Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais

Parte 4: Modelagem de opções reais em tempo contínuo: lema de Itô; *contingent claims*; otimização sob incerteza.

Marco Antonio Guimarães Dias,
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2008

Modelagem de Opções em Tempo Contínuo

- **Para modelar um problema de opção (ou qq. derivativo) em tempo contínuo, deve-se obter a *equação diferencial parcial* (EDP) da opção F(V, t) e suas condições de contorno (cc.). Para isso são necessárias as ferramentas:**
  - **Lema de Itô que permite escrever as relações entre a variável de interesse (F) e as variáveis de estado (X, t), onde X é um vetor de variáveis estocásticas (ex.: valor do ativo básico V e investimento I), que seguem processos estocásticos específicos;**
    - **O Lema de Itô permite expandir dF em termos de dX e dt;**
    - **Usa-se o Lema de Itô pois um processo de Itô é contínuo, mas não é diferenciável no senso convencional (não existe dX/dt, por ex.).**
  - **Otimização sob incerteza. Exs.: programação dinâmica sob incerteza; contingent claims; evolucionário; método integral.**
    - **Os dois primeiros métodos + o Lema de Itô permitem contruir a EDP e suas cc. O método integral será visto depois.**
    - **D&P: contingent claims é usado para mercado completo e a programação dinâmica é usada para mercado incompleto.**

O Lema de Itô

- O Lema de Itô está para o cálculo estocástico, assim como a expansão de Taylor está para o cálculo ordinário.
  - O termo em $(dV)^2$, desprezado em Taylor, é considerado por ser de ordem dt se V for variável estocástica. Seja a função F(V, t):

$$\text{Taylor: } dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \cancelto{0}{1/2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}} (dV)^2 + \ldots$$

$$\text{Itô: } dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + 1/2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} [\, f(V, t)\, dt \,]$$

Onde $f(V, t)$ é uma função que depende do processo estocástico escolhido.
O lema de Itô mostrado é a versão mais simples (1 variável estocástica).

- Ex. (MGB): $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$, logo $(dV)^2$ é:
  - $(dV)^2 = \alpha^2 V^2 (dt)^2 + 2 \alpha \sigma V^2 dt.dz + \sigma^2 V^2 (dz)^2$, mas os termos de ordem $(dt)^2$ e $(dt)^{3/2}$ (como dt.dz) são desprezíveis frente ao termo dt

  $\Rightarrow (dV)^2 = \sigma^2 V^2 (dz)^2$; provaremos que $(dz)^2 = dt \Rightarrow (dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$

Prova de que $(dz)^2 = dt$

- A prova de que $(dz)^2 = dt$ é dividida em duas partes:
  - Primeiro se prova que $E[(dz)^2] = dt$ e depois se prova que $Var[(dz)^2] = 0$. Isso implicará que $(dz)^2 = dt$.

❶ Lembrando que o *incremento de Wiener* $dz = \varepsilon (dt)^{½}$,
  - $E[(dz)^2] = E[\varepsilon^2 dt] = dt\, E[\varepsilon^2]$; mas a variância de ε é por definição igual a 1 (normal padronizada), ou seja:
  - $Var(\varepsilon) = 1 = E[\varepsilon^2] - (E[\varepsilon])^2 = E[\varepsilon^2] - 0 \Rightarrow E[\varepsilon^2] = 1 \Rightarrow$
  - Substituindo $\Rightarrow E[(dz)^2] = dt$ □

❷ Para provar que $Var[(dz)^2] = 0$,
  - $(dz)^2 = \varepsilon^2 dt \Rightarrow Var[(dz)^2] = Var[\varepsilon^2 dt] = dt^2 Var[\varepsilon^2]$
  - Mas $dt^2 \cong 0 \Rightarrow Var[\varepsilon^2 dt] = 0 . Var[\varepsilon^2] \Rightarrow Var[\varepsilon^2 dt] = 0$ □

- Ou seja, embora dz seja variável aleatória com distrib. normal, o seu quadrado $(dz)^2$ é determinístico!
  - ➡ Para o caso mais geral (dz^n, $n \geq 2$) ver Ingersoll, 1987, p. 348.

Processo Estocástico da Opção

- Seja V (ex.: ativo básico) seguindo um processo de Itô (MGB, reversão, etc.). Seja uma função F(V, t), por ex. uma OR, pelo menos duas vezes diferenciável em relação a V e uma vez em relação a t. Mostraremos com o Lema de Itô que F(V, t) também segue um processo de Itô.
  - Sabemos também que a fórmula (lema) de Itô para F(V, t) é:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V}\, dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}(dV)^2 + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt$$

  - V segue processo de Itô: $dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$. Sabemos que $(dV)^2 = b^2(V, t)\, dt$. Substituindo, vem:

$$dF = \left[a(V,t)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2} b^2(V,t)\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right] dt + b(V,t)\frac{\partial F}{\partial V}\, dz$$

- Logo, como V, a função F também segue um processo de Itô, mas em geral com drift e variância diferentes.
  - Mas os parâmetros do ativo básico (ex: drift α e volatilidade σ, se V seguir um MGB) aparecem no processo de F.

Processo Estocástico da Opção

- Vimos que se o ativo básico V segue um processo de Itô $dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$, então a função F(V, t) duas vezes diferenciável em relação a V e uma vez em relação a t, também segue um processo de Itô (ex.: opção real):

$$dF = \left[a(V,t)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2} b^2(V,t)\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right] dt + b(V,t)\frac{\partial F}{\partial V}\, dz$$

- No termo em dt (de drift da opção F) temos três parcelas:
  - A tendência devido ao *drift do ativo básico* vezes a variação de F com V, que pode ser negativa no caso da put ($\partial F/\partial V < 0$ p/ put);
  - A correção do *efeito da convexidade* (desigualdade de Jensen); e
  - O decaimento do *valor F com o tempo* (opção finita → $\partial F/\partial t < 0$).
- Note que no termo em dz aparece o termo da variância do ativo básico multiplicado pelo *delta-hedge* $\partial F/\partial V$.
  - Como o único termo aleatório de dV e dF <u>é o mesmo</u>, dz, então os processos estocásticos são *perfeitamente correlacionados*.
    - ➡ A correlação é perfeita *por construção* ($\rho = 1$ *não é uma premissa*).

Portfólio Sem Risco e Delta Hedge

- **Foi visto em tempo discreto que o delta hedge fazia o portfólio ficar livre de risco (resultado determinístico).**
  - **Agora veremos que vale tb. para tempo contínuo no caso do ativo básico V seguir um processo de Itô. Seja o portfólio Φ:**

    $$\Phi = F - n\,V$$

  - **Se V segue o processo de Itô $dV = a(V, t)\,dt + b(V, t)\,dz$, vimos que F também é proc. de Itô: $dF = g(V, t)\,dt + h(V, t)\,dz$, onde $g(V, t)$ é função de $a(V, t)$ e $b(V, t)$; e $h(V, t) = b(V, t)\,\partial F/\partial V$.**
  - **Portfólios sem risco devem ter variações $d\Phi$ não aleatórias. Ou seja, $d\Phi = dF - n\,dV$ deve ser não estocástico. Logo:**

    $$d\Phi = g(V, t)\,dt + h(V, t)\,dz - n\,[a(V, t)\,dt + b(V, t)\,dz] \Rightarrow$$
    $$d\Phi = [g(V, t) - n\,a(V, t)\,]\,dt + [h(V, t) - n\,b(V, t)]\,dz$$

  - **Para eliminar o termo aleatório (em dz), basta zerar esse termo escolhendo $n = h(V, t)/b(V, t)$. Como $h(V, t) = b(V, t)\,\partial F/\partial V$, então substituindo e cortando $b(V, t)$, temos $n = \partial F/\partial V$.**
    - **Note que *ter ou não dividendos* não afeta a escolha de n = delta hedge.**

Exemplo de Aplicação do Lema de Itô

- **Seja uma variável estocástica P seguindo um MGB:**
  - **$dP = \alpha\,P\,dt + \sigma\,P\,dz$. Sabemos agora que $(dP)^2 = \sigma^2\,P^2\,dt$**
- **Seja uma variável p dada pela função: $p = \ln(P)$.**
- **Prove que p segue um movimento *aritmético* Browniano (MAB) e ache a equação estocástica que descreve dp.**
  - **As derivadas a serem usadas no Lema de Itô são:**
    - **$\partial p/\partial t = 0$; $\partial p/\partial P = 1/P$; $\partial^2 p/\partial P^2 = -\,1/P^2$.**
  - **Aplicando o Lema de Itô para p(P, t):**
  - **$dp = (1/P)\,dP - \frac{1}{2}\,(1/P^2)\,(dP)^2 \Rightarrow$**

    $$\Rightarrow\ dp = \alpha\,dt + \sigma\,dz - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,dt \Rightarrow$$
    $$\Rightarrow\ dp = (\alpha - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2)\,dt + \sigma\,dz$$

  - **Ou seja, um MAB com a mesma volatilidade de dP/P, mas diferentes drifts $\Rightarrow dP/P \neq d(\ln(P))$, i. é, $dP/P > d(\ln(P))$.**

Ex.: Mudança de Medida e Martingale

- Na parte 3 dissemos que se $dV^Q/V = (r - \delta)\, dt + \sigma\, dz^Q$ então o processo descontado $F(V, t) = e^{-r t}\, [V\, e^{\delta t}]$ é um Q-martingale, pois $dF^Q = e^{-(r - \delta) t}\, \sigma\, V\, dz^Q$ (não tem *drift*).
  - Demonstraremos isso aplicando o Lema de Itô p/ F(V, t):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V}\, dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\,(dV)^2 + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt$$

  - Calculando as derivadas parciais: $\partial F/\partial V = e^{-(r - \delta) t}$; $\partial^2 F/\partial V^2 = 0$; $\partial F/\partial t = -\,(r - \delta)\, e^{-(r - \delta) t}\, V$; e substituindo na equação do Lema de Itô:

$$dF^Q = e^{-(r - \delta) t}\, V\, [(r - \delta)\, dt + \sigma\, dz^Q] + 0 - (r - \delta)\, e^{-(r - \delta) t}\, V\, dt$$

$$\Rightarrow dF^Q = e^{-(r - \delta) t}\, \sigma\, V\, dz^Q \quad \square$$

- Exercício: partindo do processo de dV na medida real P (em vez da medida Q), i. é, $dV/V = \alpha\, dt + \sigma\, dz$, onde $\alpha = \mu - \delta$ (em equilíbrio), mostre com o lema de Itô e o Teor. de Girsanov que dF é um martingale sob medida Q.

Exercícios sobre o Lema do Itô (1)

- Seja F(V) um derivativo $F = V^2$, onde V é uma variável aleatória que segue um processo estocástico de Itô.
  - Está certo escrever a derivada $dF = 2\, V\, dV$?
  - Caso negativo, está certo a expressão $dF = 2\, V\, dV + dt$?
- No Tópico 2 foi mostrado que se P segue um MGB e se $V = k\, P$, onde k é uma constante, então V também segue um MGB e com o mesmo drift α e mesma volatilidade σ.
  - ➡ Prove isso usando o Lema de Itô.

Lema de Itô para Duas Var. Estocásticas

- Sejam V(t) e I(t) dois processos estocásticos de Itô (exs.: MGB, reversão, etc.) correlacionados com coeficiente ρ:
  - $dV = a(V, t)\, dt + b(V, t)\, dz$ (ex.: $dV = \alpha_V\, V\, dt + \sigma_V\, V\, dz$)
  - $dI = c(V, t)\, dt + d(V, t)\, dw$ (ex.: $dI = \alpha_I\, I\, dt + \sigma_I\, I\, dw$)
- Para 2 var. estocásticas, o Lema de Itô da opção F(V, I, t) é:
  - $dF = F_t\, dt + F_V\, dV + ½\, F_{VV}\, (dV)^2 + F_I\, dI + ½\, F_{II}\, (dI)^2 + F_{VI}\, (dV\, .\, dI)$
    - Onde os subscritos denotam derivadas parciais (ex.: $F_t = \partial F/\partial t$)
    - Aplicação: em caso de exercício da opção, VPL = V – I
    - Processos correlacionados: $dz\, dw = \rho\, dt$, pois $E(\varepsilon_V\, .\, \varepsilon_I) = \rho$, etc.
- Regras de multiplicação úteis para usar com o lema de Itô:

Multiplicação	dt	dz	dw
dt	0	0	0
dz	0	dt	ρ dt
dw	0	ρ dt	dt

Exercícios sobre o Lema do Itô (2)

- Sejam V e I os valores de um projeto operando e do investimento para obter esse projeto, respectivamente.
- Assuma que V e I seguem MGB's correlacionados, i. é, $E[\varepsilon_V\, .\, \varepsilon_I] = \rho \neq 0$.
- Seja v o valor normalizado do projeto operando, isto é, $v = V / I$.
  - Deduza o processo estocástico de v usando o Lema de Itô.
  - Seja $w = Ln(v)$. Deduza o processo de w usando o Lema de Itô.
  - Dica: seguir caminho similar ao de Dixit & Pindyck (p.82) para o exemplo da multiplicação de dois MGBs.
  - Compare os termos de drifts e de variância desses dois casos (multiplicativo do livro e quociente desse exercício).

