do anexo.

Valor do Terreno Usando Arbitragem

- Vamos refazer o problema anterior usando o método de arbitragem, isto é, mostrar que se obtém o mesmo valor do terreno usando o conceito de arbitragem.
  - Relembre o exemplo (mais simples) do seguro, mas aqui a carteira de ativos deve incluir o efeito dos dividendos.
  - As duas soluções (por probabilidade neutra ao risco e por arbitragem) estão na planilha exemplo_terreno.xls.
- Vimos que podemos montar um portfólio $\Phi = F - n\,V$ que é livre de risco se escolhermos um n conveniente.
  - Onde n = delta-hedge = $\partial F / \partial V \cong \Delta F / \Delta V$ em $t = 1$.
  - O cálculo de n difere do caso do seguro porque aqui temos de considerar os "dividendos" (aluguéis):

$$n = \frac{F(V^+) - F(V^-)}{(V^+ + div^+) - (V^- + div^-)} = \frac{\text{Máx}[VPL^+_{C6}, VPL^+_{C9}, 0] - \text{Máx}[VPL^-_{C6}, VPL^-_{C9}, 0]}{(V^+ + div^+) - (V^- + div^-)}$$

Valor do Terreno e Arbitragem

- Nesse exemplo o valor de n é igual a 7, pois:

  n = (270.000 – 60.000)/[(120.000 + 8.000) – (90.000 + 8.000)] = 7

- Assim, considere a *venda a descoberto* de 7 unidades em t = 0:

Investimento	Fluxo de Caixa Hoje (em mil$)	Mercado Favorável Fluxo de Caixa em t = 1 (em mil$)	Mercado Recessivo Fluxo de Caixa em t = 1 (em mil$)
Vende 7 unidades	$ 700	– $840 – $ 56	– $630 – $ 56
Compra 1 terreno	– X	$ 270	$ 60
Aplica na renda fixa	– $626/1.12	$ 626	$ 626
Total	Y	$ 0	$ 0

- Se o valor do terreno fosse vendido ao preço do VPL estático, isto é se X = $120 mil, então Y = $21.071 significando um ganho por arbitragem já que em t = 1 o fluxo de caixa é zero *com certeza*.
- Para que não haja arbitragem é necessário que Y = zero. Para isso é necessário que X = $141.071, que é o mesmo valor da opção calculado por outro método (das probabilidades neutras ao risco).

Exercícios

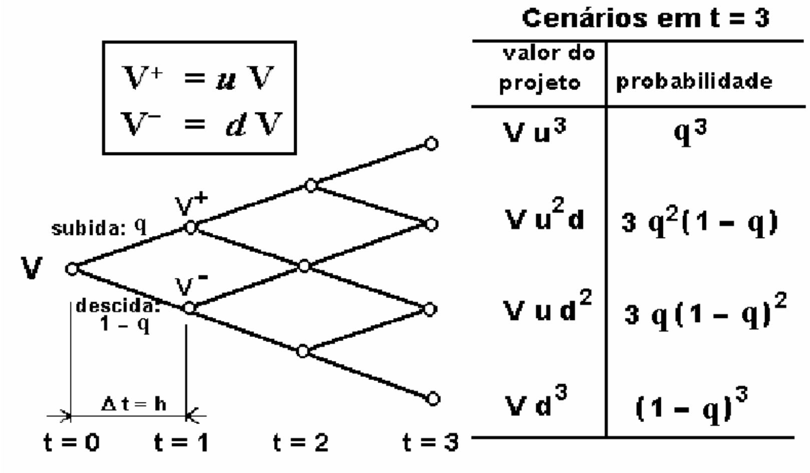
- Baseado no exemplo do terreno, fazer os exercícios abaixo pelos dois métodos (portfólio livre de risco/arbitragem e medida neutra ao risco):
- O que ocorreria se aumentarmos o aluguel para 12.000 $/ano? Interprete os resultados.
- Refaça o caso anterior, mas com taxa de juros de 10% a.a. e com aluguel fixo e igual a 5.000 $/ano.
- Refaça o caso anterior, mas em vez de aluguel fixo (que independe do cenário) usar aluguel igual a 10% do valor do imóvel V (aluguel varia com o cenário).
  - ⇒ O uso de dividendos proporcionais ao valor do ativo é mais comum no caso de tempo contínuo, que trabalha com intervalo de tempo infinitesimal. Mas o exercício mostra que podemos usar os dois métodos quer os dividendos sejam proporcionais ou não.

