PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Análise de Investimentos com Opções Reais IND 2072

Parte 1.2: Opções em Tempo Discreto

Marco Antonio Guimarães Dias

Professor Adjunto (tempo parcial)

Rio de Janeiro, 1º Semestre de 2006

Teoria da Valoração

- Existem dois tipos de teoria da valoração de ativos, segundo Constantinides (Univ. Chicago).
- Teoria Livre de Preferências: opções, proposições de Modigliani & Miller.
  - Equilíbrio: oportunidades de arbitragem no mercado não sobrevivem. Eficiência no uso de informações.
  - Só se supõe que o investidor tem um comportamento maximizador de riqueza (prefere mais a menos).
  - Independe das atitudes do investidor em relação ao risco (avesso, neutro, ou mesmo amante do risco).
  - Função utilidade: qualquer, basta ser crescente com a riqueza.
- Teoria Dependente de Preferências: ex.: CAPM.
  - Equilíbrio: especifica as preferências do investidor.
  - Além de assumir aversão ao risco, especifica a função utilidade.

Arbitragem

- **Definição de oportunidade de arbitragem:**
  - ***É um plano de consumo que tem custo inicial não-positivo* e que *é sempre não-negativo e estritamente positivo em pelo menos um cenário* (Huang & Litzemberger, 1988, p.226).**
    - **Ex.: em t = 0 fazer um <u>investimento líquido igual a zero</u> e em t = 1 <u>não ter risco de perder</u> em nenhum cenário, mas *podendo ganhar* em algum.**
- **Conceito muito usado em cálculo de opções/derivativos e na análise de equilíbrio do mercado.**
  - **Num mercado competitivo os preços dos ativos são tais que:**
    - **Se existir uma oportunidade de arbitragem, ela logo desaparecerá: devido a pressão de compra do ativo barato e a pressão de venda do ativo caro, os preços desses ativos retornariam ao equilíbrio.**
  - **O preço justo da opção não permite ganhos de arbitragem (idéia básica do Black-Scholes-Merton). Para isso se constrói um <u>portfólio sem risco</u>, composto de opções e do ativo básico.**
    - **O retorno desse portfólio sem risco tem de ser a taxa livre de risco.**

Investimento

- **Definição de investimento (Dixit & Pindyck):**

  É o ato de incorrer em custos imediatos

  na expectativa de futuros benefícios.

- **Retorno do Investimento = Ganho de Capital + Dividendos**
  - **Taxa de retorno total = taxa de ganho de capital + taxa de dividendos**

$$\mu = \alpha + \delta$$

- **Pelo CAPM, retorno total esperado = taxa ajustada ao risco, é:**

$$\mu = r + \underbrace{\beta\,(r_m - r)}_{\text{prêmio de risco } (\pi)}$$

Onde: r = taxa livre de risco; r_m = retorno do mercado

β = "beta" do projeto (ou do ativo) = medida de covariância

Uma Importante Relação

- **Igualando as duas equações para o retorno total μ, obtém-se a seguinte importante relação:**

$$\alpha - \pi = r - \delta$$

- **Em palavras, a tendência α penalizada pelo prêmio de risco π é igual à taxa livre de risco r menos a taxa de dividendos δ.**
  - **Essa tendência $\alpha - \pi$ é chamada *tendência neutra ao risco***
  - **Assim, $r - \delta$ também é uma *tendência neutra ao risco***
  - **Essa relação será muito usada para o caso em tempo contínuo e em simulações de Monte Carlo, a serem vistas.**

Qual a Taxa de Desconto da Opção?

- **A teoria tradicional (ex.: CAPM) permite calcular o prêmio de risco de um ativo de risco V e logo uma taxa de desconto ajustada ao risco de V.**
  - **Uma opção F(V) sobre esse ativo V, também é um ativo de risco. Sendo uma função de V, o risco desse ativo F está *vinculado* ao de V, mas o risco de F(V) é *diferente* do risco de V.**
  - **Em resumo, a taxa de desconto da opção F(V) NÃO é igual à taxa de desconto de V.**
    - **Esse foi um erro comum antes de Black & Scholes e Merton em 1973.**
  - **A taxa de desconto da opção é um problema difícil, mas pode-se "by-passar" esse problema através dos métodos:**
    - **Construção de um portfólio sem risco, formado pelo ativo básico V e por n unidades do derivativo F, onde n é tal que o portfólio é sem risco.**
      - **Se o portfólio é sem risco, a taxa de desconto adequada é a livre de risco.**
    - **Método da neutralidade ao risco: penaliza-se o valor esperado futuro de V *subtraindo-se um prêmio de risco* de sua tendência (certeza equivalente).**
      - **Prova-se que assim pode-se usar a taxa de desconto livre de risco para F(V).**

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Compra

- **Mesmo sem precisar, apresentarei o resultado clássico (Merton, 1970 e 73) p/ essa taxa de desconto (retorno esperado) da opção.**
- **No caso de uma opção de compra americana C, escrita sobre o ativo V com retorno total μ, o retorno de C, r_C, é maior que μ:**

$$r_C = r + \varepsilon_C (\mu - r) \geq \mu \geq r$$

- **Onde a elasticidade ε_C é interpretado como o "beta" relativo da opção (relativo ao *retorno de V*, em vez do retorno do *mercado*):**

$$\varepsilon_C = \frac{\partial C}{\partial V} \frac{V}{C} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_C = \frac{\partial C}{C} \Big/ \frac{\partial V}{V} \geq 1$$

- **É intuitivo que quando um ativo V varie x% no mercado, a variação da opção C seja maior (risco é amplificado) $\Rightarrow \varepsilon_C \geq 1$.**
  - **Coloquei na Pasta 76 um artigo curto do Shackleton & Sodal sobre isso.**
- **Note que r_C <u>varia</u> com o valor de V e com o tempo para expiração.**
- **Para saber mais, ver livro do Epps (*Pricing Derivatives Securities*, p.295-298)**

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Venda

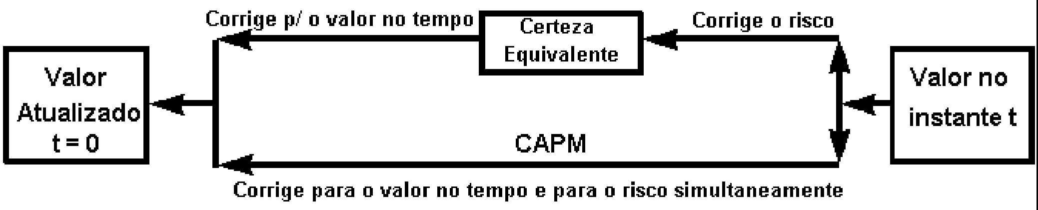
- **O caso da *opção de venda* (put, P) é talvez menos intuitivo, pois se o ativo básico tem uma variação positiva, a put tem variação negativa e vice-versa. Ou seja, *as variações são opostas*.**
  - **Uma *grande* variação positiva em V leva a uma *grande* (e ainda maior) variação negativa de P. Isso sugere que <u>P pode ter até retornos negativos</u>! Isso é uma conseqüência das variações opostas.**
    - **Dados mostram que as puts têm geralmente retornos negativos (<u>anexo</u>).**
    - **Logo, quanto *maior* for μ (retorno esperado de V), *menor* é r_P (o retorno esperado de P). Ou seja, o oposto que ocorre com a call (quanto maior μ, maior r_C).**
- **A equação de retorno da put será similar ao da call, mas notando que para a put o beta relativo é *negativo*, pois $\partial P / \partial V < 0$.**
  - **O retorno da put pode ser negativo. Para ver isso, seja o valor da put P avaliada no ponto de gatilho V** num dado instante antes da expiração. Usando a fórmula do slide anterior de retorno, mas aplicando p/ P(V**):**

$$r_P(V^{**}) = r - \frac{V^{**}}{P(V^{**})} (\mu - r) = \frac{r\,K - \mu\,V^{**}}{K - V^{**}} > \text{ ou } = \text{ ou mesmo } < 0$$

$$\boxed{\text{pois } \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{V = V^{**}} = -1 \quad \text{e} \quad P(V^{**}) = K - V^{**} > 0}$$