Exercícios de Lema de Itô (3)

- **Seja V uma variável estocástica que segue um MGB com parâmetros α (drift) e σ (volatilidade).**
- **Use o lema de Itô para mostrar que V^n, onde n é um nº natural, também segue um MGB e com valor esperado:**

$$E[V^n(t)] = V(0)\ \mathrm{Exp}[(n\,\alpha + \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\sigma^2)\,t]$$

Lema de Itô para m Processos de Itô

- **Sejam m processos de Itô correlacionados das v.a. x_i:**

$$dx_i = a_i(x_1, \ldots x_m, t)\, dt + b_i(x_1, \ldots x_m, t)\, dz_i, \quad i = 1, \ldots m$$

  - **Com correlação sendo expressa por $E[dz_i\, dz_j] = \rho_{i\,j}\, dt$**
- **O Lema de Itô é dado por:**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j} dx_i dx_j$$

  - **Que é mais útil escrita na forma expandida, substituindo os dx_i (nota: na *tradução* ao português do DP na web a equação abaixo tem erros, mas o livro está certo [2ª impressão]):**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_i a_i(x_1,..,x_m,t) \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dt + \frac{1}{2} \sum_i b_i^2(x_1,..,x_m,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}\, dt +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_{ij} b_i(x_1,..,x_m,t)\, b_j(x_1,..,x_m,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dt + \sum_i b_i(x_1,..,x_m,t) \frac{\partial F}{\partial x_i} dz_i$$

Alguns Resultados do Lema de Itô

- Se X e Y seguem processos de Itô, então pelo Lema de Itô a função F (de X e Y ou só de X) é dada por:
  - **Produto**: Se $F = X\,Y \Rightarrow dF = X\,dY + Y\,dX + (dX\,dY) \Rightarrow$
    $\Rightarrow dF/F = dX/X + dY/Y + [(dX/X)\,(dY/Y)]$
  - **Quociente**: Se $F = Y/X \Rightarrow$
    $\Rightarrow dF/F = dY/Y - dX/X - [(dX/X)\,(dY/Y)] + (dX/X)^2$
  - **Inverso**: Se $F = 1/X \Rightarrow dF/F = -\,dX/X + (dX/X)^2$
  - **Exponencial**: Se $F = e^X \Rightarrow dF/F = dX + [(dX)^2/2]$
  - **Logaritmo**: Se $F = \ln(X) \Rightarrow dF = dX/X - ½\,(dX/X)^2$
  - **Processo Descontado**: Se $F = e^{-\rho t}\,X \Rightarrow dF/F = (dX/X) - \rho\,dt$
    - Prova: $\partial F/\partial X = e^{-\rho t}$; $\partial^2 F/\partial X^2 = 0$; $\partial F/\partial t = -\,\rho\,e^{-\rho t}\,X$; e aplicando o Lema de Itô: $dF = \frac{\partial F}{\partial X}\,dX + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\,(dX)^2 + \frac{\partial F}{\partial t}\,dt$
    - Vem: $dF = e^{-\rho t}\,dX - e^{-\rho t}\,X\,\rho\,dt \Rightarrow dF/F = (dX/X) - \rho\,dt$ □

Otimização Dinâmica Sob Incerteza

- Foi visto que um problema de opção real pode ser visto como um problema de otimização dinâmica sob incerteza.
  - É "dinâmica" pois considera a variável de estado "tempo".
- Inicialmente veremos os dois métodos do livro DP: Ativos Contingentes e Programação Dinâmica. Veremos outros tb.
  - No método da EDP, usa-se a *condição de suavidade* ("smooth pasting"): prova-se (McKean, apêndice famoso do paper de Samuelson, 1965) que é uma condição <u>suficiente</u> para o ótimo.
- Ativos Contingentes: usa o conceito de não-arbitragem.
  - Monta um portfólio livre de risco: retorno r (não-arbitragem).
  - Otimização (gatilho) nas condições de contorno da EDP.
  - <u>No caso do MGB</u>, não precisa da taxa ajustada ao risco de V.
- Programação Dinâmica: usa a equação de Bellman.
  - Não precisa de mercado completo, trabalha *backwards.*
  - Usa uma taxa de desconto *exógena* ρ para atualizar os valores otimizados dos cenários (taxa ρ = preferência corporativa?)

Contingent Claims: Black-Scholes-Merton

- A equação de Black & Scholes & Merton (B&S&M) é a solução de uma equação diferencial parcial (EDP).
  - A EDP é a mesma se *americana* ou *européia*, se *put* ou *call*.
  - As cc. da EDP é que dizem se *put* ou *call*, amer. ou europ.
- Para chegar na EDP pelo método "contingent claims", a relação de F com V é dada por um portfólio livre de risco:
  - "Compra-se" uma opção de investimento, ou seja, F.
  - "Vende-se" n unidades do ativo básico V (unidade de projeto), sendo "n" (conhecido por "delta hedge") escolhido de forma a tornar o *portfólio sem risco* (mostraremos *de novo* que $n = F_V$).
- Monta-se as equações de retorno desse portfólio no tempo dt.
  - Por ser livre de risco, o retorno exigido é a taxa livre de risco r.
- Usa-se o *Lema de Itô* para expandir dF em relação a V e t.
- Usa-se a equação do *processo estocástico* de V para $(dV)^2$.
- "Algebrando", chega-se à EDP do derivativo F(V, t).

Método dos Ativos Contingentes: B&S&M

- A carteira sem risco é: $\Phi = F - n V$ (com uma escolha *conveniente* de n para torná-la sem risco).
- Num intervalo de tempo infinitesimal dt, o retorno exigido da carteira será: $r \Phi dt = r (F - n V) dt$.
- Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:
  - A opção pode variar (dF) mas não distribui dividendos.
  - O retorno de V em dt é a soma do ganho de capital dV com o dividendo $\delta V dt$. Assim o retorno da carteira é:
  - Retorno da carteira = $dF - n (dV + \delta V dt)$.
  - Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r (F - n V) dt = dF - n (dV + \delta V dt)$$

  - Agora precisamos de dF: expansão com o Lema de Itô.

Método dos Ativos Contingentes

- O Lema de Itô para expandir dF, onde F(V, t), é:

  $dF = F_v\, dV + ½\, F_{v\,v}\, (dV)^2 + F_t\, dt$

  - Agora precisamos de $(dV)^2$, elevando ao quadrado a equação estocástica $dV = \alpha\, V\, dt + \sigma\, V\, dz$. Assim:

  $(dV)^2 = \sigma^2\, V^2\, dt$ (despreza termos em dt de ordem > 1).

  - Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

  $dF = F_v\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v}\, dt + F_t\, dt$

  - Substituindo a equação de dF na eq. do retorno de Φ:

  $r\,(F - n\, V)\, dt = F_v\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v}\, dt + F_t\, dt - n\,(dV + \delta\, V\, dt)$

  $\Rightarrow r\,(F - n\, V)\, dt = (F_v - n)\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v}\, dt + F_t\, dt - n\, \delta\, V\, dt$

  - Mas para essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dV. Para tal, faz $n = F_V$.
  - *Algebrando* se chega à EDP de Black & Scholes & Merton:

  $$½\, \sigma^2\, V^2\, F_{v\,v} + (r - \delta)\, V\, F_V - r\, F = - F_t$$

EDP do Derivativo F(V, t) por Contingent Claims

- Assim, a EDP de um derivativo F(V, t) que não paga dividendos (F não tem fluxo de caixa) sobre um ativo básico V que segue um MGB e gera a taxa dividendos contínuos δ é:

$$½\, \sigma^2\, V^2\, F_{VV} + (r - \delta)\, V\, F_V - r\, F = - F_t$$

- As <u>condições de contorno</u> da EDP é que dirão que F é uma opção que expira em T, o tipo da opção (aqui é americana de compra) e o resultado (payoff) do exercício da opção:

  Ação de otimização é inserida no modelo

  - Para V = 0, F (0, t) = 0
  - Para t = T, F (V, T) = máx [V – I, 0] = máx [VPL, 0]
  - "Continuidade", F (V*, t) = V* – I
  - "Contato Suave", F_V (V*, t) = 1

  Condições no gatilho V*, onde é ótimo o imediato investimento

- No caso de opção *européia* de compra, bastam as 2 primeiras cc.
  - As duas últimas cc. dão as condições ótimas de *exercício antecipado* de F

Notas Sobre Essa Eq. Diferencial Parcial

- Essa EDP pode ser vista como a *equação do calor* da física se usarmos a variável *tempo de expiração* $\tau = T - t$ em vez de t, o que implica em $F_\tau = - F_t$. A EDP ficará:

$$F_\tau \;=\; \underbrace{-\, r\, F}_{\text{fonte/reação}} \;+\; \underbrace{(r - \delta)\, V\, F_V}_{\text{convecção}} \;+\; \underbrace{\tfrac{1}{2}\, \sigma^2\, V^2\, F_{VV}}_{\text{difusão}}$$

  - Nesse formato (com $\delta = 0$) Black-Scholes originalmente resolveu o problema da opção. Na física a c.c. da expiração T é no instante inicial (temperatural inicial que varia com o tempo)
- Um formato dessa EDP mais interessante para finanças é visando *interpretar o retorno livre de risco da opção* F:

$$r\, F = E^Q[dF]/dt \;=\; F_t \;+ (r - \delta)\, V\, F_V \;+\; \tfrac{1}{2}\, \sigma^2\, V^2\, F_{VV}$$

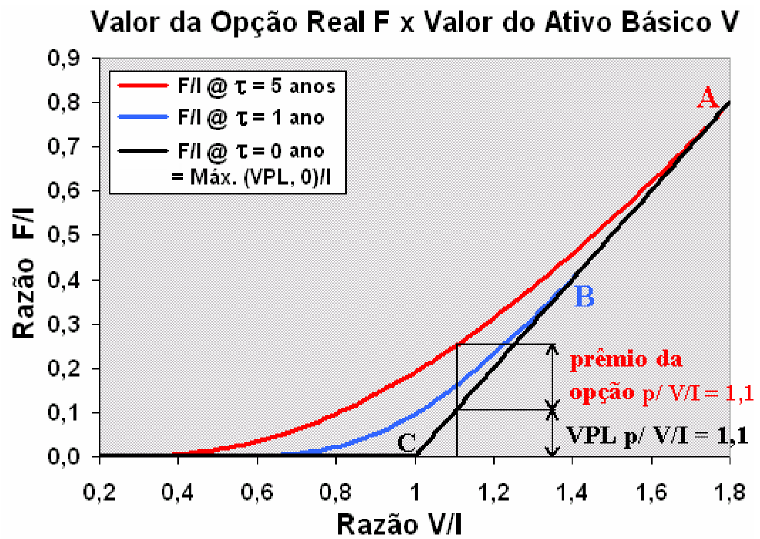
  - O retorno livre de risco (sob medida Q) de F é a sua variação pela simples passagem do tempo mais a sua variação causada pelo retorno livre de risco do ativo básico V e mais um termo para corrigir a convexidade do retorno de F em relação a V.

EDP no Contexto da Opção Real Simples

- Repare (ver segunda cc.) que na expiração ($t = T$), a oportunidade é do tipo "agora ou nunca" e vale:
  - Máximo entre V – I e zero, ou seja, Máx[VPL, 0].
  - Só na expiração vale a regra do VPL (investir se > 0).
  - Antes da expiração, a regra é exercer se $V \geq V^*$ (gatilho).
- Essa EDP + cc. (opção de compra americana com $\delta > 0$) não tem solução analítica (exceto no caso de opção perpétua). Mas temos as "opções" de solução tais como:
  - Métodos numéricos tradicionais. Veremos o método (+ popular) das *diferenças finitas* (ver tb. DP, cap. 10);
  - *Aproximações analíticas*. Existem diversas:
    - A mais popular é a de Barone-Adesi & Whaley (ver Hull);
    - A de Bjerksund & Stensland (1993) é mais precisa para tempo de expiração grande. Ver detalhes na pasta 76, inclusive o código VBA-Excel para F(V, t) e gatilho $V^*(t)$.

Gráfico da Opção Real F de Investir em V

- ◆ Resolvendo a valor da opção real F(V, t), obtém-se gráficos F x V como o abaixo (valores normalizados pelo investimento I).
  - Mostrados os valores para diferentes tempos de expiração τ

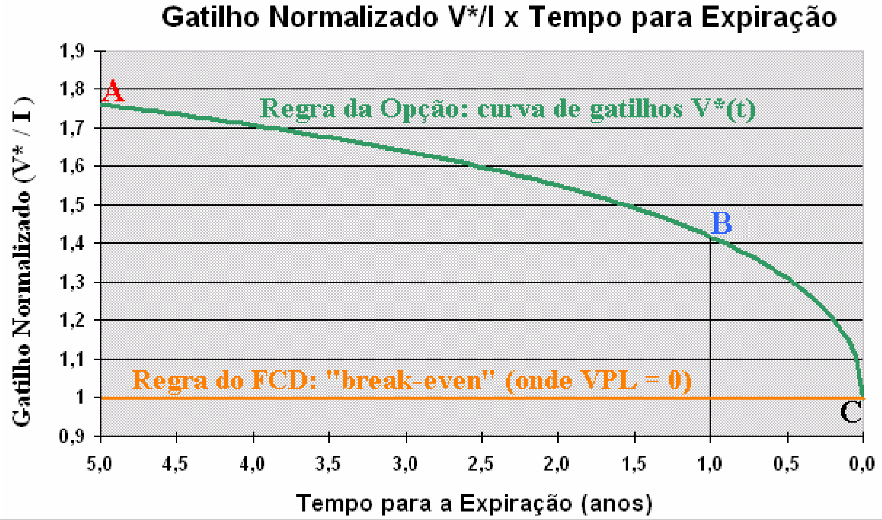


O Valor e a Curva do Gatilho V*

- ◆ As duas últimas cc. são para o caso de V atingir o gatilho V* (exercício ótimo): investir já se $V \geq V^*$.
  - A terceira cc. é a *condição de continuidade* (“*value matching*”): só diz que em V* se exerce e obtém $F = V^* - I$
- ◆ A última cc. é a condição *suficiente* para o ótimo: a condição de suavidade (“smooth-pasting”) em V*.
  - Diz que no ótimo a curva da opção F é tangente à curva (aqui é reta) do payoff V – I (i. é, tangente à reta do VPL).
  - Prova do smooth-pasting é cc. de ótimo: p.130-132 do DP.
    - ➡Prova mais geral e rigorosa: Brekke & Øksendal (1991).
- ◆ O gatilho V*(t) (curva de exercício antecipado) é muito mais importante em opções reais do que em opções financeiras.
- ◆ O gráfico da curva de gatilhos V*(τ) a seguir mostra a correspondência dos pontos A, B e C da figura anterior para os tempos de expiração τ de 5 anos, 1 ano e 0 ano, respectiv.

