PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

MARCO ANTONIO GUIMARÃES DIAS

OPÇÕES REAIS HÍBRIDAS COM APLICAÇÕES EM PETRÓLEO

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: José Paulo Teixeira

Rio de Janeiro, 31 de janeiro de 2005

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

MARCO ANTONIO GUIMARÃES DIAS

OPÇÕES REAIS HÍBRIDAS COM APLICAÇÕES EM PETRÓLEO

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

José Paulo Teixeira
Orientador
PUC-Rio

Leonardo Lima Gomes
PUC-Rio

Manuel José da Rocha Armada
Universidade de Minho, Portugal

Marco Aurélio Pacheco
PUC-Rio

Saul Suslick
Unicamp

José Eugenio Leal
Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de janeiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Marco Antonio Guimarães Dias

Engenheiro Mecânico pela PUC-Rio em 1982 e Engenheiro de Petróleo pela Petrobras em 1984, trabalha desde 1983 na Petrobras onde é Consultor Sênior e coordena projetos de pesquisas em análise econômica de projetos. Mestre pela PUC-Rio (1996) em Engenharia de Produção, na área de Finanças e Análise de Investimentos. Dá cursos na Petrobras e PUC-Rio e palestras em várias universidades brasileiras e no exterior.

Ficha Catalográfica

Dias , Marco Antonio Guimarães

Opções reais híbridas com aplicações em petróleo / Marco Antonio Guimarães Dias; orientador: José Paulo Teixeira. – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Industrial, 2005.

[19], 490 f. : il. ; 29,7 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial.

Incluí referências bibliográficas.

1. Engenharia industrial – Teses. 2. Finanças. 3. Opções reais. 4. Teoria dos jogos. 5. Investimento sob incerteza. 6. Medidas de aprendizagem. I. Teixeira, José Paulo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

Aos meus queridos pais Elzio e Neusa.
À memória do brilhante colega Guilherme N. Teixeira.

Agradecimentos

Agradeço a Petrobras pela liberação em tempo parcial e pelo suporte financeiro.

Agradeço ao meu orientador, Professor José Paulo Teixeira, pelos incentivos, conselhos, liberdade e apoio.

Agradeço aos meus pais, Elzio Dias e Neusa Maria Guimarães Dias, responsáveis pelo que tenho de melhor.

Agradeço a todos os meus familiares pelo incentivo, carinho, apoio e principalmente pela compreensão.

Agradeço ao meu irmão, Antonio Fernando Guimarães Dias, pela consultoria em informática, especialmente em Word, Windows e programas gráficos.

Agradeço a todos os professores da PUC e também professores externos (FGV e IMPA), pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas que cursei.

Agradeço pelo apoio crítico e paciência para ler e discutir os trabalhos que realizei, aos professores da última e decisiva banca, assim como aos professores das bancas anteriores de exame de qualificação e de proposta de tese.

Agradeço a todos os meus amigos e amigas, e em especial aos meus colegas de Petrobras, pelo incentivo e apoio.

Agradeço a PUC-Rio por toda uma formação educacional superior, onde fiz a graduação em engenharia, o mestrado e agora o doutorado.

Resumo

MARCO ANTONIO GUIMARÃES DIAS. **OPÇÕES REAIS HÍBRIDAS COM APLICAÇÕES EM PETRÓLEO.** Rio de Janeiro, 2005. 509p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Essa tese, metodológica e normativa, estende a teoria moderna de avaliação econômica de projetos de investimento sob incertezas, conhecida por *teoria das opções reais*, do ponto de vista de uma companhia de petróleo que otimiza a alocação de recursos e investimento. A teoria das opções reais é combinada com outras teorias – daí o nome *opções reais híbridas* – de forma a efetuar uma análise mais abrangente e realista de problemas complexos da indústria de petróleo. As duas principais combinações analisadas nessa tese são: (a) a combinação da teoria das opções reais e teoria dos jogos – *jogos de opções reais* – de forma a considerar de forma endógena o comportamento estratégico das outras firmas, especialmente no jogo de parada ótima com externalidades positivas conhecido por guerra de atrito, e a possibilidade de *trocar esse jogo* por um jogo cooperativo de barganha; e (b) a combinação da teoria das opções reais com métodos probabilísticos e de decisão estatística Bayesianos – *opções reais Bayesianas* – gerando uma nova maneira de modelar a incerteza técnica de um projeto em modelos dinâmicos de opções reais. Essas duas combinações são re-combinadas para se obter uma solução adequada que capture as diferenças de valor da informação nos jogos não-cooperativo e cooperativo. Importantes variáveis tais como o fator de chance exploratório, o volume e a qualidade da reserva de petróleo, são modeladas através do desenvolvimento de uma nova teoria sobre *distribuições de revelações* e *medidas de aprendizagem*. De forma mais sucinta são analisadas outras opções reais híbridas, com destaque para a combinação da teoria das opções reais com a teoria de computação evolucionária – *opções reais evolucionárias* – com grande potencial em aplicações complexas de otimização sob incerteza. O método é exemplificado com uma aplicação usando algoritmos genéticos para evoluir a regra de decisão de exercício ótimo da opção real.

Palavras-chave

opções reais, teoria dos jogos, opções reais híbridas, jogos de opções reais, opção real Bayesiana, medidas de aprendizagem, investimento sob incerteza.