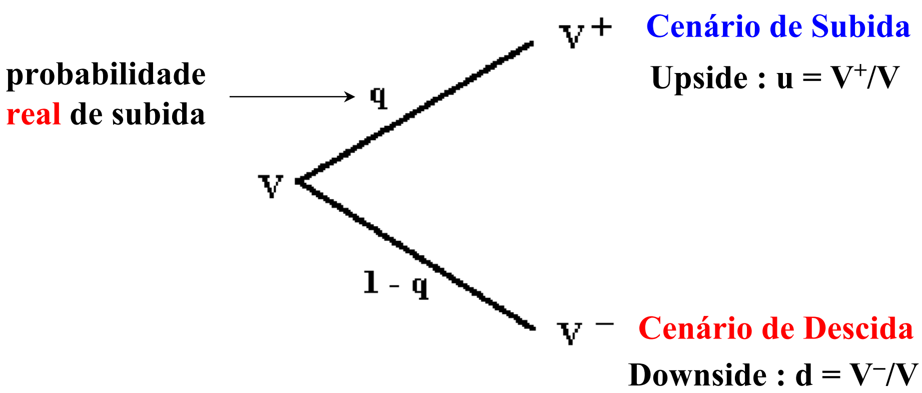
Valor Presente e Taxas de Desconto: O Método da Neutralidade ao Risco

- **Duas maneiras de usar taxas de desconto**
  - **Pode-se descontar com a <u>taxa ajustada ao risco</u> (CAPM), usando <u>probabilidades reais</u>, ou**
  - **Descontar com a <u>taxa livre de risco</u>, usando certezas equivalentes (método da *neutralidade ao risco*), obtidas com um artifício matemático: a *medida equivalente de martingale* que é uma probabilidade *artificial* chamada de <u>*probabilidade neutra ao risco*</u>.**



Método da Neutralidade ao Risco

- **Como calcular a probabilidade neutra ao risco (medida de martingale), para poder usar a taxa livre de risco?**
- **Considere um caso simples: hoje o valor de um projeto é V e em t = 1 ele pode assumir dois valores, V^+ e V^- (não há dividendos):**



Probabilidade Real e Taxa Ajustada ao Risco

- **Pode-se calcular o valor presente usando a *taxa ajustada ao risco* μ para descontar o *valor esperado* de V em t = 1 (ou seja E [V(t = 1)]). Nesse cálculo, usa-se probabilidades <u>reais</u>**

$$V = \frac{E[\,V(t=1)\,]}{1+\mu} = \frac{q\,V^{+} + (1-q)\,V^{-}}{1+\mu}$$

- **Pode-se tirar o valor da taxa ajustada ao risco em função da probabilidade real q, já que μ também é a taxa de retorno esperada do ativo de risco (CAPM):**

$$\mu = \frac{E[\,V(t=1)\,]}{V} - 1 = \frac{q\,V^{+} + (1-q)\,V^{-}}{V} - 1$$

Probabilidade Artificial e Taxa Livre de Risco

- **A pergunta é: <u>sob que probabilidades o retorno desse ativo seria igual à taxa livre de risco</u>?**
- **Seja p essa probabilidade *artificial* neutra ao risco do cenário V^{+} tal que o retorno seja livre de risco:**

Taxa Livre de Risco (r_f): $$r_f = \frac{E'[\,V(t=1)\,]}{V} - 1$$

OBS: E' é um operador de valor esperado sob probabilidades artificiais neutras ao risco p e (1 – p)

$$\Rightarrow r_f = \frac{p\,V^{+} + (1-p)\,V^{-}}{V} - 1$$

fazendo $u = V^{+}/V$, $d = V^{-}/V$ e tirando o valor de p $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

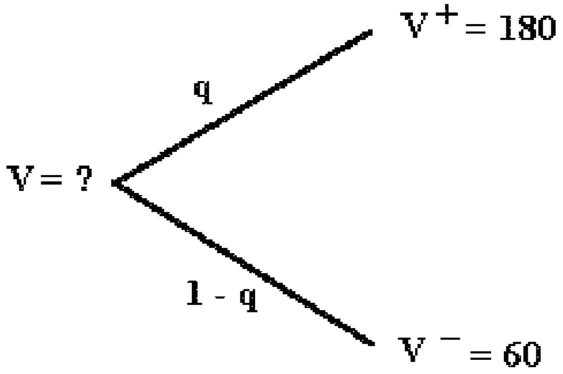
Medida de martingale E^{Q} r
p = probabilidade artificial neutra ao risco de V subir

Exemplo de Taxas de Desconto

- **Agora será visto um exemplo usando os dois métodos de taxa de desconto, que resultam no mesmo valor.**
  - **Inicialmente considere um caso sem dividendos.**

μ = 20% **(taxa ajustada ao risco ou retorno esperado)**

r = 8% **(taxa livre de risco)**

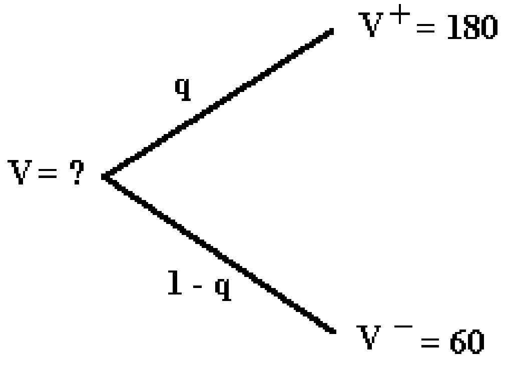


- **Para usar μ precisa saber probab. real *q***
- **Poderia também dar q e V e pedir μ**
- **Suponha q = 50%, quanto vale V?**

Exemplo Numérico de Taxas de Desconto

μ = 20% **Taxa ajustada ao risco**

r = 8% **Taxa livre de risco**



- **Considere que os valores de probabilidades <u>reais</u> q e (1 – q) são iguais a 50%**
- **Usando a taxa ajustada ao risco, o valor presente é:**

  V = (0,5 x 180 + 0,5 x 60)/(1 + 0,20)
- **Logo, V = 100**
- **Agora será encontrado o mesmo valor usando o método da neutralidade ao risco ou de martingale**

Exemplo: Método da Taxa Livre de Risco

- No método da neutralidade primeiro tem de calcular a probabilidade artificial de martingale :

$$p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}$$

Onde o processo de difusão é dado por:

$u = V^+ / V = 180/100 = 1{,}8$

$d = V^- / V = 60/100 = 0{,}6$

$\Rightarrow$ $p = (1 + 0{,}08 - 0{,}6) / (1{,}8 - 0{,}6) \Rightarrow p = 0{,}4 = 40\%$

- Agora pode-se calcular $V(t = 0)$ com a taxa sem risco r_f:

$$V = \frac{E'[V(t=1)]}{1 + r_f} = \frac{p\,V^+ + (1 - p)\,V^-}{1 + r_f}$$

$\Rightarrow$ $V = [(0{,}4 \times 180)+((1 - 0{,}4) \times 60)]/(1+0{,}08) \Rightarrow$ $V = 100$

- Confere: é o mesmo resultado obtido com a taxa μ

Exemplo das Taxas de Desconto: q e p

- Os métodos são equivalentes. Para que dois métodos?
  - Veremos que o método da neutralidade ao risco será muito útil na valoração de derivativos (taxa de desconto complexa).
- No exemplo, e se a probabilidade real for diferente de 50%, qual o valor de V e de p ?

