Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

IND 2072: Análise de Investimentos com Opções Reais

Parte 5: Extensões do Modelo Básico de Opções Reais e Aplicações.

Marco Antonio Guimarães Dias,
Professor Adjunto, tempo parcial

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2008

Processos Estocásticos Correlacionados

- Em problemas de opções reais pode ser de interesse a interação entre várias fontes de incerteza econômica:
  - Preço, custo operacional, custo de investimento, taxa de câmbio, taxa de juros, taxa de dividendos, etc.
  - Modelagem: processos estocásticos correlacionados
- As correlações entre incertezas econômicas podem ser:
  - Positivas (caso geral): em média oscilam na mesma direção (se uma variável aumenta é mais provável que a outra também aumente e vice-versa);
  - Negativas: Ex.: Juros e Ações. Mais raro em opções reais.
- Valor do projeto (V) e Custo de investimento (D)
  - Essa análise dará intuição sobre o efeito de outras incertezas.
  - DP, cap. 6, item 5 (p.207) é similar, mas p/ preço P em vez de V
  - Suponha que V e D seguem 2 movimentos geométricos Brownianos correlacionados (com coeficiente de correlação ρ)

$dV = \alpha_V \, V \, dt + \sigma_V \, V \, dz_V$ e $dD = \alpha_D \, D \, dt + \sigma_D \, D \, dz_D$

Valor e Custo: Incertezas Correlacionadas

- Com os dois incrementos de Wiener:

$$dz_V = \varepsilon_V \sqrt{dt} \quad ; \text{e} \quad dz_D = \varepsilon_D \sqrt{dt}$$

- Onde os processos de Wiener dz_V e dz_D são correlac.:

$$E(\varepsilon_V \,.\, \varepsilon_D) = \rho \;\Rightarrow\; E(dz_V \,.\, dz_D) = dz_V \,.\, dz_D = \rho\, dt$$

- A versão do lema de Itô para a opção F(V, D, t), com duas variáveis estocásticas é:

$$dF = F_t\, dt + F_V\, dV + ½\, F_{VV}\, (dV)^2 + F_D\, dD + ½\, F_{DD}\, (dD)^2 + F_{VD}\, (dV\, dD)$$

Novidade: só o termo que entra a correlação: $dV\, dD = \sigma_V\, \sigma_D\, V\, D\, \rho\;\, dt$

- Com a eq. do portfólio ($\Phi = F - n\, V - m\, D$), faz $n = F_V$ e $m = F_D$, etc.:

$$½\, (\sigma_V^2\, V^2\, F_{VV} + 2\, \rho\, \sigma_V\, \sigma_D\, V\, D\, F_{VD} + \sigma_D^2\, D^2\, F_{DD}) + (r - \delta_V)\, V\, F_V + (r - \delta_D)\, D\, F_D - r\, F = -\, F_t$$

  - Depois coloca as cc. (note que têm dois gatilhos, V* e D*), etc.
- Mas existe uma maneira bem mais simples: a redução da dimensionalidade devido à homogeneidade (vale p/ MGBs)
  - ➡ DP (cap. 6, seção 5) mostra caso similar (mas com P em vez de V)

Simplificação do Modelo: Homogeneidade

- Podemos tratar V e D estocástico com o mesmo modelo unidimensional anterior (com pequenas adaptações).
- Isso é possível devido a homogeneidade de grau 1 da opção F em relação a V e D: $F(c\,.V, c\,.D) = c\,.\,F(V, D)$
  - ➡ $F(V, D, t) = D\,.\,F/D(V/D, 1, t) = D\,.\,f(p, 1, t)$; onde:
  - $f = F/D$ (valor da opção por unidade de investimento)
  - $p = V/D$ (valor do projeto por unidade de investimento)
- Assim, temos uma opção f sobre uma única variável estocástica p, com preço de exercício = 1.
- O gatilho normalizado p* = (V/D)* é homogêneo de grau 0 em V e D (vale p/ MGBs, ver McDonald & Siegel, 1986).
  - Isso significa que a regra p* = (V/D)* permanece válida para *qualquer* V e D. O gatilho (V/D)* só muda se mudar um ou mais *parâmetros do processo estocástico neutro ao risco* r, δ, σ.
  - Isso simplificará muito um caso que combina incertezas técnicas.

Redução da Dimensionalidade da EDP

- Seguindo passos similares a DP (p. 210), i. é, derivando $F(V, D, t) = D\, f(p, 1, t)$ para achar F_V, F_{VV}, F_D, F_{DD}, F_{VD} e F_t, e substituindo na EDP anterior F(V, D, t), obtém-se a seguinte EDP para a opção normalizada f = F/D:

$$\frac{1}{2}\,\sigma_T^2\, p^2\, f_{pp} + (\delta_D - \delta_V)\, p\, f_p - \delta_D\, f = -f_t$$

Obs: Em geral se assume que o "dividend yield" do custo D é a taxa de juros, i. é, $\delta_D = r$, mas poderia usar outro valor (ex.: $\delta_D = \mu_D - \alpha_D$)

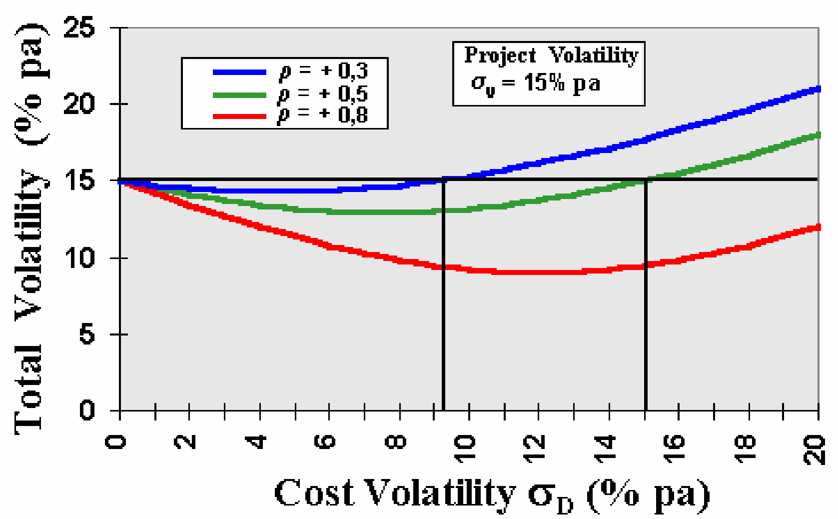
- Onde aparece a volatilidade total (da razão p) ao quadrado:

$$\sigma_T^2 = \sigma_V^2 + \sigma_D^2 - 2\,\rho\,\sigma_V\,\sigma_D$$

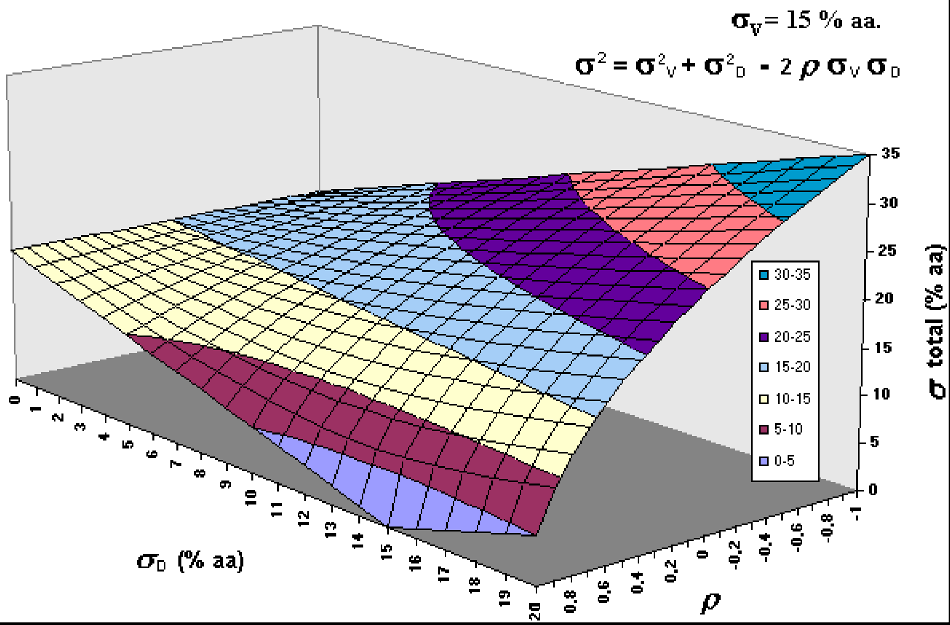
- Esse tipo de recurso (homogeneidade) foi usado em opções perpétuas (McDonald & Siegel, 1986; DP) e em opções finitas (Myers & Majd, 1990). Em D&P é para P (em vez de V).
- Logo, uma planilha como a "Timing" resolve o problema com V e D estocásticos, usando volatilidade σ_T, investim. = 1, etc.