Método Binomial

- Método popular de precificar opções desenvolvido por Cox & Ross & Rubinstein (1979). Existem várias variações hoje em dia
  - Usa a *medida equivalente de martingale* (ou *probabilidade neutra ao risco*);
  - Resolve-se de trás para frente (“backwards”): programação dinâmica.
- Em relação a uma árvore de decisão tradicional:
  - A teoria das opções (martingale) dá o método correto para estabelecer a <u>taxa de desconto</u> <u>e</u> as <u>probabilidades</u> adequadas dentro da árvore
    - Lembrar que numa árvore de decisão o valor obtido backwards é uma opção e a taxa de desconto da opção não é a mesma que a do ativo básico.
- Método assume que após um intervalo de tempo, a variável V pode assumir apenas dois valores:
  - $V^+ = u\, V$ (cenário de “upside” ou de subida).
  - $V^- = d\, V$ (cenário de “downside” ou de descida).
  - Sacação do C&R&R: Escolhendo parâmetros (u, d) convenientes, no limite (Δt pequeno) temos uma distribuição Log-Normal.
    - A distribuição log-normal não permite valores negativos para V.

Método Binomial

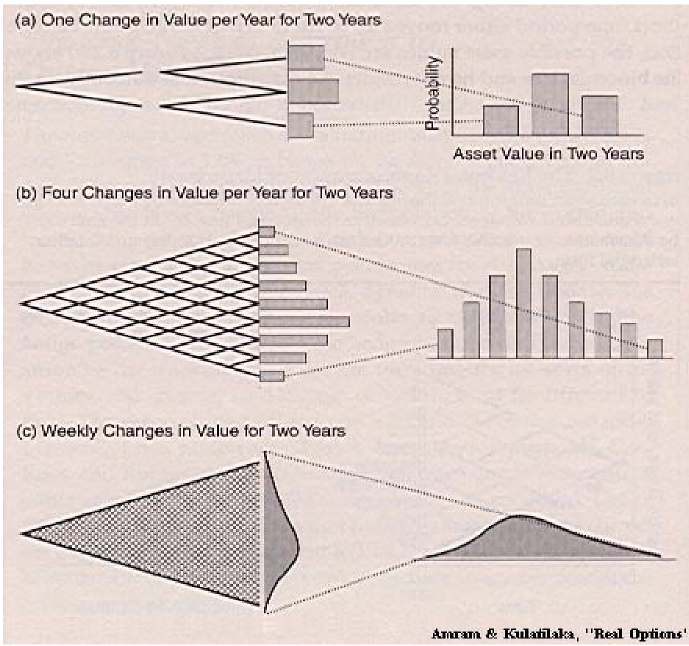
- Nesse processo, com $u = 1/d$ a árvore **recombina**, ver figura:



- Repare no quadro de probabilidades em t = 3 que os cenários centrais devem ser mais prováveis do que os extremos.
  - Muito mais caminhos levam aos cenários centrais que aos extremos.

Do Tempo Discreto Para o Contínuo

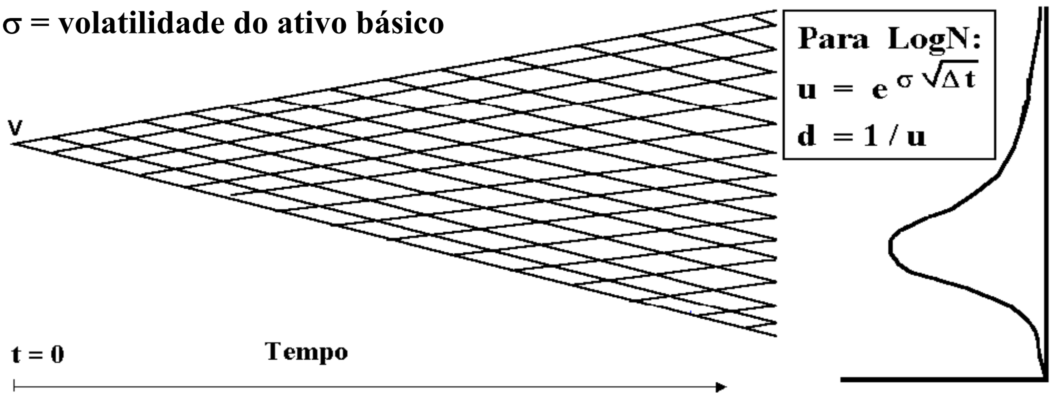
- Binomial trata a incerteza numa visão de cenários discretos.
- Usando o método binomial, o número de cenários é função do intervalo de tempo escolhido.
- No limite (Δt pequeno), se tem distribuições de probabilidades em tempo contínuo.
- Limite do binomial: distribuição log-normal para *q*, *u* e *d* adequados.



