Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Análise de Investimentos com Opções Reais IND 2072

Parte 3: Processos Estocásticos

Marco Antonio Guimarães Dias

Professor Adjunto (tempo parcial)

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2008

Opções Reais x F.C.D.: Preços/Custos de Mercado

- **Fluxo de Caixa Descontado (FCD):**
  - Trabalha com valores esperados dos preços futuros de comodities e/ou de custos (valor único ou tendência).
- **Opções:**
  - Considera a natureza estocástica dos preços e/ou custos e, mais importante, as ações gerenciais que são tomadas nos projetos devido a essas variações nos preços.

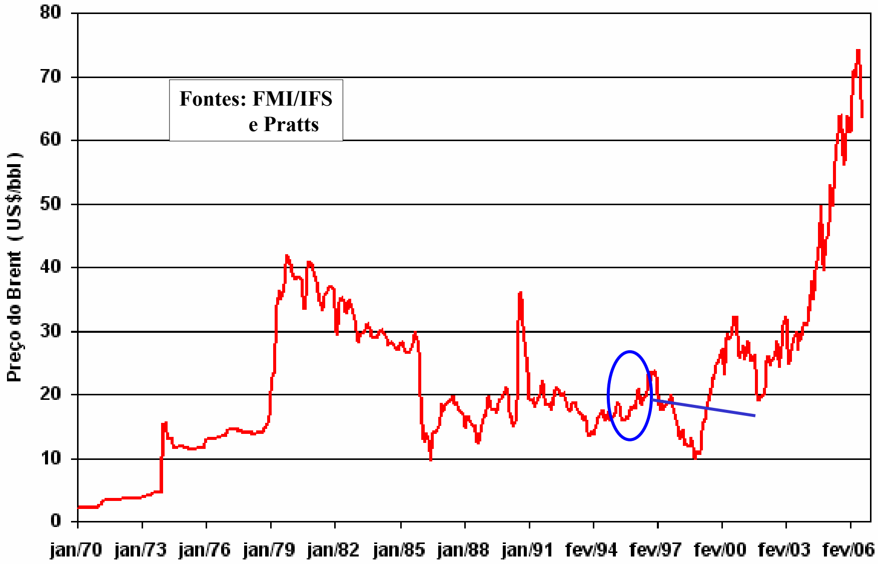
➡ **A abordagem por opções é mais realista e mais adequada do ponto de vista teórico, ao considerar a incerteza e a reação racional frente a ela.**

Processos Estocásticos

- Processo estocástico X = { X(t), t ∈ *T* } é uma coleção de variáveis aleatórias. Ou seja, para cada t no conjunto de índices *T*, X(t) é uma variável aleatória.
  - Freqüentemente t é interpretado como *tempo* e chamamos X(t) de *estado do processo* no tempo t (Ross, 1996, p.41).
  - Quando o conjunto de índices *T* é um conjunto *contável*, temos um *processo estocástico em tempo discreto* (ex. binomial, parte 2). Se esse conjunto é *incontável/contínuo*, temos um *processo estocástico em tempo contínuo*.
  - Uma realização aleatória de X é chamada de *amostra de caminho* ("*sample path*"); pode ser discreta ou contínua.
  - Mas no caso de *incerteza técnica* o índice não é tempo
    - São eventos, tais como *exercícios de opções de aprendizagem* (parte 7, veremos se der tempo), na maior parte dos casos.

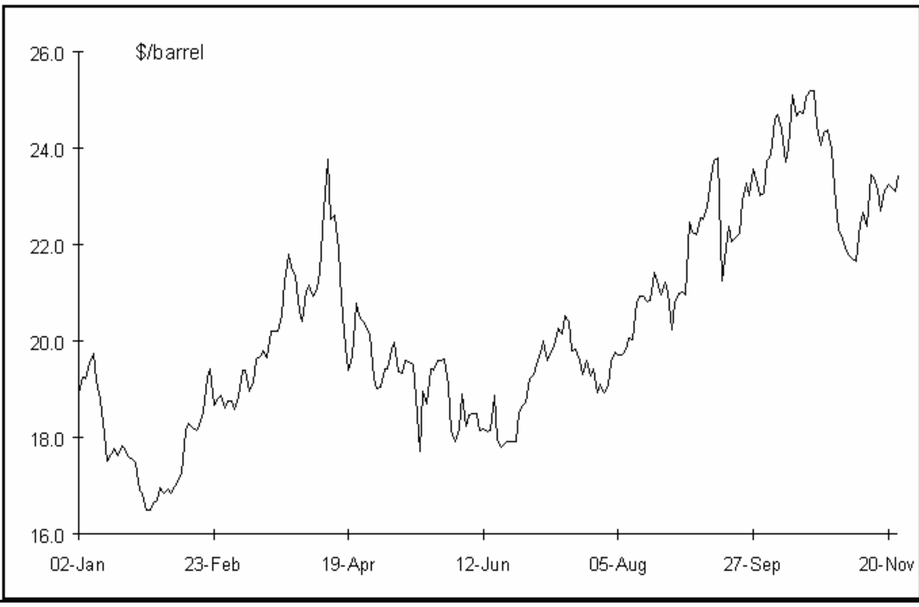
Exemplo: Preço do Petróleo 1970-2006

- Preços do petróleo Brent e similares, valores nominais: a evolução dos preços parece ser aleatória, sem padrão…



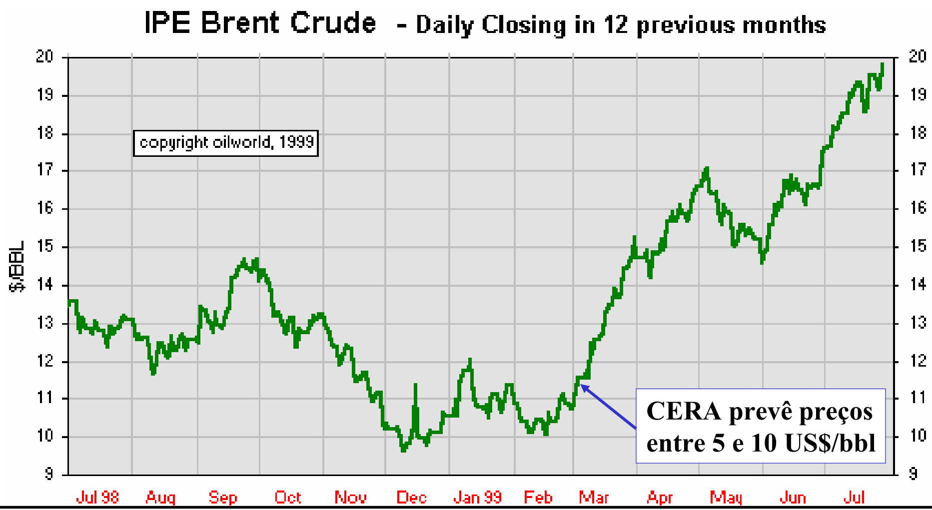
Preços do Petróleo em 1996 (Brent)

- Zoom: trajetórias serrilhadas, variações imprevisíveis.



A Dificuldade de Prever os Futuros Preços

- Pouco depois de alguns cenaristas (ex.: CERA, em The Economist 6 de março/99) preverem a queda de preços até 5 $/bbl, a OPEP mostra força retirando cerca de 2 milhões de bpd do mercado (menos de 3% do consumo mundial) no final de fevereiro de 1999.



Preços de Commodities Agrícolas: Soja

- O gráfico mostra que os preços da soja oscilam muito, mas não há uma tendência de longo-prazo clara.

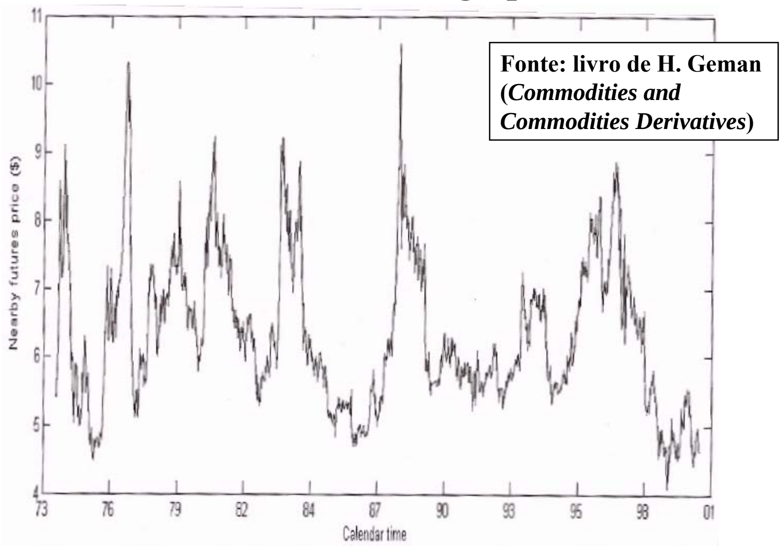


Figure 7.1 Soybean nearby Futures price over the period July 1974 to October 2000.

Distribuição Lognormal e Taxa de Retorno

- A distribuição lognormal é de longe a mais usada para modelar a incerteza de preços de ativos e mercadorias no futuro. Veremos alguns motivos dessa popularidade.
- Uma variável aleatória Y tem dist. lognormal se e som. se o seu logaritmo neperiano tem distribuição normal:

$$Y \sim \text{lognormal} \Leftrightarrow X = \ln(Y) \sim \text{normal}$$

- Um formato mais conveniente é $Y = e^X$, pois:
  - Ao contrário da dist. Normal, ela não admite valores negativos, já que mesmo que X seja negativo, $Y = e^X$ é sempre positivo;
- O formato exponencial é o link entre retornos compostos em tempo contínuo, (geralmente se assume distribuição normal para os retornos) e a lognormalidade dos preços.
  - O retorno composto continuamente entre 0 e t, é por definição $R(0, t) = \ln(V_t/V_0) \Rightarrow V_t = V_0\, e^{R(0,\, t)}$. Isso é um bom motivo p/ se trabalhar em tempo contínuo (em vez de discreto), mas tem +.

Distribuição Lognormal e Taxa de Retorno

- Assim, "*retornos em tempo contínuo com distribuição normal*" equivale a dizer "*preço do ativo com distribuição lognormal*".
  - Veremos que processos estocásticos populares usam dist. lognormais.
- Além disso, *retornos compostos continuamente podem ser somados*, i. é, se $t_0 < t_1 < t_2$, e as taxa de retorno contínuo nos intervalos $[t_0, t_2]$, $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ são, respectivamente, $R(t_0, t_2)$, $R(t_0, t_1)$, $R(t_1, t_2)$, então:

$$R(t_0, t_2) = R(t_0, t_1) + R(t_1, t_2)$$

- Prova: $V(t_1) = V(t_0) \exp[R(t_0, t_1)]$ e $V(t_2) = V(t_1) \exp[R(t_1, t_2)]$ podem ser combinados: $V(t_2) = V(t_0) \exp[R(t_0, t_1)] \exp[R(t_1, t_2)] = V(t_0) \exp[R(t_0, t_1) + R(t_1, t_2)] \Rightarrow V(t_2)/V(t_0) = \exp[R(t_0, t_1) + R(t_1, t_2)]$ $\Rightarrow \ln[V(t_2)/V(t_0)] = R(t_0, t_1) + R(t_1, t_2) \Rightarrow R(t_0, t_2) = R(t_0, t_1) + R(t_1, t_2)$ □
- Outro fato: sabe-se que a *soma de distribuições normais é uma dist. normal* $\Rightarrow$ *o produto de lognormais é lognormal*. Prova:
  - ➡ $Y_1 = \exp(X_1)$; $Y_2 = \exp(X_2)$; $Y_1 \times Y_2 = \exp(X_1) \times \exp(X_2) = \exp(X_1 + X_2)$, como $X_1 + X_2$ tem distrib. normal, então $Y_1 \times Y_2$ tem distrib. lognormal.

Distribuição Lognormal e Taxa de Retorno

- Note que tendo dist. normal, esse retorno pode ser menor que – 100%, embora na prática a probabilidade seja bem pequena.
  - ➡ Mesmo assim o preço lognormal será sempre positivo! exp(-2) > 0
- O *reinvestimento contínuo de dividendos* δ no ativo básico também gera um número exponencial de ativos, $e^{\delta T}$:
  - Se em t_0 tenho $n_0 = 1$ ativo e todo dia t eu recebo e reinvisto o dividendo $\delta/365\ V(t)$, então eu terei $n_1 = (1 + \delta/365)$ ativos no 1º dia; no 2º dia eu recebo dividendo $(1 + \delta/365)\ \delta/365\ V(t)$ e terei $n_2 = (1 + \delta/365)\ \delta/365 + (1 + \delta/365) = (1 + \delta/365)\ (1 + \delta/365) = (1 + \delta/365)^2$ ativos no 2º dia; etc., de forma que em T anos terei:

$$n_{365\,T} = \left(1 + \frac{\delta}{365}\right)^{365\,T} \approx e^{\delta\,T}$$

- Assim, como terei $e^{\delta T}$ mais ativos em T, para ter exatamente uma unidade do ativo em t = T, basta comprar $e^{-\delta T}$ unidades em t = 0.
- <u>Ou</u>: num intervalo dt se ganha o dividendo $dV(t) = \delta\, V(t)\, dt$, que se reinvestido em V tem a solução (integrando): $V(t) = V(0)\, e^{\delta t}$.

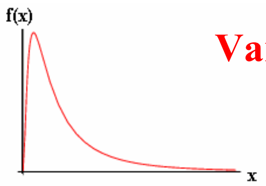
Distribuição Lognormal: Média e Variância

- Seja a variável com distr. normal $X \sim N(m, s^2)$, por ex., X = retorno = $\ln(V_t/V_0)$. O valor esperado da variável lognormal $Y = e^X$, em função dos parâmetros de X é:

$$E[Y] = E\left[e^X\right] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$$

  - A prova está nas mencionadas notas da Pasta 76. Note que $E[e^X] > e^{E[X]}$ (efeito de *convexidade*, *desigualdade de Jensen*).

- A variância da variável lognormal Y é dada por:



Densidade da dist. lognormal

$$Var[Y] = Var[e^X] = e^{2m + s^2}\,(e^{s^2} - 1)$$

  - Pasta 76: material do livro do McDonald sobre distribuição lognormal e seu link com a fórmula do Black-Scholes.