Abstract

MARCO ANTONIO GUIMARÃES DIAS. **HYBRID REAL OPTIONS WITH PETROLEUM APPLICATIONS.** Rio de Janeiro, 2005. 509p. Doctoral Thesis - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This methodological and normative thesis extends the modern economic valuation theory of projects under uncertainty, known as *real options theory*, from the point of view of an oil company that optimizes the allocation of investment and resources. The real options theory is combined with other theories – so the name *hybrid real options* – in order to perform a more comprehensive and realistic analysis of complex problems that arises from petroleum industry. The two main combinations analyzed here are: (a) the combination of real options theory with game theory – *real options games* – to consider endogenously the strategic behavior of other firms, especially in the optimal stopping game with positive externalities known as war of attrition, as well as the possibility to *change this game* by a cooperative bargain game; and (b) the combination of real options theory with methods from probability theory and Bayesian statistical decision – *Bayesian real options* – generating a new way to model technical uncertainty of a project in dynamic real options models. These two combinations are re-combined in order to obtain an adequate solution that captures the value of information differences in non-cooperative and cooperative games. Important variables like exploratory chance factor, volume, and quality of a petroleum reserve, are modeled with the development of a new theory on *revelation distribution* and *measures of learning*. In a more concise way, are analyzed other hybrid real options, highlighting the combination of real options theory with the evolutionary computation theory – *evolutionary real options* – with great potential in complex applications of optimization under uncertainty. This method is exemplified with an application using the genetic algorithms to evolve the decision rule for optimal exercise of a real option.

Keywords

real options, game theory, hybrid real options, real option games, Bayesian real options, measures of learning, investment under uncertainty.

Sumário

1 Introdução e Motivação 20

1.1. Os Objetivos da Tese 20

1.2. A Organização da Tese 22

2 Opções Reais Convencionais e Incerteza de Mercado 26

2.1. Introdução à Teoria das Opções Reais 26

2.1.1. Evolução Bibliográfica de Opções Reais 26

2.1.2. Teoria das Opções Reais em Empresas e Instituições 30

2.1.3. Introdução à Teoria das Opções Reais em Petróleo 43

2.2. Incerteza de Mercado e Processos Estocásticos 55

2.3. Modelos Para a Função VPL em Campos de Petróleo 73

2.4. Alguns Modelos de Opções Reais Tradicionais em Petróleo 83

2.4.1. O Modelo Clássico de Paddock, Siegel & Smith 83

2.4.2. Modelo com Opção de Escala de Investimento 90

2.4.3. Modelo com Opção de Expansão 95

2.4.4. Modelo com Opções Estendíveis 102

2.4.5. Modelo com Opção de Abandono 105

2.4.6. Modelo de Opção de Mudança de Uso 108

2.4.7. Modelos de Regulação e Incentivos em Petróleo 115

2.4.7.1. Tempo de Expiração da Opção Exploratória 115

2.4.7.2. Tarifa de Transporte de Gás Natural 118

2.4.7.3. Regras de Leilão de Concessões e Outras Regras no E&P 119

2.4.8. Poços Inteligentes e Outros Modelos de OR em Petróleo 124

3 Incerteza Técnica, Valor da Informação e Processo de Revelação 133

3.1. Incerteza Técnica e Valor da Informação 133

3.1.1. Introdução sobre Incerteza Técnica e a Teoria de Finanças 133

3.1.2. Introdução à Análise de Valor da Informação 139

3.1.3. Revisão da Literatura de VOI e Opções Reais Relacionadas 156

3.1.3.1. Revisão da Literatura de Valor da Informação 156

3.1.3.2. Teoria da Filtração Ótima Aplicada a Opções Reais e VOI 162

3.1.4. Temas Clássicos de VOI e Conexões com Outras Teorias 167

3.1.4.1. Concavidade e Não-Concavidade no Valor da Informação 167

3.1.4.2. Visão Estatística do VOI e Comparação de Experimentos 173
3.1.4.3. O Conceito de Entropia e a Teoria da Informação 178
3.1.4.4. Análise de Sensibilidade Global 183
3.2. Expectativas Condicionais e Distribuição de Revelações 184
3.2.1. Expectativas Condicionais 184
3.2.2. Processo de Revelação e Distribuição de Revelações 192
3.2.3. Discussão do Teorema e Exemplo Ilustrativo em Petróleo 203
3.3. Medidas de Dependência e Medidas de Aprendizagem 216
3.3.1. Medidas de Dependência de Variáveis Aleatórias 216
3.3.1.1. Introdução e Limites de Hoeffding-Fréchet para Dependência 216
3.3.1.2. Principais Medidas de Dependência 219
3.3.2. Propriedades Desejadas para Medidas de Aprendizagem 229
3.3.3. Outras Aplicações de η^2 e Decomposição do Aprendizado 245
3.3.4. Métodos Estatísticos Populares: Outra Vantagem de η^2 253
3.4. Processo de Revelação de Bernoulli 261
3.4.1. Distribuição de Bernoulli e Fator de Chance Exploratório 261
3.4.2. Distribuição Bivariada de Bernoulli: Fator de Chance e Sinal 273
3.4.3. Alguns Processos de Revelação de Bernoulli 289
3.4.3.1. Processos de Descoberta e Processos de Revelação de Bernoulli 289
3.4.3.2. Processos Convergentes, Recombinantes e Outros 299
3.4.4. Inferência para Distribuição de Bernoulli e Suas Limitações 311