Binomial e a Distribuição Log-Normal

- Se escolhermos intervalos de tempo h bem pequenos, em pouco tempo geraremos muitos cenários.
- Se além disso escolher os parâmetros de subida e descida convenientes, pode-se obter uma distribuição Log-Normal.
  - Os valores convenientes são $u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$ e $d = 1/u$

σ = volatilidade do ativo básico



Exercício Usando Binomial

- **Lembrança importante: como visto antes, assumindo r > 0, para não ter oportunidades de arbitragem é requerido que *qualquer* esquema binomial atenda a desigualdade:**

$$0 < d < (1 + r) < u$$

- **Ficará como exercício olhar uma planilha que ilustra alguns conceitos do método binomial e de valoração de opções.**
- **Esse exemplo mostra o que ocorre se considerarmos opção européia ou americana, se considerarmos ou não dividendos, etc.**
- **Use a planilha real_options-binomial-com_dividendos.xls e mexa nos valores de dividendos, opção americana ou européia, etc., e tente ver, por ex., que se $\delta = 0$ nunca será ótimo exercer antecipadamente uma opção americana de compra.**

Outros Esquemas de Binomial: Trigeorgis

- **Além do esquema original de Cox & Ross & Rubinstein, existem inúmeros outros esquemas de binomial (q, u, d), alguns até melhores em termos de convergência/precisão.**
- **Mostraremos apenas o binomial "log-transformado", proposto por Trigeorgis (1991), que está bem resumido no livro do Back (p.94 e 198-199), e que é útil para casos mais complexos.**
- **Trigeorgis propôs escolher q, u e d de forma que a média e a variância da variação logaritmica $\Delta\ln(V)$ no modelo binomial sejam *exatamente* iguais aos do modelo em tempo contínuo.**
- **A escolha de Trigeorgis foi (notação: $\upsilon = r - \delta - \sigma^2/2$):**

$$u = \exp\left[\sqrt{\sigma^2\ \Delta t + \upsilon^2 (\Delta t)^2}\right] \quad , \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{(a árvore recombina)}$$

$$q = \frac{1}{2} + \frac{\upsilon\ \Delta t}{2\ \ln(u)}$$

Mercados Completos e Incompletos

- **Informalmente, mercados são completos quando um derivativo pode ser artificialmente feito de instrumentos simples tais como o ativo sem risco e o ativo básico (mutável dinamicamente).**
  - **Num mercado incompleto isso não seria possível.**
- **Formalmente, diz-se que um mercado é completo quando o nº de ativos linearmente independentes é igual ao nº de estados da natureza possíveis (realizações do mercado daqueles ativos).**
- **Um mercado é incompleto quando o nº de ativos linearmente independentes é menor que o nº de estados da natureza.**
- **Um mercado permite arbitragem se o nº de ativos linearmente independentes é maior que nº de estados da natureza.**
- **Nos nossos modelos assumiremos em geral que o mercado é suficientemente completo, como é feito em + de 95% dos casos.**
- **Uma definição alternativa de mercado completo é advinda do teorema fundamental: é um mercado com medida Q única.**

Mercados Incompletos

- **No caso de mercado incompleto, existe mais de uma medida equivalente de martingale. Logo, para mercados incompletos é necessário escolher uma medida de martingale dentre várias.**
  - **Em geral existe um range de medidas (probab. neutras ao risco) que não gera oportunidades de arbitragem. Esse range pode ser grande.**
  - **Em papers teóricos se determinam os limites inferiores e superiores desse range e assim existiria um range de preços de derivativos que não gerariam oportunidades de arbitragem. Qual seria o preço?**
- **Na prática de opções reais, se adota um dos 4 caminhos:**
  - **(a) Assuma que o mercado é *aproximadamente* completo (cômodo);**
  - **(b) Use o método da programação dinâmica com uma taxa de desconto exógena (D&P), mas *de tal forma que não gere arbitragem*;**
  - **(c) Assuma que as *firmas* são neutras ao risco e use a taxa livre de risco para desconto com probabilidades reais (questionável); ou**
  - **(d) Especifique preferências (de um "single-agent" representativo) ou detalhe o equilíbrio (livro do Duffie). É muito pouco prático.**