Efeito da Incerteza do Custo na Incerteza Total

- A introdução da incerteza do custo D pode até reduzir a incerteza total σ_T (desde que $\rho > 0$ e σ_D não seja muito alto).
  - Em muitos casos, mesmo com $\rho > 0$, σ_T aumenta e, logo, ↑a espera



O Efeito da Incerteza do Custo D (3D)



O Efeito da Incerteza no Custo

- **O efeito da introdução dessa segunda fonte de incerteza econômica (em adição a incerteza de V):**
  - **O efeito tanto na regra de decisão como no valor da opção de investir será determinada pela volatilidade total (comparada com a volatilidade só de V).**
  - **Para o caso geral de correlação positiva e da volatilidade de D menor que a de V, a volatilidade total σ_T pode ser próxima de σ_V (pode até ser um pouco menor).**
  - **Se a correlação fosse negativa, a volatilidade total sempre aumentaria com a volatilidade do custo D.**
  - **Se as volatilidades individuais de V e D forem iguais e se a correlação for positiva perfeita (ρ = +1), então a volatilidade total é zero! Não há incerteza?**
    - **V e D oscilam, mas V/D não oscila! Ou seja, se o VPL for positivo, ele sempre será positivo e não há valor na espera.**

Homogeneidade, Convexidade e Reversão à Média

- O processo de reversão à média não goza das mesmas propriedades do MGB em termos de homogeneidade e convexidade do valor da opção F(V, t; D). Isso é mostrado em dois teoremas de Merton (1973):
- Teorema 1: Se a distribuição de dV/V (ou dos retornos) independe do nível de V $\Rightarrow$ a opção F é homogênea de grau 1 em relação ao ativo básico V e ao preço de exercício D.
  - Isso ocorre para o caso do MGB: dV/V tem distribuição Normal que depende de α, σ e t, mas não de V(0). Logo é homogênea.
  - Isso não ocorre com nenhum tipo conhecido de reversão à média, o que nos leva a *desconfiar* que o MRM não leva a F(V, D) homogênea (o teorema estabelece a condição suficiente, mas não necessária).
- Teorema 2: Se a distrib. de dV/V (ou de retornos) independe do nível de V, então a opção F é uma função convexa de V.
  - Ver na parte 4 (MGB) que o gráfico F x V é convexo p/ todo V.
  - O livro do D&P mostra dois gráficos com reversão à média de V (p. 165, 166) cuja opção F não é convexa em relação a V.

Considerações e Extensões do Modelo

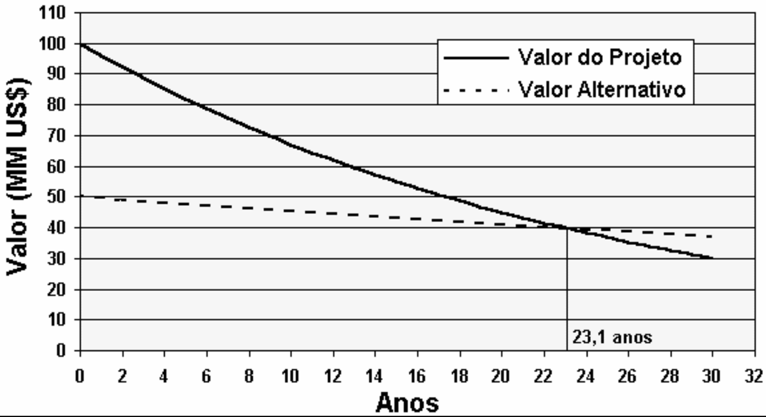
- Se em vez do quociente p = V/D tivéssemos um produto s = x.y (ex.: x seria o preço em R\$, y a taxa de câmbio US\$/R\$ e s = x y o preço em US\$), onde x e y seguissem MGBs correlacionados, a volatilidade total σ seria:

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\,\rho\,\sigma_x\,\sigma_y$$

  - Aqui ao contrário do caso anterior, as correlações positivas aumentam a volatilidade total.
- O modelo de V e D estocástico (analogia com a "call") pode ser extendido para o caso de opção de abandono (analogia com a "put") em que tanto o valor do projeto (V) como o valor de uso alternativo (E) são estocásticos. Na verdade é uma *opção de troca* ("switch") entre dois ativos de risco V e E
  - Pode usar o mesmo software, explorando a simetria *call-put*.

Valor do Projeto e de Uso Alternativo

- **Suponha que o valor corrente do projeto tem a tendência de cair exponencialmente, assim como o de uso alternativo, mas com diferentes taxas de declínio. Mas existem incertezas**
  - **Ex.: navio petroleiro atuando em transporte de petróleo tem uso alternativo convertendo para unidade estacionária de produção de petróleo na Bacia de Campos (caso famoso do navio P.P. Moraes).**

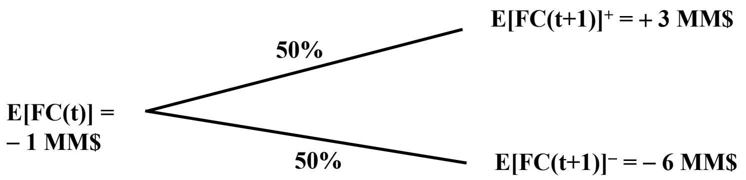


Opções de Abandono e de Mudança de Uso

- **Modelo de opção de mudança de uso de Myers & Majd (1990): analogia com uma opção de venda americana**
  - **O valor V do ativo/projeto segue um MGB. O projeto pode ser abandonado e os ativos serem usados em um outro projeto. O valor alternativo E também é estocástico e segue um MGB.**
- **A planilha Excel "Timing" também resolve esse caso:**
  - **Reduzir a dimensionalidade (de 2 para 1 variável estocástica) considerando valores normalizados p = V/E, opção f = F/E, volatilidade total, preço de exercício normalizado = 1, etc.**
  - **Com o conceito de simetria entre opções americanas de call e put (inverte p com 1 e δ_V com δ_E [ou r]), pode-se obter o gatilho p* de exercício da opção de troca e o valor da opção f.**
- **Assim, a mesma planilha resolve OR tradicional (call) de espera em projeto e opção de abandono para uma variável estocástica ou para duas variáveis estocásticas.**

OR de Abandono e Cálculo da Reserva

- **As companhias de petróleo subestimam o volume de reservas de um campo quando usam o método do fluxo de caixa descontado, pois, devido a incerteza, em OR a previsão de abandono se dá numa data posterior à calculada pelo FCD.**
- **Ex.: para simplificar suponha que o *custo de abandono seja zero*, r = 5 % e a <u>incerteza tenha 2 cenários *neutros ao risco*</u>:**



- **A alternativa de abandonar em t evita o prejuízo de 1 MM$ e tem VPL = 0.**
- **A alternativa esperar mais um período (t+1) incorre em um prejuízo de 1 MM$ mas se ocorrer o cenário de *upside* continuamos mais um ano e ganhamos 3 / 1,05 = 2,86 MM$. Se ocorrer o cenário de *downside* podemos abandonar.**
- **O valor da opção de *não abandonar* em t = – 1 + 50% (2,86) + 50%(0) = + $ 0,43 MM > 0. Logo, é melhor não abandonar em t (e sim esperar produzindo).**

Projeto com Opção de Shut-Down

- **Seguindo DP, cap. 6, seção 2, veremos agora um modelo de opção em função da variável mais básica, o preço P.**
  - **Primeiro será visto o V(P) com *opção de parada temporária* (opção de "shut-down") e depois a opção composta: opção F(P) (call) de investir I num projeto V(P) com opção de shut-down**
    - **A análise é feita <u>backwards</u>: primeiro analisa o caso de já ter investido no projeto V(P) (com opção de shut-down) e depois se analisa a opção de investir nesse projeto F(P).**
  - **Esse exemplo simples também irá ilustrar o caso de EDO p/ V(P) com um <u>termo adicional devido ao fluxo de caixa</u>.**
- **Por simplicidade, assuma que o projeto tem uma vida *infinita*, produz uma unidade por ano que é vendida por um preço P(t), que segue um MGB. Além disso:**
  - **Existe um custo operacional C (determinístico) para produzir uma unidade. Logo, o fluxo de lucro da produção é P – C.**

Projeto V(P) com Opção de Shut-Down

- Sem a opção de shut-down, o valor desse projeto V(P) de vida infinita é (lembrar que P cresce à taxa α no MGB):

$$V(P) = \int_0^{\infty} [(P\, e^{\alpha t}\, e^{-\mu t}) - (C\, e^{-r t})]\, dt = \frac{P}{\mu - \alpha} - \frac{C}{r} = \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$$

- <u>Exercício</u>: mostre que se obtém o mesmo resultado se usar a tendência *neutra ao risco* $(r - \delta)$ em vez de α, e a taxa de desconto livre de risco r (em vez de μ). Por que?
- Agora considere que existe uma *opção de shut-down* sem custo (nem para parar e nem para voltar a produzir), de forma que essa opção é sempre exercida quando P < C.
  - Logo, o fluxo de lucro <u>com opção</u> é: $\pi^*(P) = \text{máx}\{P - C, 0\}$
- Deduziremos a EDO de V(P) pelo método dos *contingent claims*, para o caso da firma operando (nesse caso V tamb. tem dividendos). Terá outra EDO para a firma parada.

EDO de V(P) por Contingent Claims

- Como antes, a carteira sem risco é: $\Phi = V - n\,P$ (com uma escolha *conveniente* de n p/ ser sem risco).
  - Considere primeiro o caso mais geral da firma operando.
- No intervalo dt, o retorno é: $r\,\Phi\,dt = r\,(V - n\,P)\,dt$
- Mas o retorno de Φ também é a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes da carteira:
  - Agora V varia (dV) <u>e também distribui dividendos</u> $\pi(P)\,dt$
  - O retorno de P em dt é a soma do ganho de capital dP com o dividendo $\delta\,P\,dt$, onde δ é o *convenience yield*.
    - δ pode ser estimado com o *mercado futuro* ou com $\delta = \mu - \alpha$
  - Logo, retorno da carteira $= dV + \pi\,dt - n\,(dP + \delta\,P\,dt)$
  - Igualando as duas equações de retorno da carteira:

$$r\,(V - n\,P)\,dt = dV + \pi\,dt - n\,(dP + \delta\,P\,dt)$$

  - Agora precisamos de dV: expansão com o <u>Lema de Itô</u>.