Probabilidade real q para V^+ (%)	Probabilidade de martingale p para V^+ (%)	Valor presente esperado do projeto V
50	40	100
60	49	110
40	31	90

- Fica como exercício verificar. Note que sempre $p < q$.

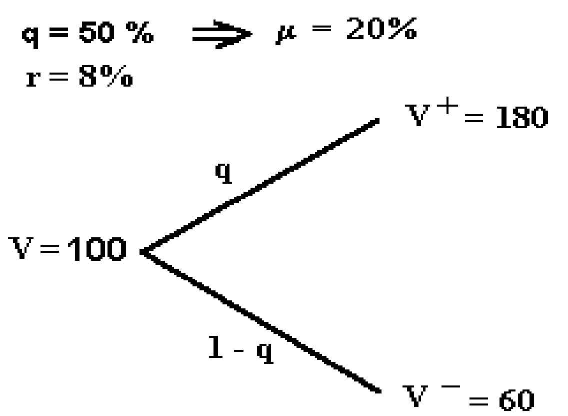
Método da Neutralidade ao Risco

- **Mas se já é sabido o valor presente de V (ou é necessário saber *u* e *d*), qual a vantagem do método?**
  - **Observando valores de mercado, <u>se sabe (ou se estima) o valor corrente do projeto</u> V; o problema é saber o valor da *opção* (F) de investir nesse projeto que tem valor incerto V(t) no futuro;**
  - **Para isso tem de se assumir um processo de incerteza da variável V (ex.: log-normal). Isso é feito aqui com *u* e *d* (a ser detalhado);**
  - **Com esses dados (*V*, *u* e *d*) se tem as expectativas reais de valores futuros de V (logo o retorno de V). No entanto, não podemos usar as probabilidades reais e a taxa ajustada ao risco <u>de V</u>, para calcular o valor presente da opção F, pois V e F têm riscos diferentes;**
  - **Com esses dados (*V*, *u* e *d*, e as taxa de juros e de dividendos) pode-se estimar a probabilidade artificial "neutra ao risco", que gera certezas equivalentes;**
  - **<u>Sob expectativas neutras ao risco se pode atualizar o valor de ativos derivados do ativo básico usando a taxa livre de risco</u>.**
    - **Isso é uma conseqüência do Teorema de Girsanov (mudança de medida).**

Aplicação em Derivativos: Valor do Seguro

- **Considere o processo de incerteza de V com dois cenários V^+ e V^- em t = 1. Seja q a probabilidade real e μ a taxa ajustada ao risco de V:**

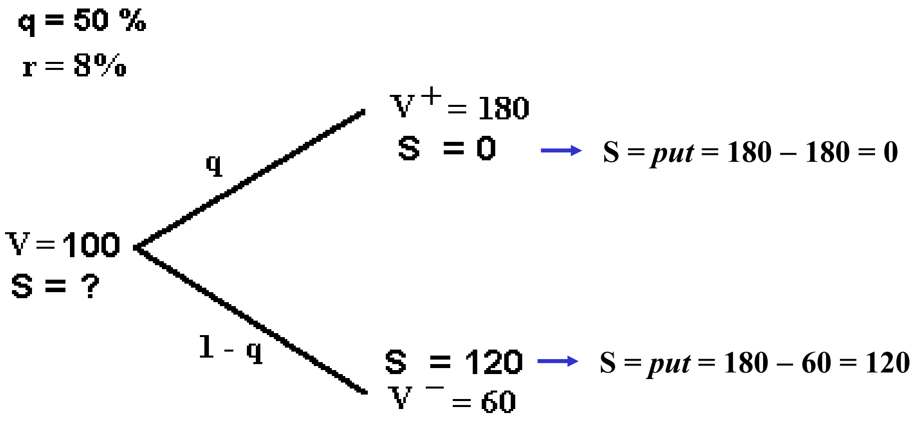
r = taxa livre de risco
q = probabilidade real de subir de V p/ V^+
μ = taxa ajustada ao risco de V = retorno total esperado de V.



- **Quanto vale o *prêmio por um seguro* que me permita ter no futuro um valor de <u>180 em qualquer cenário</u>?**

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Qual o valor do prêmio para ter um seguro total? (ou seja, para obter 180 em qualquer cenário)**



- **Esse seguro é análogo a uma <u>opção de venda</u> (*put*) com preço de exercício de 180 (se V cai para 60, a opção é exercida, caso contrário é indiferente entre exercer ou não).**

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Trigeorgis mostra que o uso da taxa ajustada ao risco <u>do ativo básico</u> (μ = 20%) para calcular o seguro é um erro:**
  - **S = (0,5 x 0 + 0,5 x 120)/ (1 + 0,20) = 50 (valor errado, ver adiante)**
- **Para vermos que esse valor de S está errado, considere a carteira *ativo básico* + *seguro* (V + S):**
  - **Essa <u>carteira é totalmente sem risco</u>, pois o resultado é o mesmo (= 180) para qualquer cenário.**
  - **Se a carteira (V + S) é sem risco, então o <u>retorno dessa carteira terá de ser a taxa livre de risco</u>.**
    - **Caso contrário o seguro estará ou muito caro ou muito barato, permitindo ganhos por *arbitragem*. Como?**
    - **Se V + S estiver barato, eu empresto dinheiro na taxa r para comprar V + S. Na data T eu vendo V + S, pago o empréstimo, e ainda sobra $.**

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Se o retorno da carteira V + S é sem risco, então a taxa de desconto apropriada é a taxa livre de risco.**
- **Usando probabilidades reais e taxa sem risco (8%):**

  V + S = (0,5 x 180 + 0,5 x 180)/ (1 + 0,08) = 166,7
- **Como sabemos que V = 100 (no instante zero), então o valor de S sai por diferença:**

  $\Rightarrow$ **S = 166,7 – V = 166,7 – 100** $\Rightarrow$ **S = 66,7**
- **E não o valor de 50 calculado usando μ = 20%, que subestimou o valor do prêmio do seguro.**
  - **Vimos que achar a taxa ajustada ao risco da opção é complicado.**
- **Agora usaremos um método alternativo para calcular o seguro que também dá o valor correto: as *probabilidades neutras ao risco* ou *medida equivalente de martingale.***

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Veremos que com o método da neutralidade ao risco (transformando probabilidades), se consegue obter o valor correto para o derivativo (o mesmo valor obtido com o método do portfólio sem risco).**
  - **A probabilidade artificial neutra ao risco (ou medida de martingale) é:**

$$\boxed{p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}}$$

r_f = taxa sem risco (aqui = 8%)
u = "up" = V^+/V (aqui 180/100 = 1,8)
d = "down" = V^-/V (aqui 60/100 = 0,6)

$\Rightarrow$ **p = (1 + 0,08 – 0,6) / (1,8 – 0,6)** $\Rightarrow$ **p = 0,4 = 40%**

S = ? — p → **$S^+ = 0$**; 1 - p → **$S^- = 120$**

$$S = \frac{(0{,}4 \times 0 + 0{,}6 \times 120)}{1 + 0{,}08}$$

Logo, S = 66,7

- **Que é o valor correto, igual ao calculado antes, em que foi usado o conceito que um portfólio livre de risco (V + S) tem retorno igual a r_f**