4 Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais 319
4.1. Teoria dos Jogos Tradicional 319
4.1.1. Introdução e Conceitos de Equilíbrio 319
4.1.2. Guerra de Atrito 326
4.1.2.1. Introdução 326
4.1.2.2. O Jogo da Espera na Perfuração Exploratória 329
4.1.2.3. Formalização e Estratégias da Guerra de Atrito 332
4.1.3. Jogos de Barganha 337
4.1.4. Outros Jogos de Interesse 344
4.1.4.1. Jogos de Informação Incompleta 344
4.1.4.2. Jogos de Leilões 348
4.1.5. Duopólios, Oligopólios e Outros Jogos 352
4.1.5.1. Duopólios e Jogos com Dois Jogadores 352
4.1.5.2. Oligopólios e Jogos de Quotas da OPEP 356
4.1.5.3. Jogos Evolucionários 359

4.2. Jogos de Opções Reais 360
4.2.1. Introdução e Estratégias de Gatilho 360
4.2.1.1. Histórico e Literatura de Jogos de Opções Reais 360
4.2.1.2. Estratégias de Gatilho em Jogos de Opções Reais 366
4.2.2. Duopólio sob Incerteza Simétrico 369
4.2.3. Duopólio Sob Incerteza Assimétrico 385
4.2.4. Oligopólio sob Incerteza 393

5 Aplicações de Opções Reais Híbridas em Petróleo 403
5.1. Introdução 403
5.2. Seleção de Alternativas de Investimento em Informação 404
5.2.1. Introdução 404
5.2.2. O Efeito da Incerteza Técnica no VPL de Desenvolvimento 405
5.2.3. A Combinação das Incertezas e as Alternativas de Aprendizagem 413
5.2.4. Exemplo Numérico e Momento de Adquirir Informação 420
5.3. Jogo Não-Cooperativo de Opções Exploratórias: Guerra de Atrito 426
5.4. Mudando o Jogo de Opção: De Guerra de Atrito para Barganha 442

6 Outras Opções Reais Híbridas 449
6.1. Introdução 449
6.2. Opções Reais Evolucionárias 450
6.3. Outras Opções Reais Híbridas da Literatura 457
6.3.1. Teoria das Restrições Combinada com Opções Reais 458
6.3.2. Opções Reais Nebulosas 460
6.3.3. Opções Reais e Teoria da Utilidade Esperada 461
6.3.4. Opções Reais e Preferências via Teoria dos Prospectos 463
6.3.5. Outras Opções Reais Híbridas 466

7 Conclusões 469
7.1. Principais Contribuições e Conclusões da Tese 469
7.2. Sugestões de Extensões do Trabalho 477

8 Referências Bibliográficas 479

9 Apêndices e Anexos 508
9.1. Demonstrações do Capítulo 2 508
9.2. Tempo de Toque, Fator de Desconto Esperado e Método Integral 508
9.3. Demonstração das Equações do Fator de Desconto Estocástico 509

Lista de figuras

Figura 1 – Processo de Opções Reais Seqüenciais em E&P de Petróleo 45
Figura 2 – Incerteza de Mercado e Opção de Espera 47
Figura 3 – Revelação de Informação para o Segundo Prospecto 51
Figura 4 – Equação Visual de Opções Reais 55
Figura 5 – Movimento Geométrico Browniano 56
Figura 6 – Simulações: MGB Real x MGB Neutro ao Risco 58
Figura 7 – Movimento de Reversão à Média 60
Figura 8 – Estrutura a Termo do Mercado Futuro (WTI) em Outubro de 2004 61
Figura 9 – Regressão para Brent e Óleos Similares (Jan/70 a Out/2004) 62
Figura 10 – Preços do Petróleo Brent e Similares (Janeiro/1970 a Outubro/2004) 67
Figura 11 – VPL x P para Regime de Partilha de Produção 76
Figura 12 – VPL x P Não-Linear Devido à Opção de Abandono 76
Figura 13 – Modelos Lineares para a Função VPL(P) 79
Figura 14 – Valor da Opção Real em Função do Preço P 89
Figura 15 – Regra de Decisão de OR: Curva de Gatilhos 90
Figura 16 – VPL(P) para as Três Alternativas de Desenvolvimento 92
Figura 17 – Curvas de Gatilhos das Alternativas de Investimento 93
Figura 18 – Valor da Opção de Escala Antes da Expiração 94
Figura 19 – Depleção Secundária em Reservatório de Petróleo 98
Figura 20 – Linha de Tempo (anos) da Opção de Expansão 99
Figura 21 – Opções Estendíveis em Petróleo (Dois Períodos) 103
Figura 22 – Opção Estendível (MGB) na Primeira Expiração 104
Figura 23 – Efeito da Incerteza na Data de Abandono 107
Figura 24 – Valor do Projeto (Ativo) e Valor de Uso Alternativo 112
Figura 25 – Valor da Opção de Mudança de Uso Antes e na Expiração 115
Figura 26 – Poço Inteligente: Ganhos de Valor e de Redução de Incerteza 126
Figura 27 – Exemplo de Informação Perfeita ou Revelação Total 146
Figura 28 – Exemplo de Informação Imperfeita ou Revelação Parcial 152
Figura 29 – Árvore de Decisão com Teste Sísmico Perfeito 153
Figura 30 - Árvore de Decisão com Teste Sísmico Imperfeito 154
Figura 31 – Não-Concavidade do Valor da Informação 170
Figura 32 – Valor Líquido da Informação para Vários Graus de Informação 172