EDO de V(P) por Contingent Claims

- Note que V(P) não é função do tempo (produção perpétua) $\Rightarrow \partial V/\partial t = V_t = 0 \Rightarrow$ Lema de Itô p/ dV, é:

  $dV = V_P \, dP + ½ \, V_{P\,P} \, (dP)^2$

  - Para obter $(dP)^2$, basta elevar ao quadrado a equação do MGB, $dP = \alpha \, P \, dt + \sigma \, VP \, dz$. Logo, $(dP)^2 = \sigma^2 \, P^2 \, dt$
  - Substituindo na equação do Lema de Itô, vem:

  $dV = V_P \, dP + ½ \, \sigma^2 \, P^2 \, V_{P\,P} \, dt$

  - Substituindo a equação de dV na eq. do retorno de Φ

  $r \, (V - n \, P) \, dt = V_P \, dP + ½ \, \sigma^2 \, P^2 \, V_{P\,P} \, dt + \pi \, dt - n \, (dP + \delta \, P \, dt)$

  $\Rightarrow r \, (V - n \, P) \, dt = (V_P - n) \, dP + ½ \, \sigma^2 \, P^2 \, V_{P\,P} \, dt + \pi \, dt - n \, \delta \, P \, dt$

  - Mas para essa equação de retorno ser livre de risco tem de eliminar o termo estocástico dP. Para tal, faz $n = V_P$
  - *Algebrando* se chega à EDO com o termo de cash-flow π:

  $$½ \, \sigma^2 \, P^2 \, V_{P\,P} + (r - \delta) \, P \, V_P - r \, V + \pi = 0$$

Duas EDOs para V(P)

- Na verdade temos duas EDOs, sendo que a mais geral que foi demonstrada é para a firma operando com fluxo de caixa $\pi = P - C$:

  $$½ \, \sigma^2 \, P^2 \, V_{P\,P} + (r - \delta) \, P \, V_P - r \, V + \pi = 0$$

- A outra EDO é p/ a *firma parada*, *sem fluxo de caixa*:

  $$½ \, \sigma^2 \, P^2 \, V_{P\,P} + (r - \delta) \, P \, V_P - r \, V = 0$$

- Teoricamente, a firma operando poderia operar com prejuízo se $P < C$. A 1ª EDO admite essa *solução particular* (não ótima).
- Mas não é ótimo operar com prejuízo, já que o custo de parar é zero. A condição de otimização irá juntar as duas EDOs separando as regiões com $P < C$ e $P > C$.
  - Quando $P = C$ as duas soluções das EDOs devem ser iguais.

Equação Diferencial Ordinária de V(P)

- A 1ª EDO tem uma *parte homogênea* (em V, em azul) e uma *parte não-homogênea* (em vermelho):

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2\,P^2\,V_{PP} + (r - \delta)\,P\,V_P - r\,V + \pi = 0$$

  - A parte homogênea tem *solução geral* do tipo $A\,P^{\beta}$ que deve ser somada a alguma *solução particular* devido à parte não-homogênea. Uma simples substituição mostra que a solução $P/\delta - C/r$ atende a EDO (típico).
- No ótimo, $\pi = 0$ quando $P < C$ e $\pi > 0$ quando $P > C$. A solução será dividida em duas regiões de valores de P:
  - Na região $P < C$, o "cash-flow" desaparece e a solução é:
  - $V(P) = K_1\,P^{\beta_1} + K_2\,P^{\beta_2}$; onde $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$ são raízes da eq. quadrática (ver parte 3): $\frac{1}{2}\,\sigma^2\,\beta\,(\beta - 1) + (r - \delta)\,\beta - r = 0$
  - Na região $P > C$, soma-se as soluções geral e particular:
  - $V(P) = B_1\,P^{\beta_1} + B_2\,P^{\beta_2} + P/\delta - C/r$;(β_1 e β_2 são os mesmos)

V(P) e Condições de Contorno

- As cc. determinarão as constantes K_1, K_2, B_1 e B_2.
  - No caso de $P < C$, se <u>P ficar próximo de 0</u> o valor de V deve tender a zero também. Para isso é necessário que $K_2 = 0$ (caso contrário o termo com o expoente negativo β_2 iria a infinito);
  - No caso de $P > C$, se <u>P for muito grande</u> o valor de V deve ficar apenas um pouco maior que o fluxo de caixa $P/\delta - C/r$, pois a opção de shut-down torna-se muito menos valiosa. Assim, é necessário que $B_1 = 0$ (caso contrário o termo "de opção" com o expoente positivo β_1 se tornaria cada vez maior com P).
    - ➡ Termos do tipo $A\,P^{\beta}$ são termos de *opção* (aqui de "shut-down").
- Logo, o valor do projeto implantado V(P) se reduz a:

$$V(P) = \begin{cases} K_1\,P^{\beta_1} & \text{se } P < C \\ B_2\,P^{\beta_2} + \dfrac{P}{\delta} - \dfrac{C}{r} & \text{se } P > C \end{cases}$$

- Interpretação: se $P < C$, V(P) é o valor da *opção de reativar a produção* (já que existe probab. de P voltar a ser $> C$); já se $P > C$, além do fluxo de caixa, existe a <u>*opção de shut-down*</u> se P vier a cair.

V(P) e Condições de Contorno

- Para determinar as constantes restantes (K_1 e B_2) usaremos cc. similares às *condições de continuidade e de suavidade* no valor de gatilho, que aqui é P** = C
  - Por continuidade em P = C, podemos igualar as duas eqs. de V(P): $K_1\, C^{\beta_1} = B_2\, C^{\beta_2} + C/\delta - C/r$
  - As derivadas em P = C também devem ser iguais para as duas eqs. de V(P) (função deve ser suave, sem quinas): $\Rightarrow \beta_1\, K_1\, C^{\beta_1 - 1} = \beta_2\, B_2\, C^{\beta_2 - 1} + 1/\delta$;
    - Teorema: se V(P) é função contínua e P segue um MGB, então V(P) é duplamente diferenciável ($\mathcal{C}^2$) em relação a P.
- Temos duas variáveis e duas equações *lineares*. Logo:

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta}\right) \quad \Bigg| \quad B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta}\right)$$

- Note que essas constantes tem de ser *positivas* para as opções também serem positivas (DP mostra isso matematicamente).

Valor da Opção de Investir em V(P)

- O valor da opção perpétua F(P) de investir I no projeto V(P) e a regra ótima de investimento (gatilho P*) segue os passos usuais (portfólio Φ = F – n P; lema de Itô, etc.)
  - Note que iremos escrever F(P) e não F(V), por ser mais fácil:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, P^2\, F_{PP} + (r - \delta)\, P\, F_P - r\, F = 0$$

  - Note que a opção F (ao contrário de V), não tem termo de fluxo de caixa. De novo, a solução é do tipo: $F(P) = A_1\, P^{\beta_1} + A_2\, P^{\beta_2}$
    - De novo, com a cc. F(P = 0) = 0 (barreira absorvente) ⇒ $A_2 = 0$.
- Naturalmente a opção não deve ser exercida se P < C:
  - Não tem sentido exercer a opção (gastar I) apenas para ficar esperando o preço melhorar, sem produzir.
  - Assim, deve ser considerada apenas a região de V(P) em que tem P > C para a busca do valor do gatilho de investimento P*
    - Ou seja, P* > C (na verdade P* > C + r I, o custo de Marshall);
    - Assim, se exercer a opção em P*: $F(P^*) = B_2\, P^{\beta_2} + P/\delta - C/r - I$

Valor da Opção F(P) e Gatilho P*

- As cc. de continuidade e suavidade no gatilho P* irão determinar o valor do gatilho P* e da constante A_1, que dá o valor da opção (pois $F(P) = A_1\, P^{\beta_1}$). As cc. são:

$$F(P^*) \;=\; A_1\,(P^*)^{\beta_1} \;=\; B_2\,(P^*)^{\beta_2} + P^*/\delta - C/r - I$$

$$\beta_1\, A_1\,(P^*)^{\beta_1 - 1} \;=\; \beta_2\, B_2\,(P^*)^{\beta_2 - 1} + 1/\delta$$

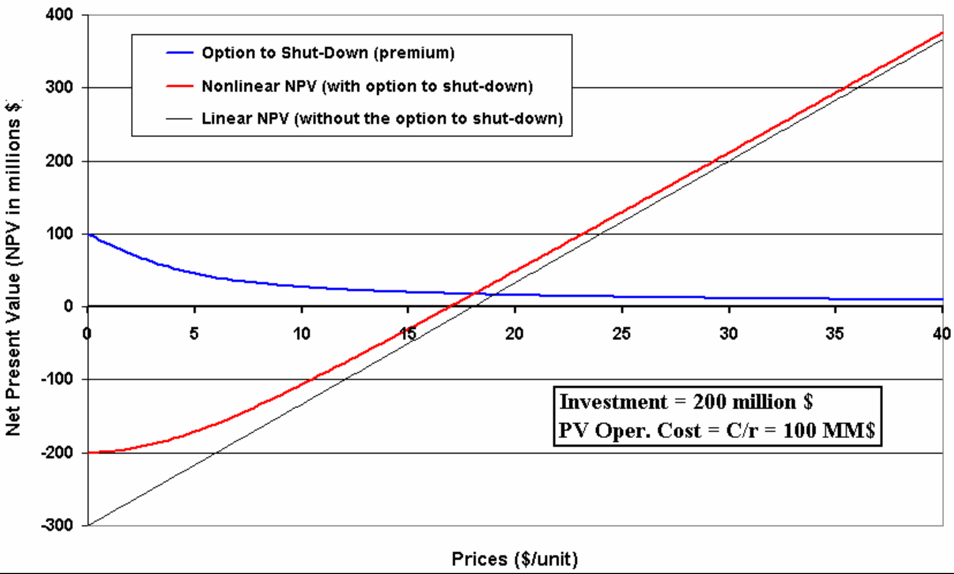
  - Como B_2 é conhecido, temos duas equações e duas incógnitas (P* e A_1). Eliminando A_1, obtém-se a equação não-linear de P*:

$$(\beta_2 - \beta_1)\, B_2\,(P^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1)\, P^*/\delta \;-\; \beta_1\,(C/r + I) \;=\; 0$$

  - Essa equação tem solução única $P^* \geq C + r\, I$ e pode ser obtida por métodos numéricos simples de rápida convergência (3 a 5 iterações) tais como o *método de Newton-Raphson*:
    - Pasta 76: explicação intuitiva do método de Newton-Raphson.
  - Com P*, substituindo numa das cc., se obtém A_1 e, logo, F(P).
  - Planilha dp-chapter6-2.xls calcula a opção F(P), o gatilho P*, a função VPL = V(P) – I com e sem a opção de shut-down, etc.