  - Agora veremos propriedades dos retornos contínuos normais em relação à variável tempo, que servirá para justificar o uso de processos estocásticos populares tais como o movimento geométrico Browniano.

Retornos e Variâncias Proporcionais ao Tempo

- Com retornos contínuos vimos que podemos somá-los:

$$r_{anual} = \sum_{i=1}^{12} r_{\text{mês } i} \;\; ; \text{ se } r_{\text{mês } i} = \text{constante} = r_{mensal} \;\Rightarrow\; r_{anual} = 12\; r_{mensal}$$

  - Ou seja, o retorno esperado é proporcional ao tempo (no ex., 12 meses), o que é intuitivo. E no caso da variância, também?

- A variância dos retornos pode ser escrita no caso como:

$$Var\left[r_{anual}\right] = \sigma^2_{anual} = Var\left[\sum_{i=1}^{12} r_{\text{mês } i}\right]$$

  - Se $r_{\text{mês } i}$ = cte = r_{mensal} e se os *retornos são não-correlacionados* (⇒ independentes p/ dist. normais), o que é desejável (i.i.d.), então a variância da soma é igual à soma das variâncias individuais. No caso, se teria 12 termos iguais nessa soma, logo:

$$\sigma^2_{anual} = \sum_{i=1}^{12} Var\left[r_{mensal}\right] = \sum_{i=1}^{12} \sigma^2_{mensal} \;\Rightarrow\; \sigma^2_{anual} = 12\;\sigma^2_{mensal}$$

- Que é proporcional ao tempo também. Se dividirmos o ano em n períodos de tamanho h (i. é, $h = 1/n$) e tirarmos a raiz, então o *desvio-padrão* do retorno no intervalo de tempo h é: $\sigma_h = \sigma_{anual}\sqrt{h}$

Processo Estocástico Indexado pelo Tempo

Processo Estocástico = Tempo + Aleatoriedade

Num intervalo dt, a variação será :

d(variável) = Fator × d(tempo) + Fator × d(aleatoriedade)

- **Ex: Valor do projeto V segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB, processo estocástico mais popular):**

$$dV = \alpha\ V\ dt + \sigma\ V\ dz$$

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \Rightarrow \text{Incremento de Wiener}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1) \qquad dz \sim N(0, dt)$$

- **Como dz tem variância dt (além de ser não tendencioso por ter média zero), então a *variância do processo é proporcional ao intervalo de tempo* em que se olha no futuro (geralmente desejável)**
- **No MGB, dV/V tem distrib. normal e V tem dist. lognormal.**
  - **Já dV tem distribuição lognormal com uma translação.**
- **V = 0 é uma *barreira absorvente*, pois se $V(t = 0) = 0 \Rightarrow dV = 0$, $\forall$ t.**

Processos Estocásticos e Previsão

- **Pode-se ver um processo estocástico X(t) como uma previsão E[X(t)] mais um erro dessa previsão. Ou seja:**

$$X(t) = E[X(t)] + erro(t)$$

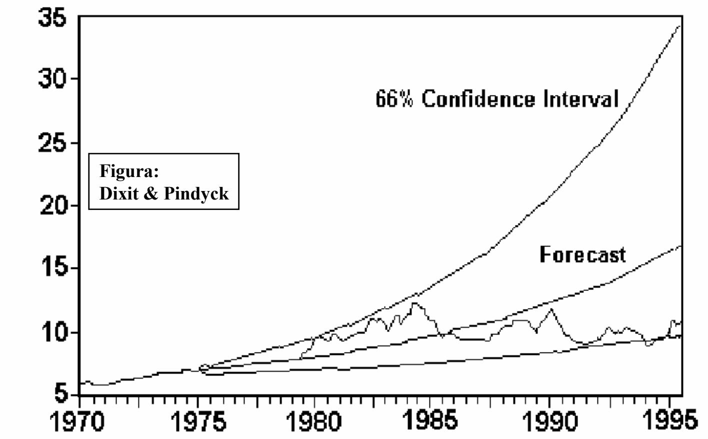
- **No caso do Movimento Geométrico Browniano (MGB):**

$$\underbrace{\frac{dV}{V}}_{\substack{\text{Taxa de Variação}\\\text{da Variável}\\\text{Estocástica}}} = \underbrace{\alpha\ dt}_{\substack{\text{Parcela}\\\text{de Valor}\\\text{Esperado}}} + \underbrace{\sigma\ dz}_{\substack{\text{Parcela de Erro}\\\text{(desvio padrão;}\\\text{incerteza)}}}$$

- **No caso de V(t) seguir MGB, V(t) tem distribuição lognormal e dV/V tem distribuição Normal: $dV/V \sim N(\alpha\ dt; \sigma^2\ dt)$.**
- **Prova-se (usa o lema de Itô, parte 4) que o retorno contínuo também tem distrib. normal: $\ln(V_t/V_0) \sim N[(\alpha - \sigma^2/2)\ t; \sigma^2\ t]$.**
- **Note que tanto dV/V como $\ln(V_t/V_0)$ tem média e variância proporcionais a t.**

Previsão: Movimento Geométrico Browniano

- É comum traçar intervalos de confiança da previsão, usando percentis das distribuições (lognormal no MGB).
- No MGB, a variância cresce com o horizonte de previsão
  - Quanto mais longe se tenta prever os preços, mais incerta é a previsão. Tendência: exponencial de crescimento ou queda



Processo de Wiener (Movimento Browniano)

- O movimento Browniano é também chamado processo de Wiener e pode ser definido pelas propriedades:
  - É um *processo de Markov* no sentido que depende do preço corrente, mas independe da trajetória dos preços no passado;
  - Tem *incrementos independentes* (variação num intervalo Δt é independente da ocorrida em outro intervalo Δt); e
  - Os *incrementos têm distribuição Normal* com parâmetros que dependem só do intervalo de tempo: *incrementos estacionários*.
- O termo $dz = \varepsilon \, dt^{1/2}$, implica em mudanças bruscas:
  - Para um pequeno intervalo Δt, o movimento do desvio-padrão será muito maior que o movimento do termo de tendência: se Δt é pequeno, $(\Delta t)^{1/2}$ é muito maior que Δt. Isso determina um comportamento serrilhado dos caminhos do proc. de Wiener.
  - Por razões similares, o processo de Wiener não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional:
    - ➡ $\Delta z/\Delta t = \varepsilon(\Delta t)^{-1/2}$, torna-se infinito quando Δt se aproxima de zero.

Propriedades do Movimento Browniano

- **Num intervalo de tempo a variação de V é dada por dois termos: o determinístico α V dt e o estocástico σ V dz.**
  - **Num intervalo *pequeno* de tempo o termo estocástico é o dominante. Se o intervalo de tempo é grande, o inverso ocorre, i. é, o termo dominante é a tendência determinística.**
  - **Ex.: α = 10 % a.a.; σ = 10% a.a., as variações de dV/V são:**

Intervalo de Tempo	Δt	$\alpha\, \Delta t$	$\sigma \sqrt{\Delta t}$	$\sigma \sqrt{\Delta t} / \alpha\, \Delta t$
5 anos	5	0,5	0,2236	0,447
1 ano	1	0,10	0,10	1
1 mês	0,0833	0,0083	0,0289	3,464
1 dia	0,0027	0,00027	0,0052	19,105
1 minuto	0,000002	0,0000002	0,00014	724,98

  - **Na prática, se você observa a variação diária de um preço, a oscilação parece errática, como um MGB sem drift: α parece não ser detectável. Mas ao longo dos anos o drift é observável.**

Propriedades do Movimento Browniano

- **As variações totais e quadrática de dz geram propriedades típicas do movimento Browniano.**
  - **O movimento Browniano dz tem uma natureza *fractal*, pois uma amostra de caminho tem uma trajetória serrilhada e se colocarmos um microscópio num aparente segmento de linha reta desse serrilhado veremos uma novo serrilhado.**
  - **Isso significa que num intervalo finito $\Delta t = T - 0 = T$, o tamanho total da amostra de caminho é infinito, i. é:**

$$\text{variação total do mov. Browniano} = \int_0^T |dz| = \infty$$

- **Curiosamente, a variação *quadrática* de dz é finita e igual ao intervalo de tempo T. Ou seja:**

$$\text{variação quadrática do mov. Browniano} = \int_0^T (dz)^2 = T$$

  - **Na parte 4 isso ficará claro, pois mostraremos que $(dz)^2 = dt$.**

Processos de Markov e de Itô

- **Um processo de Wiener é também um caso especial de um processo de difusão forte (*strong diffusion process*) que é uma classe particular de um *processo de Markov em tempo contínuo* (livro do Merton, p. 121-122 e n. 3).**
- ***Processos de Markov* independem da história passada, dado o valor corrente, i. é, *toda a informação relevante está contida no valor corrente* da variável estocástica.**
  - **Formalmente, a distribuição de probab. de x_{t+1} depende somente de x_t e não do que ocorreu antes do tempo t.**
    - **Logo, não depende de x_s, onde s < t, i. é, *é condicionalmente independente* de x_s (condicional a saber x_t, independe de x_s).**
    - **O MGB é um tipo particular de processo markoviano.**
  - **Processos de Markov são consistentes com a *forma fraca de eficiência do mercado* (rever parte 2).**
    - ***Preços correntes refletem toda informação dos preços passados.***

Processos de Itô e Movimento Aritmético Browniano

- **Um processo Browiano <u>generalizado</u> é chamado de *processo de Itô* (inclui processos de *reversão à média*):**

$$dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$$

- **O Movimento Aritmético Browniano (MAB) é o caso particular mais simples de processo de Itô, pois os termos a e b são constantes: $a(V, t) = \alpha$ e $b(V, t) = \sigma$.**

$$dV = \alpha\, dt + \sigma\, dz$$

  - **Pode-se escrever também: $dV = V(t + dt) - V(t) = \alpha\, dt + \sigma\, dz$ $\Rightarrow$ $V(t + dt) = V(t) + \alpha\, dt + \sigma\, dz$. Ou seja, é um processo de Markov, já que V(t + dt) depende do valor corrente V(t), mas não dos preços passados V(s), onde s < t.**
  - **Como E[dz] = 0, segue que $E[dV] = \alpha\, dt \Rightarrow \alpha = E[dV]/dt \Rightarrow$ α representa a variação esperada <u>em V</u> por unidade de tempo.**

Movimento Aritmético Browniano

➡ Como o MAB descreve a variação em V e *não na taxa de retorno* de V, o MAB *não exibe as propriedades de retornos normais* (MGB) que vimos.

- **Já a variância de V(t + dt) é fácil de ver que é σ^2 dt.**

◆ **No MAB, o valor V tem distribuição normal (no MGB era lognormal): $V(t + dt) \sim N\{V(t) + \alpha\ dt;\ \sigma^2\ dt\}$**

- **Por ter distrib. normal, V pode assumir valores negativos. É usado em modelos em que *se deseje permitir valores negativos*.**
- **Veremos uma aplicação em termoelétricas (*spark-spread*).**

◆ **MAB foi o 1º modelo matemático usado para valorar opções: tese de doutorado de Bachelier (1900).**

- **Samuelson (Nobel em Economia; orientador do Merton) em 1965 propôs o MGB para evitar os preços negativos do MAB.**
- ◆ **Ver em casa um exemplo numérico do MAB no anexo.**
- ◆ **A forma integral do MAB é (a 2ª integ. é a *integral de Itô*):** $V(T) = V(0) + \int_0^T \alpha\ dt\ +\ \int_0^T \sigma\ dz(t)$

Movimento Geométrico Browniano (MGB)

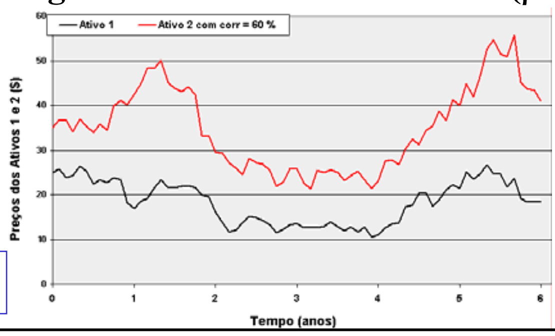
◆ **Vimos na eq. do *Movimento Geométrico Browniano* que os retornos esperados e suas variâncias são proporcionais ao tempo, propriedades geralmente desejadas:**

$$\frac{V(t + dt)\ -\ V(t)}{V(t)} = \frac{dV}{V} = \alpha\ dt\ +\ \sigma\ dz \qquad \text{onde} \quad dz = N(0, 1)\ \sqrt{dt}$$

- **Além disso, não permite preços negativos (também desejável).**

◆ **A figura abaixo mostra duas *amostras de caminho* de dois ativos que seguem *MGBs correlacionados* (ρ = 60%).**

Planilha
simula-MGBs_correlac.xls



MGB: Valor Esperado e Variância

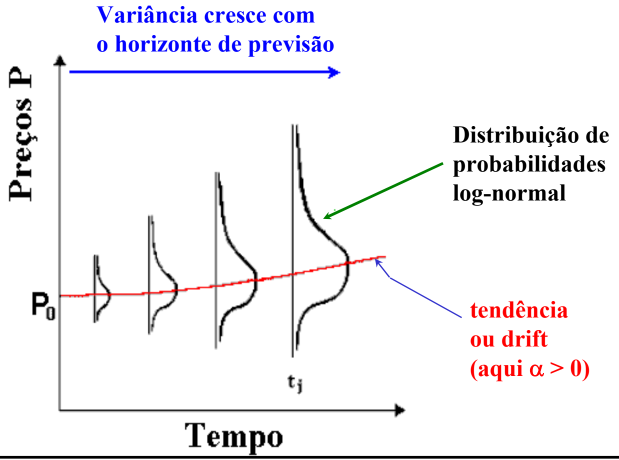
- No MGB o valor esperado de *V* no instante *t*, dado o valor corrente V_0, é: $E[V_t] = V_0\ e^{\alpha t}$
  - Assim, espera-se que V cresça exponencialmente à taxa α. Para mostrar isso, pode-se provar (com o lema de Itô) que $v = \ln(V)$ segue o MAB: $dv = d(\ln V) = (\alpha - \sigma^2/2)\ dt + \sigma\ dz$.
    - A eq. diferencial de dv tem a seguinte solução exata p/ $\Delta t = t - 0$:
      - $\ln(V_t) - \ln(V_0) = \ln(V_t/V_0) = (\alpha - \sigma^2/2)\ t + \sigma\ N(0, 1)\ t^{½} \Rightarrow$
      - $\Rightarrow V_t = V_0 \exp[(\alpha - \sigma^2/2)\ t + \sigma\ N(0, 1)\ t^{½}]$
    - $E[V_t] = V_0 \exp[(\alpha - \sigma^2/2)\ t]\ E\{\exp[\sigma\ N(0, 1)\ t^{½}]\}$
    - $E[V_t] = V_0 \exp[(\alpha - \sigma^2/2)\ t]\ E\{\exp[N(0, \sigma^2\ t)]\}$;
      - Mas vimos que se $X \sim N(m, s^2)$ então $E[e^X] = \exp[m + ½\ s^2]$, logo:
    - $E[V_t] = V_0 \exp[(\alpha - \sigma^2/2)\ t] \exp[½\ \sigma^2\ t] \Rightarrow E[V_t] = V_0\ e^{\alpha t}$ □
- A variância de V, dado V_0 em $t = 0$, é (ver slide sobre a lognormal):

$$\text{Var}[V(t)] = V_0^2\ e^{2\alpha t}\,(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

- Note que se $t \to \infty \Rightarrow \text{Var}[V] \to \infty$ (variância ilimitada)

Movimento Geométrico Browniano (MGB)

- Um processo estocástico indexado pelo tempo é um mapeamento de probabilidades ao longo do tempo.
  - No caso do MGB, a tendência é um crescimento (ou queda) exponencial e os preços tem uma distribuição lognormal com variância crescendo (sem limites) com o horizonte temporal.