Figura 33 - E[X | Ψ] como Projeção no Espaço L^2 de Hilbert 190
Figura 34 - Exemplo Ilustrando o Teorema 1 sobre Distribuição de Revelações 209
Figura 35 – Exemplo Estilizado de Delimitação de um Campo (Teorema 1) 211
Figura 36 – Distribuições de Revelações para o Exemplo do Teorema 1 214
Figura 37 – Diagrama de Árvore para o Exemplo do Teorema 1 215
Figura 38 – Exemplo Sobre Medidas de Dependência 229
Figura 39 - Exemplo do Teorema da Decomposição do Aprendizado 251
Figura 40 – Distribuição de Bernoulli: Massa (esquerda) e Acumulada (direita) 262
Figura 41 – Escala de Probabilidade Subjetiva para Fator de Chance 270
Figura 42 – Distribuição de Revelações de Bernoulli com Um Sinal 277
Figura 43 - Fatores de Chance Revelados x Raiz da Redução Esperada da Variância 286
Figura 44 – VOI versus Confiabilidade para Diversos FC_0 288
Figura 45 - VOI versus Medida η^2 para Diversos FC_0 289
Figura 46 – Processo de Revelação em Wang et al 292
Figura 47 – Processo de Revelação Não-Recombinante 294
Figura 48 – Processo de Revelação Decrescente Não-Recombinante 296
Figura 49 – Processo de Revelação Recombinante para um Sinal S_k 305
Figura 50 – Processo de Revelação Decrescente Recombinante 307
Figura 51 – Fator Redutor da Variância Esperada no Processo Recombinante 307
Figura 52 – Processo de Revelação de Bernoulli Recombinante com 5 Sinais 308
Figura 53 – Distribuição de Revelações de Bernoulli Após 10 Sinais 309
Figura 54 – Jogo do Medroso (“Chicken”) 327
Figura 55 – Prospectos Correlacionados em Blocos Vizinhos 330
Figura 56 – Alternativa de Condição Terminal na Guerra de Atrito 335
Figura 57 – Solução de Nash para o Jogo de Barganha Cooperativo 341
Figura 58 – Equilíbrios Clássicos em Duopólio 353
Figura 59 – Incerteza na Curva de Demanda 370
Figura 60 – Entradas do Líder e Seguidor no Duopólio Simétrico 379
Figura 61 – Valor em Colusão como Estratégia Dominante 380
Figura 62 – Região de Preempção Destruindo a Colusão 381
Figura 63 – Jogo Simultâneo em t = τ 382
Figura 64 – Interpretação Geométrica da Probabilidade em Estratégias Mistas 384
Figura 65 – Valores do Líder, Seguidor e Simultâneo em Duopólio Assimétrico 388
Figura 66 – Gatilho do Líder Determinado pela Ameaça de Preempção do Rival 389
Figura 67 – Caso Sem Perigo de Preempção da Firma de Alto Custo 390

Figura 68 – Região de Preempção da Firma de Alto Custo 391
Figura 69 – Principal Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos no Duopólio Assimétrico 392
Figura 70 – ENPS Secundário no Duopólio Assimétrico 392
Figura 71 – Amostra da Demanda e Exercício Estratégico no Oligopólio de 10-Firmas 400
Figura 72 – Produção da Indústria sob Monopólio, Duopólio e Oligopólio (10-Firmas) 401
Figura 73 – Evolução de Preços e Barreira Refletora no Oligopólio de 10-Firmas 402
Figura 74 – Efeito da Incerteza Técnica no Valor do Projeto 408
Figura 75 – Valoração duma Alternativa de Investimento em Informação 419
Figura 76 – Líder e Seguidor na Guerra de Atrito Exploratória Simétrica 434
Figura 77 – Região Onde o Jogo Guerra de Atrito é Relevante 436
Figura 78 – Análise Conjunta Guerra de Atrito e Barganha 447
Figura 79 – Barganha versus Guerra de Atrito: Região de Interesse 448
Figura 80 – Curva de Gatilhos Representada por Cromossoma 453
Figura 81 – Genes do Cromossoma-Gatilho 454
Figura 82 – Fluxograma do Método de Algoritmos Genéticos 455
Figura 83 – Fluxograma das Opções Reais Evolucionárias 456
Figura 84 – Evolução do Melhor Cromossoma-Gatilho 457
Figura 85 – Função Valor na Teoria dos Prospectos 464