Exemplo do Seguro e a Taxa de Desconto

- **Assim esse método de transformação de probabilidades (mudança de medida) é prático pois evita que se calcule a taxa ajustada ao risco da opção (ou de qualquer derivativo)**
- **Mas e se quizermos saber qual a taxa ajustada ao risco da opção (seguro) nesse exemplo?**
  - **Agora é fácil pois já sabemos o valor presente da opção, temos os valores dos cenários e a probabilidade real:**

    $66,7 \;=\; (0,5 \text{ x } 0 + 0,5 \text{ x } 120) / (1 + \mu_S) \Rightarrow \mu_S = -\,10\%$
- **Taxa de desconto ajustada ao risco é <u>negativa</u>?**
  - **Já vimos que a taxa de desconto (retorno esperado) pode ser negativa no caso de opções de venda (put). Mas *não precisamos dela*.**
  - **Intuição: a opção nesse contexto (*hedge*) entra para reduzir o risco. No contexto especulativo a opção tem um alto risco mas não teria outro preço (não pode ter dois preços para o mesmo ativo no mercado, senão haveria arbitragem).**

Exemplo do Seguro e a Composição do Porfólio

- **Foi visto que o valor do seguro foi calculado sabendo apenas o valor corrente e a dinâmica de V, além da taxa sem risco r_f.**
- **Para isso, no primeiro método se montou um portfólio sem risco. Iremos usar esse portfólio sem risco também quando trabalharmos em tempo contínuo. Teremos de saber montá-lo!**
- **Note nesse exemplo do seguro (put) que se o portfólio Φ for escrito da seguinte conveniente forma:**

$$\Phi \;=\; S \;-\; n\,V$$

  - **Então, no nosso exemplo esse valor seria $n = -\,1$ para não ter risco.**
- **Veremos que n é o chamado "delta hedge" e é igual à derivada da opção em relação ao ativo básico. Sabemos que a put S na expiração vale $S(T) = \text{Max}(K - V, 0)$. Nessa data, se $V \leq K$ (aqui $K = 180$), então $\partial S/\partial V = -\,1$ (se $V > K$ a derivada é zero).**
  - **Veremos que a escolha de $n = \partial F/\partial V$ (onde F é uma opção qualquer) é sempre usada para obter um porfólio livre de risco.**

Método da Neutralidade ao Risco

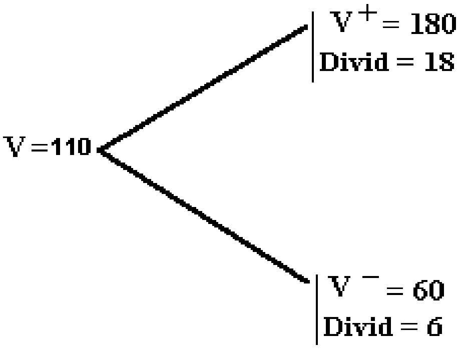
- O método da neutralidade ao risco **não supõe** que os investidores são neutros ao risco.
  - Vale para avessos ao risco, como para amantes e neutros ao risco.
- Através de "probabilidades adequadas", o valor do ativo básico é penalizado (certeza equivalente) e isso permite que se use a taxa de desconto livre de risco.
- Essa probabilidade pode ser usada para calcular o valor de *qualquer* ativo derivado desse ativo básico V.
- A taxa *ajustada ao risco da opção* não é igual à taxa ajustada ao risco *do ativo básico*. Não precisamos dela.
- Num contexto mais geral, o método da neutralidade ao risco é provado rigorosamente pelo *teorema de Girsanov*.
- Essa probabilidade é usada para apreçar opções usando o método *binomial* (Cox & Ross & Rubinstein, 1979).

Medida de Martingale Com Dividendos

- No exemplo anterior não foi considerado os dividendos (fluxos de caixa), apenas o ganho de capital (valorização V^+ e desvalorização V^-).
  - Para usar a técnica de martingale na presença de dividendos, basta somar os dividendos de cada cenário aos valores "ex-dividendos" do ativo (projeto) V^+ e V^-.
    - Existe uma outra maneira, mexendo em p (em vez de mexer em u e d).
- Assim, a única diferença será nos valores de "u" e "d", somando dividendos com ganho de capital:
  - u = (V^+ + dividendos no cenário "up")/V
  - d = (V^- + dividendos no cenário "down")/V
- Serão vistos dois exemplos, sendo o 2º para o caso da opção de desenvolver terrenos urbanos, em que entram os "dividendos" como um aluguel de condomínio.
  - O dividendo é um custo de oportunidade de manter a opção de espera aberta.

Exemplo de Martingale Com Dividendos

- Seja um ativo V que vale \$110 e irá distribuir dividendos δ = 10% dos preços ex-dividendos que valem $V^+ = 180$ e $V^- = 60$. Dado $r_f = 8\%$
  - Quanto é a "probabilidade" de martingale?



$$p = \frac{1 + r_f - d}{u - d}$$

- Basta aplicar a fórmula sem esquecer dos dividendos. A "probabilidade" para subir é:

p = (1 + 0,08 – [(60 + 6)/110])/([(180 + 18)/110] – [66/110]) $\Rightarrow$ p = 0,4 ou 40% .

Exemplo: Valor de Terreno Urbano

- Suponha um terreno urbano e que existam duas alternativas de desenvolvimento:
  - Condomínio de 6 unidades, a um custo de C_6 = \$80.000/unidade
  - Condomínio de 9 unidades, a um custo de C_9 = \$90.000/unidade (mais caro)
  - Os custos de construção não variam com o tempo
  - O efeito do tempo de construção é considerado supondo que os valores dos custos e preços estão atualizados para a mesma data (início constr.)
  - O preço de venda do imóvel hoje é V = \$100.000 por unidade, mas existe incerteza no preço futuro de venda
- Construindo hoje a alternativa de maior VPL é a de 6 unidades:

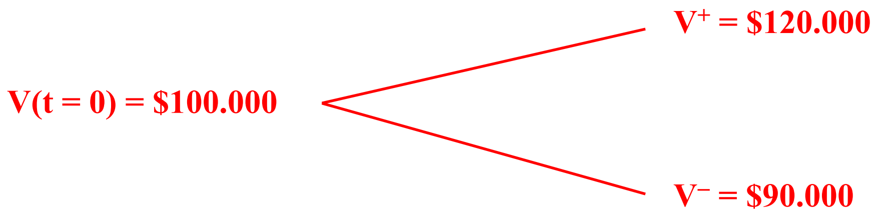
VPL_{C6} = 6 x (100.000 – 80.000) = \$120.000 (= valor do terreno?)

VPL_{C9} = 9 x (100.000 – 90.000) = \$90.000 < VPL_{C6}

- Veremos que com a incerteza de V, o terreno (que é uma opção) vale mais do que \$120.000

Valor do Terreno Sob Incerteza

- Suponha um processo de incerteza simples no valor de V, com 2 cenários e um período dado abaixo:
  - Esse processo de incerteza por ser simples é instrutivo e é útil pois pode ser generalizado (método *binomial*)



- Com a incerteza, o dono do terreno pode esperar e escolher a melhor alternativa (6 ou 9 unidades) conforme o cenário
  - Suponha que o aluguel de uma unidade é de A = \$8.000/ano. Esse é um custo de oportunidade da opção de espera.
  - Já o gasto na construção tem o custo de oportunidade da taxa de juros *r* = 12%aa, já que deixa de ganhar *r* (ou empresta a *r*)
  - Vamos calcular o valor da opção de espera e comparar com o valor do imediato investimento para ver a melhor ação e o valor da terra

Valor do Terreno Sob Incerteza

- Vamos calcular o valor de opção do terreno usando o método da neutralidade ao risco. Para isso temos de calcular o valor das probabilidades artificiais neutras ao risco p e 1 − p
  - Na fórmula do martingale temos agora de considerar os dividendos

$$u' = \frac{120.000 + 8.000}{100.000} = 1{,}28 \qquad d' = \frac{90.000 + 8.000}{100.000} = 0{,}98$$

$$p = \frac{1 + 0{,}12 - 0{,}98}{1{,}28 - 0{,}98} = 0{,}4667 \ (=7/15)$$

Logo, $1 - p = 0{,}5333 = 8/15$

- Dado as probabilidades neutras ao risco, podemos calcular o valor presente da opção usando essas probabilidades neutra ao risco. Para o cenário V^{+} usa-se p e para o cenário V^{-} usa-se 1 − p
- Para isso considere que o dono do terreno irá agir otimamente e escolherá a alternativa de maior VPL em cada cenário de V

Valor do Terreno Sob Incerteza

- Com as probabilidades neutras ao risco de $p = 0{,}4667$ e $1 - p = 0{,}5333$ e considerando as ações ótimas que o dono do terreno irá tomar na escolha de alternativas (de maior VPL) em cada cenário, podemos calcular o valor da opção de espera:

F(t = 0) = ?