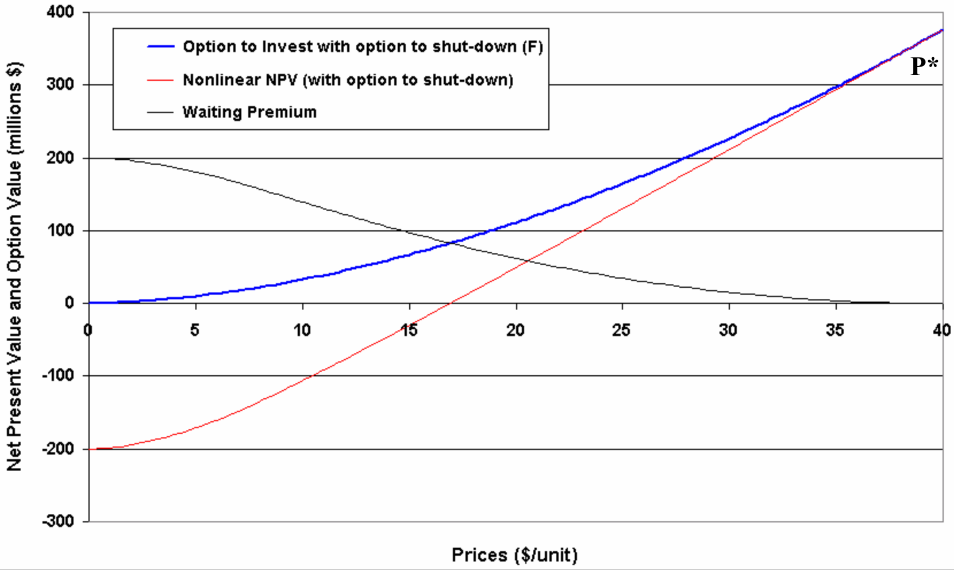
VPL Com e Sem Opção de Shut-Down

- Note que a opção é mais valiosa para baixos preços P



Opção de Investir em V(P) com Opção de Shut-Down

- Note a suavidade do contato da opção com a curva do VPL em P*. Note também a variação com P do prêmio da espera.



Opção de Investir <u>Sem</u> Opção de Shut-Down

- Suponha agora que não existe a opção de shut-down quando P < C. Logo, desaparecem na função V(P) os termos de opção (do tipo A P^{β_1}). Nesse caso sem opção:

$$V'(P) = P/\delta - C/r$$

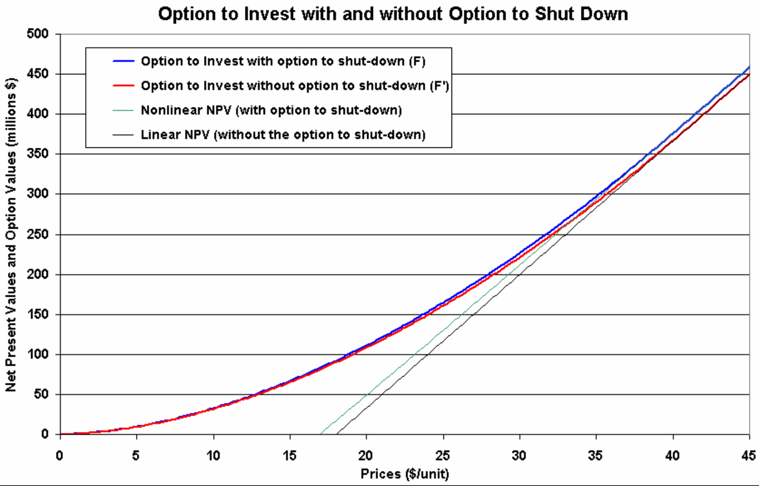
  - É fácil ver que <u>a EDO da opção</u> de investir em V'(P), i. é, F(P) <u>é exatamente a mesma</u> do caso anterior (típico, pois o processo estocástico de P é o mesmo, F não tem cash-flow)
  - A mudança se dá nas cc. Seja F'(P) o valor da opção de investir em V'(P). A solução da EDO é $F'(P) = A_3\, P^{\beta_1}$, com o gatilho P* e a constante A_3 sendo (exercício: verificar):

$$P^* = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\right)\left(\frac{C}{r} + I\right)\delta \qquad\qquad A_3 = \frac{\dfrac{P^*}{\delta} - \left(\dfrac{C}{r} + I\right)}{(P^*)^{\beta_1}}$$

- Compare com a solução da opção perpétua F(V) e V* da parte 3. Note que coincidem se fizer $V^* = P^*/\delta$ e com $I' = C/r + I$.

F(P) Com x Sem Opção de Shut-Down

- O gráfico mostra o efeito da opção de shut-down no valor da opção (aumenta, pois V aumenta) e no gatilho (reduz a espera).
  - Com opção de shut-down: P* = 39,85 $/unidade; F(P = 35) = 297,4 MM$
  - Sem opção de shut-down: P* = 41,74 $/unidade; F(P = 35) = 290,3 MM$



Interações Entre Opções Reais

- O caso anterior mostrou que, na presença da opção de espera, o efeito da opção de shut-down é pequeno.
  - A opção de espera está deep-in-the-money se P >> C e assim a opção de shut-down está distante probabilisticamente;
  - Caso a opção de espera não esteja deep-in-the-money, o valor da opção de shut-down é ainda menor, pois só existe se investir e a probab. de investir no projeto é pequena, precisa de P >> C
  - O mesmo raciocínio vale para a opção de abandono.
  - Tese de doutorado de Bjerksund (1988) para campos de petróleo: o erro é pequeno se desprezar opções operacionais (ex.: abandono) na presença da opção de espera.
- O valor incremental de uma opção adicional é em geral menor do que seu valor isoladamente, e declina quanto mais opções já tiverem sido consideradas. Ref.: Trigeorgis, 1993.
  - Mas nem sempre é desprezível (ex.: opção de expansão de projeto piloto).
- Estamos falando de interação de opções reais no mesmo ativo.
  - OR em *ativos diferentes* (portfolio) podem ser até *super-aditivas* (Dias, 2006)

Abandono: Modelo de Entrada e Saída

- **Esse modelo "histerese" ou de "entrada-saída" (cap. 7 do D&P) considera a interação entre a decisão de investir ("entrada") e de abandonar ("saída"), de forma que se abandonar tem a opção de investir de novo.**
  - **Modelo de Brennan & Schwartz (1985) melhorado por Dixit.**
- **É um modelo de opções compostas. No caso mais geral:**
  - **Se investir tem a opção de parar temporariamente ou de abandonar; se parar tem a opção de reativar ou de abandonar; se abandonar tem opção de reinvestir. Esse caso mais geral (seção 2) tem 4 gatilhos: entrada, saída, parada e reativação.**
  - **São considerados custos de mudar de status operacional: custo fixo + custo de preservação em caso de parada temporária (shut-down); custo fixo de reativar; custo fixo de abandono.**
- **Cap.7, seção 1: será vista agora. A metodologia é similar à do DP, cap. 6, (F em função de P, em vez de V).**
  - **O caso mais geral (DP, cap. 7/Seção 2) ficará como exercício.**

Modelo de Entrada & Saída (Histerese)

- **Seguindo DP, Cap.7, seção 1, será visto o caso de opção perpétua de entrada interagindo com opção perpétua de saída, a qual tem a opção de entrar de novo, etc.**
  - **Esse tipo de modelo é chamado de modelo de *histerese*: o status da firma (operando ou não) depende não apenas do estado corrente da natureza (ex.: preço), mas também da sua *história*.**
    - **Veremos que para um certo preço P entre os gatilhos de entrada (P_H) e saída (P_L), a firma estará *operando* ou *inativa* a depender se os preços anteriores tiverem passados por valores $\geq P_H$ ou por $\leq P_L$, respectivamente. Logo, o *status da firma* é *path-dependent*.**
    - ***Histerese em física*: Bobina tem magnetismo se tiver passado uma corrente antes, caso contrário não. Magnetismo da régua fricionada.**
- **O preço do produto P segue um MGB. Para entrar a firma investe I e para sair a firma paga o *custo de abandono* E.**
  - **Ex.: E = custo de *recuperação ambiental* (petróleo, mineração).**
  - **Custo E pode ser negativo: *valor residual* da liquidação do negócio.**
  - **Não-arbitragem: $I + E > 0$ (senão investe e abandona ciclicamente).**

Modelo de Entrada & Saída (Histerese)

- Os dois estados da firma são: ociosa (0) e operando (1).
  - Usaremos uma notação mais didática, um pouco diferente do DP.
- Seja F(P) o valor da firma ociosa que, por possuir capacitação e tecnologia, tem a opção de investir I.
  - Investimento ótimo se dá no gatilho P_H: $F(P_H) = V(P_H) - I$.
- Seja V(P) o valor da firma operando que, além do fluxo de caixa operacional, tem a opção de abandonar c/ custo E.
  - O abandono ótimo se dá no gatilho P_L: $V(P_L) = F(P_L) - E$.
- Aplicando o método dos ativos contingentes, o valor da firma ociosa F(P) é dada pela EDO *homogênea*:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, P^2\, F_{PP} + (r - \delta)\, P\, F_P - r\, F = 0$$