Hipótese de Eficiência dos Mercados

- **A Hipótese de Eficiência dos Mercados (HEM) diz que os preços dos ativos nesses mercados refletem a informação disponível. Não tem nada a ver com mercado completo.**
    - **A HEM implica que <u>não</u> é possível obter <u>sistematicamente</u> *excesso de retorno* (acima de r + o prêmio de risco) num mercado eficiente.**
        - **Os investidores só devem esperar receber os retornos normais.**
        - **O conceito foi proposto por Eugene Fama (Univ. de Chicago) nos anos 60.**
    - **Existem três formas de HEM: fraca, semi-forte e forte.**
- **<u>Forma fraca da HEM</u>: nas nossas aplicações em geral basta a forma mais fraca de eficiência para valer os nossos modelos.**
    - **Na forma fraca, apenas é requerido que os preços atuais dos ativos incorporem a *informação dos preços passados*. Não se requer, por ex. que eles incorporem informações de balanços ou inform. privadas.**
        - **Como a série de preços passados é uma informação muito barata, então é de se supor que ao menos isso os investidores tenham. Daí o nome "*fraco*".**
        - **A forma fraca da HEM implica que a *análise técnica* ou *gráfica* é inútil para o investidor ganhar excesso de retorno na bolsa de valores.**

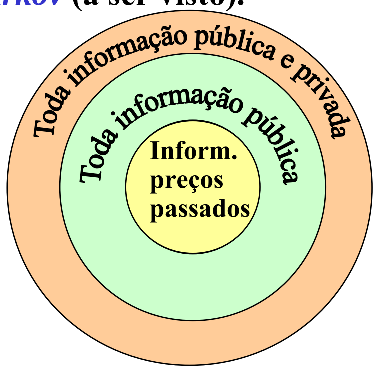
Hipótese de Eficiência dos Mercados

- **A equação da forma fraca da HEM para um ativo de preço V seria:**

$$V(t) \;=\; V(t-1) + \text{retorno esperado} + \text{erro aleatório}$$

- **Onde o retorno esperado é função do risco do ativo (e de r) e o erro aleatório de t - 1 para t é *independente* do erro aleatório do passado.**
    - **Na equação não entram os preços anteriores ao preço corrente V(t – 1).**
- **Tecnicamente, quando usamos a forma HEM fraca, assumimos que V(t) segue um *processo estocástico de Markov* (a ser visto).**

- **Formas semi-forte e forte de HEM:**
    - **Na forma semi-forte, os preços incorporam *todas as informações públicas*, tais como balanços, opiniões de analistas, notícias de jornais, etc.**
        - **Isso implica que a chamada "*análise fundamentalista*" é inútil para obter lucros anormais na bolsa de valores.**
    - **Na forma forte, os preços incorporam *todas as informações públicas e privadas*.**



Conjuntos de Informações

Preço de Mercado do Risco

- O *preço de mercado do risco* λ é o prêmio de risco por unidade de risco. Matematicamente é igual ao *índice de Sharpe*.

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

- É um conceito que tem sido usado principalmente para precificar derivativos em *mercados incompletos*.
  - A idéia é que todos os derivativos de um ativo têm o mesmo λ e assim eles podem ser valorados de forma consistente usando esse λ.
    - Ex.: em modelos de volatilidade estocástica, a volatilidade não tem preço observável no mercado (incompleto), mas o preço de mercado do risco da volatilidade é o mesmo para todos os ativos derivativos sujeitos a essa volatilidade. Isso gera consistência de valoração.
  - Tem sido usado em modelos de *estrutura a termo* de taxa de juros estocástica, já que λ é invariante com o tempo (vale p/ todas as datas).
  - Tem sido usado em opções reais (Schwartz, Hull) em modelos com reversão à média. Mas modelaremos como o DP, explicitando a *taxa ajustada ao risco do ativo básico* μ em vez de usar o preço do risco λ.

Preço de Mercado do Risco

- Apesar da opção F e do ativo básico V terem *diferentes retornos e volatilidades*, eles têm *o mesmo preço de mercado do risco* λ.
- Para ver isso, recorde que a volatilidade da opção é $\sigma_F = \varepsilon_F\, \sigma_V$ e que o retorno esperado de F é $\mu_F = r + \varepsilon_F\,(\mu_V - r)$, logo:

$$\lambda_F = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} = \frac{\varepsilon_F\,(\mu_V - r)}{\varepsilon_F\;\sigma_V} = \frac{\mu_V - r}{\sigma_V}$$

  - Note que λ pode ser negativo se $\mu_V < r$ (ex.: ver Hull, 6º ed., p.592).
- Para estimar o preço de mercado do risco usamos a regressão que estima o valor de beta do ativo básico, já que podemos escrever a equação do CAPM na versão com λ:

$$\mu_V = r + \frac{\rho_{V,m}\,\sigma_V}{\sigma_m}(\mu_m - r) \Rightarrow \frac{\mu_V - r}{\sigma_V} = \frac{\rho_{V,m}}{\sigma_m}(\mu_m - r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \rho_{V,m}\,\frac{(\mu_m - r)}{\sigma_m}}$$