Mercado Favorável ($V^+ = 120M$)

$VPL_{C9} = 9 \times (120.000 - 90.000) \Rightarrow$
$VPL_{C9} = 270.000 > VPL_{C6} = 240.000$
(exerce a opção com 9 unidades)

Mercado Recessivo ($V^- = 90M$)

$VPL_{C6} = 6 \times (90.000 - 80.000) \Rightarrow$
$VPL_{C6} = 60.000 > VPL_{C9} = 0$
(exerce a opção com 6 unidades)

$$F(t = 0) = \frac{(0{,}4667 \times 270.000) + (0{,}5333 \times 60.000)}{1{,}12} \Rightarrow \boxed{F = \$\ 141.071}$$

- Como a opção F é maior que o VPL do imediato investimento, **o terreno vale $ 141.071** e não o VPL estático de $120.000

O Que Mostrou o Exemplo

- O procedimento de opções considerando a ação ótima nos cenários incertos calculou **valor** e **regra de decisão**:
  - O valor do terreno é maior do que o VPL tradicional se existe incerteza e flexibilidade de resposta (esperar ou não, escolha de escala).
  - A ação ótima sob incerteza em t = 0 (no caso, esperar)
    - Não se deve fazer um projeto logo só por ter VPL positivo! Tem de comparar com a opção de espera.
    - Não se deve escolher uma escala só por *hoje* ser a de maior VPL. Tem de pensar nas escalas ótimas do futuro incerto.
- O cálculo da opção F foi em *backwards*, isto é, primeiro se olhou a ação ótima em cenários futuros e depois se chegou em t = 0, descontando com a taxa de juros, ponderando os cenários com probabilidades adequadas (neutras ao risco).
  - O cálculo em *backwards* é típico da programação dinâmica e da teoria das opções que usa os princípios de *otimização sob incerteza.*

Exercício

- **Refaça o problema anterior usando o método de arbitragem, isto é, mostre que se obtém o mesmo valor do terreno usando o conceito de arbitragem.**
  - **Relembre o exemplo (mais simples) do seguro**
  - **Aqui a carteira de ativos deve incluir o efeito dos dividendos.**
- **Resposta: no próximo slide (estudar em casa)**

- **Verificar também que o mesmo VPL ($120 mil) seria obtido se o dono da terra, após construir 6 unidades, em vez de vender as unidades, as aluga por um ano e depois as vende pelos preços de cada cenário. (mostrado daqui a dois slides).**

Valor do Terreno e Arbitragem

- **Outra maneira <u>equivalente</u> de calcular o valor do terreno é através do conceito de arbitragem através da montagem de um *portfólio livre de risco*. Imagine a *venda a descoberto* de 7 unidades em t = 0:**

Investimento	Fluxo de Caixa Hoje (em mil$)	<u>Mercado Favorável</u> Fluxo de Caixa em t = 1 (em mil$)	<u>Mercado Recessivo</u> Fluxo de Caixa em t = 1 (em mil$)
Vende 7 unidades	$ 700	– $840 – $ 56	– $630 – $ 56
Compra 1 terreno	– X	$ 270	$ 60
Aplica na renda fixa	– $626/1,12	$ 626	$ 626
Total	Y	$ 0	$ 0

- **Se o valor do terreno fosse vendido ao preço do VPL estático, isto é se X = $120 mil, então Y = $21.071 significando um <u>ganho por arbitragem</u> já que em t = 1 o fluxo de caixa é zero *com certeza*.**
- **Para que não haja arbitragem é necessário que Y = zero. Para isso é necessário que X = $141.071, que é o mesmo valor da opção calculado por outro método (das probabilidades neutras ao risco)**

VPL se Construir e Alugar Por 1 Ano

- **O mesmo VPL ($120 mil) seria encontrado se fosse imaginado que o dono da terra tendo construído 6 unidades, em vez de vender as unidades, as aluga por um ano e depois as vende pelos preços de cada cenário**
  - **Nesse caso se colocam probabilidades reais para esses cenários, que implicam numa taxa ajustada ao risco que dá o mesmo VPL**
  - **Imagine que a probabilidade real de subida (up) é q = 50%**
  - **Então obtemos o valor da taxa ajustada ao risco μ (= a taxa de retorno esperado do ativo, que considera os dividendos).**

$$V(t = 0) = \$100.000 \quad \begin{cases} \xrightarrow{q\,=\,50\%} 120.000 + 8000 \\ \xrightarrow{1\,-\,q\,=\,50\%} 90.000 + 8.000 \end{cases}$$

$$100.000 = \frac{(0{,}5 \times 128.000) + (0{,}5 \times 98.000)}{1 + \mu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = 13\%}$$

$$\Rightarrow \quad VPL_{C6} = \frac{[0{,}5 \times 6 \times (120.000 + 8.000)] + [0{,}5 \times 6 \times (90.000 + 8.000)]}{1{,}13}$$

$\Rightarrow$ VPL_{C6} = $ 120.000 **(que é o mesmo de antes)**

Martingale com Dividendos e Taxa Contínua

- **Uma outra maneira de trabalhar com uma taxa de distribuição de dividendos δ é mexer na probabilidade neutra ao risco p, em vez de incorporar δ nos valores de u e d.**
- **Apresentaremos essa fórmula sem demonstrar e para o caso de valores da taxa de juros e dos dividendos sendo compostas continuamente.**
  - **Retirada do livro do K. Back (*A Course in Derivatives Securities*, 2005, p.91-93):**

$$p = \frac{e^{(r - \delta)\,\Delta t} - d}{u - d}$$

- **Note que nesse caso os valores de "subida" (u) e "descida" (d) não incluem dividendos, incluem apenas os ganhos/perdas de capital.**

Exercício: Martingale com Dividendos e Taxas Discretas

- **Seja r e δ definidas como taxas em tempo discreto. Seja δ a taxa de dividendos = percentual do valor de V(t=1) ex-dividendo.**
- **Seja u e d os valores de subida e descida refletindo apenas o ganho/perda de capital (não incluindo os dividendos).**
- **Use a definição de medida de probabilidade neutra ao risco p (probabilidade que faz o retorno total do ativo básico ser a taxa livre de risco) e mostre que a seguinte equação é válida:**

$$p = \frac{\frac{1+r}{1+\delta} - d}{u - d}$$

- **Aqui os valores de "subida" (u) e "descida" (d) não incluem dividendos, mas dá a mesma resposta do método de somar os dividendos nos cenários up e down e usar a equação anterior de p. Exercício: verificar.**
- **O método anterior (somar dividendos para calcular u e d e depois p) é mais geral (δ não precisa ser % constante de V), mas esse é mais usado.**
  - **Mas sempre usar V^+ e V^- ex-dividendo para checar se exerce ou não a opção.**

Exercícios: Arbitragem

1) Mostre por arbitragem que:

- **Se existisse a tecnologia de *viagem no tempo* (para o futuro e para o passado); e**
- **Se os custos de transação, inclusive os *custos das viagens no tempo*, fossem iguais a zero,**
- **Então a taxa de juros da economia seria zero ou poderia haver lucro por arbitragem.**

- **Use a imaginação. Existem infinitas soluções!**

2) Na peça da Broadway "The Producers", os produtores *não colocaram seu próprio dinheiro* na sua peça de teatro e ilegalmente *venderam* para um grupo de senhoras *muito mais do que os 100% dos direitos* sobre os lucros da peça (~ 2000 %).