Lista de tabelas

Tabela 1 – Técnicas Usadas Sempre ou Quase Sempre por Firmas dos EUA e Canadá 35
Tabela 2 – Maior Incerteza de Mercado, Maior o Valor da Opção Real 48
Tabela 3 – Modelos de Preços do Petróleo para Uso em Opções Reais 66
Tabela 4 – Condições de Contorno Para os Modelos Lineares de VPL(P) 82
Tabela 5 – Exemplo de Opções Reais Comparando os Modelos de VPL(P) 83
Tabela 6 – Analogia Opção Financeira com a Opção Real de Paddock-Siegel-Smith 84
Tabela 7 – Condições de Contorno para as Opções Estendíveis 104
Tabela 8 – Cálculo dos VPLs Com e Sem a Informação Perfeita (em MM US$) 151
Tabela 9 – Nomes e Usos da Medida de Aprendizagem Proposta 246
Tabela 10 – Propriedades da Distribuição de Bernoulli (Univariada) 263
Tabela 11 – Distribuição Bivariada de Bernoulli e Distribuições Marginais 277
Tabela 12 – Distribuições a Priori e Posterior Conjugadas (Bernoulli e Beta) 313
Tabela 13 - Probabilidades de Sucesso dos Prospectos Terem Selo 316
Tabela 14 – Lucros e Margens dos Equilíbrios dos Duopólios 353
Tabela 15 – Opções de Aprendizagem: Resultados para o Campo 1 422
Tabela 16 – Opções de Aprendizagem: Resultados para o Campo 2 423
Tabela 17 – Análise de Momento Ótimo de Aprendizagem para o Campo 1 425
Tabela 18 – Revelação de Informação x Janela Relevante da Guerra de Atrito 437

Lista de lemas, proposições e teoremas

Proposição 1 – Processos Estocásticos Iguais de V e P 81
Proposição 2 – EDPs Iguais para os Modelos de Negócios e de Fluxo de Caixa Rígido 81
Proposição 3 – EDP do Valor da Opção Real F(V, t) 87
Proposição 4 – Incerteza Técnica Não Demanda Prêmio de Risco 135
Lema 1 – Existência da Expectativa Condicional 190
Lema 2 – Propriedades Fundamentais das Expectativas Condicionais 190
Proposição 5 – Processo de Revelação É Uniformemente Integrável 196
Teorema 1 – Propriedades da Distribuição de Revelações 198
Lema 3 – Propriedades do Coeficiente de Correlação 221
Lema 4 – Relação Medida de Aprendizagem η^2 e Coeficiente de Correlação 222
Proposição 6 – Propriedades da Medida de Aprendizagem η^2 239
Teorema 2 – Medida de Aprendizagem η^2 Atende os Axiomas 244
Lema 5 – Independência é uma Família 248
Teorema 3 – Decomposição do Aprendizado 249
Lema 6 – Sinal da Correlação na Distribuição Bivariada de Bernoulli 279
Teorema 4 – Medida η^2 para Distribuição Bivariada de Bernoulli 280
Proposição 7 – Variáveis Aleatórias de Bernoulli Intercambiáveis 284
Lema 7 – Condição Necessária para Haver Revelação Total 286
Proposição 8 – Métodos Diferencial e Integral para Resolver Jogos de OR 366
Proposição 9 – Alternativa Ótima de Investimento em Informação 415

Lista de Símbolos, Abreviaturas e Siglas.

0^+ – próximo de zero e positivo, ligeiramente positivo

□ – final de demonstração, "como queríamos demonstrar"

α – tendência ("drift")

$\mathcal{B}$ – sigma-álgebra de Borel

δ – taxa de conveniência ("convenience yield"), taxa de distribuição de dividendos ("dividend yield"), taxa de distribuição de fluxos de caixa

$\mathcal{F}_n$ – filtração ou história ou informação acumulada até o estágio n

$\eta^2(X|S)$ – redução percentual esperada de variância em X devido a S

$\mathbb{I}_S(\omega)$ – função indicador (igual a 1 se $\omega \in S$, e igual a 0 se $\omega \notin S$)

κ – velocidade de reversão à média

μ – taxa de desconto ajustada ao risco, taxa de retorno total

$\mathbb{R}$ – conjunto dos números reais, $(-\infty, +\infty)$

σ – volatilidade

ξ – parâmetro, ponto de status quo (depende do contexto)

$\mathbb{Z}$ – conjunto dos números inteiros

a.a. – ao ano

AG – algoritmos genéticos

ANP – Agência Nacional do Petróleo

argmax{.} – (operador) argumento que maximiza a expressão {.}

ASG – análise de sensibilidade global

BG – British Gas

cap. – capítulo

cc. – condições de contorno

CEO – Chief Executive Officer (equivale a Diretor Presidente)

CFO – Chief Financial Officer (equivale a Diretor Financeiro)

CMPC – custo médio ponderado de capital

CUP – custo unitário de produção (preço de "break-even")

dz – incremento de Wiener

E – valor da opção exploratória

E[.] – (operador) valor esperado

E&P – exploração e produção (de petróleo)

EDO – equação diferencial ordinária

EDP – equação diferencial parcial

EBN – equilíbrio Bayesiano de Nash

EBP – equilíbrio Bayesiano perfeito

EN – equilíbrio de Nash

ENPS – equilíbrio de Nash perfeito em subjogos

EPM – equilíbrio perfeito de Markov

ESS – estratégia evolucionária estável (“evolutionary stable strategy”)

eq., eqs. – equação, equações

ex., exs. – exemplo, exemplos

exp[.] – operador (função) exponencial

F – valor da opção real, valor do seguidor (depende do contexto)

FC – fator de chance (de sucesso exploratório)