Curva do Gatilho: A Regra de Decisão Ótima

- **O gráfico abaixo mostra a curva de gatilhos V*(τ) para o mesmo caso do gráfico da opção F(V, t).**
  - **Note os pontos A, B e C e compare com o gráfico anterior.**



Notas sobre o Modelo e Otimização

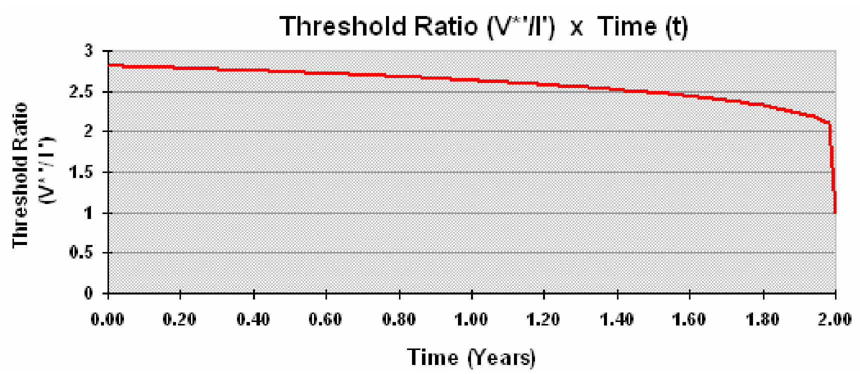
- **A *condição de suavidade* também é chamada de *condição de contato alto* (“*high-contact condition*”).**
  - **Foi introduzida no paper de Samuelson (1965) tanto de forma intuitiva como de forma rigorosa no apêndice de McKean.**
  - **Ela se aplica na grande maioria dos casos práticos, e em particular em problemas de *parada ótima* (“*optimal stopping*”).**
    - **Mas existem problemas de otimização “não-suave” onde ela não se aplica e se usam técnicas de *singular control* e *impulse control*.**
    - **Parada ótima é um problema de *decisão binária* (investe ou espera; abandona ou espera). Veremos mais detalhes depois.**
- **A formulação aqui (e no DP) é chamada de “free-boundary problem” (veremos outras formulações tb.)**
  - **A curva de gatilho é a *fronteira livre* que define duas regiões: *região de continuação* (espera) e *região de parada* ou *região de exercício* (exs.: investimento; abandono).**

Software de Opções Reais: Timing

- Esse software em Excel-VBA resolve o problema clássico de momento ótimo de investir I num projeto completo V(t), em que V(t) segue um MGB.
  - V = melhor valor de mercado ou valor presente (no início do invest.) das receitas líquidas de custos operacionais e impostos.
  - I = valor pres. dos investimentos líquidos de benefícios fiscais
  - http://www.puc-rio.br/marco.ind/xls/timing-e-97-vba-hqr.xls
- Timing usa a aproximação de Bjerksund & Stensland para resolver (F e V*) uma opção de compra americana.
  - Dá o valor da opção F(V, t) com gráfico; o valor e a curva de gatilhos V*(t); e, em caso de ser ótimo a espera, qual a probabilidade de exercício e o tempo esperado condicional (a ocorrer algum exercício) para haver exercício. Detalhes:
  - http://www.puc-rio.br/marco.ind/timing.html

Propriedades da Curva de Gatilho

- Será a curva de gatilhos V*(t) sempre contínua como apareceu na figura?
  - Resposta: a curva de gatilhos *pode* ser descontínua, mas <u>apenas na data de expiração</u>. Isso vai depender da relação entre r e δ. Se r > δ ela é descontínua na expiração
    - ➡ Usando o software Timing (r = 4% e δ = 2%), vemos isso:



Curva de Gatilho: Propriedades

- A curva de gatilho (exercício imediato) da opção de investimento (americana, call) tem as propriedades:
  - É contínua no intervalo de tempo [0, T);
  - Decrescente com o tempo (em 99,9% dos casos práticos);
  - O limite perto da expiração é $\lim_{t \to T-} V^*(t) = \text{Máx}[I, (r/\delta)\, I]$;
  - Na expiração $V^*(T) = I$.
  - Prova: livro do Detemple "American-Style Derivatives".
- Nota: no caso determinístico $\sigma = 0$, a curva de gatilho antes da expiração é constante e igual a $\text{Máx}[I, (r/\delta)\, I]$.
  - Em palavras: $V \geq I$, pois o VPL de exercício tem de ser ≥ 0; e o *ganho local* também deve ser não-negativo, $\delta\, V - r\, I \geq 0$.
- Veremos em seguida a representação formal do *prêmio de exercício antecipado* (diferença entres as opções européias e americanas) que é útil em alguns métodos numéricos.

Exercício sobre o Gatilho

- Prove por arbitragem que o exercício <u>antecipado</u> de uma opção de compra americana sobre um ativo básico que paga dividendos contínuos nunca é ótimo se:

$$V < \text{Máx}[I, (r/\delta)\, I]$$

  - Como o caso de $r \leq \delta$ é óbvio (não tem sentido exercer a opção para obter um payoff negativo), o único caso a ser provado por arbitragem é quando $r > \delta$.
  - OBS: a propriedade $\lim_{t \to T-} V^*(t) = \text{Máx}[I, (r/\delta)\, I]$ apresentada no slide anterior para a curva de gatilhos $V^*(t)$ é praticamente provada com isso, assim como a descontinuidade dessa curva em $t = T$ quando $r > \delta$ (descontínuo pois $V^*(T) = I$ mesmo no caso de $r > \delta$).

Prêmio de Exercício Antecipado

- **Foi visto no tópico 1 que a opção de compra americana F(t) é igual à opção de compra européia f(t) mais um *prêmio de exercício antecipado* Π_a. Agora isso será quantificado.**
- **O ganho do exercício antecipado da opção de compra americana é o valor presente dos dividendos capturados líquido dos juros perdidos devido ao pagamento de I.**
  - **Formalmente, a representação do prêmio de exercício é:**

$$\Pi_a(V(0), V^*(.)) = \int_0^T \{\delta\, V(0)\, e^{-\delta t}\, N[d(V(0), V^*(t), t)] - r\, I\, e^{-r t}\, N[d_1(V(0), V^*(t), t)]\}\, dt$$

$$d(V(0), V^*(t), t) = \frac{\ln(V(0)/V^*(t)) + (r - \delta + (\sigma^2/2))\, t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d_1 = d(V(0), V^*(t), t) - \sigma\sqrt{t}$$

- **A curva de gatilho V*(t) resolve recursivamente a seguinte *equação integral não-linear* sujeito à cc: V*(T-) = Max[I, (r/δ) I].**

$$V^*(t) - I = f(V^*(t), t) + \Pi_a(V^*(t), t, V^*(.))$$

Lema de Itô para Processos de Poisson

- **Considere um processo <u>puro</u> de Poisson (saltos) de V**
  - **Estamos interessados no derivativo F(V, t). Como é dF?**
  - **Se o salto na variável estocástica V ocorre no intervalo infinitesimal entre t e dt, a variação nesse derivativo é:**
  - **$dF = F(V_{t+dt}, t) - F(V_t, t)$, mas em caso de evento (salto), V irá saltar para $V + V\Phi$, onde Φ é o tamanho do salto (Φ pode ser aleatório) ⇒ $dF_{salto} = F(V + V\Phi, t) - F(V, t)$**
  - **A probabilidade da ocorrência do salto no intervalo dt é dado por λ dt. Logo, o *valor esperado* da variação dF é:**

$$E[dF]_{saltos} = \lambda\, dt\, E[F(V + V\Phi, t) - F(V, t)]$$

  - **Veremos que em vez de dF_{saltos}, na prática se usa $E[dF_{saltos}]$.**
- **Para o caso mais relevante de processos estocásticos combinados (*difusão de Itô* + *saltos de Poisson*), basta aplicar o Lema de Itô para cada processo e somar:**

$$E[dF]_{total} = E[dF]_{difusão} + E[dF]_{saltos}$$

Exemplo de Lema de Itô para Jump-Diffusions

- **Paper de Dias & Rocha (1998), processo de reversão à média com saltos (Poisson compensado):**

$$\frac{dP}{P} = [\eta(\bar{P} - P) - \lambda k]\,dt + \sigma\,dz + dq \qquad dq \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade} \quad 1 - \lambda dt \\ \tilde{\phi} - 1, & \text{com probabilidade} \quad \lambda dt \end{cases}$$

$$k = E(\tilde{\phi} - 1)$$

- **Seja a função F(P, t) que no paper de Dias & Rocha é o valor da opção real de investir no projeto que por sua vez é função do preço do petróleo P.**
  - **Aplicando a fórmula de Itô obtém-se:**

$$E[dF] = \left[F_t + \left\{\eta(\bar{P} - P) - \lambda E[\phi - 1]\right\} P.F_P + \frac{1}{2}\sigma^2.P^2.F_{PP} \right] dt \; + \; E\{\lambda[F(P.\phi, t) - F(P, t)]\}\,dt$$

- **Onde os subscriptos denotam derivadas parciais.**
- **OBS: a informação que F é uma OR é irrelevante para aplicar o Lema de Itô, pois basta saber que F(V, t) é função diferenciável.**

Lema de Itô para Processos de Poisson

- **Um salto no ativo básico V sempre levará a um salto no valor do derivativo F(V), mas de tamanhos diferentes.**
- **O problema do processo de Poisson é que o risco dos saltos não pode ser eliminado do portfólio (será visto).**
- **Calculamos o valor esperado de dF_{saltos} porque iremos geralmente assumir que o processo de Poisson *dq é não-correlacionado com o mercado* e assim tem *prêmio de risco igual a zero* (retorno exigido = taxa livre de risco).**
  - **Nesse caso é suficiente trabalhar apenas com $E[dF_{saltos}]$ para montar a equação do retorno do portfólio sem risco.**
  - **Veremos que a equação de retorno do portfólio sem risco nos levará à *equação diferencial do valor da opção*, onde, no caso de incluir saltos, aparecerá o valor esperado no salto da opção.**
  - **Ex.: A equação *íntegro*-diferencial em Dias & Rocha (1998), processo de reversão com saltos de tamanho com distrib. ϕ foi:**

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 P^2 F_{PP} + \{r - \mu + \eta(\bar{P} - P) - \lambda E[\phi - 1]\} P F_P + F_t + \lambda E[F(P\phi, t) - F(P, t)] = r F$$

Portfólio Livre de Risco e Saltos de Poisson

- O portfólio com uma opção F(V, t) e n ativos básicos é:

$$\Phi = F - n V$$

- Se V segue um MGB <u>mais saltos</u>, Poisson dq de tamanho incerto ϕ, com valor esperado do salto $k = E[\phi - 1]$, a variação de valor desse portfólio durante dt teria os componentes anteriores do MGB somado às variações devido aos saltos em F e em V. Vimos que o retorno do portfólio devido apenas a parte contínua (MGB) é:

$$(F_v - n)\, dV + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{vv}\, dt + F_t\, dt - n\, \delta\, V\, dt$$

- Agora os saltos causam uma variação adicional nesse portfólio devido aos saltos (instantâneo $\Rightarrow$ dividendo = 0):

$$d\Phi_{saltos} = [\, F(\phi V, t) - F(V, t) - n\, (\phi - 1)\, V\,]\, dq$$

  - O problema é que o n que fazia o portfólio ser livre de risco no MGB *não* faz ele ser tb. livre de risco para o termo em dq
    - Por isso p/ montar a EDP tomamos o valor esperado de $d\Phi_{saltos}$

Portfólio Livre de Risco e Saltos de Poisson

- Merton (1976, ver trecho na pasta 76) mostra que, no caso de processos combinados de difusão com saltos, não é possível obter um portfólio livre do risco de saltos:
  - Não existe n e nem um conjunto de pesos w_1 e w_2 (p/ o ativo básico V e a opção F) que possam tornar o portfólio sem risco.
    - Ele escreveu o processo difusão + saltos p/ V, que resultou (lema de Itô) num processo tb. de difusão + saltos p/ F, que resultou em outro processo tb. de difusão + saltos p/ o portfólio Π, que é uma combinação linear dos ativos V e F (dado o ativo livre de risco).
    - Com isso ele chegou na equação do retorno do portfólio e, por inspeção, mostrou que não há w_1 e w_2 que façam o retorno ser r.
  - Curiosamente, num processo *puro* de Poisson (sem difusão e não-composto, i. é, salto de *tamanho determinístico* = 1) é possível montar uma estratégia de portfólio livre de risco!
    - Isso foi usado no artigo clássico de Cox & Ross (1976).
- Por isso a maioria dos artigos assumem que o processo de Poisson tem correlação zero com o mercado.
  - Assim o prêmio de risco de saltos é zero e o portfólio sem risco é viabilizado.