Onde $\rho_{V,m}$ é a correlação entre o ret. de V e o do portfólio de mercado. Logo, $\lambda = \rho_{V,m}\,\lambda_m$

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e, em alguns casos, apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Teoria da Valoração

- **Existem dois tipos de teoria da valoração de ativos, segundo Constantinides (Univ. Chicago).**
- **Teoria Livre de Preferências: opções, proposições de Modigliani & Miller.**
  - **Equilíbrio: oportunidades de arbitragem no mercado não sobrevivem. Eficiência no uso de informações.**
  - **Só se supõe que o investidor tem um comportamento maximizador de riqueza (prefere mais a menos).**
  - **Independe das atitudes do investidor em relação ao risco (avesso, neutro, ou mesmo amante do risco).**
  - **Função utilidade: qualquer, basta ser crescente com a riqueza.**
- **Teoria Dependente de Preferências: ex.: CAPM.**
  - **Equilíbrio: especifica as preferências do investidor.**
  - **Além de assumir aversão ao risco, especifica a função utilidade.**

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Compra

- **Foi visto no corpo principal o caso mais comum de $\mu > r$, i. é, o beta do ativo de risco é positivo e, logo, o prêmio de risco é > 0.**
- **E se o beta do ativo básico V for negativo ($\Rightarrow \mu_V < r$)?**
  - **Nesse caso o dito antes vale em termos de magnitude (módulo), conforme aponta Crack (p.78). Ou seja:**

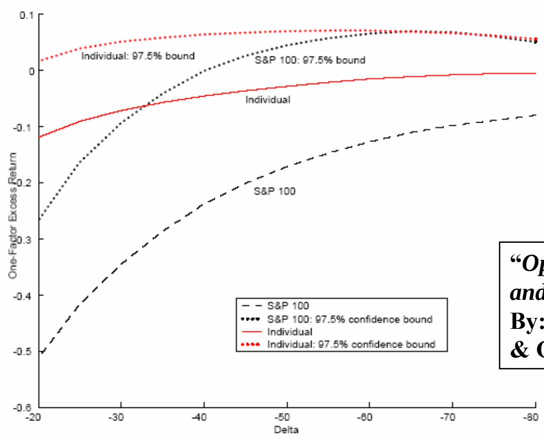
$$| \beta_V | \leq | \beta_{Call(in\text{-}the\text{-}money)} | \leq | \beta_{Call(out\text{-}of\text{-}the\text{-}money)} |$$

  - **Onde o beta da call pode ser visto como a elasticidade ε_{Call} multiplicada pelo beta do ativo básico β_V.**
  - **Se o beta de V for negativo, o beta da opção geralmente será "mais negativo ainda". Mas são raros ativos básicos com beta negativo.**
    - **No nosso curso não ocorrerá esse caso para ativos básicos.**

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Venda

- **Retirada de um paper empírico que mostra que os retornos da put como sendo negativos na maioria dos casos.**

Figure 3A shows unconditional expected one-factor excess returns on 30-day S&P100 puts and individual puts over our Jan. 1996 - Dec. 2003 OptionMetrics sample, across a range of Black-Scholes delta's. Individual-option excess returns are index-weighted cross-sectional averages across individual puts on all the stocks in the S&P100. The unconditional expected one-factor excess returns are calculated as sample means of the time-series of 30-day holding-period returns, where each option payoff is calculated from demeaned distributions for the underlying asset. The de-meaning sets the expected return on the underlying asset equal to the riskfree rate minus the dividend yield. Confidence bounds are based on Newey-West (1987) standard errors with 22 lags.



"Option-Implied Correlations and the Price of Correlation Risk"
By: Joost Driessen, Pascal Maenhout & Grigory Vilkov. WP, Sept/2005.

VOLTAR

VPL se Construir e Alugar Por 1 Ano

- O mesmo VPL (\$120 mil) seria encontrado se fosse imaginado que o dono da terra tendo construído 6 unidades, em vez de vender as unidades, as aluga por um ano e depois as vende pelos preços de cada cenário.
  - Nesse caso se colocam probabilidades reais para esses cenários, que implicam numa taxa ajustada ao risco que dá o mesmo VPL.
  - Imagine que a probabilidade real de subida (up) é p = 50%
  - Então obtemos o valor da taxa ajustada ao risco μ (= a taxa de retorno esperado do ativo, que considera os dividendos).