  - Como antes, ela tem solução geral do tipo: $F(P) = A_1\, P^{\beta 1} + A_2\, P^{\beta 2}$
  - Como antes $\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$, raízes de $\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, \beta\, (\beta - 1) + (r - \delta)\, \beta - r = 0$.
  - Primeira cc.: se $P = 0 \Rightarrow V_0(0) = 0$, que implica que $A_2 = 0$. Logo:

$$F(P) = A_1\, P^{\beta 1}$$

Modelo de Entrada & Saída (Histerese)

- Para determinar o valor da constante A_1 iremos precisar de V(P), pois $F(P_H) = V(P_H) - I$ (cc. de continuidade).
- Por simplicidade, a operação pode ter vida *infinita* e produz só uma unidade por ano, vendida por P(t).
- Existe um custo operacional C para produzir uma unidade. Logo, o fluxo de lucro da produção é $\pi = P - C$.
  - Vimos nesse tópico que, sem a opção, V valeria $P/\delta - C/r$.
- Aplicando os passos usuais de contingent claims, o valor da firma operando V(P) é dado pela EDO abaixo que tem uma parte homogênea e uma parte não-homogênea:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\, P^2\, V_{PP} + (r - \delta)\, P\, V_P - r\, V + P - C = 0$$

  - Como antes, a solução é a soma da solução geral da parte homogênea com a solução particular da parte não-homogênea.

$$V(P) = B_1\, P^{\beta_1} + B_2\, P^{\beta_2} + P/\delta - C/r$$;(β_1 e β_2 são os mesmos)

  - Até aqui V(P) é igual ao caso com opção de shut-down. Muda as cc.

Modelo de Entrada & Saída (Histerese)

- **A eq. de V(P) diz apenas que o valor da firma ativa é o valor presente dos fluxos de caixa esperados sem opção (dois últimos termos) mais o valor da opção de sair (ou abandonar, os dois primeiros termos do lado direito).**
  - **Mas como $\beta_1 > 0$, a constante B_1 tem de ser zero, pois se P tende a ∞ o valor da opção de sair não pode tender ∞. Logo:**

$$V(P) = B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \quad ; P \in (P_L, \infty)$$

  - **Se o preço cair para um nível suficientemente baixo P_L, a firma abandona (sai) pagando o custo de abandono E e obtém a opção de reinvestir F(P). Assim, as duas cc. no gatilho P_L são:**
  - **Condição de continuidade: $V(P_L) = F(P_L) - E$**
  - **Condição de suavidade (derivada): $V'(P_L) = F'(P_L)$**
- **Junta-se a elas, as condições de contorno de F em P_H:**
  - **Condição de continuidade: $F(P_H) = V(P_H) - I$**
  - **Condição de suavidade (derivada): $F'(P_H) = V'(P_H)$**

Modelo de Entrada & Saída (Histerese)

- **Substituindo F(P) e V(P) e suas derivadas em P_L e P_H nas 4 condições de contorno anteriores, obtemos <u>4 equações</u> *extremamente não-lineares* e <u>4 incógnitas</u> (P_L, P_H, A_1 e B_2):**

$$-A_1 P_H^{\beta 1} + B_2 P_H^{\beta 2} + P_H/\delta - C/r = I$$

$$-\beta_1 A_1 (P_H)^{\beta 1 - 1} + \beta_2 B_2 (P_H)^{\beta 2 - 1} + 1/\delta = 0$$

$$-A_1 P_L^{\beta 1} + B_2 P_L^{\beta 2} + P_L/\delta - C/r = -E$$

$$-\beta_1 A_1 (P_L)^{\beta 1 - 1} + \beta_2 B_2 (P_L)^{\beta 2 - 1} + 1/\delta = 0$$

  - **Esse sistema de equações *extremamente não-lineares* só tem solução numérica. Mas prova-se que a solução existe e é única.**
    - **Para isso deve-se impor que $0 < P_L < P_H < \infty$, $A_1 > 0$ e $B_2 > 0$.**
  - **Pela teoria microeconômica tradicional (Marshall), os gatilhos de entrada e saída seriam $P_H^M = C + r\,I$ e $P_L^M = C - r\,E$ (por que?)**
    - **R: a taxa de retorno do investimento de Marshall é $r = (P - C) / I$ e para desinvestir (gastando E) a taxa de retorno tb. é $r = (C - P) / E$.**
    - **Os gatilhos de Marshal serão úteis como chute inicial de um método numérico interativo. Por OR, sabemos que $P_H > P_H^M$ e $P_L < P_L^M$.**

Modelo de Entrada & Saída: Função G(P)

- Iremos resolver o sistema graficamente (Excel) com ajuda da função G(P), o *valor incremental da firma se tornar ativa*, definida como a diferença entre V(P) e F(P):

$$G(P) = V(P) - F(P) = -A_1 P^{\beta 1} + B_2 P^{\beta 2} + P/\delta - C/r$$

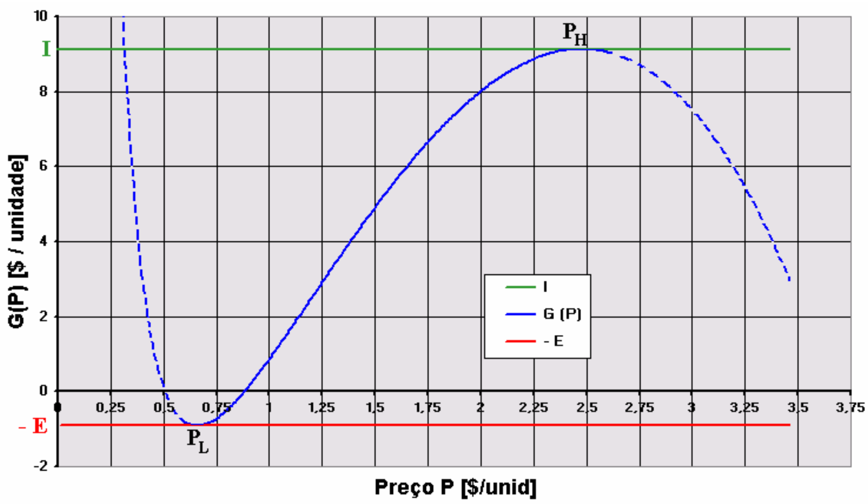
  - Como F(P) só é definida p/ $P \in (0, P_H]$ e V(P) só é definida para $P \in [P_L, \infty)$, temos que G(P) só existe (ou tem sentido econômico) no intervalo $[P_L, P_H]$.
- Se aplicarmos as cc. de continuidade e suavidade a G(P) em P_L e P_H, obtemos as seguintes simples 4 cc.:

$$G(P_H) = I \; ; \; G(P_L) = -E \; ; \; G'(P_H) = 0 \; ; \text{ e } \; G'(P_L) = 0$$

  - Logo, podemos pesquisar graficamente os valores de P_L e P_H que fazem G(P) ter inclinação zero nesses pontos. Ver o gráfico de G(P) no próximo slide e sua inclinação zero nos gatilhos.
    - A idéia é chutar valores de P_H e P_L (sugestão começar com os gatilhos de Marshall) até obter a tangência de G(P) nesses pontos.

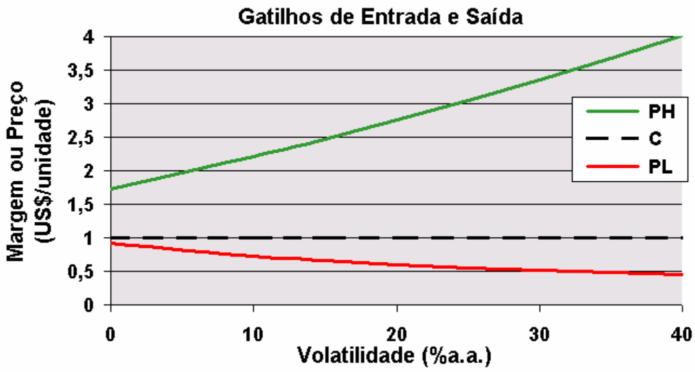
Modelo de Entrada & Saída: Função G(P)

- O gráfico abaixo da função G(P), já resolvida (pois está tangente em PL e PH) é mostrada abaixo.
  - Foi usada a planilha Excel entry-exit.xls.



Entrada & Saída: Volatilidade e Gatilhos

- O gráfico abaixo mostra o efeito da volatilidade nos gatilhos. Como era de esperar, quanto maior a volatilidade, maior o P_H e menor o P_L.



  - O intervalo de preços (P_L, P_H) é a zona de histerese, i.é, quem está dentro (operando) continua operando e quem está fora continua ociosa. O estado da firma depende da sua história.
    - Isso permite testes empíricos. Ver caso da indústria de cobre no DP.

Caso Mais Geral com 4 Gatilhos

- Na seção 2 do Cap. 7 do DP tem o caso mais geral que além de entrada e saída, a firma pode parar temporariamente (opção de shut-down) e reativar a produção parada. O procedimento é similar ao anterior.
  - Além de gatilhos de entrada e de saída, tem gatilhos de parada temporária e de reativação da produção.
  - Tem tb. o valor da firma que está "dentro", mas parada.
- Esse modelo + geral apenas tem mais equações: chega-se a um sistema de 8 equações *extremamente* não-lineares que deve ser resolvido numericamente.
  - Software matemáticos, tais como o Mathcad, resolvem de forma automática esse sistema (mét. numéricos embutidos).
  - Enviei a planilha Mathcad DP-cap7-tanker-Mathcad8.mcd com o exemplo do navio-petroleiro mostrado no DP.
  - Para maiores detalhes desse caso mais geral, ver também http://www.puc-rio.br/marco.ind/math-app.html.