Programação Dinâmica: Conceitos

- A formalização da programação dinâmica (PD) nos anos 50 é devida a Bellman. Zermelo é o "avô" da PD com seu algoritmo "*backward induction*" em que analisou o *jogo de xadrêz* (1912).
  - PD quebra a seqüência de decisões em *dois componentes*: a *decisão imediata* (ex.: investir ou não) e uma *função valor* que engloba as conseqüências de todas as decisões posteriores.
- Quando o horizonte é *finito* (rever exemplos da parte 1) existe o *último instante* T para se tomar uma decisão:
  - Em T se usa a otimização tradicional (ex.: máx[VPL, 0])
  - A solução em T é a função valor para a *penúltima decisão* (T - 1)
  - O valor da penúltima decisão vira função valor p/ a antepenúltima, etc. Ou seja, se trabalha "backwards" até t = 0.
- Quando o horizonte é *infinito*, o que poderia parecer mais complicado na verdade é mais simples:
  - Cada decisão leva a outra que é exatamente igual à anterior (i. é, F independe de t), levando a freqüentes soluções analíticas.

Programação Dinâmica: Exemplo

- Seja um caso simples de dois períodos t_0 e t_1:
  - Valor do projeto V em t_1 é incerto, investimento I é fixo;
  - No espírito "backwards" da PD, primeiro se analisa a decisão ótima em $t = t_1$, depois se usa esse resultado como função valor (atualizado por ρ) para a decisão em t_0.
  - Em $t = t_1$: $F_1 = \text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}$. Como $V(t_1)$ é estocástico, iremos trabalhar com $E[F_1] = E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}]$
    - Em geral $E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}] \neq \text{máx}\{E[V(t_1)] - I, 0\}$, na verdade: $E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}] \geq \text{máx}\{E[V(t_1)] - I, 0\}$.
  - Em $t = t_0$: em caso de exercício obtém-se o "termination payoff" $\Omega_0 = V(t_0) - I$; já em caso de não-exercício (espera) se obteria um fluxo de caixa π_0 entre t_0 e t_1 (mas aqui $\pi_0 = 0$) mais o valor descontado de $E[F_1]$, isto é:

  Valor da opção real: $F_0 = \text{máx}\{\Omega_0,\ \pi_0 + (1/(1 + \rho))\ E[F_1]\} \Rightarrow$

  $\Rightarrow\ F_0 = \text{máx}\{V(t_0) - I,\ (1/(1 + \rho))\ E[\text{máx}\{V(t_1) - I, 0\}]\}$

Programação Dinâmica: Parada Ótima

- A firma irá escolher a cada instante t a política ótima u_t que maximiza seu valor presente esperado dos fluxos de caixa. Isso resulta na equação fundamental de Bellman:

$$F_t(V_t) = \underset{u_t}{\text{máx}} \left\{ \pi_t(V_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(V_{t+1})] \right\}$$

- De grande interesse prático é uma classe *particular* de programação dinâmica (PD) em que a escolha em qualquer período é *binária*: exercer a opção ou não.
  - São os problemas de *parada ótima* ("optimal stopping");
    - "Parada" significa exercer uma opção obtendo o "*termination payoff*" Ω (ex.: VPL de exercício da opção). Já "continuar" (ou *não parar*), significa esperar (não exerce a opção);
    - Se escolher "não parar", no período seguinte haverá um novo problema de decisão binário de parada ótima, etc., até parar.
  - A equação de Bellman se torna:

$$F_t(V_t) = \text{máx} \left\{ \Omega(V_t),\ \pi_t(V_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(V_{t+1})] \right\}$$

Equivalência das Otimizações Sob Incerteza

- O que ocorreria se na equação de Bellman tomarmos o valor esperado com probabilidades *neutras ao risco* e fizermos o desconto com a taxa livre de risco?
  - A resposta sugere que os métodos da programação dinâmica e de contingent claims devem ser equivalentes se for feita a *troca da tendência* α por $(r - \delta)$ e a troca da *taxa de desconto* ρ por r
- As EDPs do valor da opção em cada caso seriam para o problema F(V, t) deduzido antes por contingent claims são:
  - Programação Dinâmica (como chegar? Dixit & Pindyck):

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \alpha V F_V - \rho F = -F_t$$

  - Contingent Claims:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - r F = -F_t$$

- Lembrar o exemplo do seguro, de mudança de probabilidade (mudar a tendência é fazer uma translação numa distribuição) e uso da taxa de desconto livre de risco!

Exercício: Programação Dinâmica

- **Use o método da programação dinâmica (siga o DP, cap. 4) para estabelecer a EDP (equação diferencial parcial) do valor duma opção F(V, t), onde V(t) segue um MGB <u>neutro ao risco</u> sob medida Q e a taxa de desconto é a taxa livre de risco.**
  - **Use o fato de que, para Δt pequeno, $e^{-\rho \Delta t} \cong (1 + \rho \Delta t)^{-1}$, de forma que pode-se usar o fator de desconto $(1 + \rho\, dt)^{-1}$.**
  - **Mostre que a EDP obtida é *exatamente* a mesma da obtida pelo método dos ativos contingentes (EDP de Black-Scholes-Merton). Explique o motivo.**
  - **Solução: a seguir. Mas tente resolver sem ver a solução.**

Programação Dinâmica Sob Medida Q

- **Na forma binária e sob medida P a eq. de Bellman é:**

$$F(V,t) = \max\left\{\underbrace{\Omega(V,t)}_{\text{parar}}\ ;\ \underbrace{\pi(V,t)\,dt + (1+\rho\,dt)^{-1}\, E^{P}\left[F(V+dV,\, t+dt) \mid V(t)\right]}_{\text{continuar}}\right\}$$

  - **A EDP desejada é válida para a *região de continuação*, enquanto que na *região de parada* (exercício ótimo em V*(t) da opção ou expiração da opção sem exercício) o valor de F é dado pelas *condições de contorno*.**
  - **Como a opção F não tem dividendos ou fluxos de caixa nessa região, $\pi(V, t) = 0$. Assim, a eq. de Bellman se torna:**

$$F(V,t) = \frac{1}{1+\rho\,dt} E^{P}\left[F(V+dV,\, t+dt) \mid V(t)\right]$$

  - **Sob medida Q, sabe-se que o derivativo F(V, t) descontado pela taxa r é um valor livre de arbitragem. Usando E^Q, a expectativa NR, e r no lugar de ρ:**

$$F(V,t) = \frac{1}{1+r\,dt} E^{Q}\left[F(V+dV,\, t+dt) \mid V(t)\right]$$

Programação Dinâmica Sob Medida Q

- Como $E^Q[F(V + dV, t + dt \mid V(t)] = F(V, t) + E^Q[dF(V, t)]$ podemos escrever:

$$F(V,t) = \frac{1}{1 + r\,dt}\left[F(V,t) + E^Q\left[dF(V,t)\right]\right]$$

$$\Rightarrow F(V,t)(1 + r\,dt) = \left[F(V,t) + E^Q\left[dF(V,t)\right]\right]$$

$$\Rightarrow F(V,t)\; r\,dt \;=\; E^Q\left[dF(V,t)\right] \quad \text{(eq. 1)}$$

  - Mas dF pode ser obtido pelo lema de Itô para F(V, t):

$$dF \;=\; \frac{\partial F}{\partial V}\,dV \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\,(dV)^2 \;+\; \frac{\partial F}{\partial t}\,dt$$

  - Sob medida Q $\Rightarrow$ V segue um MGB neutro ao risco, i. é, $dV^Q = (r - \delta)\,V\,dt + \sigma\,V\,dz^Q$, sabendo que $dV^2 = \sigma^2\,V^2\,dt$ e tomando o valor esperado de dF sob Q (note que apenas o termo em dV é estocástico por ter o incremento dz), i. é:

$$E^Q\left[dF\right] = \left((r - \delta)\,\frac{\partial F}{\partial V} \;+\; \frac{1}{2}\,\sigma^2\,V^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \;+\; \frac{\partial F}{\partial t}\right)dt$$

Programação Dinâmica Sob Medida Q

- Substituindo na (eq. 1) e dividindo por dt, obtemos:

$$r\,F(V,t) \;=\; \frac{1}{2}\,\sigma^2\,V^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (r - \delta)\,\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,\sigma^2\,V^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (r - \delta)\,\frac{\partial F}{\partial V} \;-\; r\,F(V,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

  - Que é a EDP de Black-Scholes-Merton (c.q.d.), que *antes* tinha sido obtida por considerações de não-arbitragem (carteira sem risco tem de ter retorno igual a taxa r).

- Na demonstração foi assumido que existe (pelo menos uma) a medida equivalente de martingale Q e pelo 1º teorema fundamental de apreçamento de ativos essa medida permite obter preços livres de arbitragem.
  - Sob medida Q, foi usado a equação de dV seguindo um MGB sob Q, isto é, com drift $r - \delta$ em vez do drift real α.

EDP para Opção Real Perpétua

- Se o tempo de expiração é infinito, se cai num caso mais simples, pois o tempo t deixa de ser variável de estado.
  - Postergar uma decisão leva a uma nova opção perpétua;
  - Assim, o valor da opção do caso anterior é função só de V;
  - A derivada parcial da opção em relação ao tempo é zero: $F_t = 0$
- Assim, a EDP de F(V, t) se torna uma *equação diferencial ordinária* (EDO), F(V), dada por:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,V^2\,F_{VV} + (r - \delta)\,V\,F_V - r\,F = 0$$

  - Com o gatilho V* independente do calendário, as três cc. são:
  - ❶ Para $V = 0$, $F(0, t) = 0$
  - ❷ Para $V = V^*$, condição de continuidade, $F(V^*) = V^* - I$
  - ❸ Para $V = V^*$, condição de "contato suave", $F_V(V^*) = 1$
- Essa ODE tem solução analítica do tipo $F = A\,V^{\beta}$ (cc. 1)
  - Onde A é uma constante a achar com as cc. e β será visto a seguir

Equação Quadrática Característica

- Substituindo a solução $F = A\,V^{\beta}$ na EDO e simplificando se obtém a seguinte equação quadrática fundamental:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,\beta\,(\beta - 1) + (r - \delta)\,\beta - r = 0$$

  - Que tem duas raízes. Prova-se que $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$:

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \tfrac{1}{2}]^2 + 2\,r/\sigma^2}$$

$$\beta_2 = \tfrac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \tfrac{1}{2}]^2 + 2\,r/\sigma^2}$$

- Assim, a solução da EDO é do tipo: $F = A_1\,V^{\beta_1} + A_2\,V^{\beta_2}$
  - As constantes A_1 e A_2 serão determinadas com as cc.
    - ➨ Por ex., no slide anterior, a primeira cc. implica que $A_2 = 0$ (caso contrário, quando $V \to 0 \Rightarrow F \to \infty$ em vez de $F \to 0$)
  - Substituindo a solução $F = A_1\,V^{\beta_1}$ na segunda e terceria cc., se obtém a constante A_1 e o gatilho V* (ver próximo slide).

Solução Analítica e Relevância Prática

- Caso de opção <u>perpétua ou muito longa</u> a EDP vira uma EDO ($F_t = 0$) que tem solução analítica.
  - Patentes (20 anos no Brasil): boa solução aproximada.
  - Desenvolvimento de um terreno urbano.
  - Ford investir em nova fábrica no Brasil.
  - Abrir novas lojas de sua *griffe.*
- O valor da opção F e o gatilho V*, valem:

$$F = A V^{\beta_1} \quad ; \text{e} \quad V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$$

Onde: $A = (V^* - I) / (V^*)^{\beta_1}$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Exemplo: Terreno Urbano

- Suponha que exista um terreno urbano vazio que pode ser desenvolvido por D = \$ 2 MM. O imóvel construído teria hoje um valor de mercado de V = \$ 2,2 milhões.
  - Considere que o preço futuro do imóvel é incerto, e a volatilidade do mercado de imóveis é de σ = 40% aa
  - Considere a taxa de juros de r = 10% aa.
  - Considere que o aluguel <u>anual</u> que se pode obter com o imóvel V é de δ = 10% do valor de V
- Qual o valor do terreno? Devemos desenvolver hoje ou esperar por melhores condições?
- O que ocorreria se o governo cria-se uma taxa para terrenos ociosos? Suponha \$20.000/ano para esse caso.
- O que ocorreria se o governo criasse normas restringindo o desenvolvimento e reduzisse a incerteza no valor V?