V(t = 0) = \$100.000

p = 50% → 120.000 + 8000

1 − p = 50% → 90.000 + 8.000

$$100.000 = \frac{(0{,}5 \times 128.000) + (0{,}5 \times 98.000)}{1 + \mu} \Rightarrow \boxed{\mu = 13\%}$$

$$\Rightarrow \quad VPL_{C6} = \frac{[0{,}5 \times 6 \times (120.000 + 8.000)] + [0{,}5 \times 6 \times (90.000 + 8.000)]}{1{,}13}$$

$\Rightarrow$ VPL_{C6} = \$ 120.000 (que é o mesmo de antes)

Martingale com Dividendos e Taxa Contínua

- Uma outra maneira de trabalhar com uma taxa de distribuição de dividendos δ é mexer na probabilidade neutra ao risco q, em vez de incorporar δ nos valores de u e d.
- Apresentaremos sem demonstrar a fórmula p/ o caso de taxa de juros e dos dividendos sendo compostos *continuamente*. O caso em tempo discreto é deixado como exercício (ver próximo slide).
  - Retirada do livro do K. Back (*A Course in Derivatives Securities*, 2005, p.91-93). Se r e δ são taxas em tempo contínuo, então (prove!):

$$q = \frac{e^{(r - \delta)\,\Delta t} - d}{u - d}$$

- Note que nesse caso os valores de "subida" (u) e "descida" (d) não incluem dividendos, incluem apenas os ganhos/perdas de capital.

Exercício: Martingale com Dividendos e Taxas Discretas

- Seja r e δ definidas como <u>taxas em tempo discreto</u>. Seja δ a taxa de dividendos = <u>percentual do valor de V(t=1) ex-dividendo</u>.
- Seja u e d os valores de subida e descida refletindo apenas o ganho/perda de capital (<u>não incluindo os dividendos</u>).
- Use a definição de medida de probabilidade neutra ao risco p (probabilidade que faz o retorno <u>total</u> do ativo básico ser a taxa livre de risco) e <u>mostre que a seguinte equação é válida</u>:

$$q = \frac{\dfrac{1 + r}{1 + \delta} - d}{u - d}$$

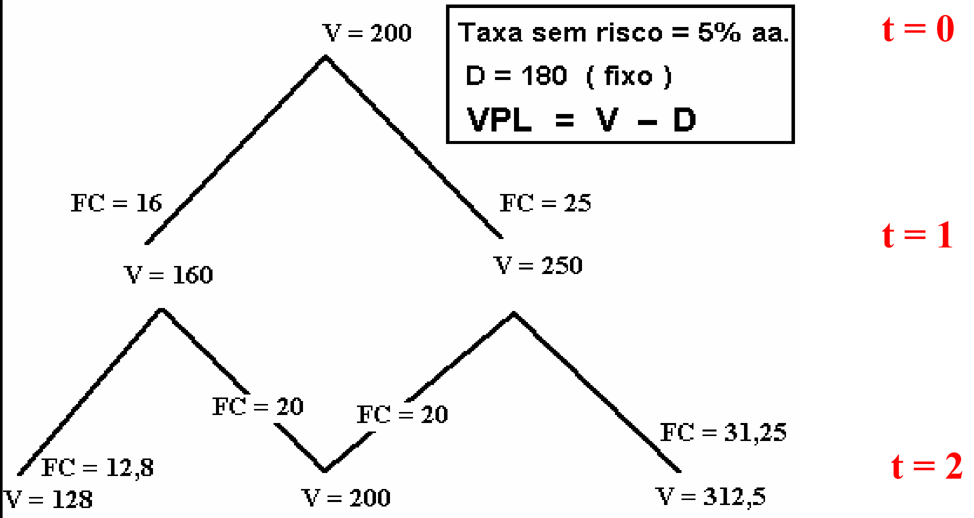
- Aqui os valores de "subida" (u) e "descida" (d) não incluem dividendos, mas dá a mesma resposta do método de somar os dividendos nos cenários up e down e usar a equação anterior de q. Exercício: verificar.
- O método anterior (somar dividendos para calcular u e d e depois q) é mais geral (δ não precisa ser % constante de V), mas esse é mais usado.
  - Mas <u>sempre</u> usar V^+ e V^- <u>ex-dividendo</u> para checar se exerce ou não a opção.