Aplicação em Energia com o MAB

- **Veremos agora um exemplo de opção real aplicado a uma planta de termo-geração onde o *spark-spread* (S) segue um movimento aritmético Browniano (MAB).**
  - **Spark-spread S é a diferença entre o preço da eletricidade (1 MW-h) e o produto do custo do combustível pela quantidade necessária para gerar ela. O spark-spread é dado em $/MW-h**
  - **O valor da OR será dado por uma EDO com solução analítica.**
- **Seja F(S) o valor de uma opção perpétua para construir uma planta termoelétrica por um investidor com licença, cuja margem S é um spark-spread que segue um MAB:**

$$dS = \alpha \, dt + \sigma \, dz$$

  - **Considere que a licença prevê um imposto anual C enquanto o investimento I não for feito, i. é, tem um imposto de espera.**
- **Deduza a equação diferencial ordinária (EDO) de F, as condições de contorno e determine a solução p/ F(S) e S*.**

Planta Termoelétrica e Spark-Spread

- **Iremos usar o método dos *contingent claims*, apesar do artigo da pasta 76 (Fleten & Nasakkala, 2003) usar a programação dinâmica.**
- **Existem alguns problemas em trabalhar com MAB:**
  - **Relembre que no MAB o parâmetro α não é dado em %/ano e sim em unidades de S por ano, ($/MW-h)/ano.**
    - **Se usarmos no *contingent claims* a taxa de juros e a taxa de conveniência em % ao ano, então um drift neutro ao risco $(r - \delta)$ é igual a $(\alpha - \Pi)/S$, onde Π é um prêmio absoluto de risco (em unidades de S por ano), e não a $(\alpha - \pi)$ do MGB.**
    - **De forma similar, $(r - \delta)\, S = (\alpha - \Pi)$ no MAB.**
    - **Essa relação é útil pois na prática pode ser mais fácil estimar α (por regressão linear) e o prêmio de risco Π do que a taxa de conveniência δ do *spark-spread*.**

Termoelétrica e Spark-Spread como MAB

- **Para aplicar o método dos ativos contingentes, considere o portfólio: $\Phi = F - n\,S$.**
- **Se existir um n que torna o portfólio livre de risco, então o retorno do portfólio num intervalo dt é:**

$$r\,\Phi\,dt = r\,(F - n\,S)\,dt$$

- **Mas o retorno desse portfólio durante dt também é:**

$$r\,\Phi\,dt = dF - C\,dt - n(dS + \delta\,S\,dt)$$

  - **O Lema de Itô diz: $dF = F_S\,dS + ½\,F_{S\,S}\,(dS)^2$**
  - **No MAB, $(dS)^2 = \sigma^2\,dt$, logo: $dF = F_S\,dS + ½\,F_{S\,S}\,\sigma^2\,dt$**
  - **Igualando os dois retornos e usando o Lema de Itô p/ dF:**

$$r\,(F - n\,S)\,dt = F_S\,dS + ½\,F_{S\,S}\,\sigma^2\,dt - C\,dt - n(dS + \delta\,S\,dt)$$

$$r\,(F - n\,S)\,dt = (F_S - n)\,dS + ½\,F_{S\,S}\,\sigma^2\,dt - C\,dt - n\,\delta\,S\,dt$$

  - **Para o portfólio ficar sem risco, escolhe-se $n = F_S$.**

Termoelétrica e Spark-Spread como MAB

- **Simplificando e rearranjando, temos a seguinte EDO:**

$$½\,F_{S\,S}\,\sigma^2 + (r - \delta)\,S\,F_S - r\,F - C = 0$$

- **Essa EDO tem uma parte homogênea que demanda uma solução geral e uma parte não-homogênea que demanda uma solução particular (= – C/r).**
  - **A solução geral + particular aqui é diferente do caso do MGB:**

$$F(S) = A_1\,\exp[\beta_1\,S] + A_2\,\exp[\beta_2\,S] - C/r$$

  - **Onde β_1 e β_2 são as raízes da equação quadrática:**

$$½\,\sigma^2\,\beta^2 + (r - \delta)\,S\,\beta - r = 0$$

  - **Que tem solução:**

$$\beta_1 = \frac{-(r - \delta)\,S + \sqrt{(r - \delta)^2\,S^2 + 2\,\sigma^2\,r}}{\sigma^2} > 0$$

$$\beta_2 = \frac{-(r - \delta)\,S - \sqrt{(r - \delta)^2\,S^2 + 2\,\sigma^2\,r}}{\sigma^2} < 0$$

Termoelétrica e Spark-Spread como MAB

- As condições de contorno da EDO são:

$$\lim_{S \to -\infty} F(S) = 0$$

Em S = S*, $F(S^*) = V(S^*) - I$

Em S = S*, $F_S(S^*) = V_S(S^*)$

- A primeira condição obriga a constante $A_2 = 0$.
- Tendo a função valor do projeto operando V(S), então as outras duas c.c. permitem calcular A_1 e S*, resolvendo totalmente o problema (F e S*).
- No artigo, eles estimam o drift α e a volatilidade σ para o mercado norueguês:
  - Drift α = 0,16 ($/MW-h)/ano (não é 16%) ~ zero.
  - Volatilidade = 28 ($/MW-h)/ano (desvio-padrão de dS).

Opções Inerentes e Opções Criadas

- Opções inerentes não necessitam de ações para serem obtidas ou mantidas, precisa apenas serem identificadas e gerenciadas adequadamente.
  - Exs.: opções de investir de empresa capacitada; opção de abandonar um projeto; opção de parada temporária de uma unidade produtiva; opção de expansão; etc.
- Opções criadas precisam de ações ou investimentos para existirem. Exemplo típico é investir em P&D:
  - Ex.: Investimento em duas tecnologias concorrentes para atender uma demanda atual ou latente. Valoração: "opção de máximo de dois ativos de risco". No futuro a opção mais valiosa será exercida (desenvolvida).
  - Usa a analogia com opção exótica de máximo de 2 ativos, do tipo européia: só pode exercer após se capacitar (leva 1 ano)
  - Essa opção exótica tem solução analítica conhecida (usa a função distribuição normal *bivariada* acumulada).

Opção de Máximo de Dois Ativos de Risco

- O valor da opção de compra sobre o máximo de 2 ativos de risco na expiração é $F_{máx}(T) = \max\{\max\{V_1 , V_2\} - I, 0\}$
  - Esse é um tipo particular da opção exótica chamada ("two-color") *rainbow* options", que inclui a opção de mínimo entre dois ativos de risco, com $F_{mín}(T) = \max\{\min\{V_1 , V_2\} - I, 0\}$
- No caso de V_1 e V_2 seguirem MGBs com correlação ρ, o valor de uma opção <u>européia</u> $F_{máx}(t = 0)$ é dada por:

$$\begin{aligned} F_{máx}(V_1, V_2; I, T) &= V_1\, e^{-\delta_1 T}\, NN(y_1, d; \rho_1) + \\ &+ V_2\, e^{-\delta_2 T}\, NN(y_2, -d + \sigma\, T^{½}; \rho_2) - \\ &- I\, e^{-r T}\, [1 - NN(-y_1 + \sigma_1\, T^{½}, -y_2 + \sigma_2\, T^{½}; \rho)] \end{aligned}$$

  - Onde: $NN(a, b; \rho)$ é a distribuição acumul. Normal *bivariada* padrão (probab. que $V_1 < a$ e $V_2 < b$, com corr. ρ, ver Pasta 76); e:

$$d = \left[\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \left(\delta_2 - \delta_1 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \quad \Big| \quad y_1 = \left[\ln\left(\frac{V_1}{I}\right) + \left(r - \delta_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T\right]\frac{1}{\sigma_1\sqrt{T}} \quad \Big| \quad y_2 = \left[\ln\left(\frac{V_2}{I}\right) + \left(r - \delta_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T\right]\frac{1}{\sigma_2\sqrt{T}}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2} \qquad \rho_1 = \frac{\sigma_1 - \rho\,\sigma_2}{\sigma} \qquad \rho_2 = \frac{\sigma_2 - \rho\,\sigma_1}{\sigma}$$

Opções de Tecnologias Concorrentes

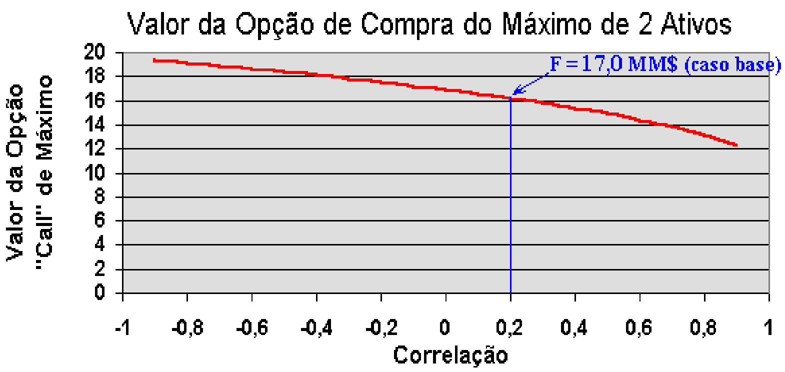
- O investimento em P&D de duas tecnologias concorrentes pode ser valorado como sendo pelo menos o valor da opção sobre o máximo de dois ativos de risco.
- Exemplo: tecnologia ISDN x ADSL para linhas de cobre.
  - Inspirado num caso real (1998). Uma operadora de telefonia fixa está avaliando as tecnologias ISDN e ADSL, que permitem o melhor aproveitamento de banda com a malha de linhas de cobre existente.
  - Até quanto vale a pena gastar para ter a capacitação que permita daqui a <u>um ano</u> implantar em um grande mercado?
    - Esperar mais de 1 ano: estudo indica a entrada de concorrentes
  - Suponha que após a capacitação (leva 1 ano), exista um projeto de desenvolvimento com investimento D = \$100 milhões usando a melhor tecnologia. VPL de desenvolvimento é VPL = V – D.
  - Suponha que a tecnologia ISDN hoje teria um valor V_1 = \$105 milhões, enquanto que a tecnologia ADSL geraria V_2 = 95 milhões. Os futuros valores de V_1 e V_2 são incertos e seguem MGBs, com volatilidades σ_1 = 20%aa., σ_2 = 25% aa. e correlação $\rho_{1,2}$ = + 0,2.