Opção de Desenvolver Terreno

- Usando as fórmulas da solução analítica de uma opção perpétua, temos os valores da opção F e do gatilho V*

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2\,r}{\sigma^2}} = 1{,}72$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} D \Rightarrow \boxed{V^* = \$\ 4{,}76 \text{ milhões}}$$

OBS: D = 2 milhões

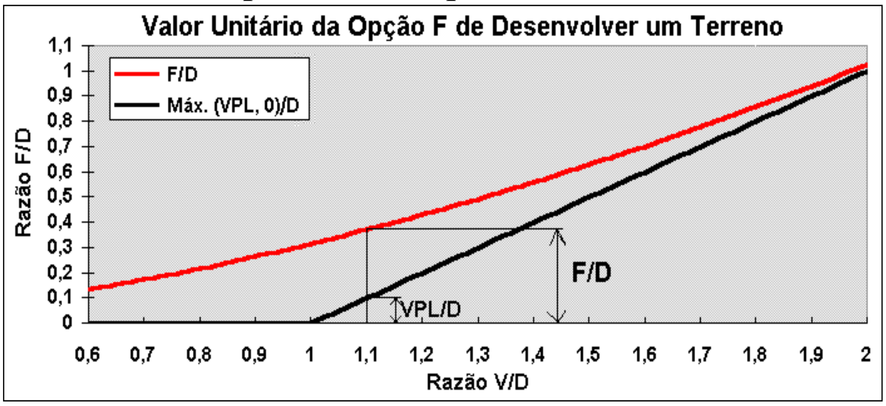
$$\left.\begin{aligned} A &= (V^* - D) / (V^*)^{\beta 1} \\ F &= A\, V^{\beta_1} \end{aligned}\right\} \boxed{F = \$\ 0{,}73 \text{ milhões}}$$

OBS: VPL = 0,2 milhões

- O valor do gatilho diz que para investir hoje seria necessário que o projeto V valesse mais do dobro do seu custo D (devido a elevado σ)
- O valor do terreno é bem maior que o VPL do investimento imediato

Valor do Terreno (Opção) x Valor do Imóvel

- O gráfico mostra a curva da opção sendo superior à reta do VPL, sendo que a curva irá tangenciar a reta do VPL em num valor V/D pouco maior que 2.



- Repare que para V = 2,2 milhões (e logo, V/D = 1,1), o valor do terreno urbano é bem maior que seu VPL.
- Já para projetos mais lucrativos (V/D maior), o valor de opção fica mais próximo do valor intrísico (VPL) do projeto

Valor do Terreno: Taxação e Escala

- **O que ocorreria se o governo cria-se uma taxa para terrenos ociosos? Suponha $20.000/ano para esse caso.**
  - **Isso poderia ser pensado como uma maneira de reduzir o ganho dos juros. Assim a espera em vez de ser remunerada a uma taxa de juros r = 10% (= $200.000 / ano), passaria a ser remunerada com r' = 9% (= $200.000 – $20.000 = $180.000)**
  - **O valor da opção e o gatilho seriam então calculados com essa nova taxa de juros r', reduzindo a opção F e o gatilho V*.**
  - **Embora esteja *qualitativamente correto*, quantitativamente ela é muito imprecisa. *A solução correta está no próximo slide*.**
- **O que ocorreria se o governo criasse normas restringindo o desenvolvimento e reduzisse a incerteza no valor V?**
  - **A *redução na incerteza*, assim como a *redução* do número de *opções de escala* de desenvolvimento (ex.: limitando a altura do prédio), reduz o valor do terreno, e aumenta a propensão ao investimento no desenvolvimento.**

Eq. Diferencial de Derivativo com Fluxo de Caixa

- **Nesse problema de taxação durante a espera, o derivativo (opção real de desenvolver o terreno) tem um fluxo de caixa que aqui é o fluxo de imposto. Isto é, o fluxo de caixa – c dt.**
  - **Antes (equação clássica de Black-Scholes-Merton), a opção F(V) não tinha fluxo de caixa (só V tinha fluxo de caixa δ V dt).**
- **A dedução da equação diferencial é similar ao caso anterior, mas agora incluindo o termo de fluxo de caixa do derivativo na equação de retorno do portfólio $\Phi = F - n V$, que ficaria:**

$$r (F - n V) dt = (dF - c\, dt) - n (dV + \delta V dt)$$

  - **O procedimento é exatamente igual ao anterior: usar o lema de Itô p/ dF, substituir $(dV)^2$ pela função de dt onde V segue MGB (dica: não precisa substituir dV, ele vai sumir com a escolha de n) e escolher n p/ o retorno ser r. Algebrando, obtemos a EDO:**

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - r F - c = 0$$

- **Onde – c é o *termo não-homogêneo*, ou "*termo de fluxo de caixa*".**

Valor do Terreno com Taxação

- A solução correta para o caso de taxação é considerar que existe um fluxo de caixa da opção na equação de retorno do portfólio e montar uma nova EDO de F(V).
  - Vimos que isso gera um termo de "fluxo de caixa", um termo *não-homogêneo* na EDO, a qual passa a ser:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - r F - c = 0$$

  - Onde c é o fluxo de custo da opção (no ex., c = 0,02 MM$/ano).
  - A solução dessa EDO não-homogênea é a soma da *solução geral* (parte homogênea, em azul) mais a *solução particular* (parte não-homogênea, - c). Solução geral: $F(V) = K V^{\beta}$
  - Como é típico, a perpetuidade $F = - c/r$ é *solução particular* (verifique substituindo essa solução na EDO acima). Isso porque uma solução particular é *esperar eternamente*. Logo:
  - Se $V \leq V^*$, $F(V) = K V^{\beta 1} - c/r$ (de novo, o termo em $V^{\beta 2}$ é 0).
  - As condições de continuidade e suavidade em V* são, resp.:
  - Se $V = V^*$, $F(V^*) = V^* - D$ e $F_V(V^*) = 1$

Valor do Terreno com Taxação

- Substituindo $F(V) = K V^{\beta 1} - c/r$ nas c.c. anteriores:
  - $V^* - D = K V^{\beta 1} - c/r \Rightarrow K = (V^* - D + c/r) / (V^*)^{\beta 1}$
  - $1 = K \beta_1 (V^*)^{\beta 1 - 1} \Rightarrow$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\left(D - \frac{c}{r}\right)$$

$$F = K V^{\beta_1} - \frac{c}{r}$$

- Com os valores do exemplo, o valor do terreno F e o gatilho V* com a taxação passam a ser:
  - F = 0,59 MM$ (contra F = 0,73 MM$ do caso sem taxação)
  - V* = 4,28 MM$ (contra V* = 4,76 MM$ do caso sem taxação)
  - Usando a aproximação grosseira de r' = 9%, se obteria valores intermediários mas mais próximos do caso sem taxação. Isto é, com r' = 9% seriam obtidos: F = 0,708 MM$ e V* = 4,62 MM$.

Método Integral de Otimização sob Incerteza

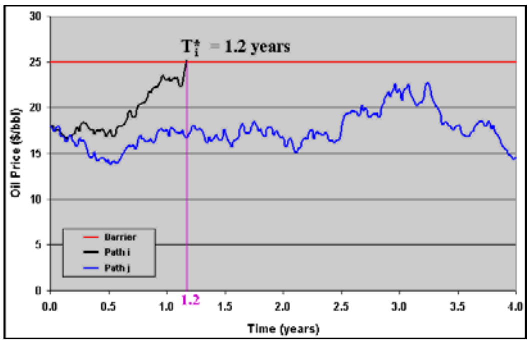
- **O método integral pode resolver problemas de OR, pois é um método de *otimização sob incerteza*.**
  - **Usa métodos tradicionais de otimização. Em problemas de OR *perpétuas*, esse método é mais simples e intuitivo.**
  - **Baseado no tempo t* que um processo estocástico toca uma barreira (um gatilho), usa muito o valor esperado do *fator de desconto estocástico* $E^Q[\exp(-r\,t^*)]$.**
    - **Pois a opção pode ser vista como $E^Q[e^{-r\,t^*}(V^* - I)]$.**
- **Muito usado p/ resolver jogos de opções reais (ex.: duas firmas disputando um mercado) com integrais do tipo:**

$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,0)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I$$

$$F(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(0,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E\left[e^{-rT^*}\right] I$$

Tempo de Toque de um Processo Estocástico

- **"*First hitting time*" ou "*first passage time*" ou "*first exit time*" denotam o primeiro instante em que um processo estocástico toca (ou cruza) um certo valor (ex.: o gatilho)**



Ver planilha simula-hit_time.xls.

- **A definição de *first hitting time* $T^*(V = b) = T^*_b$ para um processo estocástico V(t) alcançar (ou cruzar) a barreira b, assumindo que o processo inicia com V(t = 0) < b, é:**

$T_b^* = \inf\{\, t \geq 0 \,;\, V(t) \geq b \,\}$ **; onde o ínfimo de um conjunto vazio é infinito**

Valor Esperado do Tempo de Toque E[t*]

- O valor de E[t*] depende da tendência do processo estocástico. Ex.: p/ uma barreira superior P*, o processo NR demora mais do que o processo real para atingir P*.
- O cálculo do valor esperado desse tempo de toque, E[t*], é relevante p/ *planejamento de portfólio* (processo é *real*):
  - Quando é esperado o exercício da OR de investir num projeto?
- Se o ativo básico V segue um MGB com drift α e valor inicial V_0, então E[t*] até uma barreira superior b fixa é:

$$E[\,t^*(V = b)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2} \ln\left(\dfrac{b}{V_0}\right) & \text{se } \alpha > \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \infty & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2}\sigma^2 \end{cases} \quad (\text{com } b > V_0)$$

  - Mais detalhes: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html
  - Ver planilha simula-hit_time.xls que inclui fórmulas (MGB) p/ densidade de probabilidade de t*, probabilidade acumulada de atingir b e probabilidade de eventual toque p/ 1 e 2 barreiras.

Valor Esperado do Fator de Desconto

- Mas muito + importante na prática é calcular o *fator de desconto esperado* $E^Q[\exp(-r\,t^*)]$. A fórmula é simples.
  - Lembrar: saber E[t*] não basta: $E[\exp(-r\,t^*)] > \exp(-r\,E[t^*])$.
- Podemos provar uma importante fórmula para X(t) seguindo MGB neutro ao risco, onde $X^* < X_0$ é um gatilho:

$$E^Q\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X_0}{X^*}\right)^{\beta_1}$$

- Onde β_1 é a raiz positiva da eq. quadrática p/ o caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR $(r - \delta)$ e taxa de desconto livre de risco r: $\beta_1 = ½ - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,r/\sigma^2}$
- No caso de usar tendência *real* α e taxa de desconto exógena (ajustada ao risco) ρ, i.é, $E[\exp(-\rho\,t^*)]$, só muda o β_1:

$$\beta_1 = ½ - \alpha/\sigma^2 + \sqrt{[\alpha/\sigma^2 - ½]^2 + 2\,\rho/\sigma^2}$$

- Prova: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html#proof

Método Integral de Otimização

- O método é particularmente útil para OR *perpétuas*.
  - Usa uma soma de integrais estocásticas para descrever valores de opções, em que os limites de integração são tempos de parada ótima t* combinados com tempos limites triviais (0 e ∞).
  - Método tem no cap. 9 de DP, mas ele foi desenvolvido melhor em Dixit & Pindyck & Sodal (1997), com outros processos estocásticos.
- O problema clássico de *otimização sob incerteza* pode ser visto assim: A firma irá esperar até o primeiro instante t* no qual o valor do projeto V atinge um nível V* (gatilho), alto o suficiente para ser ótimo investir (exercer a OR), i.é:

$$F = \underset{V = V^*}{\text{máximo}} \{E[\exp(-\ r\ t)\ (V\ -\ I)\}$$

  - Sujeito a V seguir um MGB neutro ao risco. No ótimo V = V*, t = t*.
  - Assim, o problema de otimização tem um *trade-off* entre a espera por um *valor maior de V* e a redução de F com a espera por exp(– r t)
  - Vamos provar que se obtém o mesmo resultado para F e V* obtido antes para uma opção americana perpétua por *contingent claims*.

Otimização com o Fator de Desconto Estocástico

- Vamos chamar o *fator de desconto esperado* p/ o tempo que o projeto leva para atingir um valor V, começando em V_0, como sendo $D(V_0, V) = E[\exp(-\ r\ t)]$. Logo,

$$F = \underset{V = V^*}{\text{máximo}} \{D(V_0, V)\ (V\ -\ I)\} = D(V_0, V^*)\ (V^*\ -\ I)$$

- Usaremos um *método tradicional de otimização* p/ resolver: a *condição de primeira ordem* (*derivada parcial de F em relação a V e iguala a zero em V = V**). "Algebrando":

$$D(V_0, V^*) + D_{V^*}(V_0, V^*)\ .\ V^* = D_{V^*}(V_0, V^*)\ .\ I \qquad \text{(eq. 1)}$$

  - O 1º termo já foi visto que é $(V_0/V^*)^{\beta_1}$, o 2º termo é sua derivada:

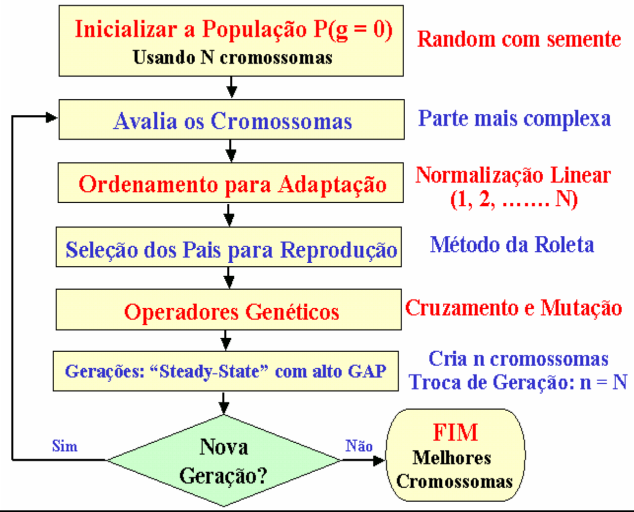
$$D_{V^*}(V_0\ , V^*) = -\ \beta_1\ \frac{V_0^{\beta_1}}{(V^*)^{\beta_1 + 1}}$$