Movim. Geométrico Browniano: Exemplo

- Seja um projeto cujo valor V segue um MGB, com um crescimento exponencial esperado α igual a 3% ao ano e tem uma volatilidade de 20% ao ano.
- Se o valor corrente do projeto é igual a 100, qual o valor esperado desse projeto e seu desvio padrão daqui a 5 anos?

$E[V] = V_0 \,.\, e^{\alpha\, t} \Rightarrow E[V] = 100\ e^{0{,}03 \times 5} \Rightarrow E[V(t)] = 116{,}18$

$Var[V(t)] = 100^2\ e^{2 \times 0{,}03 \times 5}\ (e^{0{,}20 \times 0{,}20 \times 5} - 1) = 2988{,}6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Desvio Padrão$[V(t)] = 2988{,}6^{\,½} \Rightarrow$ Desvio Padrão$[V(t)] = 54{,}67$

- Escreva a equação estocástica do projeto:

$$dV = 0{,}03\ V\ dt + 0{,}2\ V\ dz$$

Martingale e Martingale Descontado

- Um processo estocástico X(t) é um martingale sob a medida de probabilidade Q se o seu valor esperado (sob essa medida Q) é o seu valor corrente X(0).
  - $E^Q[X(t)] = X(0)$, $t > 0$; em geral: $E^Q[X(t) \mid \mathcal{F}(s)] = X(s)$, $\forall\ t > s$, onde $\mathcal{F}(s)$ representa o conhecimento/informação no instante s
    - Ex.: se $X(0) = 10$ e X(t) é martingale $\Rightarrow E^Q[X(t)] = 10$, para todo $t \geq 0$.
  - Martingale é um processo estocástico *sem tendência* (MGB: $\alpha = 0$).
  - Matemática: ligada à teoria das *expectativas condicionais*.
- A importância aqui é porque prova-se que se o processo do valor <u>descontado</u> de um ativo é um martingale sob a medida Q, então o processo do valor *descontado* de um *derivativo* desse ativo também é um martingale sob Q.
  - Essa medida em que se toma valores esperados é chamada de *medida neutra ao risco* e o desconto é com a taxa livre de risco.
    - $E^Q[e^{-r\,t}\ V(t) \mid \mathcal{F}(0)] = V(0)$; p/ a opção F(V): $E^Q[e^{-r\,t}\ F(t) \mid \mathcal{F}(0)] = F(0)$

Medida Neutra ao Risco e Valor Esperado

- **Na parte 2 foi definida a medida de probabilidade neutra ao risco (Q) como aquela que faz o retorno esperado do ativo básico ser a taxa livre de risco.**
  - **É fácil ver que isso equivale a subtrair um prêmio de risco do valor esperado do ativo básico V. Seja o caso simples com dois instantes, V(0) conhecido em t = 0 e V(1) estocástico em t = 1.**
  - **Os retornos sob medida real (P) e medida de martingale (Q) são:**

$$\mu = \frac{E^P[V(1)]}{V(0)} - 1 \qquad\qquad r = \frac{E^Q[V(1)]}{V(0)} - 1$$

  - **É claro que diminuindo o primeiro do segundo encontra-se o prêmio de risco do ativo básico $\pi = \mu - r$. Essa subtração pode ser vista também em termos de diferenças de valor esperado:**
  - **$E^P[V(1)] - E^Q[V(1)] = (\mu - r)\, V(0) = \pi\, V(0)$, logo a expectativa neutra ao risco é a expectativa real menos um prêmio de risco:**

$$E^Q[V(1)] = E^P[V(1)] - \pi\, V(0)$$

Tendência Neutra ao Risco em Tempo Contínuo

- **Podemos fazer algo similar em tempo contínuo e $\forall$ t:**

$$V(0) = e^{-\mu t}\, E^P[V(t)] \qquad \text{e} \qquad V(0) = e^{-r t}\, E^Q[V(t)]$$

  - **Por hora assumiu-se <u>$\delta = 0$</u>. Logo, com uma álgebra elementar:**

$$e^{\mu t} = E^P[V(t)] / V(0) \qquad \text{e} \qquad e^{r t} = E^Q[V(t)] / V(0)$$

$\Rightarrow$ $\pi\, t = \ln\{E^P[V(t)] / V(0)\} - \ln\{E^Q[V(t)] / V(0)\}$

$\Rightarrow$ $\pi\, t = \ln\{E^P[V(t)] / E^Q[V(t)]\}$

$\Rightarrow$ **$E^Q[V(t)] = e^{-\pi t}\, E^P[V(t)]$. Logo, com $\pi > 0$, E^Q é igual a expectativa real E^P <u>penalizada por um prêmio de risco π</u>.**

  - **Além disso, se V(t) segue um MGB, $E^P[V(t)] = V(0)\, e^{\alpha t}$. Logo:**

$$E^Q[V(t)] = V(0)\, e^{(\alpha - \pi)\, t} \quad (= V(0)\, e^{(r - \delta)\, t})$$

  - **Assim, sob medida NR, em vez do drift real α, o MGB passa a ter o drift NR, i. é, $\alpha - \pi$. Já o <u>termo</u> de variância (σ dz) do MGB NR é o mesmo (prova: Tavella, pasta 76). Se quisermos saber a diferença entre os dois valores esperados, uma álgebra elementar resulta em:**

$$E^Q[V(t)] = E^P[V(t)] - V(0)\, [e^{\alpha t} - e^{(\alpha - \pi)\, t}] = E^P[V(t)] - \Pi(t)$$

Tendência NR em Tempo Contínuo com Dividendos

- A demonstração anterior foi para o caso sem dividendos.
- Se o ativo V distribui dividendos a uma taxa contínua δ que são reinvestidos continuamente em V, em $\forall$ t se terá $e^{\delta t}$ ativos V em t. Como os retornos totais sob medida P e sob medida Q devem ser respectivamente μ e r, temos:

$$V(0) = e^{-\mu t}\, E^P[V(t)]\, e^{\delta t} \quad \text{e} \quad V(0) = e^{-r t}\, E^Q[V(t)]\, e^{\delta t}$$

  - Logo, dividindo um pelo outro e com uma álgebra elementar:

$$e^{-\mu t}\, E^P[V(t)] \;=\; e^{-r t}\, E^Q[V(t)]$$

$\Rightarrow$ $E^Q[V(t)] = e^{-\pi t}\, E^P[V(t)]$, que é o mesmo resultado obtido antes assumindo $\delta = 0$.

$\Rightarrow$ Logo, com $\pi > 0$, E^Q é igual a expectativa real E^P penalizada por um prêmio de risco π.

  - Além disso, se V(t) segue um MGB, $E^P[V(t)] = V(0)\, e^{\alpha t}$. Logo:

$$E^Q[V(t)] \;=\; V(0)\, e^{(\alpha - \pi) t} \;=\; V(0)\, e^{(r - \delta) t}$$

  - Como antes, a diferença entre os dois valores esperados é Π:

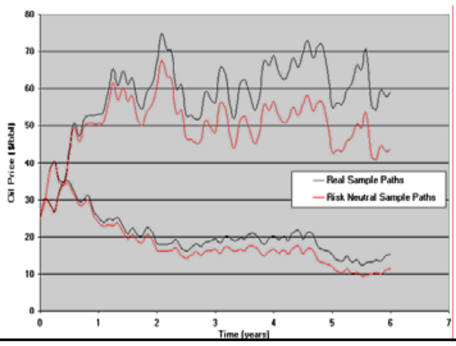
$$E^Q[V(t)] = E^P[V(t)] - V(0)\,[e^{\alpha t} - e^{(\alpha - \pi) t}] \;=\; E^P[V(t)] - \Pi(t)$$

Processos Estocásticos Reais x Neutros ao Risco

- Foi visto que subtraindo o prêmio de risco π da tendência real α, se obtém a tendência neutra ao risco $\alpha - \pi$ e foi mostrado na parte 1 que $\alpha - \pi \;=\; r - \delta$.
  - Assim, um MGB neutro ao risco (sob medida de martingale) é:

$$\frac{dP^{NR}}{P} \;=\; (r - \delta)\, dt \;+\; \sigma \;\; dz$$

- Processos neutros ao risco são usados em opções/derivativos
- Dois *sample-paths* dos processos reais e NR são mostrados ao lado (ver planilha simula-real-neutral.xls):



Processos Estocásticos Reais x Neutros ao Risco

- O processo (real) do MGB pode ser escrito da seguinte forma, lembrando que $\mu = \alpha + \delta$:

$$dP = \alpha\ P\ dt + \sigma\ P\ dz = (\mu - \delta)\ P\ dt + \sigma\ P\ dz \ \Rightarrow$$

$$dP = \mu\ P\ dt + \sigma\ P\ dz - \delta\ P\ dt$$

  - Interpretação: o ativo P cresce a uma taxa μ mas paga dividendos a uma taxa $\delta \Rightarrow$ P tem crescimento líquido = α.
    - A variação dP considera os dividendos $\Rightarrow$ preços ex-dividendos.
- Vimos que a medida Q é definida como aquela que faz o retorno *total* ser livre de risco. Assim, a equação acima para os preços sob medida NR fica:

$$dP_{NR} = r\ P\ dt + \sigma\ P\ dz - \delta\ P\ dt = (r - \delta)\ P\ dt + \sigma\ P\ dz$$

  - É mais comum na literatura ver dz^Q (mas aqui os dz são iguais) e não usar dP_{NR} e sim dP (mas aqui eles são diferentes).
    - Aqui os dz são $N(0; 1)\ \sqrt{dt}$. Os dP são iguais se $dz^Q = dz + \lambda\ dt$ (a seguir).

Mudança de Medida e Teorema de Girsanov

- Teorema de Girsanov (simplificado): um movimento Browniano dz com densidade f(t) pode ser transformado num novo mov. Browniano $dz^Q(t) = dz(t) + \lambda\ dt$ onde z^Q tem densidade g(t) f(t), sendo $g(t) = \exp[-\lambda\ z - ½\ \lambda^2\ t]$.
  - A escolha de λ será conveniente para gerar martingales desc.
  - $dV/V = \alpha\ dt + \sigma\ dz \Rightarrow dV/V = (\mu - \delta)\ dt + \sigma\ dz \Rightarrow$
    $dV/V = (\mu + r - r - \delta)\ dt + \sigma\ dz \Rightarrow$
    $dV/V = (r - \delta)\ dt + \sigma\ dz + (\mu - r)\ dt \Rightarrow$
    $dV/V = (r - \delta)\ dt + \sigma\ [dz + \{(\mu - r)/\sigma\}\ dt]$
  - Aplicando o teorema de Girsanov com $\lambda = (\mu - r)/\sigma$:

$$dV/V = (r - \delta)\ dt + \sigma\ dz^Q$$

    - Nesse caso dV é o incremento real e dz^Q inclui a translação $\lambda\ dt$ (que soma com $\sqrt{dt}\ N(0; 1)$) para obter o mesmo dV.
  - No teor. de Girsanov a escolha e a notação λ foram propositais já que é o *preço de mercado do risco* (ou *índice de Sharpe*).

Mudança de Medida e Intuição Econômica

- **A intuição econômica da mudança de medida é que os investidores em equilíbrio são indiferentes entre uma mudança na alocação do seu portfólio entre os ativos de risco e livre de risco desde que a redução no retorno seja acompanhada de redução de risco.**
  - **O índice de Sharpe aparece na transformação porque ele mede o retorno em equilíbrio demandado pelos investidores para absorver mais ou menos risco.**
- **O processo transformado $dV/V = (r - \delta)\,dt + \sigma\,dz^Q$ é útil pois o processo *descontado* $e^{-r\,t}\,[V\,e^{\delta\,t}]$ não tem drift (Q-martingale): $d\{e^{-r\,t}\,[V\,e^{\delta\,t}]\} = e^{-(r-\delta)\,t}\,\sigma\,V\,dz^Q$.**
  - **Isso pode ser provado facilmente com o Lema de Itô (ver parte 4) aplicado à função $F(V) = e^{-r\,t}\,[V\,e^{\delta\,t}]$.**

Mudança de Medida e Martingale

- **Note que sob medida P o processo $dF = e^{-(r-\delta)\,t}\,\sigma\,V\,dz^Q$ não é um martingale, já que $E^P[dF] = e^{-(r-\delta)\,t}\,\sigma\,V\,\lambda\,dt$.**
- **Mas sob medida Q o teorema de Girsanov diz que dz^Q é um movimento Browniano, i. é, sob Q, $dz^Q = N(0;\,1)\,\sqrt{dt}$. Assim, sob medida Q, $E^Q[dF] = 0$ e é um Q-martingale.**
  - **Assim, se fizermos $dz^Q = N(0;\,1)\,\sqrt{dt}$ estaremos no mundo da medida Q e o incremento dF será sob essa medida Q.**
  - **Por isso, se fizer $dz^Q = N(0;\,1)\,\sqrt{dt}$ será preferível usar também a notação dF^Q ou dF^{NR} para distinguir das variações reais dF.**
    - **Lembrar da diferença nos sample-paths dos MGBs real (P) e neutro ao risco (Q) no gráfico da planilha simula-real-neutral.xls.**
- **Aqui, mudança de medida P para Q significa mudar de retorno real total μ para retorno livre de risco r.**
  - **Assim, parece natural penalizar os retornos do ativo de risco por um prêmio de risco para poder descontar com a taxa r.**
  - **O teorema de Girsanov só faz isso ter um rigor matemático.**

Notas sobre Mudança de Medida

- Uma translação λ dt no processo estocástico corresponde a uma mudança na taxa de variação desse processo. No caso de ativos é uma mudança no retorno desse ativo.
  - A escolha conveniente de λ nos deu a medida adequada que tornou Q-martingales os processos descontados.
- O processo *descontado* do ativo é que é um martingale sob medida Q. O ativo em sí ***não*** é um Q-martingale.
- O fator de probabilidade $g(t) = \exp[- \lambda z - ½ \lambda^2 t]$ é um caso particular da *derivada de Radon-Nikodym* = dQ/dP, que dá a razão de mudança de medida.
- Para uma intuição matemática mais apurada ver, por ex., o livro "*Financial Calculus*" de Baxter & Rennie.
- Iremos usar mudança de medida principalmente em simulação de Monte Carlo para avaliar opções reais.