FCD – fluxo de caixa descontado

GASBOL – gasoduto Brasil-Bolívia

I – investimento

i. é – isto é

iid – independentes e identicamente distribuídos

Inf, Inf{.} – (operador) ínfimo

L – valor do líder

LDA – lâmina d´água

ln(.) – operador (função) logaritmo natural

Max, Max{.} – (operador) máximo

MGB – movimento geométrico Browniano

Min, Min{.} – (operador) mínimo

MIT – Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, EUA)

MM – milhões

MM$ - milhões de dólares americanos

MRM – modelo de reversão à média

OPEP – Organização dos Países Produtores de Petróleo

OR – opção real, opções reais, teoria das opções reais

ORH – opção real híbrida, teoria das opções reais híbridas

P&D – pesquisa e desenvolvimento

p.a. – por ano

Pravap – Programa de Recuperação Avançada de Petróleo

P – preço do petróleo, medida de probabilidade (depende do contexto)

P* – preço de gatilho (preço de exercício ótimo da opção)

P_L – preço de gatilho do líder

P_F – preço de gatilho do seguidor

Pr(.) – Probabilidade de ocorrência de um evento (operador)

q.c. – quase certamente

r – taxa de desconto (juros) livre de risco

S – sinal, valor de exercício simultâneo da opção (depende do contexto)

SPE – Society of Petroleum Engineers

t_F – instante de exercício ótimo da opção pelo seguidor

t_L – instante de exercício ótimo da opção pelo líder

TBG – Transportadora Brasileira Gasoduto Bolívia Brasil S.A.

TIR – taxa interna de retorno

TOC – teoria das restrições (“theory of constraints”)

ton. – toneladas

U – valor da união de ativos no jogo de barganha

V – valor do projeto completo, valor da reserva desenvolvida

V* – valor de gatilho para exercício da opção

v.a. – variável aleatória ou variáveis aleatórias

Var[.], var. – operador variância, variância

VDI – valor esperado da decisão informada

VDP – valor da decisão a priori

VEII – valor esperado da informação imperfeita

VEIP – valor esperado da informação perfeita

VME – valor monetário esperado

VOI – valor da informação (“value of information”)

VPL – valor presente líquido

Que a inspiração chegue não depende de mim.
A única coisa que posso fazer é garantir que ela me encontre trabalhando.
Frase atribuída a Pablo Picasso

1
Introdução e Motivação

1.1.
Os Objetivos da Tese

A teoria das opções reais é uma metodologia consolidada para a análise de investimentos sob condições de incerteza. Modelos de opções reais em petróleo vêm sendo desenvolvidos desde a tese pioneira de Tourinho (1979) e dos trabalhos de pesquisa no Laboratório de Energia do MIT no início dos anos 80, cujo artigo publicado mais conhecido é o de Paddock & Siegel & Smith (1988). Hoje em dia existem dezenas de artigos de opções reais (OR) em petróleo tanto na literatura acadêmica como na literatura profissional.

No entanto, há uma carência na literatura existente em termos de metodologias consistentes e adequadas para a modelagem de pelo menos duas importantes questões descritas a seguir.

Primeiro, a integração da *incerteza técnica* em modelos de opções reais tem deixado muito a desejar. Alguns artigos, mesmo autores consagrados e experientes como Cortazar & Schwartz & Casassus (2001), tem cometido inconsistências tais como tratar a incerteza técnica de forma similar à incerteza de mercado modelando-a com um processo estocástico em tempo contínuo tal como o movimento geométrico Browniano (MGB). Incerteza técnica será bastante discutida no capítulo 3, em que uma nova metodologia será apresentada, e sua praticidade será constatada em aplicações no capítulo 5. Essa incerteza tem grande importância prática (especialmente em petróleo) e sua correta e adequada integração em modelos de opções reais é fundamental para uma maior aceitação dessa teoria em diversas indústrias tais como a indústria de petróleo.

Segundo, a realidade é sempre mais complexa do que qualquer modelo matemático. Modelos de OR não são exceções dessa máxima. O problema é que muitas vezes os modelos tradicionais de OR são *demasiadamente* simplificados para atenderem adequadamente determinadas aplicações e/ou, quando formulados de forma razoável, são muito difíceis de serem resolvidos (problemas complexos

de otimização sob incertezas). Esses problemas demandam soluções especiais que combinem outras teorias com a teoria das opções reais tradicionais, ou seja, demandam *opções reais híbridas* (ORH), que é o objeto dessa tese. Um exemplo é o caso em que o efeito da competição é importante a ponto de ser necessário modelá-lo endogenamente, combinando a teoria dos jogos com a teoria das OR. Modelos de *jogos de opções* ("*option games*") é uma das principais opções reais híbridas e será dado um destaque especial para elas no capítulo 4 e nas aplicações do capítulo 5.

O desenvolvimento de metodologias e modelos de opções reais híbridas representa um grande desafio, pois é necessário conhecer com razoável profundidade não apenas a teoria de OR (que já possui uma certa complexidade) como outras teorias não menos complexas tais como a teoria dos jogos, a teoria de decisão estatística Bayesiana/teoria clássica de valor da informação, teoria de computação evolucionária e outras teorias que serão combinadas para formar as chamadas opções reais híbridas.