  - Agora, basta substituir $D(V_0, V^*)$ e $D_{V^*}(V_0, V^*)$ na (eq.1), que encontramos o valor de V*. Substituindo V* e $D(V_0, V^*)$ na eq. de maximização de F, obtemos dois resultados conhecidos:

$$\boxed{V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\ .\ I} \qquad \boxed{F = \left(\frac{V_0}{V^*}\right)^{\beta_1} \frac{I}{\beta_1 - 1}} \qquad \text{c.q.d}$$

Método Evolucionário de Otimização

- **<u>Computação evolucionária</u>: usa idéias da teoria da evolução (Darwin) para *evoluir soluções* até chegar ao ótimo (ou perto)**
  - **<u>Algoritmos genéticos</u> (AG): usa operadores crossover, mutação, etc. p/ evoluir soluções. Um fluxograma típico de algoritmos genéticos é:**

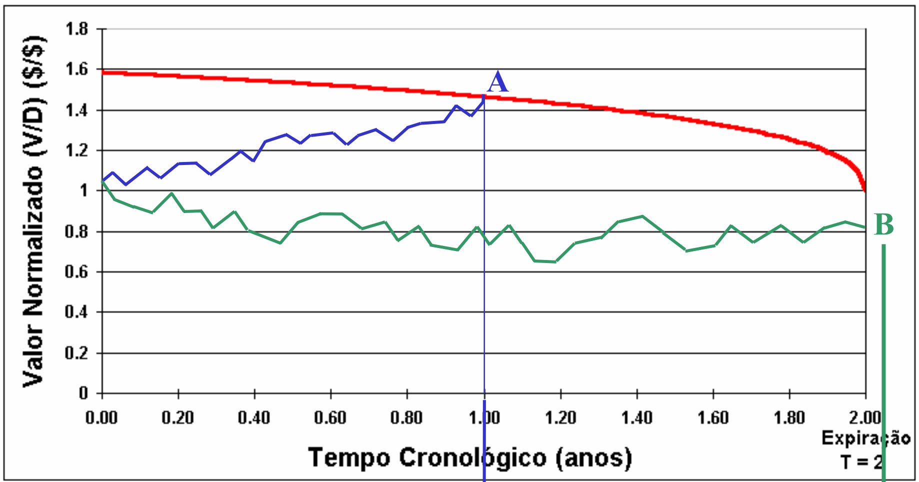


Método Evolucionário de Otimização

- **O método dos *algoritmos genéticos* (ramo da *computação evolucionária*) é uma alternativa de otimização sob incerteza que pode se tornar popular com o avanço da velocidade computacional por ser relativamente simples.**
  - **Na PUC-Rio, o dept. de Eng. Elétrica oferece boas disciplinas.**
- **Motivação: sabemos que o *valor da opção é advindo da regra de decisão ótima* (exercício ótimo da opção), i. é, a regra (curva de gatilho) que maximiza o valor da opção.**
  - **Isso sugere que podemos "chutar" uma regra de decisão inicial e calcular o valor da opção <u>condicional a essa regra</u>.**
    - **Valoração é feita facilmente com simulação neutra ao risco do processo(s) estocástico(s).**
  - **Usando uma metodologia (ex.: algoritmos genéticos) podemos modificar (*evoluir*) essa regra buscando avaliações (valores da opção) cada vez maiores, até chegar perto do ótimo.**
  - **Ex.: OR de investir D para desenvolver um projeto de valor V, com tempo de expiração T = 2 anos. Como valorar uma regra?**

Valor da Opção Real Dada a Regra de Decisão

- Os caminhos simulados são *parados* se tocar a curva de gatilho, pois a opção é exercida. A simulação é neutra ao risco.



F(t = 0) =
= F(t=1) * exp (– r*t)

Valor presente (t = 0)

Opção F(t = 1) = V – D

F(t = 2) = 0

Expirou sem Valor

Faça n iterações e calcule E[F(0)]

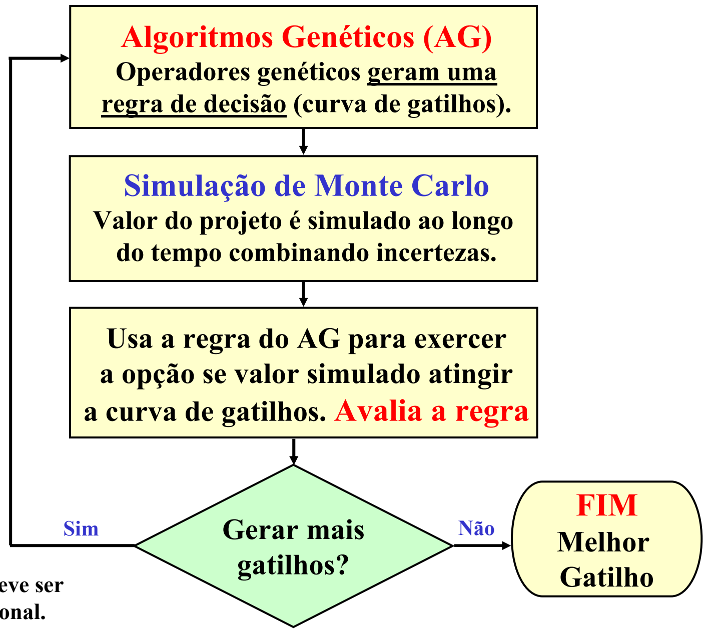
Algoritmo Genético + Simulação

- Esse é um problema de otimização sob incertezas.
  - O Algoritmo Genético trata da otimização.
  - A simulação de Monte Carlo trata das incertezas.
- O algoritmo genético gera uma regra de exercício da opção (V/D)*(t), t ∈ [0, T], uma *curva de gatilhos*.
- As incertezas no valor do projeto normalizado são simuladas (simulações neutras ao risco de V e D).
- Se o valor (normalizado) do projeto simulado for maior ou igual que o gatilho a opção é exercida, senão espera.
- Após n iterações, a regra de decisão é avaliada com:

$$F(t = 0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(t=0)}{n}$$

- Através dos operadores genéticos, novas regras de decisão são geradas e repete-se o ciclo.

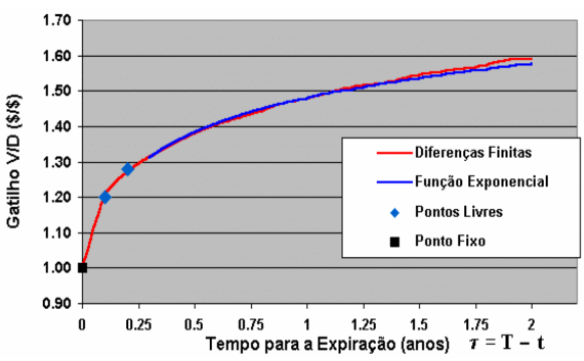
Opções Reais Evolucionárias: Fluxograma

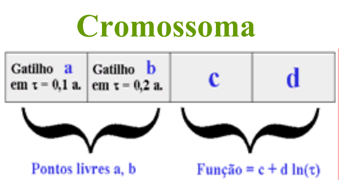


- A regra de parada deve ser por tempo computacional.

Opções Reais Evolucionárias

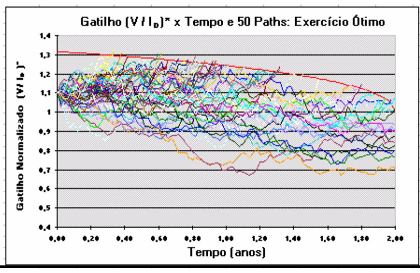
- Opções reais evolucionárias: idéia é evoluir as curvas de gatilhos candidatas a serem a curva ótima, usando *computação evolucionária*.
- Ex: Dias (2001) usou dois pontos livres (a e b) e uma função logarítmica ($c + d \ln\tau$) (definida por dois fatores (c e d) para representar o gatilho. Assim, o cromossoma tem 4 parâmetros (ou 4 "genes") a serem evoluídos na busca do ótimo.
- A figura e a planilha gatilho-cromossoma.xls ilustram Dias (2001):





Opções Reais Evolucionárias: Vantagens

- **OR evolucionárias é uma abordagem direta, *forward* (não é "backwards"), mais simples em termos matemáticos, flexível**
  - **Simplicidade pode popularizar opções reais.**
  - **Sua força reside na capacidade de *fugir de ótimos locais* e no elevado *paralelismo implícito*, que é o grande apelo teórico de AG.**
  - **Paralelismo implícito dos AG foi provado por Holland em seus teoremas de esquemas ("schema", ver slide no anexo).**
- **A desvantagem (cada vez menos relevante) é que o tempo computacional pode ser grande p/ chegar a uma boa solução.**



Métodos Numéricos para Opções Reais

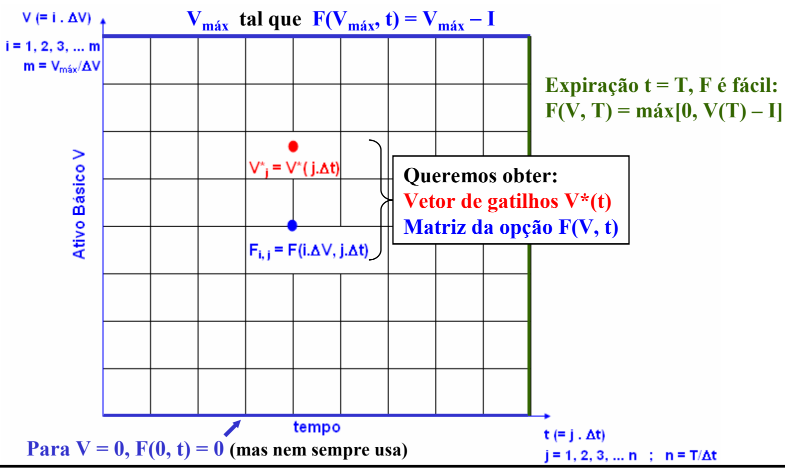
- **Quando não há solução analítica ou aproximação analítica, temos de recorrer aos métodos numéricos.**
  - **Já vimos o método binomial na parte 2. Veremos agora o método das diferenças finitas que procura aproximar a EDP, ao contrário do binomial, que aproxima o processo estocástico.**
  - **Na parte 6 iremos ver a simulação de Monte Carlo.**
  - **Recentemente tem sido usado o método dos *elementos finitos*.**
- **Nos métodos numéricos temos em geral o problema de discretização seja da EDP seja do processo estocástico.**
  - **As discretizações geralmente são aproximações (*equações de diferenças* para aproximar diferenciais) com erros numéricos e podem causar outros problemas numéricos a serem vistos.**
- **O método das diferenças finitas em finanças foi introduzido por Brennan & Schwartz em 1977 e 1978.**
  - **Veremos só o método *explícito* por ser mais intuitivo e didático.**
  - **Existe outros, como o método *implícito* e o de *Crank-Nicolson*.**

Método das Diferenças Finitas

- **Método numérico específico para equações diferenciais.**
  - **Método popular para resolver a EDP de opções americanas;**
  - **Particularmente útil quando tem múltiplas opções (espera, parada, abandono, etc.) e poucas variáveis estocásticas.**
    - ➡ **Manuseia facilmente opções compostas complexas/múltiplas.**
    - ➡ **Tempo computacional factível até 3 variáv. estocásticas + tempo.**
  - **Binomial resolve diretamente da equação do processo estocástico sem construir a EDP, mas nem sempre é o meio mais prático ("floresta").**
- **A EDP é convertida em um conjunto de *equações de diferenças* e as mesmas podem ser resolvidas iterativamente.**
- **O método das diferenças finitas (D.F.) *explícitas* é mais intuitivo que as D.F. implícitas, mas podem apresentar *problemas de convergência* (ao contrário das implícitas)**
  - **Mas isso pode ser evitado fazendo a discretização no tempo (Δt) suficientemente pequeno em relação a discretização da variável(eis) estocástica(s), ex.: ΔV. Será visto como evitar.**

Diferenças Finitas para F(V, t): Grid e c.c.