Movimento de Reversão à Média (MRM)

- O movimento de reversão à média é um processo de Markov, mas, ao contrário do MGB, o sentido e a intensidade da tendência dependem do preço corrente.
- O MRM aritmético, chamado *Ornstein-Uhlenbeck*, é:

$$dx = \eta (\bar{x} - x) dt + \sigma dz$$

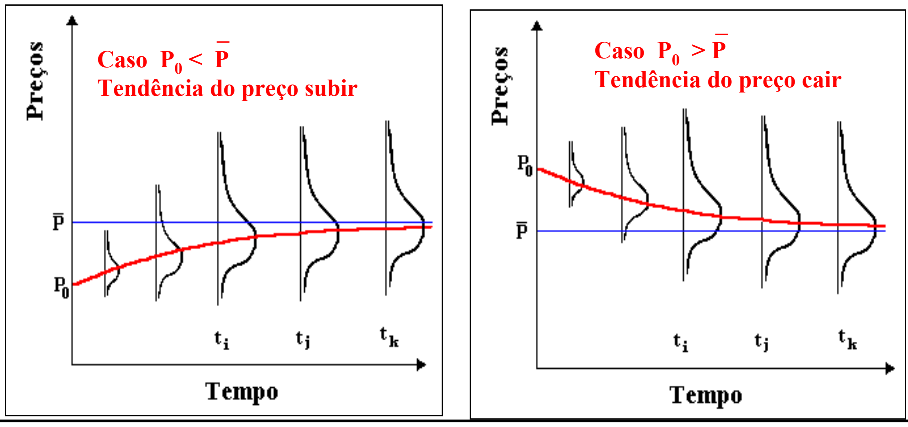
- Onde: η = velocidade de reversão e $\bar{x}$ = média de longo prazo (valor de equilíbrio)
- Na eq. acima, p/ evitar preços P < 0 é comum ter reversão em P usando a relação x = ln(P), pois x ~ normal; P ~ lognormal.
- Outros modelos de reversão à média são o MRM geométrico (Dixit & Pindyck) e o de Battacharya. Resp.:

$$\frac{dP}{P} = \eta (\bar{P} - P) dt + \sigma dz \quad \Big| \quad dP = \eta (\bar{P} - P) dt + \sigma P dz$$

- Ver também www.puc-rio.br/marco.ind/revers.html

Reversão à Média de Longo Prazo

- **No caso do processo de reversão à média, a tendência é o preço reverter para um <u>nível de equilíbrio do mercado</u>, $\overline{P}$, chamada de média de longo prazo. Analogia: mola.**
  - **Nesse caso a <u>variância cresce inicialmente e depois se estabiliza</u>**
  - **Figura: variâncias ~ iguais em t_i , t_j , t_k (i. é, ~ estáveis após t_i)**



Reversão à Média: Caso Simples

- **O caso mais simples é o do MRM aritmético, chamado *Ornstein-Uhlenbeck* (que pode gerar valores negativos):**

$$dx = \eta(\bar{x} - x)\,dt + \sigma\,dz$$

- **O método geral de obter os momentos probabilísticos de processos estocásticos é através da equação diferencial da densidade de probabilidade (eq. de Komolgorov).**
  - **DP (apêndice do cap. 3) usam a eq. diferencial de Komolgorov p/ mostrar a média e a variância do MRM aritmético, que são:**

$$E[x(T)] = x(0)\,e^{-\eta T} + \bar{x}\,(1 - e^{-\eta T})$$

$$Var[x(T)] = (1 - e^{-2\eta T}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\eta}$$

- **Se $t \rightarrow \infty \Rightarrow Var[x(t)] \rightarrow \sigma^2/2\eta$ e não para ∞ como no MGB. Logo, ao contrário do MGB, o MRM tem variância limitada.**

Reversão à Média e Microeconomia

- **Se os preços do petróleo (ou de outra commodity) estão "baixos" (abaixo do preço de equilíbrio de longo prazo):**
  - **A demanda tende a aumentar e a oferta tende a diminuir:**
    - **Empresas e pessoas tendem a consumirem mais derivados de petróleo por estarem "baratos" (ex: "carrões" nos EUA/anos 90);**
    - **Oferta tende a cair pois os projetos são postergados; manutenção em poços são adiados; OPEP tende a reduzir cotas de produção;**
    - **Campos marginais/maduros começam a apresentar prejuízo e podem ser fechados; companhias de petróleo pequenas fecham.**
  - **A depleção aumenta e a exploração tende a ser reduzida:**
    - **Apesar da atividade ser de longo prazo, firmas tendo menores receitas e tendo de ter lucro, reduzem o investimento em exploração**
- **Se os preços estão "altos" (2008), ocorre o inverso.**
- **A reversão, no entanto, é tipicamente <u>lenta</u>.**
  - **Se os preços do petróleo estão "altos", leva tempo até para desenvolver um campo já descoberto (~ 3 anos no mar).**

Mercados a Termo e Futuro

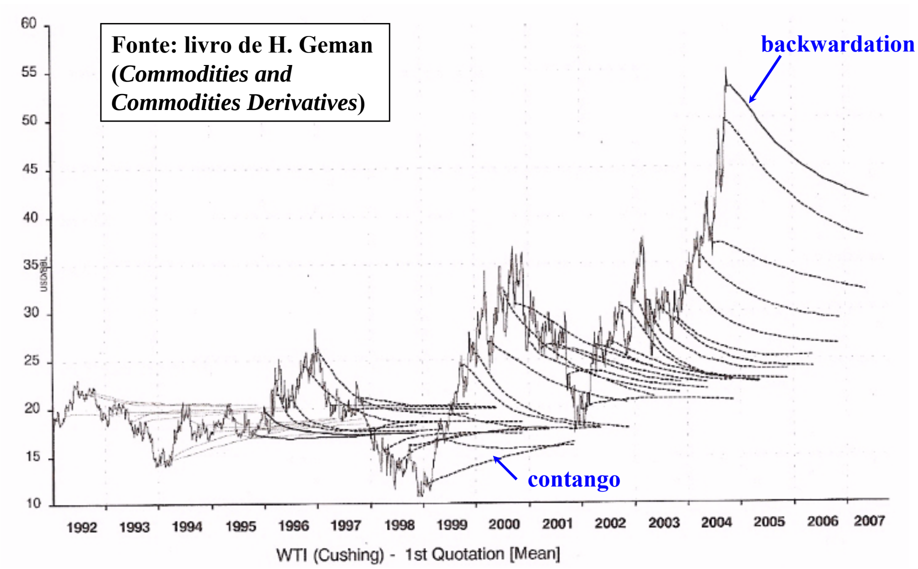
- **Contrato a termo ("*forward*") é quando duas partes combinam e fixam um preço P hoje (t = 0) para um ativo básico que será pago e entregue numa data futura T.**
- **Contrato futuro ("*futures*") em essência é um contrato a termo *negociado em bolsa* (mais liquidez, transparência e menor risco de crédito). Mas tem *chamada de margem*.**
  - **Margem é a garantia de que o contrato será honrado, a qual é depositada numa conta remunerada pela taxa de juros (r_f).**
    - **Todo dia é ajustada a posição em função das oscilações do mercado futuro ("*marcação a mercado*"): investidor coloca mais dinheiro se a oscilação for desfavorável ou resgata dinheiro se ela for favorável.**
  - **Podem ter outras diferenças tais como no custo de transação e impostos.**
- **Empiricamente os preços a termo e futuro são similares. Aqui eles serão considerados iguais. Mas em modelos com *taxa de juros estocástica* a diferença é relevante.**
  - **Se a taxa estocástica r_f for *positivamente* correlacionada com P então o preço futuro será *maior* que o preço a termo e vice-versa.**

Reversão à Média nos Preços do Óleo

- **Evidências empíricas e lógica microeconômica (forças de oferta x de demanda, etc.) indicam o processo estocástico do preço do óleo como tendo o *componente* de MRM.**
- **No entanto, testes econométricos só rejeitam o MGB para séries <u>muito</u> longas (ex.: Pindyck & Rubinfeld usaram série com 117 anos e rejeitaram o MGB).**
  - **Com <u>séries de 30 a 40 anos</u> não se consegue rejeitar o MGB!**
- **Preços do *mercado futuro* (estrutura a termo) é outro indicativo da presença do processo de reversão à média, pelo menos dentro do horizonte de até ~ dois anos.**
  - **Estruturas *backwardation* para preços "altos" e de *contango* para preços "baixos", são coerentes com a hipótese de MRM.**
  - **Volatilidade maior dos preços spot e menor p/ preços futuros ("*Samuelson effect*") é mais coerente com a reversão à média.**
- **"Filme" da <u>estrutura a termo do mercado futuro de petróleo</u>**

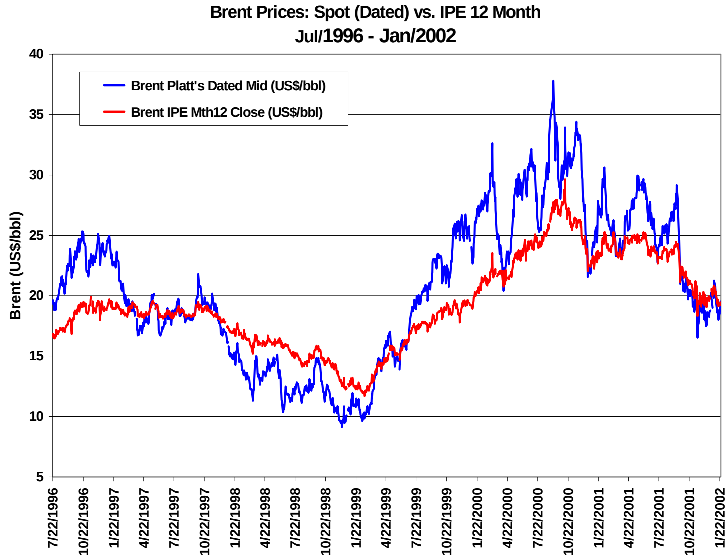
Preços do Petróleo no Mercado Futuro

- **A *estrutura à termo* dos preços do mercado futuro indica a existência de forças de reversão para um nível de equilíbrio.**



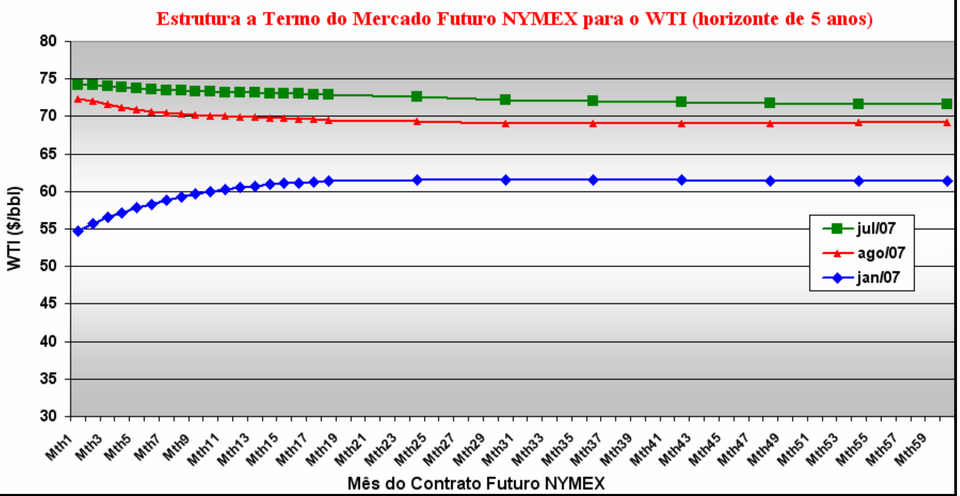
Petróleo: Preços Spot x Preço Futuro

- Note que os preços spot ("à vista") são mais voláteis, alcançam valores mais extremos que os preços do mercado futuro.



Preços do Petróleo no Mercado Futuro em 2007

- O gráfico mostra a estrutura a termo do mercado futuro (5 anos) de bolsa em janeiro, julho e agosto de 2007.
  - Aqui estamos mostrando o mercado do WTI de bolsa (Nymex), que em bolsa tem contratos mais longos que o Brent (Londres).