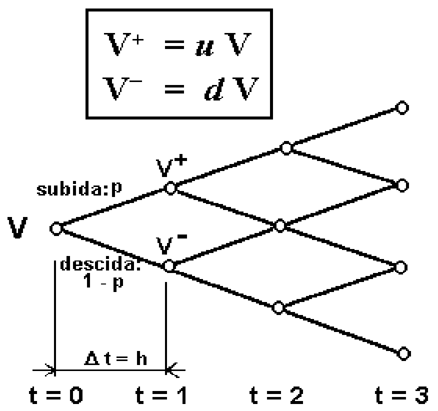
- **Com o *propósito da peça dar prejuízo* e não terem de pagar os lucros das cotas compradas pelas senhoras idosas, eles escolheram o pior roteiro de teatro disponível e contrataram um diretor decadende.**
- **Por que eles não fizeram arbitragem e foram parar na cadeia?**

Método Binomial

- Método popular de precificar opções desenvolvido por Cox & Ross & Rubinstein (1979). Existem várias variações hoje em dia
  - Usa a *medida equivalente de martingale* (ou *probabilidade neutra ao risco*);
  - Resolve-se de trás para frente ("backwards"): programação dinâmica
- Em relação a uma árvore de decisão tradicional:
  - A teoria das opções (martingale) dá o método correto para estabelecer a <u>taxa de desconto</u> <u>e</u> as <u>probabilidades</u> adequadas dentro da árvore
    - Lembrar que numa árvore de decisão o valor obtido backwards é uma opção e a taxa de desconto da opção não é a mesma que a do ativo básico.
- Método assume que após um intervalo de tempo, a variável V pode assumir apenas dois valores:
  - $V^{+} = u\,V$ (cenário de "up" ou de subida)
  - $V^{-} = d\,V$ (cenário de "down" ou de descida)
  - Dependendo desses parâmetros (u, d), no limite (Δt pequeno) pode virar uma distribuição Log-Normal
    - A distribuição log-normal não permite valores negativos para V

Método Binomial

- Nesse processo, com u = 1/d a árvore recombina, ver figura:



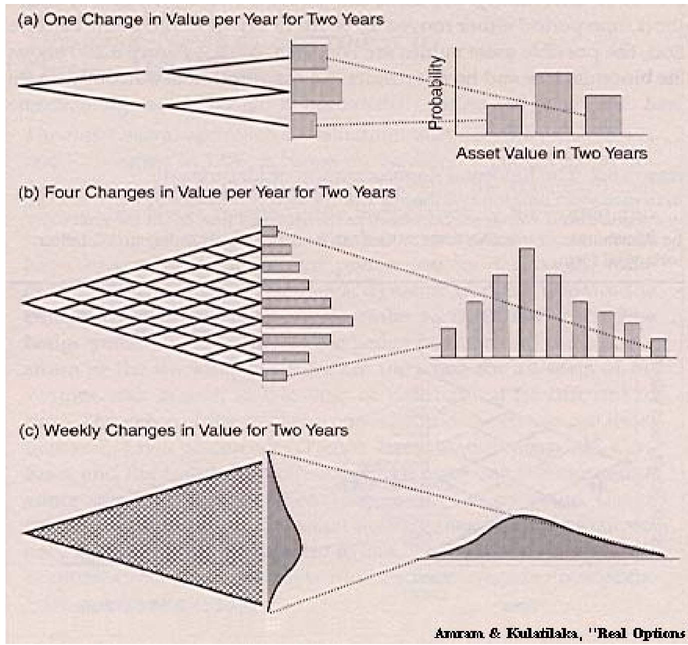
Cenários em t = 3

valor do projeto	probabilidade
$V u^3$	p^3
$V u^2 d$	$3\,p^2(1-p)$
$V u d^2$	$3\,p(1-p)^2$
$V d^3$	$(1-p)^3$

- Repare no quadro de probabilidades em t = 3 que os cenários centrais são mais prováveis do que os extremos.

Do Tempo Discreto Para o Contínuo

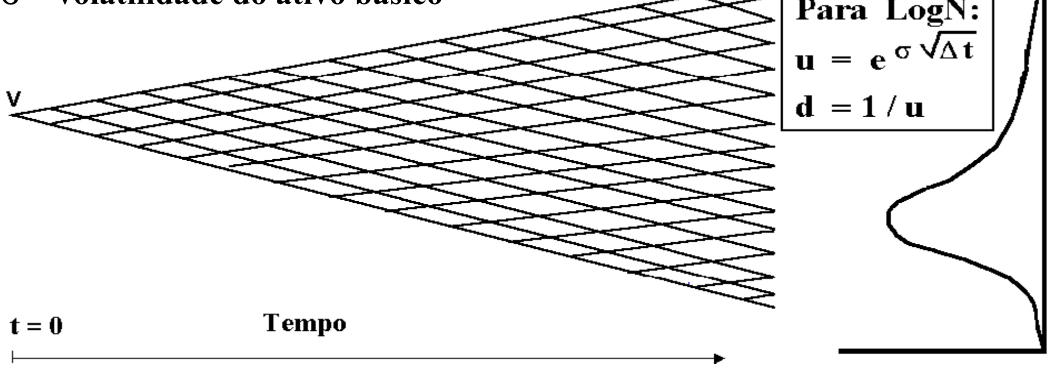
- Binomial trata a incerteza numa visão de cenários discretos.
- Usando o método binomial, o número de cenários é função do intervalo de tempo escolhido.
- No limite (Δt pequeno), se tem distribuições de probabilidades em tempo contínuo.
- Limite do binomial: distribuição log-normal para *p*, *u* e *d* adequados.



Binomial e a Distribuição Log-Normal

- Se forem escolhidos intervalos de tempo h bem pequenos, em pouco tempo se terá muitos cenários.
- Se além disso escolher os parâmetros de subida e descida convenientes, pode-se obter uma distribuição Log-Normal.
  - Os valores convenientes são $u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$ e $d = 1/u$

σ = volatilidade do ativo básico



Exemplo Usando Binomial em Opções Reais

- **Usaremos um exemplo para ilustrar alguns conceitos do método binomial e de valoração de opções.**
- **Exemplo irá mostrar o que ocorre se considerarmos opção européia ou americana, se considerarmos ou não dividendos, etc.**
- **Ver planilha real_options-binomial-com_dividendos.xls.**

Outros Esquemas de Binomial: Trigeorgis

- **Além do esquema original de Cox & Ross & Rubinstein, existem inúmeros outros esquemas de binomial (p, u, d), alguns até melhores em termos de convergência/precisão.**
- **Mostraremos apenas o binomial "log-transformado", proposto por Trigeorgis (1991), que está bem resumido no livro do Back (p.94 e 198-199), e que é útil para casos mais complexos.**
- **Trigeorgis propôs escolher p, u e d de forma que a média e a variância da variação logaritmica $\Delta \ln(V)$ no modelo binomial sejam *exatamente* iguais aos do modelo em tempo contínuo.**
- **A escolha de Trigeorgis foi (notação: $\upsilon = r - \delta - \sigma^2/2$):**

$$u = \exp\left[\sqrt{\sigma^2\ \Delta t + \upsilon^2 (\Delta t)^2}\right] \quad , \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{(a árvore recombina)}$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\upsilon\ \Delta t}{2\ \ln(u)}$$