- **Iremos ilustrar o método para o caso clássico da opção real de espera F(V, t) com um tempo legal de expiração.**
  - **I. é, a *opção americana de compra* com $\delta > 0$ em que V segue um MGB e a opção expira em t = T. É fácil adaptar p/ outros casos.**
- **A discretização de V e t e as c.c. podem ser vistas num *grid*:**



Diferenças Finitas Explícitas para F(V, t)

- **Vamos aproximar as derivadas parciais (indicadas pelos subscritos) da conhecida EDP do derivativo F(V, t):**

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)\, V\, F_V + F_t = r\, F$$

- **Existem várias equações de diferenças alternativas para aproximar as derivadas parciais. Usaremos as seguintes:**

$$\frac{\partial F}{\partial t} \cong \frac{F_{j+1,i} - F_{j,i}}{\Delta t}$$

Derivada em relação ao tempo (que só move p/ frente usa a *equação de diferenças para frente* (“*forward*”).

$$\frac{\partial F}{\partial V} \cong \frac{F_{j+1,i+1} - F_{j+1,i-1}}{2\,\Delta V}$$

Derivada em relação ao ativo básico usa a *equação de diferenças central.*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \cong \frac{F_{j+1,i+1} - 2\,F_{j+1,i} + F_{j+1,i-1}}{\Delta V^2}$$

Derivada 2ª relativo ao ativo básico tb. usa a *equação de diferenças central.*

- **Agora substituiremos as equações de diferenças na EDP acima e V por i ΔV. Já dá p/ ver que $F_{j,i}$ (o F do lado direito da EDP) é função de três valores futuros $F_{j+1,*}$ (onde $* = i - 1$, i e $i + 1$)**

Diferenças Finitas Explícitas para F(V, t)

- **Substituindo, temos:**

$$r\,F_{j,i} = \frac{1}{2}\,\frac{F_{j+1,i+1} - 2\,F_{j+1,i} + F_{j+1,i-1}}{\Delta V^2}\,\sigma^2\, i^2 \Delta V^2 + (r - \delta)\,\frac{F_{j+1,i+1} - F_{j+1,i-1}}{2\,\Delta V}\, i\,\Delta V + \frac{F_{j+1,i} - F_{j,i}}{\Delta t}$$

- **Cortando os ΔV e re-arrumando, temos:**

$$F_{j,i} = \frac{1}{1 + r\,\Delta t}\left[\left(p_u\, F_{j+1,i+1}\right) + \left(p_m\, F_{j+1,i}\right) + \left(p_d\, F_{j+1,i-1}\right)\right]$$

$$p_u = \frac{1}{2}\left[\sigma^2\, i^2 + (r - \delta)\, i\right]\Delta t$$

$$p_m = 1 - \sigma^2\, i^2\, \Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{2}\left[\sigma^2\, i^2 - (r - \delta)\, i\right]\Delta t$$

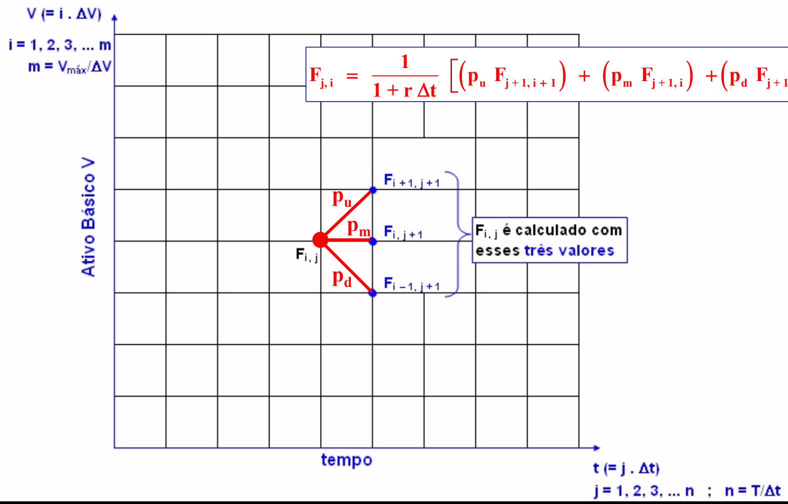
Pesos dos valores futuros $F_{j+1,*}$ interpretados como “probabilidades” (note que $p_u + p_m + p_d = 1$).

- **Isso significa que esse esquema é bem similar ao esquema *trinomial* com cálculo *backwards* (ver próximo slide).**

- **Pode ser mostrado que tanto o binomial como o trinomial são casos particulares do método de diferenças finitas (James, 2003; Haug, 2007).**

Diferenças Finitas Explícitas para F(V, t)

- **A equação anterior é proveniente da EDP e portanto é o valor da opção em caso de espera (opção "viva").**
  - **Gatilho V*(t): calcula o menor valor de V tal que $V - I \geq F_{i,\,j}$.**
  - **O valor da opção é dada pela equ. anterior visualizada no grid:**



Diferenças Finitas Explícitas para F(V, t)

- **O algoritmo de DF Explícitas é similar ao do método binomial visto, pois trabalha-se "backwards":**
  - **Primeiro calculamos os valores da opção (e o gatilho) em t = T que é fácil: $F(V, T) = \text{máx}\{V(T) - I,\, 0\}$; $V^*(T) = I$.**
    - **Para t = T o algoritmo "varre" o eixo do V, desde i = 0 até m.**
  - **Em seguida se calcula $F(V, T - 1)$ usando a equação de $F_{j,\,i}$ e comparando com o payoff de exercício $V(T - 1) - I$.**
    - **O que for maior é o valor da opção.**
    - **O valor do gatilho $V^*(T - 1)$ estará entre os valores de V vizinhos tal que em $(i - 1)$ temos $F_{j,\,i}(T - 1) > V(T - 1) - I$ e em i temos o caso oposto ($\leq$). Ou seja, o algoritmo varre i p/ buscar V em que muda a regra ótima de decisão da espera para o exercício.**
  - **Vai repetindo *backwards* até chegar em t = 0 (faz j = n – 1 a 0).**
  - **OBS: para assegurar a convergência do método explícito em geral se recomenda usar uma discretização do tempo Δt bem menor que a da v.a. ΔV de forma a termos "probabilidades" *positivas* p_u, p_m, p_d. Mas vamos ver uma regra mais geral.**

Problemas Numéricos das Diferenças Finitas

- **Os principais problemas numéricos que podem ocorrer no método das diferenças finitas são:**
  - **Consistência: tem de ser uma aproximação do problema original. Assim, tornando mais fino o grid, as eqs. de diferenças convergem para a *verdadeira* EDP e não outra.**
  - **Convergência: A solução obtida pelas eqs. de diferenças converge para a solução real quando Δt e $\Delta V \to 0$? Ou converge para a solução errada? Ou fica oscilando?**
  - **Estabilidade: pode ocorrer instabilidade se os erros de aproximação do computador forem sendo amplificados a cada passo (Δt ou ΔV) no grid. Isso é função do esquema de discretização adotado. No caso de D.F. explícitas:**
    - **DF Explícitas são estáveis só se $\Delta t \leq (\Delta V)^2 / 2$.**
- **Teorema da Equivalência de Lax: dado um esquema de DF consistente, a estabilidade é condição necessária e suficiente para obter a convergência. Logo, estabilidade $\Leftrightarrow$ convergência**

Outras Formulações para a Opção Americana

- **Daremos uma notícia sobre as diferentes formulações teóricas para o problema de opções americanas: fronteira livre; parada ótima; desigualdade variacional.**
- ***Fronteira livre* (curva de gatilho) é a formulação clássica usada por DP que vem desde Samuelson (1965). Já vista.**
- ***Parada ótima* é uma formulação útil para uma clara apresentação do problema e é particularmente útil no método integral de otimização, assim como em métodos que usam simulação de MC (ex.: evolucionário).**
- ***Desigualdade variacional* é uma formulação que permite <u>provar resultados teóricos</u> (exs.: solução ótima é única nos problemas de opções americanas; fórmula do prêmio de exercício antecipado, etc.) e justifica certos <u>métodos numéricos</u> de solução (*linear complementarity*).**

Opção Americana como Parada Ótima

- Seja uma *opção americana de compra* $F(V, t; I)$ simples, onde V segue um processo estocástico e I é o preço de exercício. Seja a notação: $(V - I)^+ = \text{Max}(V - I, 0)$.
  - A opção $F(V, t)$ pode ser representada como um problema de parada ótima usando o seguinte *envelope de Snell* (sup E[.]):

$$F(V, t) = \sup_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}^Q \{\exp[-r(\tau - t)]\,(V_\tau - I)^+ \mid V_t\}$$

  - Onde Q significa que a expectativa (condicional a V_t, valor de V conhecido em t) é calculada sob medida de martingale. O supremo é tomado escolhendo o *tempo ótimo de parada* t* dentre todos os tempos de parada $\tau \in [t, T]$. A solução é:

$$t^* = \inf\{\tau \in [t, T];\ F(V_\tau, t) = (V_\tau - I)^+\}$$

  - Com a usual convenção de que o ínfimo de um conjunto vazio é igual a $+\infty$ (nunca exerce a opção: F = 0, pois $\exp[-\infty] = 0$).
  - Em palavras, t* é o primeiro instante em que o valor da opção "viva" (sem exercer) é igual ao valor do payoff de exercício.

Opção Americana como Parada Ótima

  - No caso anterior, se a opção for *perpétua* basta substituir o intervalo fechado [t, T] pelo intervalo aberto $[t, \infty)$.
- Essa representação se aplica a casos mais gerais: seja um payoff de exercício genérico g(V) e seja a taxa livre de risco r uma função determinística do tempo. O valor no instante t da opção americana, F(V, t), é:

$$F(V, t) = \sup_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}^Q \left\{\exp\left[-\int_t^\tau r_s\, ds\right]\ g(V_\tau) \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

  - Onde a expectativa é condicional à filtração em t (informação acumulada até t) no espaço mensurável onde V_t é definido.
  - O supremo é tomado dentre todos os tempos de parada e a solução ótima (*optimal stopping time* t*) é dada por:

$$t^* = \inf\{\tau \in [t, T];\ F(V_\tau, t) = g(V_\tau)\}$$

  - Essa representação é útil no tópico 7. Se der tempo, veremos um modelo complexo de Dias (2002) com <u>5</u> variáveis de estado.

Opção Americana e Desigualdade Variacional

- **Qualquer opção americana pode ser escrita como uma desigualdade. Ex. (call): $F(V, t) \geq Max(V - I, 0)$.**
  - **Além disso, a equação diferencial da opção é uma igualdade apenas enquanto ela está "viva". Em termos mais gerais ela é escrita como uma desigualdade (subscritos aqui são derivadas):**

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - r F + F_t \leq 0$$

  - **A principal característica dessa formulação é que não é preciso calcular a curva de gatilhos para saber o valor da opção.**
    - **Isso *não* é vantagem no contexto de opções reais, pois a curva de gatilhos (regra de exercício) é tão importante quanto o valor F.**
  - **Entretanto, essa formulação é útil p/ termos uma compreensão mais ampla das opções e em termos teóricos (facilita provas):**
    - **Wilmott et al (1993, p. 126): "*can be shown that the variational inequality has one and only solution... it is quite important in more complicated situations*". Por isso tem sido usada em papers.**
  - **Além disso, essa formulação justifica de forma rigorosa alguns métodos numéricos, inclusive o método das diferenças finitas.**

Opção Americana e Complementaridade Linear

- **Há uma certa confusão com os termos "*desigualdade variacional*" e "*problema de complementaridade linear*":**
  - **Ex.: o sistema de desigualdades que o livro de Musiela & Rutkowski chama de des. variacional, o livro do Tavella chama de complementaridade linear. Esses conceitos são relacionados.**
  - **A forma *canônica* do LCP (*linear complementarity problem*) é : dada a matriz $\mathbb{A}$ e os vetores b e c, LCP consiste em achar x, o vetor que satisfaz o sistema de desigualdades:**

i. $\mathbb{A}\, x \geq b$

ii. $x \geq c$

iii. $(x - c) . (\mathbb{A}\, x - c) = 0$

- **No contexto de derivativos, a *região de parada ótima* (exercício ótimo da opção) é um conjunto fechado que é complementar à *região de continuação*, que é o conjunto aberto onde a opção está "viva". Veremos o caso da *call*.**

Opção Americana e Complementaridade Linear

- O caso da *opção americana de compra* é representado por:

a. $\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - r F + F_t \le 0$

b. $F(V, t) \ge (V - I)^+$

c. $F(V, T) = (V - I)^+$

d. $[F(V, t) - (V - I)^+] \cdot [\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - r F + F_t] = 0$

- A interpretação desse problema de linear compl. é dada a seguir:
  - A inequação "a" é a conhecida EDP, que é igual a zero se o derivativo está "vivo" (opção não exercida) e menor que zero se ela for exercida (em termos matemáticos, se valer a igualdade em "b", i.é, se $F(V, t) = (V - I)^+$)
    - Dizemos que a opção F é dada pela condição de contorno e não pela EDP.
    - Escrevendo $\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V + F_t \le r F$, Tavella & Randall diz que se o valor da opção crescer mais devagar que a taxa sem risco, a opção é exercida.
  - Ineq. "b" só diz que F não pode ser menor que seu valor intrínseco V - I.
  - Ineq. "c" é a condição (de igualdade) na expiração.
  - A última ineq. ("d") faz a conexão entre "a" e "b", i. é, se a opção F estiver acima de V - I, então a EDP tem de ser zero. Se a EDP for estritamente menor que zero, então o valor da opção F tem de ser igual a V - I.

Opção Americana e Desigualdade Variacional

- O problema de complementaridade linear muitas vezes é interpretado como o problema clássico do *obstáculo*:
  - Uma função (nosso derivativo F), governada por uma EDP, deve exceder um obstáculo dado pelo payoff de exercício e obedecer certas condições de contorno em seu domínio.
- Conforme Broadie & Detemple (2004), a formulação de *desigualdade variacional* é obtida pela integração das inequações provenientes da complementaridade linear.
  - Cai numa *inequação íntegro-diferencial* em que o objetivo é encontrar uma função que a satisfaça para todo $t \in [0, T]$.
- Ver na Pasta 76 o artigo de Broadie & Detemple (2004): "*Option Pricing: Valuation Models and Applications*".
  - Embora eu tenha usado outras fontes mais simples para a parte de LCP e outras, o artigo acima é muito útil p/ entender a *moderna de teoria das opções* (medida neutra ao risco, prêmio de exercício antecipado, métodos numéricos, etc.).