Esse desafio – que essa tese procura responder, demanda um grande esforço bibliográfico para aprender os conceitos e modelos de outras teorias. É necessário também discernimento e criatividade para combinar essas teorias de forma adequada para solucionar problemas práticos complexos e relevantes. Por isso se notará que essa tese faz referências bibliográficas a artigos e livros de disciplinas diversas tais como das áreas de biologia, psicologia, medicina, probabilidade, estatística, teoria dos jogos, computação evolucionária, teoria da informação (entropia), física computacional e – naturalmente, finanças corporativas com destaque em opções reais. Esse esforço é motivado pela crença que a metodologia híbrida, quando aplicada adequadamente, gera oportunidades de saltos de qualidade no conhecimento. A combinação de várias teorias e conceitos gera uma certa complexidade. Para contrabalançar essa complexidade, serão usados inúmeros exemplos simples que permitirão o entendimento intuitivo dos conceitos a serem usados mais tarde em aplicações mais completas.

O foco de aplicações dos modelos da tese é em petróleo – especialmente exploração e produção (E&P) de petróleo, devido à origem e interesse profissional do autor. No entanto, as metodologias aqui apresentadas são muitas vezes mais gerais e podem ser aplicadas em outras áreas tais como em análise de projetos de

pesquisa e desenvolvimento (P&D) e em alguns casos até em aplicações fora do contexto de análise econômica de projetos[1].

O estilo dessa dissertação combina *informalidade intuitiva* com *formalidade descritiva*. O autor julga que ambas são necessárias para se atingir os objetivos de uma tese de doutorado. A informalidade intuitiva possibilita clarificar os conceitos usados e metodologias aplicadas através de exemplos simples, tabelas e figuras. Note que mesmo livros rigorosos, como o Dixit & Pindyck (1994), usam amplamente os exemplos numéricos para ilustrar idéias. Já a formalidade descritiva permite precisar mais esses conceitos e métodos através de definições, equações, lemas, proposições e teoremas. Os lemas são geralmente resultados conhecidos que apóiam as proposições. As proposições procuram destacar algum resultado que se aplica com alguma generalidade, mas de interesse específico dessa tese e com alguma inovação. Os teoremas fazem o mesmo, mas têm maior importância, são ainda mais formais na apresentação e são inéditos na literatura[2].

1.2. A Organização da Tese

Essa dissertação está organizada em 9 capítulos. Nesse primeiro capítulo está sendo apresentada uma introdução contendo a motivação e os objetivos do tema escolhido para essa tese.

No segundo capítulo se abordará a *teoria tradicional das opções reais*, com discussão sobre a incerteza de mercado (com foco em preços do petróleo) e em aplicações na área de exploração e produção de petróleo. É feita uma breve revisão bibliográfica de OR e, para motivar o tema da tese, é feito um relato do estado da prática de OR em empresas. A seguir são discutidos os processos estocásticos populares para preços do petróleo tais como o movimento geométrico Browniano, assim como os mais complexos modelos de reversão à média, combinados ou não com processos de saltos (Poisson). São mostrados brevemente alguns modelos de E&P de petróleo. Desde modelos simples, como o modelo clássico de Paddock & Siegel & Smith (1988), como modelos mais complexos, tais como os modelos com opção de escala, com opção de expansão, com opções

[1] Em 2002, após assistir a palestra do autor dessa tese no MIT , o Prof. Myers sugeriu que o conceito de *distribuição de revelações* fosse aplicado na área médica para pré-avaliar tratamentos.

[2] Ao melhor do conhecimento do autor, que investigou mais de 3000 itens bibliográficos (artigos, teses e livros).

estendíveis, de troca de ativos de risco, de abandono e de regulação. Também nesse capítulo será discutida a função valor presente líquido (VPL), que é obtida no exercício da opção real de desenvolver um campo de petróleo.

No terceiro capítulo será analisado o problema da incerteza técnica. Serão discutidas metodologias de valor da informação e metodologias para integrar esses conceitos em modelos dinâmicos de opções reais. Esse é o capítulo da tese com maior número de inovações, apresentando conceitos tais como os de distribuições de revelações, processos de revelação e medidas de aprendizagem. É ensaiada uma teoria sobre medidas de aprendizagem com uma lista de axiomas. São analisados em especial os processos de revelação de Bernoulli, de grande importância para investimentos em exploração de petróleo. Essas inovações foram demandadas por problemas práticos bem definidos, aos quais a teoria das opções reais tradicional não dá uma resposta satisfatória. A base teórica desses conceitos será bem estabelecida inclusive através de alguns novos lemas, teoremas e proposições. Esses novos conceitos estão diretamente ligados ao conceito de expectativa condicional – largamente usada na moderna teoria de finanças, o que facilitará o seu uso em modelos de opções reais híbridas. Esses modelos serão aqui classificados como um tipo de *opção real Bayesiana* devido ao importante papel desempenhado pela distribuição a priori.