Teoremas Fundamentais de Preços de Ativos

- **Os dois teoremas fundamentais de precificação de ativos são devidos a Harrison & Kreps (1979) e Harrison & Pliska (1981). Esses teoremas unem os conceitos de arbitragem e martingale:**
  1. **A existência de uma medida neutra ao risco, chamada de medida equivalente de martingale, é igual a ausência de arbitragem; e**
  2. **Quando a medida de martingale é única, equivale a dizer que o mercado é completo.**
     - **Para uma crítica aos teoremas e nova teoria, ver Battig & Jarrow (1999).**
- **No caso de mercado incompleto, existe mais de uma medida equivalente de martingale. Logo, para mercados incompletos é necessário escolher uma medida de martingale dentre várias.**
  - **Na prática de opções reais, se adota um dos 4 caminhos: (a) Assuma que o mercado é *aproximadamente* completo; (b) Use o método da programação dinâmica com uma taxa de desconto exógena (D&P); (c) Assuma que as firmas são neutras ao risco e use a taxa livre de risco para desconto com probabilidades reais; e (d) Especifique preferências (single-agent) ou detalhe o equilíbrio (livro do Duffie).**

MATERIAL ANEXO

Os anexos nos materiais do curso contém slides que reforçam os conceitos teóricos e, em alguns casos, apresentam exemplos adicionais que não serão discutidos em sala de aula, mas que podem ser úteis para um melhor entendimento de conceitos apresentados.

Paridade de Opções Européias: Arbitragem

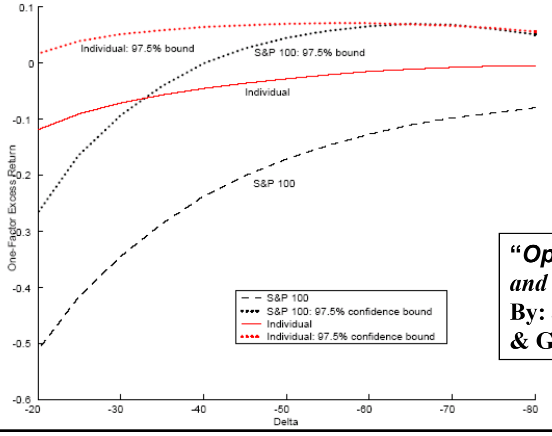
- Paridade em opções européias é um exemplo de valoração por arbitragem. Só vale para opções sobre a mesma ação V, com mesmo K e mesmo T.
- Suponha duas carteiras, uma só formada por C e a outra por P + V + valor presente de K. Assuma $\delta = 0$.
    - ➨A tabela abaixo mostra que essas carteiras têm valores iguais.

Carteira	Ativos de Cada Carteira	Fluxo de Caixa no Vencimento: Cenário V < K	Fluxo de Caixa no Vencimento: Cenário V > K
1	Compra Opção de Compra ($-C_0$)	0	V − K
2	Compra Opção de Venda ($-P_0$)	K − V	0
	Compra a Ação ($-V_0$)	V	V
	Pega Emprestado o valor presente de K (+VP de K)	− K	− K
	Total da Carteira 2	0	V − K

Taxa de Desconto (Retorno) da Opção de Venda

- Retirada de um paper empírico que mostra que os retornos da put como sendo negativos na maioria dos casos.

Figure 3A shows unconditional expected one-factor excess returns on 30-day S&P100 puts and individual puts over our Jan. 1996 - Dec. 2003 OptionMetrics sample, across a range of Black-Scholes delta's. Individual-option excess returns are index-weighted cross-sectional averages across individual puts on all the stocks in the S&P100. The unconditional expected one-factor excess returns are calculated as sample means of the time-series of 30-day holding-period returns, where each option payoff is calculated from demeaned distributions for the underlying asset. The de-meaning sets the expected return on the underlying asset equal to the riskfree rate minus the dividend yield. Confidence bounds are based on Newey-West (1987) standard errors with 22 lags.



"*Option-Implied Correlations and the Price of Correlation Risk*"
By: Joost Driessen, Pascal Maenhout & Grigory Vilkov. WP, Sept/2005.

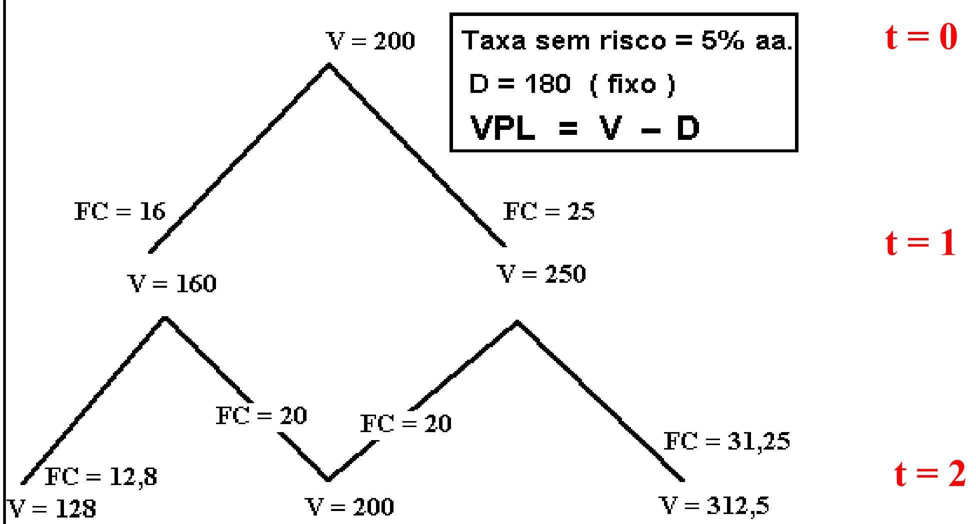
VOLTAR

Outro Exemplo: Opção de Timing em Tempo Discreto

- Exemplo didático em três instantes (anos 0, 1 e 2) para mostrar que <u>mesmo que o VPL seja positivo, pode ser melhor esperar</u>, assim como pode ser ótimo o exercício da opção antes da expiração se o projeto for suficientemente bom ("deep in the money")
- Considere um projeto de uma jazida de petróleo que se implantado imediatamente valeria V = 200, e os fluxos de caixa (líquidos de CO e taxas) valem δ = 10% de V.
  - Suponha que o fluxo de caixa advindo da produção (δ = 10% de V) é faturado no final do período, um % do valor de V nessa data
  - O investimento necessário para desenvolver o campo é D = 180 (logo o VPL = 200 – 180 = + 20, ou seja é positivo em t = 0) .
  - Os direitos de investir na jazida expiram em t = 2.
- Em que instante é ótimo o exercício da opção? Quanto vale essa oportunidade (opção) de investimento?

Exemplo: Opção de Timing

- Qual o valor da opção F, em cada instante t ?
- Quando é ótimo o exercício da opção de investir?