Preço do Mercado Futuro e Futuro Preço Spot

- A pergunta natural é: *será que o preço do petróleo de um contrato do mercado futuro* hoje (ex.: p/ entrega em t = 1 ano), *é uma boa previsão do futuro preço spot* (no ex., p/ daqui a 1 ano)? Isto é, será o preço futuro = E[P(t=1)]?
  - Se o *prêmio de risco* $\Pi > 0 \Rightarrow$ preço hoje do mercado futuro $\mathcal{F}_t$ p/ t é uma estimativa *conservadora* (i.é, *tendenciosa p/ baixo*) do valor esperado do futuro preço spot E[P(t)]. A diferença é o Π:

$$\mathcal{F}_t = E[P(t)] - \Pi(t)$$

  - A razão é simples: um comprador de um ativo de risco (ex.: 1 bbl de óleo) no mercado futuro está incorrendo no risco daquele ativo se desvalorizar na data de vencimento.
    - P/ o investidor aceitar esse risco, ele exige um prêmio (desconto em P).
  - Como vimos que subtrair um prêmio de risco de uma média é uma média neutra ao risco, $\mathcal{F}_t$ é a expectativa *neutra ao risco* do futuro (em t) preço spot desse ativo. Será mais formalizado.
- Ver: http://www.fenews.com/fen36/teach_notes/teaching_notes.htm

Mercado Futuro e Taxa de Conveniência

- O preço no mercado à termo (*forward*), que é igual ao do mercado futuro (assumindo r não-estocástico), $\mathcal{F}_t$ em relação ao preço corrente (*spot*) P dum ativo com taxa de dividendos (ou taxa de conveniência, se commodity) δ é:

$$\mathcal{F}_t = P\, e^{(r - \delta)\, t} \qquad (\Rightarrow \mathcal{F}_t \text{ é a expectativa NR de P})$$

- Antes de provar essa equação devemos notar que ela é útil para estimar a *taxa de conveniência* (*convenience yield*) do preço de uma commodity, a ser usada em OR: investimentos em petróleo, agri-business e mineração.
  - A taxa δ é um fluxo de benefícios de possuir estoque físico (em função do risco de escassez) e é líquido do custo de estocagem (Kaldor, 1939; Working, 1948, 1949; Brennan, 1958).
  - Podemos calcular taxas δ_t diferentes para cada contrato futuro $\mathcal{F}_t$. Em OR usamos o δ de contrato com t mais longo (+estável).
- É fácil ver que na expiração t os *preços convergem*: $P(t) = \mathcal{F}_t(t)$.
  - Caso contrário, nessa data t se faria arbitragem instantânea!

Relação entre Preços Futuros e Spot

- É fácil ver que se um ativo não tem dividendo ($\delta = 0$), então o preço forward (futuro) tem de ser $\mathcal{F}_t = e^{r\,t}\,P$.
  - Se $\mathcal{F}_t > e^{r\,t}\,P$, se poderia obter um ganho por *arbitragem* emprestando a uma taxa r um valor P, comprando o ativo por P e entrando num contrato futuro de valor $\mathcal{F}_t$. Total caixa = 0.
  - No vencimento, ele entrega o ativo em troca do pagamento $\mathcal{F}_t$ com o qual se paga o empréstimo ($e^{r\,t}\,P$), lucrando a diferença.
  - Se $\mathcal{F}_t < e^{r\,t}\,P$, se faria as operações inversas, com arbitragem.
- No caso com dividendo $\delta > 0$, vimos que para ter uma unidade do ativo no vencimento, em vez de comprar uma unidade do ativo em t = 0, basta comprar $e^{-\delta\,t}\,P$ e reinvestir todos os dividendos no ativo para ter P em t.
  - Assim, só precisa pegar emprestado (em t = 0) o valor $e^{-\delta\,t}\,P$. Na expiração ele pagará $e^{r\,t}\,(e^{-\delta\,t}\,P) = e^{(r-\delta)\,t}\,P$ e entregará seu ativo, recebendo $\mathcal{F}_t$. Logo, p/ não ter arbitragem temos $\mathcal{F}_t = e^{(r-\delta)\,t}\,P$.
- Futuros de divisas (ex.: dólar): juros externos faz papel de δ.

Notas Sobre a Taxa de Conveniência

- Embora a taxa de conveniência δ deva ser <u>em média</u> positiva para justificar a existência de estoques (já que existe um custo de estocagem), ela pode ser negativa:
  - Ela é negativa quando o custo de estocagem supera o seu benefício. Isso ocorreu, por ex., com o petróleo no ano de 1998.
  - Taxas de conveniência negativas <u>não</u> geram arbitragem (*mito*).
- A demonstração anterior de $\mathcal{F}_t = P\,e^{(r-\delta)\,t}$ *para o caso de commodities* (δ interpretado como taxa de conveniência) pode ser questionada, pois um especulador não teria o benefício advindo do estoque e não faria lucro sem risco.
  - O livro do McDonald é um dos poucos que chamam atenção para isso e coloca um *range de não-arbitragem* no caso de commodities:

    $P\,e^{(r-\delta)\,t} \leq \mathcal{F}_t \leq P\,e^{(r+c)\,t}$ onde c = custo de estocagem e $\delta = \delta_{bruto} - c$
  - Mas pode-se argumentar que existem empresas de petróleo no mercado que podem usufruir de δ e fazer esse range ser + estreito.
  - A maioria dos livros não consideram esse range, só $\mathcal{F}_t = P\,e^{(r-\delta)\,t}$.

Qual o Melhor Modelo Estocástico?

- **Um <u>razoável</u> mapeamento probabilístico ao longo do tempo (processo estocástico), mesmo não sendo perfeito, é melhor do que nenhum mapeamento.**
  - **Erro com a visão determinística é, em geral, bem maior.**
- **O modelo mais simples (matematicamente) e mais usado é o Movimento Geométrico Browniano (MGB)**
  - **A rigor o MGB é um ótimo processo para preços de ações, ouro, índice Ibovespa, etc. (ativos financeiros em geral), mas também para *demanda* de novos produtos, terrenos.**
- **O modelo de reversão à média é considerado o mais lógico para commodities e para taxa de juros.**
  - **No entanto, o processo <u>puro</u> de reversão para um nível fixo é demasiado "previsível" e pode ser pior que o MGB.**
  - **Por isso é mais realista *combinar* o MRM com um MGB para o nível de equilíbrio ou com <u>processo de saltos</u>.**

Processos Estocásticos para Preços do Óleo

- **Existem vários modelos de processos estocásticos para preços do óleo na literatura de opções reais. Eu classifico eles em três classes**

Type of Stochastic Model	Name of the Model	Main Reference
Unpredictable Model	Geometric Brownian Motion (GBM)	Paddock, Siegel & Smith (80's)
Predictable Model	Pure Mean-Reversion Model (MRM)	Schwartz (1997, model 1)
More Realistic Models	Two and Three Factors Model	Gibson & Schwartz (1990), and Schwartz (models 2 and 3)
	Reversion to Uncertain Long-Run Level	Pindyck (1999) and Baker, Mayfield & Parsons (1998)
	Mean-Reversion with Jumps	Dias & Rocha (1998)

- **As propriedades adequadas do Movimento Geométrico Browniano (poucos parâmetros para estimar, homogeneidade do ativo básico e da opção) é um grande incentivo prático para seu uso.**
  - **Pindyck (1999) escreveu: "*é improvável que a premissa do MGB leve a erros significativos na regra ótima de investimento*"**

Simplicidade do Mov. Geométrico Browniano

- O uso do MGB em modelos de opções é mais simples por ter menos parâmetros para estimar e por causa da homogeneidade da equação diferencial.
  - Temos de estimar somente os parâmetros r, δ e σ.
  - Na rever. à média temos de estimar ao menos r, σ, μ, η e $\bar{P}$
- A homogeneidade ocorre tanto na equação do valor da opção como na própria equação original do MGB:
  - Ex.: Se o preço P segue um MGB e o valor do projeto V é proporcional a P (isto é, V = k P), então V segue também um MGB e com os mesmos parâmetros do MGB de P:
    - $dP = \alpha P\ dt + \sigma P\ dz$ e $V = k\ P \Rightarrow k\ dP = \alpha\ k\ P\ dt + \sigma\ k\ P\ dz \Rightarrow$
    - $d(k\ P) = \alpha\ (k\ P)\ dt + \sigma\ (k\ P)\ dz \Rightarrow dV = \alpha V\ dt + \sigma V\ dz$
    - Uma demonstração usando o Lema de Itô tem no website.
- A homogeneidade da opção será vista depois. Essa *não* ocorre p/ a reversão à média (distr. de retornos depende de P em t = 0)

Processos de Saltos de Poisson

- É um *processo de Markov* que conta o número de eventos aleatórios independentes ao longo do tempo, N(t).
  - É um *processo de contagem* particular, com incrementos independentes e estacionários (só depende de Δt), com N(0) = 0 e com o número n de eventos em Δt tendo uma *distribuição de Poisson*: $\text{Prob}\{N(t + \Delta t) - N(t) = n\} = \exp(-\lambda\ \Delta t) \cdot (\lambda\ \Delta t)^n / n!$;
  - $E[N(\Delta t)] = \lambda\ \Delta t$; λ é a freqüência de ocorrência de um evento;
  - Se o intervalo Δt é pequeno, $\text{Prob}\{n \geq 2\} \cong 0$ (ou $o(\Delta t)$);
  - O tempo entre ocorrências de eventos tem *distribuição exponencial* com média $1/\lambda$.
  - Processo usado para modelar a ocorrência de eventos raros, tais como a ocorrência de um sinistro (indústria de seguros), a entrada de um concorrente (visão exógena), uma crise, etc.
- Em finanças/opções reais ele é mais usado combinado com um *processo de difusão* (*jump-diffusion* ou *Poisson-Gaussian*).

Processos de Poisson: Tipos

- O caso anterior é dum processo de Poisson *homogêneo*.
- Um *processo não-homogêneo de Poisson* não requer a premissa de incrementos estacionários e em vez de λ constante, a freqüência de saltos é uma função do tempo.
- *Processo composto de Poisson* (muito usado):
  - Seja Φ_i uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d.). Essas distribuições de probabilidades idênticas aqui podem ser interpretadas como *distribuições de tamanho do salto* ("jump-size distributions").
  - Seja N(t) um processo de Poisson independente de Φ_i. O seguinte processo é chamado de Processo composto de Poisson:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \Phi_j$$

- A soma de dois processos compostos de Poisson independentes (ex.: jumps-up + down) é um outro processo de Poisson composto.

Exemplo de Saltos de Poisson: Salário

- Seja uma trabalhadora que irá trabalhar 40 anos. Seu salário inicial é S_0 = R$ 1.000,00 por mês. Ao longo de sua vida ela terá reajustes que ocorrem aleatoriamente com freqüência de Poisson $\lambda = 1$ por ano.
  - O percentual de reajuste (salto percentual no salário) é uma variável aleatória ϕ com a seguinte distribuição discreta:

Tamanho do Reajuste (jump-size) ϕ =

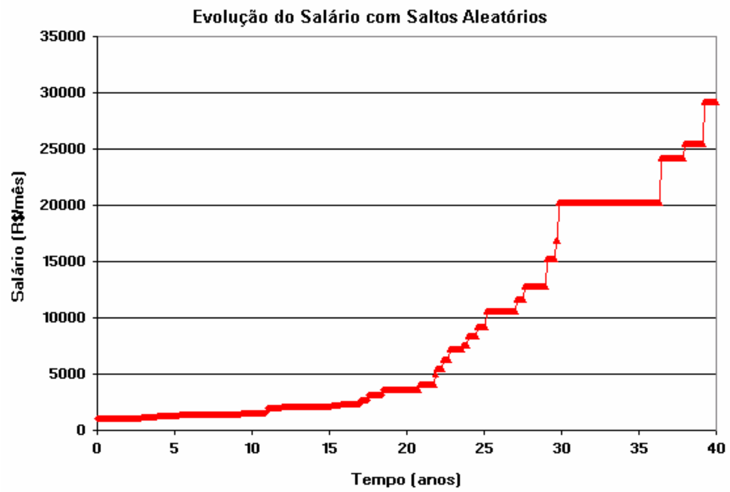
jump-size	probabil.
0	10%
5%	25%
10%	30%
15%	25%
20%	10%

- O salário ao longo do tempo S(t) pode ser descrito pela equação diferencial $dS = S\, dq$, dado S_0, onde:

$$dq = \begin{cases} 0 \text{ com probabilidade } 1 - \lambda\, dt \\ \phi \text{ com probabilidade } \lambda\, dt \end{cases}$$

Simulação do Processo Puro de Saltos

- A figura mostra uma possível *amostra de caminho* (*sample-path*) do processo de Poisson composto puro (não-combinado com difusão) do exemplo. Ver planilha.



Processos Mistos de Difusão com Saltos

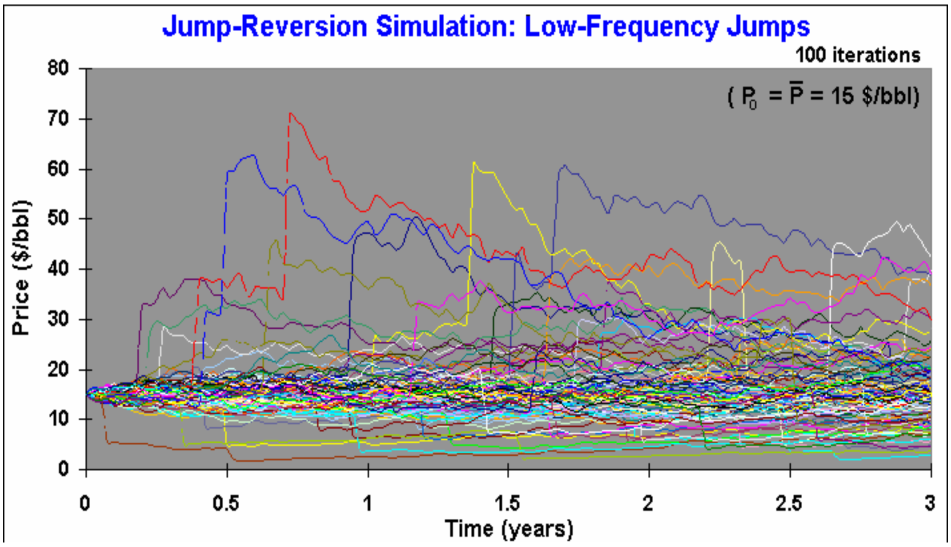
- Um processo misto de difusão com saltos de Poisson:
  - $dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz + V\, dq$
  - Com dz (Wiener) e dq (Poisson composto) <u>independentes</u>; e

$$dq = \begin{cases} 0 \text{ com probabilidade } 1 - \lambda\, dt \\ \phi \text{ com probabilidade } \lambda\, dt \end{cases}$$

- Merton (1976) justificou o modelo para ações V:
  - Em caso de notícias normais, V segue um processo de difusão (MGB em Merton), mas em caso de notícias anormais (raras, mas de muito impacto) ocorre o evento de Poisson (salto em V)
  - Para opções européias sob um processo de MGB + Poisson em que o tamanho dos saltos tem distribuição lognormal, Merton (1976) encontrou uma solução analítica.
- Em vez do MGB, pode-se usar um processo de *reversão à média*. Ex.: modelos para taxa de juros e para câmbio
  - Reversão + jumps em OR: Dias & Rocha (1998) os pioneiros.