Lema de Itô e Fórmula de Tanaka

- **Quando a função-valor Y é não diferenciável <u>não é possível aplicar o Lema de Itô</u>, ferramenta fundamental p/ cálcular derivativos. (Y precisa ser 2 x diferenciável).**
  - **Ex.: X(t) segue um movimento *aritmético* Browniano. Se $Y(X) = | X(t) |$, não existe derivada de Y no ponto X = 0 e não podemos usar o lema de Itô.**
- **Felizmente existe uma *generalização do Lema de Itô* para funções de v.a. não diferenciáveis, usando o conceito de *tempo local*, chamada de <u>Fórmula de Tanaka</u>.**
  - **Essa fórmula inclui um termo em que o *tempo local* $L(\xi)$ ao redor da descontinuidade ξ, multiplica a diferença das duas derivadas da função valor (derivadas à direita e à esquerda), isto é, $L(\xi)\ [V'(\xi+) - V'(\xi-)]$.**
  - **Ver livro do Karatzas & Shreve (1991, seção 3.6) para detalhes da Fórmula de Tanaka e sobre o conceito de *tempo local*.**
  - **O conceito de tempo local justifica a inexistência de "quinas" na função valor da opção em Dias & Rocha & Teixeira (2003).**

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

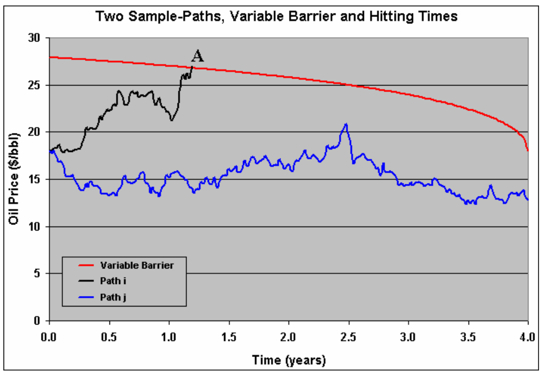
Processos de Poisson

- No lema de Itô aplicado a F(V, t) para V seguindo um processo de jump-diffusion, dV tem componentes dz (variação contínua) e dq (variação discreta).
- Quando aplica o lema de Itô e faz $(dV)^2$ é útil saber as regras de multiplicação estocástica (dq.dt; dq.dz; e dq.dq)
- Regras de multiplicação úteis para usar com o lema de Itô (fonte: Etheridge: "*A Course in Financial Calculus*", p.178) de um processo de difusão (dz) com saltos de Poisson não-composto (dq):

Multiplicação	dt	dz	dq
dt	0	0	0
dz	0	dt	0
dq	0	0	dq

First Hitting Time: Aplicações

- Tem inúmeras aplicações em opções e jogos de opções
  - Planejamento: se um projeto não está "deep-in-the-money", qual o tempo esperado para ele atingir a curva de gatilhos?
  - Cálculo da opção: exerce a opção em t* (t que atinge o gatilho), o valor da opção F(0) é o payoff descontado por E[exp(– r t*)].
  - No primeiro caso se considera o processo real e no segundo caso o processo estocástico neutro ao risco.



Valor Esperado do Fator de Desconto

- Mas, para *resolver* problemas de OR, veremos que é bem mais útil saber o *fator de desconto esperado* $E^Q[\exp(- r\, t^*)]$.
  - Saber $E[t^*]$ não é suficiente: $E[\exp(- r\, t^*)] > \exp(- r\, E[t^*])$.
  - Note que não há problema em ter caminhos com $t^* = \infty$, pois $\exp(- r\, \infty) = 0$. Logo, $E[\exp(- r\, t^*)] \in [0, 1]$, é sempre finito.
- Pode-se provar a importante fórmula p/ X seguindo MGB:

$$E\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X}{X^*}\right)^{\beta_1}$$

onde X* é o gatilho e X < X*

- Onde β_1 é a raiz *positiva* da eq. quadrática p/ o caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR $(r - \delta)$ e taxa de desconto livre de risco r: $\beta_1 = \frac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \frac{1}{2}]^2 + 2\, r/\sigma^2}$
- Vimos nessa parte os métodos do *contingent claims* (ativos contingentes) e da *programação dinâmica* para obter a equação diferencial do valor da opção e a equação quadrática característica, que gera duas raízes, β_1 e β_2.

Valor Esperado do Fator de Desconto

- No caso de termos uma barreira inferior $V^{**} < V$ (ex.: V^{**} é um gatilho para exercer uma opção de abandono ou de parada temporária), a equação fica:

$$E\left[e^{-r\,T^*}\right] = \left(\frac{X}{X^{**}}\right)^{\beta_2}$$

onde X** é o gatilho e X > X**

- Onde β_2 é a raiz *negativa* da eq. quadrática do caso de *contingent claims*: MGB com tendência NR $(r - \delta)$ e taxa de desconto livre de risco r: $\beta_2 = \frac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{[(r - \delta)/\sigma^2 - \frac{1}{2}]^2 + 2\, r/\sigma^2}$
- No caso de usar o método da *programação dinâmica* em que se usa uma tendência *real* α e taxa de desconto exógena (ajustada ao risco?) ρ, i. é, se quer $E[\exp(- \rho\, t^*)]$, só muda o parâmetro beta. No caso de uma *barreira superior*, o β_1 fica:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \alpha/\sigma^2 + \sqrt{[\alpha/\sigma^2 - \frac{1}{2}]^2 + 2\, \rho/\sigma^2}$$

- Prova: http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html#proof

Método Integral de Otimização sob Incerteza

- **No livro do DP aparece um esboço do método integral de otimização no cap. 9 (jogos de opções reais).**
  - **Esse método é bem melhor desenvolvido no artigo Dixit & Pindyck & Sodal (1999), exceto o último exemplo.**
- **Enquanto que no *método diferencial* (equação diferencial + condições de contorno) a otimização é colocada nas condições de contorno, no *método integral* a otimização é colocada nos <u>limites de integração</u>, onde aparecem os *tempos de parada* (exercício de opção).**
  - **Dias & Teixeira (2003, submetido ao MFJ em 2005) que os dois métodos podem ser usados para resolver de forma equivalente a grande maioria dos problemas de jogos de opções reais (em que as estratégias dos jogadores são estratégias de gatilhos).**
    - **Só não resolvem problemas em que os *conjuntos de exercícios são desconectados* (ex.: exerce se $P \in [20, 30] \cup [38, \infty)$, mas não se P estiver entre 30 e 38). São casos mais raros.**

Algoritmos Genéticos e Teorema do Esquema

- **Esquema é um gabarito de similaridade descrevendo um subconjunto de fileiras ("strings") com similaridades em certos pontos da fileira.**
  - **Ex., a fileira (*, *, c, d), onde * é "10", é um esquema.**
- **Teorema do Esquema: Para a representação binária, pode ser provado que o processamento de uma população de somente n cromossomas, cada geração do AG processa de forma útil algo como n^3 esquemas!**
  - **Esse é o paralelismo implícito do AG, que explica a sua alta eficiência computacional quando comparado com outros algoritmos, ver Goldberg (1989, p. 40-45).**
- **Referências: Holland (1975): "*Adaptation in Natural and Artificial Systems*"; Goldberg, (1989): "*Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*"; Michalewicz (1996): "*Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*"**

Cromossoma do AG

- **Foi adotado um cromossoma simples: heurística do estudo de curva de gatilhos para opções do tipo americana.**
- **O cromossoma teve dois pontos livres (a, b) + uma função logarítmica com 2 coeficientes (c, d).**
  - **Vetor $(a, b, c, d)^T \Rightarrow (V/D)_t$ através da <u>função</u> de geração do $(V/D)_t$**
  - **Caso geral: usa só pontos livres (vários genes) para casos sem heurística**

Gatilho a em τ = 0,1 a.	Gatilho b em τ = 0,2 a.	c	d

Pontos Livres a, b   **Função = c + d ln(τ)**

- **Duas restrições lineares para garantir gatilho ser crescente em $\tau = T - t$:**
  - **$b \geq a$**
  - **$c + d * \ln(0{,}2 + \Delta t) \geq b$**

Operadores Genéticos

- **Dias (2001) usou 5 operadores, sendo dois de mutação e três de crossover (ver Michalewicz, p.127)**
  - **O programa Genocop III tem 10 operadores genéticos, mas como a função avaliação é cara, deve-se procurar eliminar operadores que irão gerar cromossomas sub-ótimos. Ex.:**
    - **"Boundary mutation" é eliminado por que se sabe que valores nos limites das restrições são sub-ótimos (heurística)**
- **Operador 1: Mutação Uniforme**
  - **Todos os genes tem igual probabilidade de sofrer mutação**
  - **Mutação do gene k: *distribuição uniforme* para seleção do valor do gene mutante dentro do domínio válido de k.**

5,2	6,3	7,4	8,5
		k	

Mutação →

5,2	6,3	2,1	8,5
		k	

Operadores Genéticos

- **Operador 2: Mutação Não-Uniforme**
  - **Operador responsável pelo *ajuste fino***
  - **Mutação do gene k: valor do gene mutante x_k sofre uma variação de +/– Δ , função da relação $(1 - g/G)^b$, onde:**
    - **g = atual geração, G = geração máxima (a especificar) e b é um parâmetro que dá o grau de não-uniformidade**
    - **O valor de Δ diminui com o passar das gerações (g aproximando de G). Quando $g \rightarrow G \Rightarrow \Delta \rightarrow 0$**
    - **Assim o operador inicialmente pesquisa de forma uniforme o espaço de busca e depois pesquisa bem localmente**

No Início:

5,2	6,3	7,4	8,5

Mutação →

5,2	6,3	2.6	8,5

No Final:

5,2	6,3	7,4	8,5

Mutação →

5,2	6,3	7,3	8,5

Operadores Genéticos

- **Operador 3: Crossover Aritmético**
  - **Dado dois cromossomas selecionados (pais) J_1 e J_2 os *filhos* J'_1 e J'_2 resultantes do crossover são tais que os valores dos genes são combinações lineares dos pais:**
  - **$J'_1 = a \cdot J_1 + (1 - a) \cdot J_2$**
  - **$J'_2 = a \cdot J_2 + (1 - a) \cdot J_1$**
  - **a é randomico escolhido no intervalo [0, 1]**
- **Ex.: para a = 0,5 (“crossover de média”), *filhos gêmeos*:**

J_1

1,0	2,0	3,0	4,0

+ J_2

11.0	12,0	13,0	14,0

J'_1

6,0	7,0	8,0	9,0

J'_2

6,0	7,0	8,0	9,0

Operadores Genéticos

- **Operador 4: Crossover Simples**
  - **É selecionado a posição de corte k dos cromossomas selecionados (pais) J_1 e J_2 e se obtém os *filhos* J'_1 e J'_2**
  - **Ex.: caso de k = 3 (terceiro gene)**

J_1	1,0	2,0	3,0	4,0

\+

J_2	11.0	12,0	13,0	14,0

J'_1	1,0	2,0	3,0	14,0

J'_2	11.0	12,0	13,0	4,0

- **Michalewicz usa combinação linear para os novos genes de forma a garantir ser factível em termos de restrições.**
- **O caso acima seria para a = 1 na comb. linear. Se não for factível o algoritmo vai reduzindo o valor de a até chegar a 0**

Operadores Genéticos

- **Operador 5: Crossover Heurístico**
  - **Usa o valor da função objetivo para dar a direção da pesquisa. Pai de melhor avaliação tem mais peso em termos de valor a ser atribuído em cada gene do filho.**
  - **Operador de ajuste fino e de pesquisa na direção + promissora**
  - **Maximização: se $f(J_2) > f(J_1)$ então $J' = J_2 + a \cdot (J_2 - J_1)$**
  - **a é um número randômico do intervalo (0, 1)**
  - **Produz só um filho, mas pode produzir nenhum (não-factível)**
- **Ex.: $f(J_2) > f(J_1)$ e a = 0,5:**

J_1	1,0	2,0	3,0	4,0

\+

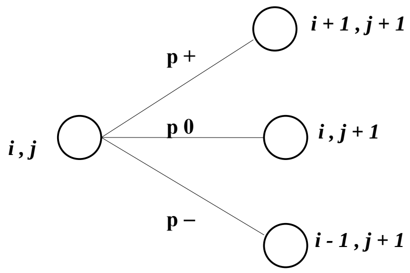
J_2	11.0	12,0	13,0	14,0

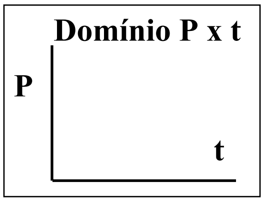
J'	16.0	17,0	18,0	19,0

Diferencas Finitas Explícitas

- **Grid: Espaço de domínio $\Delta P \times \Delta t$**
  - **Discretização $F(P,t) \equiv F(i\Delta P, j\Delta t) \equiv F_{i,j}$**
  - **Com $0 \le i \le m$ e $0 \le j \le n$**
    - **onde $m = P_{max}/\Delta P$ e $n = T / \Delta t$**

$$F_{i,j} = p^+ F_{i+1,j-1} + p^0 F_{i,j-1} + p^- F_{i-1,j-1}$$





"Probabilidades" p precisam ser positivas para obter a convergência (Hull)

Diferenças Finitas Implícitas e etc.

- ***Diferenças finitas implícitas*: conjunto de equações simultâneas, em alguns casos demanda mais tempo de computação, mas tem menos problemas de convergência**
  - **Tipicamente tem de resolver um sistema de equações com *matriz tridiagonal*. Menos intuitivo, mas talvez mais promissor com as abordagens recentes (método de *Crank-Nicolson*).**
- **Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer:**
  - **Dado um esquema de diferenças finitas consistente com o problema que estamos tentando resolver, então a estabilidade é o único requerimento para convergência.**
    - ***"a consistent finite difference scheme for a partial differential equation for which the initial-value problem is well posed is convergent if and only if it is stable"*. OBS: no nosso caso "initial" é em $t = T$ (e não em $t = 0$ como no caso da eq. do calor).**
  - **Diferenças finitas implícitas, incluindo o *Crank-Nicolson*, são sempre estáveis e portanto não gera problemas de convergência.**
  - **Mas elas são menos intuitivas e mais complexas de programar.**