Exemplo: Opção de Timing

- Opção (F) do tipo americana: pode exercer antes da expiração, no exemplo em t = 0, ou em t = 1, ou em t = 2
- Em t = 2 é a expiração, ou seja é o caso "agora ou nunca" (se não investir, devolve o campo para a agência), e a opção vale o máximo entre o VPL e zero
- Usando o método da neutralidade ao risco, primeiro calcula-se o valor da probabilidade de martingale:

p = (1 + 0,05 – [176/200])/([275/200]–[176/200]) = 0,3434

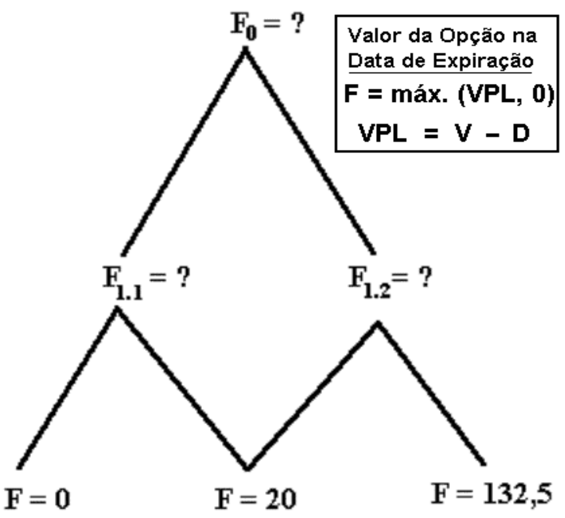
- Embora essa "probabilidade" tenha sido calculada no período 0-1, nesse exemplo obtém-se a mesma probabilidade para o período 1-2 (exercício: verificar)

Exemplo: Opção de Timing

- Tipicamente o cálculo é feito de trás para a frente como na programação dinâmica, com os passos:
  - primeiro se calcula o valor da opção F na expiração (máximo entre VPL e zero), pois o valor é conhecido;
  - a seguir se calcula a opção para o instante anterior (aqui em t = 1), usando a "probabilidade" de martingale para atualizar o valor da opção;
  - o valor calculado deve ser comparado com o valor que se obteria caso a opção fosse exercida. Se esse for maior, é ótimo o exercício da opção, caso contrário a opção vale mais "viva" do que "morta"; e
  - continua o cálculo "backwards" até o tempo t = 0, sempre testando se é melhor o exercício ou a espera.

Exemplo: Opção de Timing

- A figura mostra os valores da opção em $t = 2$, que são o ponto de partida para o cálculo backwards:



Se não exercer em $t = 1$, cenário 1, $F_{1.1}$ valeria:

$$F_{1.1} = \frac{0{,}343 \times 20 + 0}{1{,}05}$$

Logo, $F_{1.1} = 6{,}5$

Aqui o exercício não seria ótimo, já que se obteria um VPL negativo

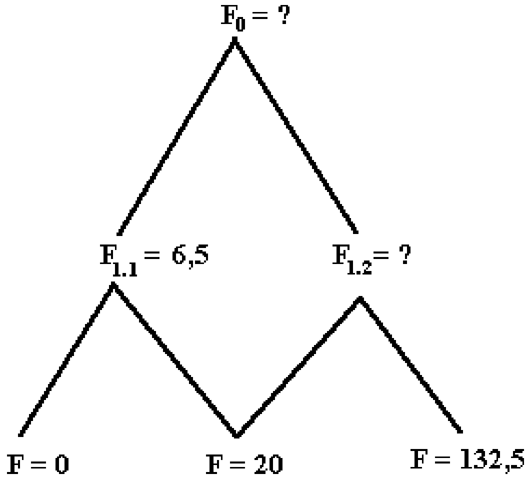
$VPL_{1.1} = 160 – 180 = – 20$ que é menor que 6,5. Logo esperar é melhor.

Exemplo: Opção de Timing

- Se não exercer em $t = 1$, cenário 2, $F_{1.2}$ valeria:

$$F_{1.2} = \frac{0{,}343 \times 132{,}5 + (1 - 0{,}343) \times 20}{1{,}05}$$

Logo, $F_{1.2} = 55{,}8$



Aqui no entanto, o exercício imediato será ótimo, já que se obteria um VPL maior que o valor da opção "viva":

$VPL_{1.2} = 250 - 180 = 70$

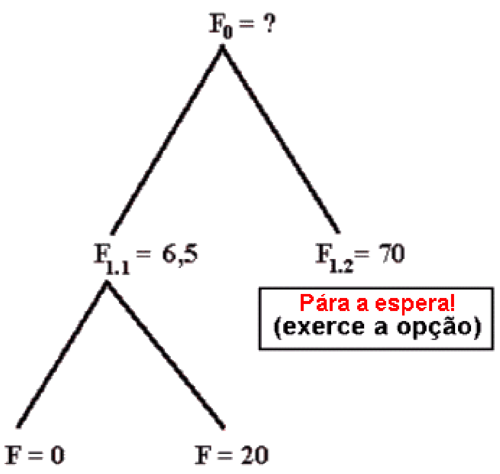
Logo, caso em $t = 1$ ocorra o cenário 2, mais favorável, o projeto estaria "deep in money" e o exercício é o ótimo. $F_{1.2} = VPL_{1.2} = 70$

Exemplo: Opção de Timing

- Se não exercer em t = 0, F_0 valeria:

$$F_0 = \frac{0{,}343 \times 70 + (1 - 0{,}343) \times 6{,}5}{1{,}05}$$

Logo, $F_0 = 26{,}9$



- Aqui no entanto, o exercício imediato não seria ótimo, já que VPL (exercício da opção) vale menos que o valor da opção "viva", e deve-se esperar :

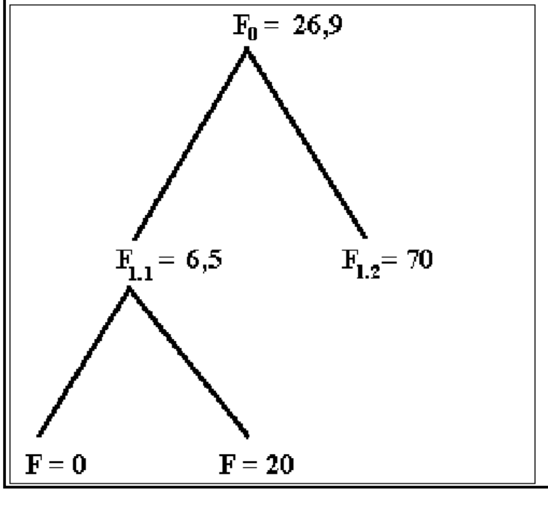
$VPL_0 = 200 – 180 = 20 < 26{,}9$

Logo, realmente $F_0 = 26{,}9$

- Repare na figura que os ramos após o exercício em $F_{1.2}$ foram "podados"

Exemplo: Opção de Timing

- O perfil completo de preços dessa opção americana é mostrado na figura. Repare que se fosse ótimo o exercício em t = 0, a árvore seria toda "podada"



- Se fosse uma opção do tipo européia (só pode exercer na expiração), ela valeria menos, já que não seria podada o path após t = 1 no cenário 2, e logo a opção valeria : $F_{1.2} = 55{,}8$ (e não 70), e portanto em t = 0 a opção européia valeria: $F_0 = 22{,}3$

Exemplo: Resumo da Regra de Decisão

- **A regra de decisão nesse exemplo pode ser escrita:**
  - **Em t = 0 espere e observe o que vai ocorrer com os preços de mercado;**
  - **Em t = 1: (a) caso o preço suba exerça a opção, pois a mesma estará “deep in the money”, ou seja, qualquer atraso o custo de adiar o recebimento desses generosos dividendos seria maior que o benefício da espera;**
    (b) em caso do mercado piorar, espere e observe (não exerça a opção);
  - **Em t = 2: (a) caso o mercado piore ainda mais, não faça o investimento e devolva a concessão para a agência do governo; (b) caso o mercado melhore, exerça a sua opção de investimento.**