Outro Exemplo: Opção de Timing em Tempo Discreto

- Exemplo didático em três instantes (anos 0, 1 e 2) para mostrar que <u>mesmo que o VPL seja positivo, pode ser melhor esperar</u>, assim como pode ser ótimo o exercício da opção antes da expiração se o projeto for suficientemente bom ("deep in the money")
- Considere um projeto de uma jazida de petróleo que se implantado imediatamente valeria V = 200, e os fluxos de caixa (líquidos de CO e taxas) valem δ = 10% de V.
  - Suponha que o fluxo de caixa advindo da produção (δ = 10% de V) é faturado no final do período, um % do valor de V nessa data
  - O investimento necessário para desenvolver o campo é D = 180 (logo o VPL = 200 – 180 = + 20, ou seja é positivo em t = 0) .
  - Os direitos de investir na jazida expiram em t = 2.
- Em que instante é ótimo o exercício da opção?
  Quanto vale essa oportunidade (opção) de investimento?

Exemplo: Opção de Timing

- Qual o valor da opção F, em cada instante t ?
- Quando é ótimo o exercício da opção de investir?



Exemplo: Opção de Timing

- Opção (F) do tipo americana: pode exercer antes da expiração, no exemplo em t = 0, ou em t = 1, ou em t = 2
- Em t = 2 é a expiração, ou seja é o caso "agora ou nunca" (se não investir, devolve o campo para a agência), e a opção vale o máximo entre o VPL e zero
- Usando o método da neutralidade ao risco, primeiro calcula-se o valor da probabilidade de martingale:

$$q = (1 + 0{,}05 - [176/200])/([275/200] - [176/200]) = 0{,}3434$$

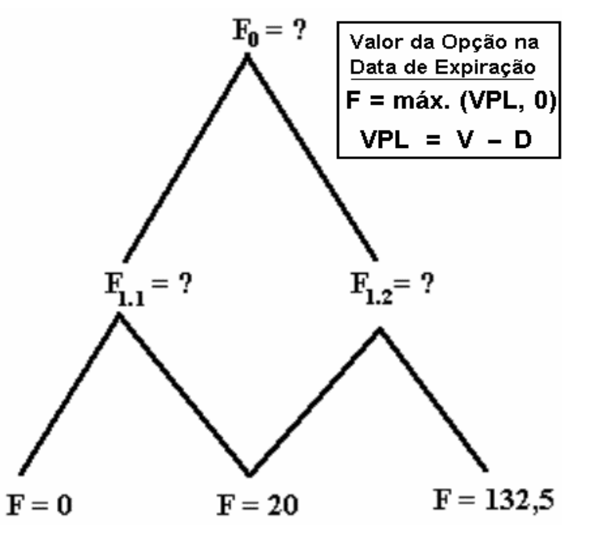
- Embora essa "probabilidade" tenha sido calculada no período 0-1, nesse exemplo obtém-se a mesma probabilidade para o período 1-2 (exercício: verificar)

Exemplo: Opção de Timing

- **Tipicamente o cálculo é feito de trás para a frente como na programação dinâmica, com os passos:**
  - **primeiro se calcula o valor da opção F na expiração (máximo entre VPL e zero), pois o valor é conhecido;**
  - **a seguir se calcula a opção para o instante anterior (aqui em t = 1), usando a "probabilidade" de martingale para atualizar o valor da opção;**
  - **o valor calculado deve ser comparado com o valor que se obteria caso a opção fosse exercida. Se esse for maior, é ótimo o exercício da opção, caso contrário a opção vale mais "viva" do que "morta"; e**
  - **continua o cálculo "backwards" até o tempo t = 0, sempre testando se é melhor o exercício ou a espera.**

Exemplo: Opção de Timing

- **A figura mostra os valores da opção em t = 2, que são o ponto de partida para o cálculo backwards:**



Se não exercer em t = 1, cenário 1, $F_{1.1}$ valeria:

$$F_{1.1} = \frac{0{,}343 \times 20 + 0}{1{,}05}$$

Logo, $F_{1.1} = 6{,}5$

Aqui o exercício não seria ótimo, já que se obteria um VPL negativo

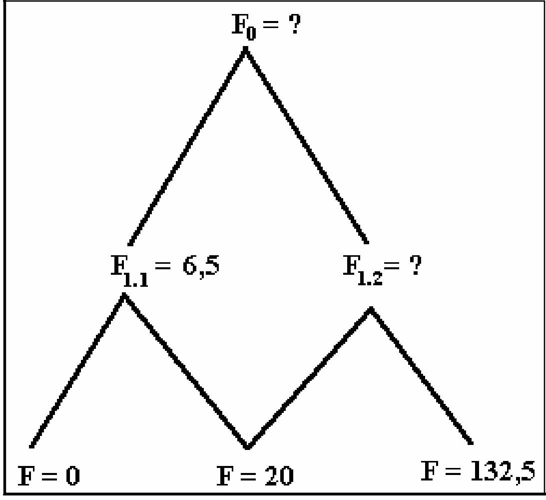
$VPL_{1.1} = 160 - 180 = -20$ que é menor que 6,5.
Logo esperar é melhor.