ISDN x ADSL: Opção de Máximo

- Suponha ainda que já existe capacitação na operadora para desenvolver a tecnologia ISDN, mas a sua implantação exclui a tecnologia ADSL que poderá vir a ser a melhor alternativa.
  - Assim existe um custo de oportunidade δ de não implantar a tecnologia ISDN que é adiar os seus fluxos de caixa positivo.
  - Suponha que para a ISDN, temos esse custo de oportunidade igual a δ_1 = 10% aa.; enquanto que para a ADSL esse custo de oportunidade é zero ($\delta_2 = 0$) pois ainda não existe capacitação.
  - Suponha ainda que a taxa de juros (*after-tax*) r = 8 %aa.
- Quanto vale a opção ($F_{1,2}$) de desenvolver essa tecnologia e escolher a melhor daqui a um ano? Essa opção vale mais ou menos que ter apenas a opção americana (1 ano) de usar a tecnologia ISDN?
- O VPL do investir logo na tecnologia ISDN e o seu valor de opção (1 a.) valem $VPL_1 = V_1 - D = 105 - 100 = \$ 5$ MM; $F_1 = 10{,}28$ MM
- Usando o programa de opções do máximo de 2 ativos de risco, tem-se: $F_{1,2} = \$ 17{,}02$ milhões $> F_1 > VPL_1 \Rightarrow$ O melhor é se capacitar
- Se pagaria na capacitação até $F_{1,2} - F_1 = \$6{,}74$ milhões.

Efeito da Correlação na Opção de Máximo

- O gráfico mostra a variação no valor da opção do máximo de duas tecnologias do exemplo anterior.
  - Assinalado o caso base com correlação ρ = + 0,2.
  - É provável que a correlação seja positiva, já que uma recessão ou uma expansão afeta o valor das duas tecnologias.
  - Existem outros fatores de incerteza, específicos do desenvolvimento das tecnologias (correlação não é perfeita).



Opções Tipo Européias: Soluções

- **Soluções analíticas para *opções européias exóticas* abundam na literatura. Por ex., opções compostas européias (call sobre call, call/put, put/call e put/put).**
  - **Essas fórmulas assumem que o(s) ativo(s) seguem MGB(s).**
  - **No entanto, em opções reais, às vezes queremos mudar algum detalhe e com isso pode não existir solução analítica conhecida.**
  - **Por ex., no caso anterior, foi considerado que o investimento I (preço de exercício de $F_{máx}$) é o mesmo para os dois ativos.**
- **Uma alternativa mais flexível (uso geral) especialmente para opções européias é usar a simulação de Monte Carlo *neutra ao risco* do(s) processo(s) estocástico(s) em T, aplicar a regra de exercício ótimo em T para cada interação e descontar com a taxa livre de risco r.**
  - **Ex. de payoff em T: $F_{máx}(T) = \max\{\max\{V_1 - I_1, V_2 - I_2\}, 0\}$**

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Homogeneidade

- Uma função é homogenea de grau n em x, onde x é um vetor de variáveis, se:

$$F(t\,x) = t^n\,F(x)$$

  - Para todo $t > 0$ e para $n \in Z$ (conjunto dos inteiros).
- Ver na pasta 76 um artigo de Don Chance sobre homogeneidade em derivativos. Tinha também na internet, mas está fora do ar. Estava em:

http://www.fenews.com/fen33/teaching_notes/teaching_notes1.html

Opção de Abandono e Flexibilidade

- A opção de abandono de um projeto é valiosa:
  - Para investir em projetos de curta duração; e
  - Para projetos que usa tecnologia com flexibilidade.
- A opção de abandono é análoga a uma opção de venda ("put"), do tipo americana:
  - o preço de exercício dessa opção é igual ao valor de mercado ou de uso alternativo dos ativos do projeto;
  - esse valor pode ser uma função decrescente com o tempo ou mesmo um valor também incerto; e
  - o tempo de expiração da opção pode ser o tempo de vida útil dos equipamentos.
- Uma tecnologia mais eficiente nem sempre é a melhor. A incerteza valoriza a tecnologia flexível.

Decisões de Desinvestimento

- As *decisões de abandono* ou *desinvestimento*, na presença de custos de abandono, são similares às *decisões de investimento*.
- Dixit & Pindyck, 1994, p.3 (*Investment under Uncertainty*):
  - *"Investimento é o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios".*
  - "*uma firma que fecha uma planta que gera prejuízos está também 'investindo' ... benefício é a redução de perdas futuras*".
- Assim os princípios da decisão de abandono são similares às decisões de investimento. As perguntas são:
  - Serão os *benefícios do abandono* (em valor presente) suficientes para justificar o gasto imediato do custo de abandono?
  - Qual a alternativa de data de abandono que maximiza o VPL?
    - Note que "abandonar na data t" ou "abandonar na data t + 1" são alternativas mutuamente exclusivas. Logo temos de ver a de maior VPL
    - Uma vez que o fluxo de caixa passado (antes de t) é comum às duas alternativas, podemos comparar as mesmas olhando apenas para frente.

Interações Entre Opções

- Em um projeto podem coexistir várias opções relevantes
  - Jazidas maduras: necessário considerar as opções operacionais (modelo de histerese, cap. 7). Projeto piloto: investimento pequeno.
- A aditividade entre as OR dum mesmo projeto depende:
  - Se são opções do mesmo tipo (ex.: duas "call") ou de tipos diferentes (ex.: uma "call" e uma "put");
  - Do intervalo de separação entre as datas de exercício;
  - Se as opções estão "deep", "out" ou "in-the-money";
  - A ordem seqüencial das opções.
- O sinal da interação pode ser positivo (presença de outras opções aumenta valor da primeira) ou negativo:
  - Positivo: se a primeira é uma opção de compra;
  - Negativo: se vem primeiro uma opção de venda.
- Opções substitutas e opções complementares
  - Substitutas: reduz o *prêmio* da primeira. Ex.: espera + abandono.
  - Complementares: aumenta a 1ª . Ex.: shut-down + expansão

Incerteza Técnica e Opções Compostas

- **A incerteza técnica gera oportunidades de investimentos seqüenciais. Quando é que a primeira opção se torna "deep-in-the-money" (madura para o exercício imediato)? Para responder, veremos um exemplo simples em petróleo.**
  - **Seja um prospecto exploratório em que existe um fator de chance FC de achar petróleo (incerteza técnica na existência de petróleo) e, logo, com chance 1 – FC de ser um *poço seco*.**
    - **A opção exploratória E(P, t) é função do preço do petróleo P que segue um MGB e do tempo t (ver abaixo). O preço de exercício da opção é I_W, que é o investimento no poço pioneiro ("wildcat").**
    - **Por simplicidade, assuma que a perfuração do poço é instantânea**
  - **Em caso de descoberta, a firma obtém uma opção real R(P, t) de desenvolver o campo. A opção é finita: existe um tempo legal máximo T (expiração) para a firma descobrir petróleo e se comprometer com um plano de desenvolvimento imediato.**
    - **O preço de exercício da opção de desenvolvimento é I_D, o qual é assumido determinístico por simplicidade (assim como I_W).**

Opções Compostas em Exploração

- **Em caso de <u>exercício da opção exploratória</u> E(P, t), obtém-se o valor monetário esperado VME = - I_W + FC . R(P,t).**
- **Em caso de descoberta de petróleo e em caso de <u>exercício da opção de desenvolvimento</u> R(P, t), obtém-se o VPL de desenvolvimento: VPL = V(P) - I_D.**
  - **Vamos assumir o *modelo de negócios*: V(P) = q B P, onde q = qualidade da reserva e B = volume da reserva.**
- **Como sempre, o problema é resolvido "backwards", i.é, primeiro calcula-se R(P, t) e depois E(P, t).**
- **Seja P* o gatilho em que a opção de desenvolvimento R(P, t) fica "deep-in-the-money" p/ o exercício imediato.**
- **Seja P** o gatilho em que a opção exploratória E(P, t) fica "deep-in-the-money" para o exercício imediato.**
  - **Além disso, é necessário que P** ≥ P*. Por que? Será visto.**

EDP e cc's da Opção de Desenvolvimento

- A equação diferencial parcial (EDP) de R(P, t) é igual à EDP de Black-Scholes-Merton, já mostrada. Por que?
  - Essa EDP depende apenas de: (a) processo estocástico do ativo básico P (aqui MGB); (b) se o tempo t é variável de estado (é o caso); (c) se o derivativo R tem ou não fluxo de caixa (aqui não tem). Como sempre, os detalhes do modelo ficam p/ as cc's:

EDP:
$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial R}{\partial P} - r R + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

Condições de contorno (cc):
$$\begin{cases} R(0, t) = 0 & , \quad \text{se } P = 0 \\ R(P, T) = \max(q\, B\, P - I_D, 0) & , \quad \text{se } t = T \\ R(P^*, t) = q\, B\, P^* - I_D & , \quad \text{se } P = P^* \\ \dfrac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q\, B & , \quad \text{se } P = P^* \end{cases}$$

EDP e cc's da Opção Exploratória

- A EDP de E(P, t) também é igual à EDP de B&S&M.
- O que muda são as cc's. A novidade aqui é que só é ótimo exercer E(P, t) se, em caso de sucesso, a opção R(P, t) já estiver "deep-in-the-money", i.é, $P^{**} \geq P^*$.
  - Não tem sentido exercer a opção E(P, t) se depois o melhor for apenas esperar, pois com $r > 0$ é sempre melhor postergar I_W.
    - A alternativa esperar dt é melhor pelo menos $r\, I_W\, dt$ do que a de exercer já E e depois esperar pelo menos dt para exercer R.