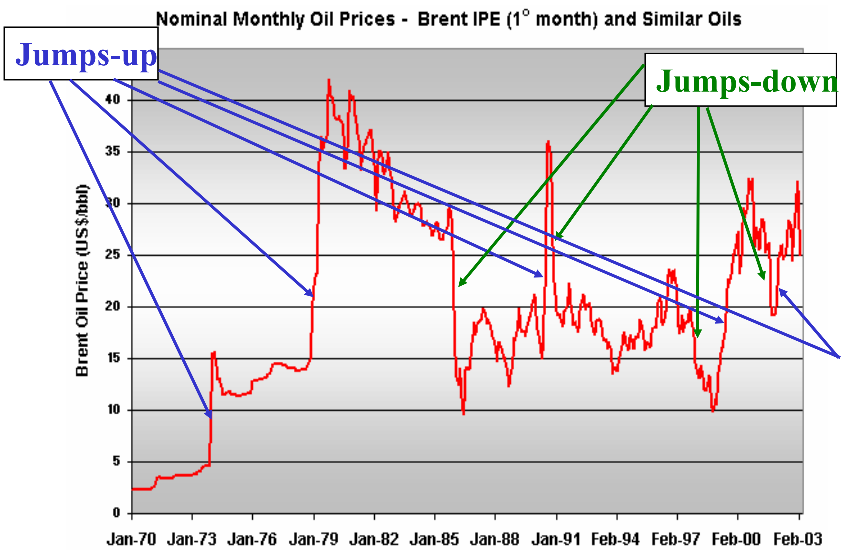
Processo de Jump-Reversão: os *Sample Paths*

- **Um outro modelo de reversão + jumps foi usado no financiamento de Marlim. Ver www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html**
  - **Na simulação de preços do petróleo, a freqüência é de 1 salto a cada 5 a.**



Motivação para Processos de Saltos de Poisson

- **Vemos saltos (jumps) nos preços do óleo em ambas direções, dependendo do tipo de notícia anormal: *jumps-up* em 1973/4, 1978/9, 1990, 1999, 2002; e *jumps-down* em 1986, 1991, 1997, e 2001**



Processo de Poisson Compensado

- **Um modelo com vantagens práticas usado algumas vezes (Merton, 1976; Dias & Rocha, 1998), é o *processo de Poisson compensado*.**
  - **A "compensação" é a subtração de $\lambda\ k\ dt$ do processo misto de difusão com saltos, onde $k = E[\phi]$, o valor esperado do salto.**
- **Por exemplo, no caso de Merton (1976), temos um MGB como processo de difusão de um ativo V que sofre saltos em caso de notícias anormais:**

$$dV = (\alpha - \lambda\ k)\ V\ dt + \sigma\ V\ dz + V\ dq$$

- **Uma das idéias da compensação é preservar a interpretação de α como a taxa de crescimento esperada do ativo (apreciação ou ganho de capital esperado), pois:**

$$E[dV/V] = (\alpha - \lambda\ k)\ dt + \sigma\ E[dz] + E[dq] \Rightarrow$$
$$E[dV/V] = (\alpha - \lambda\ k)\ dt + 0 + \lambda\ k\ dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E[dV/V] = \alpha\ dt$$

Processo de Poisson Compensado

- **O processo de Poisson compensado permite usar a medida equiv. de martingale por não influir no retorno.**
  - **Parte do princípio simples: Se um processo estocástico não é um martingale, então subtraindo uma apropriada "média" ele pode ser tranformado em martingale (ex.: Neftci, 1996, p.115).**
  - **Um processo de Poisson N_t é um processo de contagem e, logo, aumenta com o tempo e não pode ser um martingale. Mas um processo de Poisson compensado ($N^*_t = N_t - \lambda\ t$) é um martingale (Neftci, 1996, p.116; Neftci, 2000, p.179).**
  - **No caso do processo de Poisson composto (ex.: combinado com processo de difusão), a média de dq é $E[dq] = E[\phi]\ \lambda\ dt$. Assim:**

$$dP = [a(P, t) - \lambda\ k\ P]\ dt + b(P, t)\ dz + P\ dq \quad , \text{com } k = E[\phi]$$

  - **No caso de Merton (1976), $a(P, t) = \alpha\ P$ (difusão é MGB); e em Dias & Rocha (1998): $a(P, t) = \eta\ (\bar{P} - P)\ P$ (difusão é MRM).**
- **Eu tenho usado modelo com *saltos simétricos* (tamanho dos saltos com média igual a zero): aí *não precisa compensar*.**

Processos de Difusão com Saltos: Prós & Contras

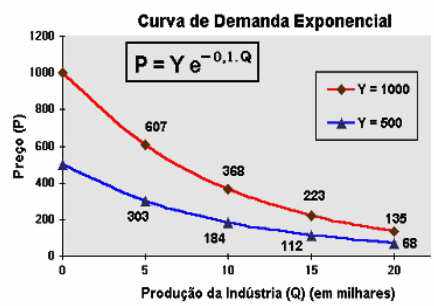
- **A vantagem do processo de difusão com saltos é que descreve melhor a realidade de dois pontos de vista:**
  - **Estatístico: explica fenômenos empíricos encontrados em séries temporais tais como assimetria de retornos (*skewness*) e maior probabilidade de eventos extremos (distribuição c/ *fatter tails*).**
  - **Econômico (lógica microeconômica): especialmente no caso de reversão à média. Os saltos evitam o excesso de previsibilidade.**
- **As duas maiores desvantagens são:**
  - **Existindo saltos, em teoria não é possível ter um portfólio com retorno livre de risco, a menos que o risco dos saltos tenha prêmio de risco igual a zero (condiç. de equilíbrio *conveniente*).**
    - **Foi o que Merton (1976) assumiu. O ponto é se é razoável dizer que os saltos num certo modelo têm correlação zero com a economia.**
  - **Aumenta a quantidade de parâmetros a serem estimados no nosso modelo, inclusive da distribuição de tamanhos de salto.**
    - **Como saltos são eventos raros, os dados também são raros …**

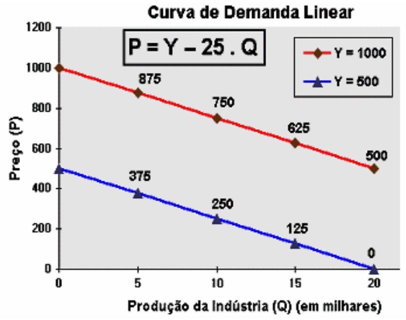
Processos Mais Gerais: Processos de Lévy

- **Processo de Lévy é um processo estocástico com incrementos estacionários e independentes, e caminhos *contínuos* em probabilidade. Em geral é *não-gaussiano*.**
  - **Uso em finanças é recente. Os processos de Wiener (MGB, etc.) e de Poisson são casos particulares do processo de Lévy.**
  - **A combinação de processos de Poisson com o movimento Browniano é relacionado ao processo de Lévy:**
    - **Karlin & Taylor ("A Second Course in Stochastic Processes", p.432) diz: "*Um processo geral de Lévy pode ser representado como a soma de um movimento Browniano, uma translação uniforme e um limite (no caso, uma integral) de uma família de processos compostos de Poisson de um parâmetro, onde todos os processos que contribuem são mutuamente independentes*".**
  - **Nos processos de Lévy os "saltos" são chamados de "*Lévy flights*".**
- **Processos de Lévy podem ter mais de uma medida equivalente de martingale implicando em *mercado incompleto* (há divergências).**

Incerteza na Curva de Demanda

- **Suponha uma curva de demanda de um produto qualquer. Ela relaciona preços com a demanda. Preço mais baixo significa maior demanda e preços altos reduzem a demanda pelo produto.**
- **Ver os gráficos das curvas de demanda exponencial e linear: [planilha]**
- **Existe incerteza na curva de demanda, ou seja, a curva de demanda futura pode estar mais elevada refletindo uma economia aquecida ou pode estar mais baixa refletindo um desaquecimento do consumo**
- **Existem várias maneiras de modelar a incerteza na curva de demanda. Ex.: o valor do fator Y nas curvas abaixo é estocástico.**



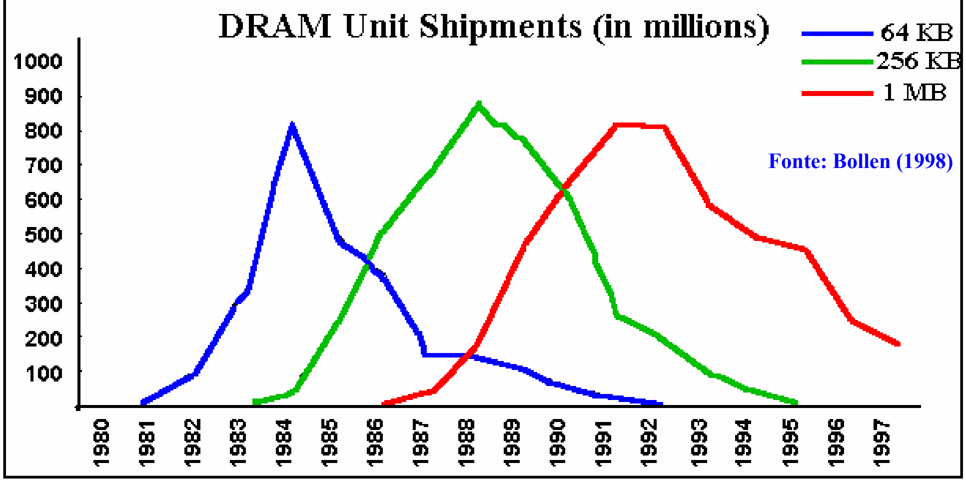


Processos Estocásticos e Sazonalidade

- **Sazonalidade ocorre com algumas commodities tais como gás natural, gasolina (EUA), eletricidade, etc.**
  - **Verão no Brasil significa aumento na demanda de eletricidade; verão nos EUA significa aumento na demanda de gasolina; etc.**
- **Sazonalidade pode ser incorporada nos processos estocásticos usuais de preços (ou demanda) alterando o termo da tendência para incluir esse efeito**
  - **Ex.: Uma função *periódica* m_t para um processo de reversão à média de preços duma commodity (P). Fazendo p = lnP:**
    - **$dp = \eta\,(p - m_t) + \sigma\, dz$; onde m_t é uma função cíclica em que p reverte (ex.: senóide com o máximo no pico esperado da estação).**
  - **Dornier and Queruel (2000) modelaram a temperatura (T) de Chicago como: $dT = \eta\,(T - \theta_t)\,dt + d\theta_t + \sigma\, dz$**
    - **θ_t é a temperatura média (no qual há reversão), uma função do tempo incluindo a sazonalidade e uma tendência linear devido ao *global warming* (aquecimento global), por ex: $\theta_t = a + b\,\sin(\omega\, t) + c\, t$.**

Produtos com Ciclo de Vida

- Produtos com ciclo de vida tais como os chips de memória DRAM tem curva de demanda crescente seguido de curva de demanda decrescente. São modelados com um ***processo estocástico com mudança de regime***.

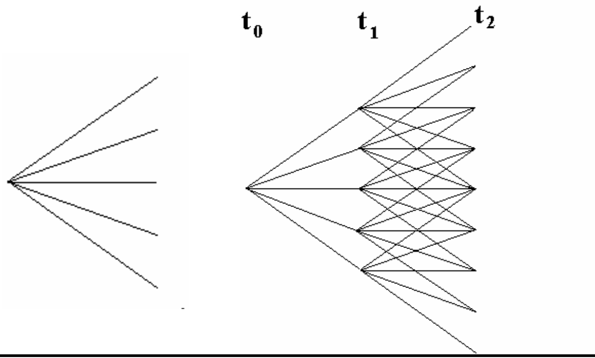


Modelo para Produtos com Ciclo de Vida

- Para modelar a incerteza na demanda dado que existe mudança de regime (demanda crescente seguida de decrescente), se usa dois movimentos Brownianos, um com tendência α_c positiva e outro com tendência α_d negativa.
- O instante de troca de regime (crescente para decrescente) é incerto, mas com probabilidade crescente. Exs.:
  - Colocar a probabilidade de mudança como alguma função do parâmetro da demanda θ ou como função das vendas acumuladas
  - Bollen (1998) usa *distribuição acumulada normal do tempo* Φ desde t_0 para a probabilidade de mudança de regime. Ex.: Para uma distribuição Φ com mudança de regime esperada de 5 anos e com desvio-padrão de 1 ano, a demanda é decrescente no ano 4 com 2,28 % de chances; no ano 6 com 50% de chances; e no ano 8 de 97,72 %.
  - Os objetivos são: (a) calcular o valor da firma que tem as opções de expansão e de contração de acordo com o nível de demanda; (b) escolher a capacidade inicial ótima.
    - Ele calcula para o caso de monopólio, mas a extensão para duopólio (ou oligopólio) não é difícil (especifica equilíbrio, veremos no 2º sem.)

Árvore Pentanomial

- Bollen usa uma estrutura ***pentanomial*** para modelar a incerteza, sendo os dois ramos superiores representando o crescimento e os dois de cima representando o decaimento da demanda.
- O quinto ramo (central) é conveniente para a árvore recombinar. Com 4 ramos haveria problemas computacionais já que a árvore não recombina. A árvore de 5 ramos permite grande economia:
  - Ex.: para uma árvore com 500 passos-tempo, com 5 ramos em vez de 4 ramos se obtém uma redução de 99% na quantidade futura de nós.



Número de nós: 1; 5; 9; …4t + 1, para t = 0; 1; 2...