Exemplo: Opção de Timing

- Se não exercer em t = 1, cenário 2, $F_{1.2}$ valeria:

$$F_{1.2} = \frac{0{,}343 \times 132{,}5 + (1 - 0{,}343) \times 20}{1{,}05}$$

Logo, $F_{1.2} = 55{,}8$



Aqui no entanto, o exercício imediato será ótimo, já que se obteria um VPL maior que o valor da opção "viva":

$$VPL_{1.2} = 250 - 180 = 70$$

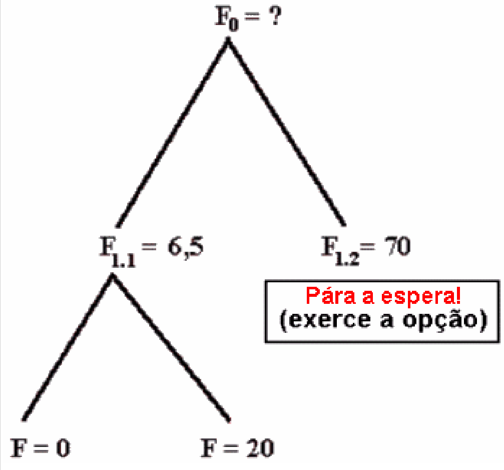
Logo, caso em t = 1 ocorra o cenário 2, mais favorável, o projeto estaria "deep in money" e o exercício é o ótimo. $F_{1.2} = VPL_{1.2} = 70$

Exemplo: Opção de Timing

- Se não exercer em t = 0, F_0 valeria:

$$F_0 = \frac{0{,}343 \times 70 + (1 - 0{,}343) \times 6{,}5}{1{,}05}$$

Logo, $F_0 = 26{,}9$



- Aqui no entanto, o exercício imediato não seria ótimo, já que VPL (exercício da opção) vale menos que o valor da opção "viva", e deve-se esperar :

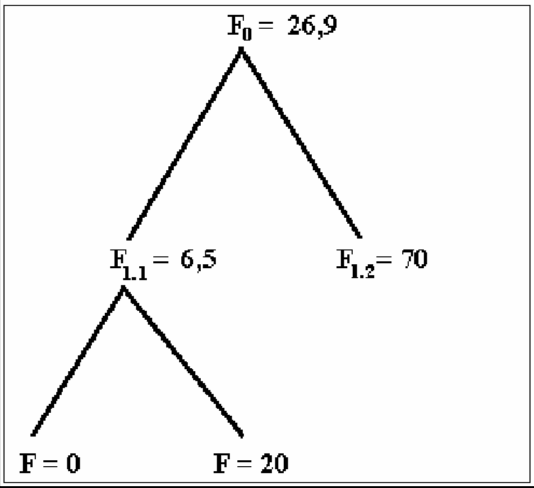
$$VPL_0 = 200 - 180 = 20 < 26{,}9$$

Logo, realmente $F_0 = 26{,}9$

- Repare na figura que os ramos após o exercício em $F_{1.2}$ foram "podados"

Exemplo: Opção de Timing

◆ O perfil completo de preços dessa opção americana é mostrado na figura. Repare que se fosse ótimo o exercício em t = 0, a árvore seria toda "podada"



◆ Se fosse uma opção do tipo européia (só pode exercer na expiração), ela valeria menos, já que não seria podada o path após t = 1 no cenário 2, e logo a opção valeria : $F_{1.2}$ = 55,8 (e não 70), e portanto em t = 0 a opção européia valeria: F_0 = 22,3

Exemplo: Resumo da Regra de Decisão

◆ A regra de decisão nesse exemplo pode ser escrita:

- Em t = 0 espere e observe o que vai ocorrer com os preços de mercado;
- Em t = 1: (a) caso o preço suba exerça a opção, pois a mesma estará "deep in the money", ou seja, qualquer atraso o custo de adiar o recebimento desses generosos dividendos seria maior que o benefício da espera;
  (b) em caso do mercado piorar, espere e observe (não exerça a opção);
- Em t = 2: (a) caso o mercado piore ainda mais, não faça o investimento e devolva a concessão para a agência do governo; (b) caso o mercado melhore, exerça a sua opção de investimento.