EDP:
$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial E}{\partial P} - r E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Condições de contorno (cc)
$$\begin{cases} E(0, t) = 0 & , \quad \text{se } P = 0 \\ E(P, T) = \max[-I_W + FC\,(q\, B\, P - I_D), 0] & , \quad \text{se } t = T \\ E(P^{**}, t) = -I_W + FC\,(q\, B\, P^{**} - I_D) & , \quad \text{se } P = P^{**} \\ \dfrac{\partial E(P^{**}, t)}{\partial P} = FC\, q\, B & , \quad \text{se } P = P^{**} \end{cases}$$

Exercício Antecipado de Opção Composta

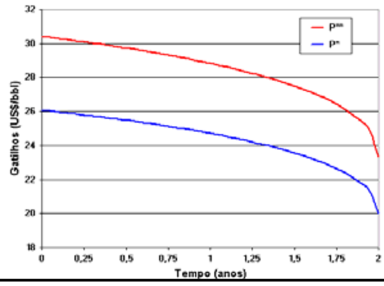
- Outra forma de ver que $P^{**} \geq P^*$:
  - ❶ Seja o caso *mais favorável* com FC = 1 ($\Rightarrow$ com o menor P^{**}).
  - ❷ A opção R pode ser vista como ativo básico da opção composta E (pagando I_W se obtém R). Mas foi visto na parte 1 que existe um teorema mostrando que a condição necessária (mas não suficiente) para o exercício *antecipado* ótimo de uma opção call americana é o ativo básico pagar dividendos (fluxo de caixa).
  - ❸ A opção R só "paga dividendos" se ela estiver "deep-in-the-money" ($\Rightarrow$ só se $P \geq P^*$), pois nesse haveria fluxo de caixa > 0. Logo, $P^{**} \geq P^*$. Assim, foi provado para o caso de FC = 1.
  - ❹ Se FC < 1, então P^{**} é ainda maior que no caso FC = 1. (cqd)
- Seja o caso geral em que a primeira opção pode revelar n (ou infinito) cenários que afetam o valor da 2ª opção:
  - A condição *necessária* para o exercício *antecipado* da 1ª opção é que, em pelo menos um cenário com probabilidade > 0, a 2ª opção esteja "deep-in-the-money" de forma a ter fluxo de caixa > 0.
    - ➡ Aqui eram dois cenários, com o cenário "sucesso" com prob. FC > 0

Solução Numérica: Simplicidade do MGB

- A solução do modelo (opções R e E e gatilhos P^* e P^{**}) é numérica e pode ser feita, por ex., com *diferenças finitas*.
- No entanto, mais uma vez podemos usar o código VBA fornecido, graças mais uma vez à homogeneidade em V e I da opção F(V, I, t), propriedade válida para o MGB.
  - Dada uma constante k, então: F(V, I, t) = k F(V/k, I/k, t). Ou seja, F(V, I, t) tem cc do tipo V – I, enquanto que F(V/k, I/k, t) tem cc do tipo V/k – I/k, a escala da opção é colocada nas cc.
  - Com V = q B P, faz k = q B. Assim, o valor da nossa opção R(.) com cc. tipo q B P - I_D, é k vezes R(.) com cc. do tipo P - I_D/k.
  - Além disso, vimos na parte 2 que se o preço P segue um MGB e o valor do projeto V é proporcional a P (i.é, V = k P), então V segue também um MGB e com os mesmos parâmetros (δ, σ) de P
    - ➡ Com o lema de Itô mostra-se que a EDP R(V, t) é igual a R(P, t), com V no lugar de P. Como as cc são iguais, a solução é igual.
  - ➡ Código VBA: faz V = q B P e preço de exercício I_D, tem R(P, t). O gatilho V^* obtido é dividido por q B para ter $P^* = V^*/(q\ B)$.

Solução do Modelo para E(P, t)

- Para a opção E, também pode usar o mesmo software, mas o truque é um pouco mais sutil e usa P** ≥ P*.
  - Se chamar V' = k' P = FC q B P e preço de exercício igual a I_W + FC I_D, a EDP e as cc de E(V', t) são iguais às de E(P, t).
  - Nas cc., como em P** a opção R = VPL (pois P** ≥ P*), o valor da opção R(V', t) obtido com o software é o mesmo de R(P, t). Com o gatilho (V')* achamos P** = (V')* / (FC q B).
  - Ver [planilha Excel]que usa o mesmo código VBA de antes. Ela mostra, por ex., as curvas de gatilhos P*(t) e P**(t):



O Pensamento Estratégico de Opções

- O uso de opções permite iniciar a mudança do modo de pensamento do gerente.
  - É frequentemente possível *mudar o curso* ou mesmo *abandonar* um *investimento plurianual* num projeto.
  - Mudar a atitude em relação à incerteza. A visão de "mêdo da incerteza/minimizar investimentos" para "ganhar com a incerteza/maximizar aprendizagem".
  - Enfatizar e buscar oportunidades, inclusive os investimentos incrementais derivados dos ativos existentes.
  - Alavancagem através de opções de crescimento, que mantém a firma "melhor capacitada para o jogo".
    - Ex.: investimento exploratório e/ou sistema piloto são frações do investimento em desenvolvimento global.
  - Essa *alavancagem* diferencia a estratégia de opções da estratégia tradicional de *diversificação* que só reduz o risco. Ambas, diversificação e alavancagem, são relevantes.

Plano Estratégico e os Cenários do Futuro

- Estratégia nos dá as linhas-guia para a ação, mas o ambiente de negócios está em constante mudança
  - Análise de cenários nos faz pensar em vários futuros possíveis, mas se tem de traçar hoje apenas uma estratégia para o futuro incerto;
  - Isso cria uma tensão entre estratégia e cenários;
  - O pensamento de opções ajuda muito nesse aspecto;
- É necessário <u>construir flexibilidade dentro do plano estratégico</u>: entra o pensamento de opções
  - Muitas vezes o empresário faz isso de forma intuitiva, sem sistematizar e quantificar: paga mais do que aparenta ser razoável por um negócio por "abrir novas oportunidades (opções) de negócios".

Competitividade e Capacidades

- O investimento é o fator mais importante da vantagem competitiva (Michael Porter).
- Miopia gerencial: investimento só de curto prazo.
- Causas da Miopia: métodos inadequados de análise de investimento, sistemas de avaliação de executivos.
- Sistema alternativo de incentivo a executivos: uso de opções européias de longa duração (ex.: Microsoft).
- Competitividade requer <u>investimento em capacidades</u> (ativos intangíveis) que dão opções de crescimento p/ a firma. Exs.: P&D; treinamento; sistemas de informações; relações com clientes e fornecedores; etc.
- Daí surge o conceito de *plataforma de opções.*

Plataforma de Opções

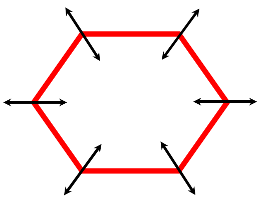
- **Plataforma de opções é o resultado do <u>investimento em capacidades</u>, que permite a firma entrar em novos e lucrativos negócios, ou abre perspectivas adicionais. Exs:**
  - **Capacitação em tecnologia de produção em águas profundas, valoriza suas opções de investimento e permite negociar participações mais vantajosas do que outras oil companies, etc;**
  - **Capacitação em tecnologias (ex.: sistemas de bombeamento multifásico) que permitem rápido aproveitamento duma situação de mercado favorável, (por ex. preços altos do óleo);**
  - **Capacitação em microeletrônica e tecnologia wireless dão opções de entrar no mercado de celulares, pagers, smart-cards, walkmans, TV por satélite (DTH), etc;**
  - **Canais de distribuição de produtos em vários estados e/ou países, permitindo entrega rápida de diferentes produtos (flexibilidade para tipo e quantidade).**
- **Quanto mais negócios podem ser abertos por uma plataforma de opções, mais ela é valiosa.**

Gerenciando Opções Proativamente

Estender a duração da opção:
- Manter barreiras regulatórias
- Sinalizar habilidade de exercer
- Inovar para manter liderança
- Petróleo: pagando valor extra pode estender a exploração

Aumentar a incerteza (upside) dos fluxos de caixa potenciais:
- Estender a oportunidade para mercados relacionados
- Encorajar produtos complementares
- Desenvolver produto inovativo
- Linha de produtos (blundling)

Reduzir o valor presente dos custos fixos:
- Alavancar economias de escala
- Alavancar economias de escopo
- Alavancar economias de aprendizagem



Aumentar o valor presente dos fluxosde caixa esperados:
- Desenvolver estratégias de markerting
- Desenvolver alianças com fornecedores de baixo custo
- Gerar opções compostas através de negócios sequenciais

Monitorar o impacto nas mudanças da taxa de juros do mercado sobre a opção
- Altas taxas de juros aumenta o valor da espera (rendimento sem risco mais atrativo)

Reduzir o valor perdido pela espera:
- Criar dificuldades de implementação para os competidores
- Reter recursos chaves
- *Revelation* devido a ação da indústria

O Valor de Manter as Opções Abertas

- **Quanto mais incerto for o futuro dos negócios:**
  - **Maior o valor das opções abertas, isto é opções não exercidas, mas <u>prontas ou quase prontas para serem exercidas</u>: invista pouco, apenas para ter as opções;**
  - **Mais importante é *não* se comprometer com elevados investimentos irreversíveis:**
    - **Não exercer a opção antes de ela estar "deep in the money"**
  - **Em contratos de longo-prazo, é valioso deixar uma porta aberta de saída antecipada: opção de sair do negócio com o menor custo (multa) possível.**
- **Considere deixar suas opções "vivas":**
  - **"Para fazer decisões inteligentes de investimento, os gerentes precisam considerar <u>o valor de manter as suas opções abertas</u>" Dixit & Pindyck, 1995.**