Estimativa de Parâmetros: Regressão

- **Para usar processos estocásticos temos de estimar os seus parâmetros, tais como a volatilidade e outros.**
  - **Embora econometria não seja o foco do curso, veremos o método mais simples que é a *regressão linear* p/ MGB e MRM.**
    - **Tem outros métodos. Não discutiremos detalhes do tipo autocorrelação, etc.**
- **A regressão *ótima* (a que minimiza o MSE) de Y em relação a X é a *função expectativa condicional* E[Y | X]:**
  - **A medida mais usada para medir a qualidade de um previsor g(X) é o *erro quadrático médio* (MSE): $MSE(g) = E[Y - g(X)]^2$.**
    - **A função g*(X) que minimiza o MSE é a *expectativa condicional* E[Y|X], que é em geral não-linear, mas é linear no caso de X e Y ~ dist. Normal.**
  - **Na regressão: $Y = g(X) + \varepsilon$, onde $E[\varepsilon] = 0$, se $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$, então a *distribuição condicional* é Normal com *média linear* em X: $f_{Y|X} \sim N(m_Y + \rho\, \sigma_Y\, (x_i - m_X)/\sigma_X, \sigma_Y^2\,(1 - \rho^2))$**
    - **Isto é, a função expectativa condicional $g(x_i) = E[Y|X = x_i]$ é linear em X.**
  - **<u>Trabalhar com distr. Normais faz com que a regressão ótima seja linear</u>. Por isso vamos trabalhar com logaritmo dos preços.**

Estimativa de Parâmetros: MGB

- Seja P_t o preço em t. Para trabalhar com dist. normais, o 1º passo é pegar os dados e calcular os logaritmos $\ln(P_t)$.
- Se os preços seguem um movimento geométrico Browniano (α, σ), foi dito antes que isso implica na seguinte eq. discreta:
  - $\ln(P_t) = (\alpha - \sigma^2/2)\, t + \ln(P_0) + \sigma\, N(0, 1)\, t^{½}$. Assim, temos a equação:

  $\ln(P_t) = a + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t$ ou $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + \varepsilon_t$

  - seqüência i.i.d. $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma^2/N)$; para dados *diários*, N = 252
    - Corrigimos com N para obter parâmetros anuais (para dados *mensais*, N = 12)
  - $\text{Var}[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] = \text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2/N \Rightarrow \sigma^2 = N\, \text{Var}[\ln(P_t/P_{t-1})]$
  - $\alpha = N\, \{\text{Média}[\ln(P_t/P_{t-1})] + 0{,}5\, \sigma^2/N\}$
  - Com dados diários, para calcular a volatilidade no MGB, basta calcular a variância de $\ln(P_t/P_{t-1})$, multiplicar por 252 (para passar para variância anual) e extrair a raiz quadrada.
- O MGB pode ser testado, por ex., checando a hipótese do coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ da equação discreta ser unitário.
    - É chamado de *teste da raiz unitária de Dickey-Fuller.*

Estimativa em Reversão à Média

- Na reversão à média, o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ na equação anterior será menor que um. Seja a equação mais geral:

$$\ln(P_t) = a + b\, \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t$$

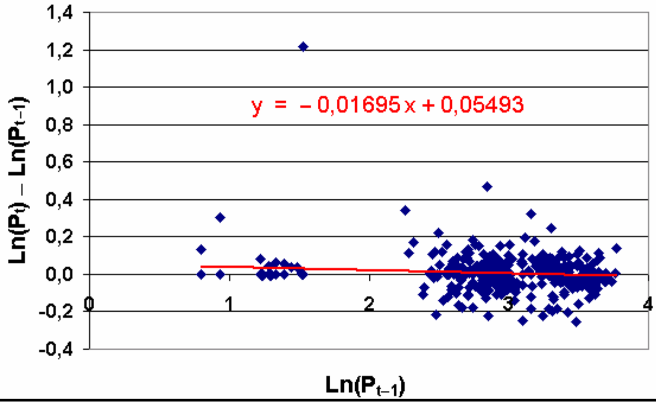
  - Deixaremos os dados dizerem sobre b em vez de estipular b = 1
  - Se 0 < b < 1, teremos indícios de reversão à média
- Faça a regressão $[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ versus $\ln(P_{t-1})$:

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + (b - 1)\, \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t$$

- As seguintes fórmulas permitem estimar um processo de reversão para o logaritmo dos preços (Dixit & Pindyck, p.77, corrigido):
  - $\eta = -\ln(b)\, .\, N$ e $\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{N} \sqrt{\dfrac{2 \ln b}{b^2 - 1}}$
- O nível de reversão já em termos de preço de equilíbrio é dado pela equação (prova: Sheldon Ross, 1999, p.171):
  - $\bar{P} = \exp[(a + 0{,}5\, \sigma^2/N) / (1 - b)]$

Regressão Para Preços do Petróleo

- Fazendo a regressão $[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ versus $\ln(P_{t-1})$ para os <u>preços do petróleo</u> Brent (de jan/1970 a out/2004), se a inclinação da reta for ~ zero, não se pode rejeitar a hipótese de MGB. Se a inclinação for negativa, é indício de MRM.
  - A figura mostra a inclinação ≅ zero (MGB não é rejeitado).
  - O *teste da raiz unitária de Dickey-Fuller* tb. não rejeita o MGB.



Critérios para Escolha do Estimador

- Pindyck (1999) e Dixit & Pindyck (1994) recomendam uma série longa de preços para estimar parâmetros de tendência.
  - Com apenas 30 a 40 anos não se rejeita a hipótese de MGB.
  - Com série longa se observa uma reversão lenta (H = 5 anos).
  - Tem muita gente estimando parâmetros de reversão com série temporal de apenas dois a 5 anos: estimadores não-confiáveis.
- O livro de econometria de Campbell & Lo & MacKinlay (1997, p.364) demonstra isso. O melhor estimador é o estimador de menor variância e critério depende do parâmetro a estimar:
  - Drift: quantidade de dados não resolve. O melhor estimador é aquele baseado no <u>maior intervalo de tempo</u>. $\text{Var}(\widehat{\text{drift}}) \sim \sigma^2/T$
    - Usar séries longas (duas ou mais décadas) para estimar tendência.
  - Volatilidade: aqui a <u>quantidade de dados é o que resolve</u> e não o intervalo tempo (ao contrário do drift). $\text{Var}(\hat{\sigma}) \sim 2\,\sigma^4/n$.
    - Usar dados diários para estimar volatilidade.

Incerteza em Funções Côncavas e Convexas

- O efeito da incerteza em funções depende se a função é linear, côncava ou convexa. Esse efeito é conhecido por *desigualdade de Jensen* e quantificado com o *lema de Itô*.
  - Desigualdade de Jensen: se x é variável aleatória (v.a.) e f(x) é uma função (estritamente) *convexa* de x, então:

$$E[f(x)] > f(E[x])$$

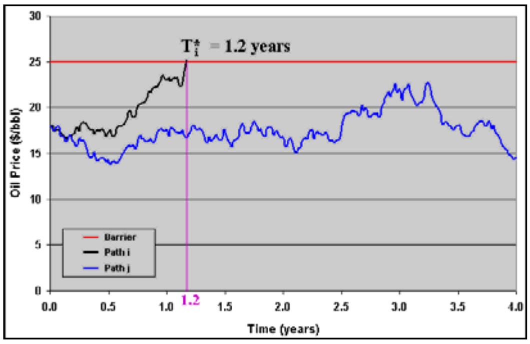
    - Logo, se o valor esperado de x permanece o mesmo, mas sua variância aumenta, então E[f(x)] aumenta. Ex.: opção.
    - Se g(X) é função (estritamente) *côncava* de x, e x for v.a., basta inverter a desigualdade: $E[g(x)] < g(E[x])$
    - Se h(x) é função *linear* da v.a. x, então: $E[h(x)] = h(E[x])$
- Ex. (DP, p.49): r é a taxa de desconto e a perpetuidade f(r) de $1 é 1/r. Se r = 10% ⇒ 1/r = $10. Se r é v.a. com distrib. discreta {r = 5% com 50% chances; r = 15% com 50% chances}, i. é, E[r] = 10%, o E[.] de f(r) é maior que $10: E[f(r)] = 50% (1/0,05) + 50% (1/0,15) = 13,33 > 10

Barreiras Absorventes e Refletoras

- Um processo estocástico X(t) pode atingir um nível superior ou inferior onde algo ocorre com o processo.
  - Esse nível é chamado de barreira, que pode ser *absorvente*, *refletora* ou *elástica* (parcialmente absorvente ou refletora).
- Uma barreira é absorvente quando o processo estocástico termina assim que ele toca nessa barreira.
  - Ex.: processo estocástico do valor de um projeto V(t) toca num nível superior V* (gatilho) onde a opção é exercida. O processo de V(t) deixa de ter interesse e termina para efeitos práticos.
  - O valor de uma firma em indústria declinante atinge um valor inferior V** em que a firma entra em falência (abandona).
- Uma barreira é refletora quando o processo estocástico é refletido (direção oposta) após tocar essa barreira.
  - Será muito usado em jogos de opções: o preço de uma indústria não consegue superar P*, pois as firmas inundam o mercado de produtos (exercem opções) quando P atinge P*.

Tempo de Toque de um Processo Estocástico

- "*First hitting time*" ou "*first passage time*" ou "*first exit time*" denotam o primeiro instante em que um processo estocástico toca (ou cruza) um certo valor (ex.: o gatilho)



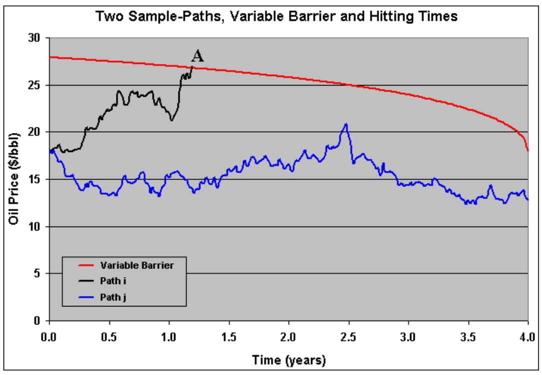
Ver planilha simula-hit_time.xls.

- A definição de *first hitting time* $T^*(V = b) = T^*_b$ para um processo estocástico V(t) alcançar (ou cruzar) a barreira b, assumindo que o processo inicia com $V(t = 0) < b$, é:

$T_b^* = \inf \{ t \geq 0 \, ; V(t) \geq b \}$; onde o ínfimo de um conjunto vazio é infinito

First Hitting Time: Aplicações

- Tem inúmeras aplicações em opções e jogos de opções
  - Planejamento: se um projeto não está "deep-in-the-money", qual o tempo esperado para ele atingir a curva de gatilhos?
  - Cálculo da opção: exerce a opção em t* (t que atinge o gatilho), o valor da opção F(0) é o payoff descontado por E[exp(− r t*)].
  - No primeiro caso se considera o processo real e no segundo caso o processo estocástico neutro ao risco.



Valor Esperado do Tempo de Toque E[t*]

- O valor de E[t*] depende da tendência do processo estocástico. Ex.: p/ uma barreira superior P*, o processo NR demora mais do que o processo real para atingir P*.
- O cálculo do valor esperado desse tempo de toque, E[t*], é relevante p/ *planejamento de portfólio* (processo é *real*):
  - Quando é esperado o exercício da OR de investir num projeto?
- Se o ativo básico V segue um MGB com drift α e valor inicial V_0, então E[t*] até uma barreira superior b fixa é:

$$E[\,t^*(V = b)\,] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2} \ln\left(\dfrac{b}{V_0}\right) & \text{se } \alpha > \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \infty & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2}\sigma^2 \end{cases} \quad (\text{com } b > V_0)$$

  - Mais detalhes: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html
  - Ver planilha simula-hit_time.xls que inclui fórmulas (MGB) p/ densidade de probabilidade de t*, probabilidade acumulada de atingir b e probabilidade de eventual toque p/ 1 e 2 barreiras.

Valor Esperado do Fator de Desconto

- Mas, para *resolver* problemas de OR, veremos que é bem mais útil saber o *fator de desconto esperado* E[exp(- r t*)]
  - Saber E[t*] não é suficiente: E[exp(- r t*)] > exp(- r E[t*]).
  - Note que não há problema em ter caminhos com $t^* = \infty$, pois $\exp(- r\, \infty) = 0$. Logo, $E[\exp(- r\, t^*)] \in [0, 1]$, é sempre finito.
- Pode-se provar a importante fórmula p/ X seguindo MGB:

$$E\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X}{X^*}\right)^{\beta_1} \qquad \text{onde } X^* \text{ é o gatilho e } X < X^*$$

- Onde β_1 é a raiz *positiva* da eq. quadrática p/ o caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR $(r - \delta)$ e taxa de desconto livre de risco r: $\beta_1 = ½ - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - ½]^2 + 2\, r/\sigma^2}$
- Na parte 4 iremos ver os métodos do *contingent claims* (ativos contingentes) e da *programação dinâmica* para obter a equação diferencial do valor da opção e a equação quadrática característica, que gera duas raízes, β_1 e β_2.

Valor Esperado do Fator de Desconto

- **No caso de termos uma barreira <u>inferior</u> V** < V (ex.: V** é um gatilho para exercer uma opção de abandono ou de parada temporária), a equação fica:**

$$E\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X}{X^{**}}\right)^{\beta_2}$$ **onde X** é o gatilho e X > X****

- **Onde β_2 é a raiz *negativa* da eq. quadrática do caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR $(r - \delta)$ e taxa de desconto livre de risco r:** $\beta_2 = ½ - (r - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,r/\sigma^2}$

- **No caso de usar o método da *programação dinâmica* em que se usa uma tendência *real* α e taxa de desconto exógena (ajustada ao risco?) ρ, i. é, se quer $E[\exp(- \rho\, t^*)]$, só muda o parâmetro beta. No caso de uma *barreira <u>superior</u>*, o β_1 fica:**

$$\beta_1 = ½ - \alpha/\sigma^2 + \sqrt{[\alpha/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,\rho/\sigma^2}$$

- **Prova: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html#proof**

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Exemplo: Movim. Aritmético Browniano

- Considere a seguinte versão discreta de um movimento aritmético Browniano para V:

$$\Delta V = a\,\Delta t + b\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

Sendo: valor esperado (ou média) de $\Delta V = V_t - V_0 = a\,\Delta t$

variância de $\Delta V = b^2\,\Delta t$

- O caixa de uma firma tem hoje \$50, tendência de subir \$20/ano e um desvio padrão anual (b) de b = \$30/ano. Qual o valor esperado e o desvio padrão do caixa da firma daqui a 1 ano, se o caixa segue o processo acima?
  - Daqui a 1 ano a média será de 70 (= $V_0 + a\,t = 50 + 20 \times 1$).
  - O desvio padrão será de 30 (= $b\sqrt{\Delta t} = 30 \times 1$).
  - Exercício: Resolva para o caso de 6 meses. VOLTAR

Valor Esperado do MGB: Outra Prova

- Outra maneira de calcular o valor esperado de *V* no instante *t*, dado o valor corrente V_0, no MGB:
  - Vimos que esse valor esperado é: $E[V(t)] = V_0\,e^{\alpha t}$
- A outra maneira é tomar o valor esperado de dV na eq. original $dV/V = \alpha\,dt + \sigma\,dz$, pois o termo aleatório (2º termo) desaparece já que E(dz) = 0:

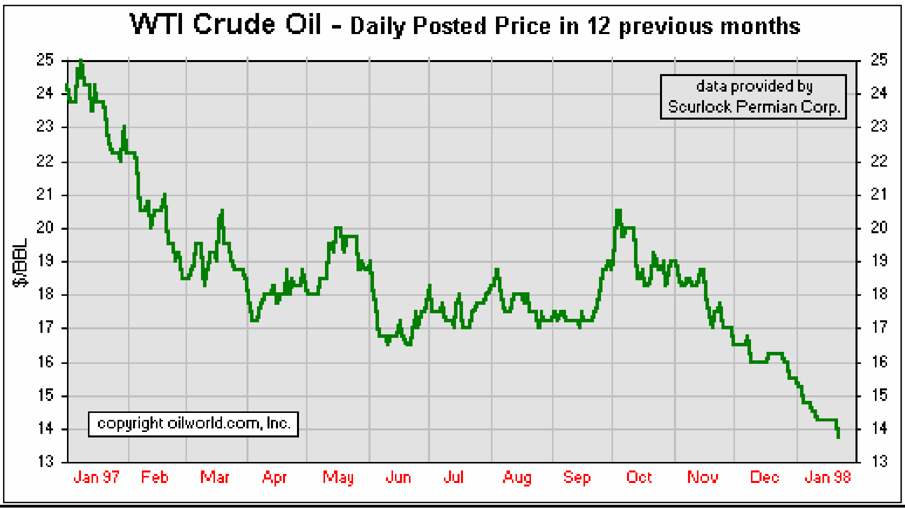
$$E(dV) = \alpha\,V\,dt \Rightarrow \frac{E(dV)}{V} = \alpha\,dt \Rightarrow \int_{V_0}^{\overline{V}} \frac{dV}{V} = \int_0^t \alpha\,dt \Rightarrow \ln \overline{V} - \ln V_0 = \alpha\,(t - 0)$$

$$\Rightarrow \ln \overline{V} = \ln V_0 + \alpha\,t \Rightarrow e^{\ln \overline{V}} = e^{\ln V_0 + \alpha t} \Rightarrow \overline{V} = e^{\ln V_0} . e^{\alpha t} \Rightarrow E[V] = V_0 . e^{\alpha t}$$

- Ou seja, $dV = \alpha\,V\,dt$ descreve a curva de valor esperado de V. Assim, a solução dessa equação diferencial para um instante t, V(t), dá o valor esperado de V no instante t.

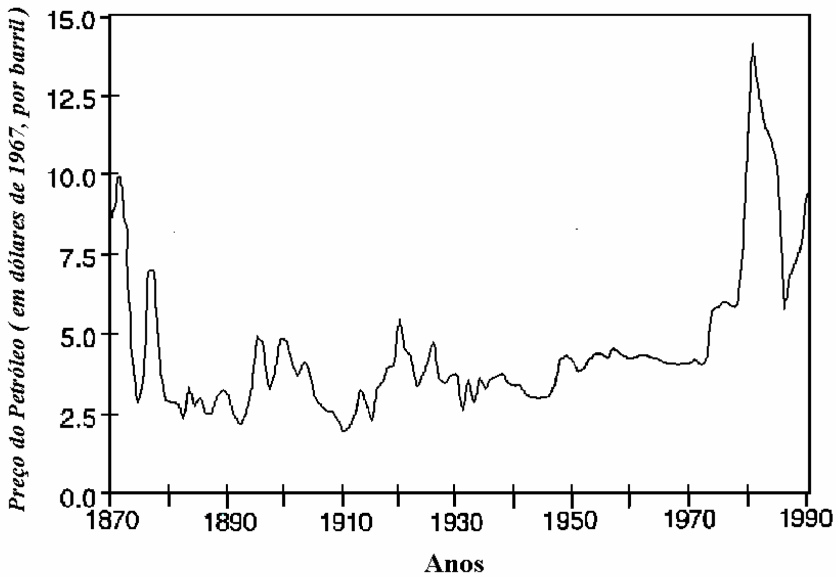
Preços do Óleo em 1997 e a Crise da Ásia

- Em novembro/97 os preços do petróleo começam a cair muito rapidamente. A crise da Ásia foi o fator mais importante, mas inverno ameno e atuação da OPEP são os outros fatores que fizeram a oferta superar muito a demanda



Preços do Petróleo (120 anos)

- Preços reais (não-nominais), mas com dólar de 1967.



Preços do Petróleo: 2004 e Pico Real Histórico

- **Em termos reais, os valores 2004 (recordes nominais na época) estavam abaixos do pico real histórico do início dos anos 80.**
  - **O pico real depende do índice de inflação usado (varia de 70 a 80 US$/bbl conforme a fonte). Em 2006 chegou a + de 70 $/bbl.**

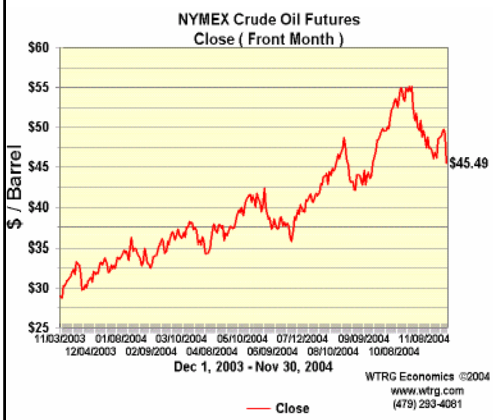


Figure 3: Nearby Futures WTI Crude Price Series (WTRG 2004)(2)

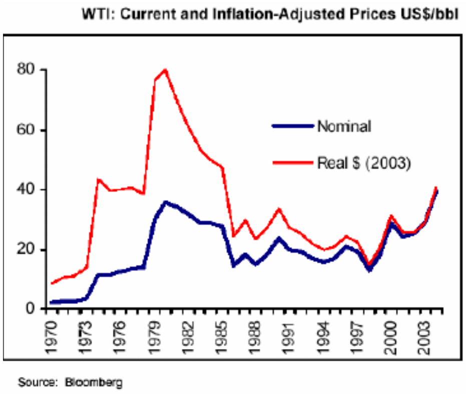


Figure 5: Nominal vs. Real Crude Oil Dollar Values (Bloomberg 2004)(3)

Mudança nos Preços de Longo-Prazo

- **Alguns autores dizem que existe uma mudança de patamar de longo-prazo, pois o volume de novas descobertas não tem acompanhado o crescimento da demanda de petróleo.**
  - **O fato é que os cenaristas têm errado muito na previsão de preços.**

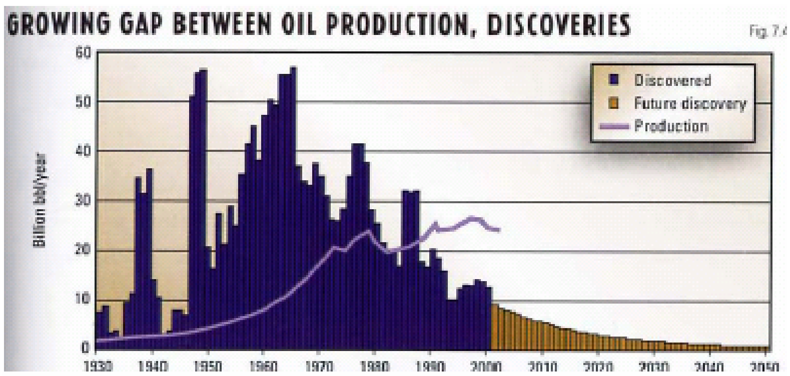
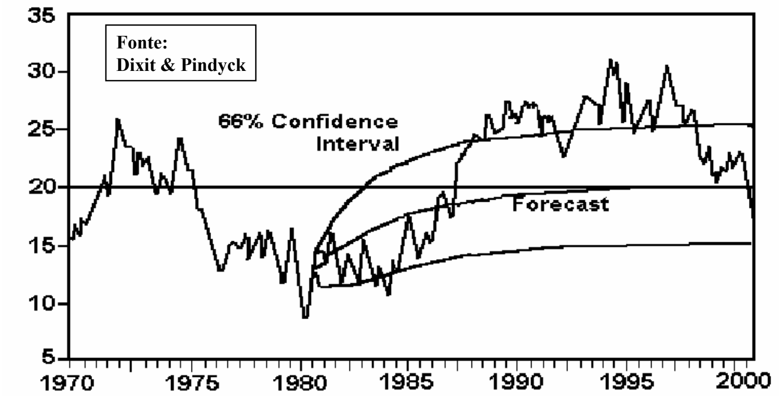


Figure 1: Oil Production versus Discoveries (International Petroleum Encyclopedia 2004) (1)

Reversão à Média de Longo Prazo

- **Variância inicialmente cresce com o tempo e depois se estabiliza devido à força de reversão**
  - **Tendência é o preço se aproximar da média de longo prazo. Se os preços estiverem "altos", a tendência é cair; se os preços estiverem "baixos", a tendência é subir.**



Meia Vida do Processo de Reversão

- **Uma medida mais gerencial da velocidade de reversão é o conceito de *meia-vida da reversão* H (*half-life*), que dá uma <u>medida da lentidão do processo</u>.**
- **Meia vida H é o <u>tempo</u> em que a variável estocástica leva <u>para percorrer a metade do caminho entre o seu valor corrente e a média de longo prazo</u>.**
- **Ex.: se o preço corrente do óleo é 12 \$/bbl, se a média de longo prazo $\bar{P}$ é 20 \$/bbl e se a meia vida H = 2 anos, então se espera que os preços em 2 anos subam para 16 \$/bbl [= 12 + (20 – 12)/2]. Nesse exemplo o processo é para P e não lnP.**
  - **Isso não significa que se espera que os preços atinjam 20 \$/bbl em 4 anos. Em 4 anos se atingiria 18 \$/bbl [= 12 + (20 – 12)/2 + (20 – 16)/2]**
- **A relação entre a velocidade de reversão η e a meia vida H *para o logaritmo de P* é $H = \ln(2)/\eta$**

Reversão com Saltos: Dias & Rocha (1998)

- **Assuma que os preços do petróleo (P) seguem o seguinte processo geométrico de reversão + saltos:**

$$\frac{dP}{P} = [\eta(\bar{P} - P) - \lambda k]\,dt + \sigma\,dz + dq$$

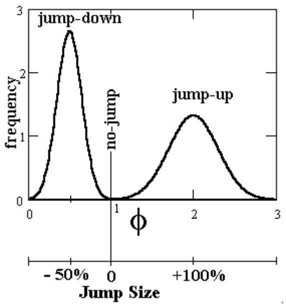
$$dq \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade} \quad 1 - \lambda dt \\ \tilde{\phi} - 1, & \text{com probabilidade} \quad \lambda dt \end{cases} \qquad \text{Logo, } E(\frac{dP}{P}) = \eta(\bar{P} - P)$$

$$k = E(\tilde{\phi} - 1)$$

- **Notícias normais causa apenas ajustes marginais nos preços do óleo. Notícias anormais (guerra, grandes crises, surpresas da OPEP, ...) causam saltos discretos nos preços do óleo.**
- **Incerteza no tamanho/direção dos saltos representada por ϕ**
- **O salto pode ser <u>sistemático</u> (não poderia construir um portfólio sem risco) ou <u>não-sistemático</u> (poderia usar *contingent claims*).**
  - **Dias & Rocha (1998) analisaram os dois casos.**

Dias & Rocha: Saltos (Jumps) Incertos

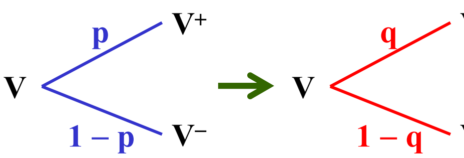
- **O tamanho e sentido dos saltos são incertos e tem a seguinte distribuição de probabilidades (2 normais truncadas):**



- **Em caso de ocorrer uma notícia anormal, existem 50% de chances do salto ser positivo (jump-up, aumentando o preço) e 50% de chances de ser negativo (jump-down, reduz o preço)**
- **Se ocorrer um jump-up, espera-se que os preços dobrem, e em caso de jump-down, espera-se que os preços caiam à metade. Mas existe incerteza e os saltos podem ser maiores ou menores**

Derivada de Radon-Nikodym

- A derivada de Radon-Nikodym dQ/dP é um ***processo estocástico*** que permite mudar da medida P (medida de probabilidade aqui) p/ a medida Q um outro processo.
  - No caso de tempo discreto, modelo binomial em 1 período:



Radon-Nikodym $\begin{cases} \dfrac{q}{p} & \text{Cenário } V^+ \\[2ex] \dfrac{1-q}{1-p} & \text{Cenário } V^- \end{cases}$

  - Pois multiplicando as probabilidades originais p e 1 − p por essas derivadas de Radon-Nikodym se obtém q e 1 − q.
  - Para o caso de dois períodos, apesar de dois caminhos resultarem num único cenário central (recombinação da árvore), dQ/dP deve ser especificado em t = 1 e t = 2 p/ cada um dos 4 caminhos possíveis.

Movimento Browniano e Auto-Similaridade

- Foi dito que o movimento Browniano $z(t) = N(0; 1)\sqrt{t}$ tem uma natureza *fractal* devido a auto-similaridade de suas amostras de caminho se ampliadas sucessivamente.
  - Mandelbroot escreveu "*The Fractal Geometry of Nature*" para enfatizar o caráter universal da *auto-similaridade* (*self-similarity*) (Shiryaev, "*Essential of Stochastic Finance*", p. 224).
    - Ver também Etheridge, "*A Course in Financial Calculus*", *2002*, p. 55.
  - O movimento Browniano tem a propriedade estatística de auto -similaridade com *expoente de Hurst* H = ½.
- Uma classe mais geral de movimentos Brownianos é chamada de *Fractional Brownian Motion*.
  - Esses processos têm a propriedade de auto-similaridade
  - São processos gaussianos quando $H \in (0, 1]$.
    - O movimento Browniano (H = ½) é um caso particular.
  - Esses processos em geral têm incrementos dependentes, sendo casos particulares quando eles são independentes, como no movimento Browniano tradicional.