No capítulo 4 serão abordadas a teoria dos jogos e a sua combinação com a teoria das OR – os *jogos de opções reais*. Serão focados principalmente os jogos não-cooperativos, em especial os jogos de momento ("*timing games*") – com destaque para os jogos de preempção e de guerra de atrito. Mas também será analisado o mais importante tipo de jogo cooperativo, o jogo da barganha. Será revista a conexão do jogo cooperativo de barganha com a versão não-cooperativa de barganha. Será feita também uma introdução à teoria de jogos de opções reais, mostrando duas metodologias equivalentes para solucionar os principais jogos de opções reais (apresentado em Dias & Teixeira, 2003) assim como alguns "artifícios" matemáticos usados para facilitar a solução de alguns casos como o de oligopólio sob incerteza (analisado em parte do artigo de Dias & Teixeira, 2004). Será feita também uma introdução ao jogo exploratório da espera, que será depois detalhado no capítulo 6, de aplicações em petróleo.

No capítulo 5 são apresentadas as duas principais aplicações em E&P de petróleo para as opções reais híbridas. Primeiro uma aplicação de opções reais

Bayesianas, onde se tem um campo de petróleo já descoberto mas com alguma incerteza técnica. Usando a metodologia de distribuição de revelações do capítulo 3, são analisadas várias alternativas de investimento em informação – com diferentes custos, tempos e benefícios de aprendizagem – integrado num modelo dinâmico de opções reais que considera também o momento ótimo de desenvolver o campo, combinando simulação de Monte Carlo com o método tradicional de equação diferencial parcial (EDP). O objetivo é selecionar a melhor alternativa de investimento em informação e o momento ótimo de desenvolver. A segunda – e principal aplicação, analisa a interação estratégica entre duas companhias de petróleo que detém blocos exploratórios vizinhos com prospectos correlacionados. Esse jogo de espera da perfuração exploratória é analisado dentro do modelo de jogos de opções reais descrito no capítulo 4. Primeiro é considerado o caso clássico não-cooperativo de guerra de atrito e depois considerando a alternativa de mudança de jogo para um jogo cooperativo de barganha. A mudança de jogo considera que o equilíbrio do jogo não-cooperativo é dado de entrada do jogo de Barganha: é o ponto de discordância da solução cooperativa de Nash para jogos de barganha. O valor de cada estratégia está associado a valores de opções reais tanto para o caso de espera quanto ao caso de exercício da opção. Além disso, vários conceitos desenvolvidos no capítulo 3 (medidas de aprendizagem, processos de revelação de Bernoulli, etc.) são aplicados para capturar o efeito de externalidade positiva do exercício da opção de perfurar o poço pioneiro.

No capítulo 6 serão mostradas outras opções reais híbridas, com destaque para opções reais evolucionárias, que usam técnicas de computação evolucionária para resolver problemas complexos de otimização em opções reais. Também serão brevemente discutidas outras ORH tais como opções reais nebulosas (usa lógica nebulosa ou "fuzzy"), opções reais e teoria das restrições, opções reais com preferências modeladas pela teoria da utilidade e pela teoria de prospectos, planejamento estratégico com opções reais, opções reais e teoria de organização, opções reais e teoria modular de desenho ("design") de projetos, etc.

No capítulo 7 são apresentadas as principais conclusões da tese e sugestões de extensões dos modelos e metodologias aqui apresentadas.

No capítulo 8 é apresentada a lista de referências bibliográficas. Por razões de espaço, optou-se por colocar apenas os itens bibliográficos *citados* na tese, sem

colocar uma outra lista (muito maior) de itens bibliográficos *consultados* para se fazer essa tese.

No capítulo 9 são apresentadas algumas demonstrações – que pelo seu tamanho ou importância não foram mostradas no corpo principal da tese, assim como alguns tópicos técnicos complementares (ex.: as equações do tempo para um movimento geométrico Browniano alcançar uma barreira). Além disso, é apresentada uma lista do conteúdo do CD-Rom anexo a essa tese (especialmente planilhas/software).

2
Opções Reais Convencionais e Incerteza de Mercado

2.1.
Introdução à Teoria das Opções Reais

2.1.1. Evolução Bibliográfica de Opções Reais

Nesse item será apresentada uma curta revisão da evolução da teoria das opções reais sob o ponto de vista bibliográfico. Esse item é uma versão atualizada e ampliada de um pequeno artigo publicado pelo autor, Dias (1999), situando historicamente a teoria de OR dentro da teoria de finanças corporativas e de outros campos de conhecimento correlatos.

OR vem sendo considerado nas duas últimas décadas como o novo paradigma para a análise econômica de projetos. O termo "*real options*" (expressão em inglês para *opções reais*) foi cunhado pelo professor Stewart C. Myers do MIT em 1977, 4 anos após a publicação dos artigos seminais de Black & Scholes (1973) e Merton (1973) sobre valoração de opções financeiras. Myers (1977, abstract) caracterizou as oportunidades de investimento das firmas em *ativos reais* (ex.: projetos de investimento) como sendo análogas a opções de compra sobre esses ativos reais. Assim, a teoria das OR reconhece e valoriza o fato de que as firmas têm o direito mas não a obrigação de investir I num projeto que vale V. O brasileiro Tourinho (1979) foi o primeiro a aplicar as idéias da teoria das opções para valorar reservas de recursos naturais.

Precedendo o salto dado pela teoria de finanças na década de 70 através da teoria das opções, houve grandes avanços (ou mesmo o real nascimento) da teoria de finanças corporativas com algumas contribuições que foram reconhecidas com o Prêmio Nobel de Economia em 1990. Da década de 50, foram laureadas a teoria do portfólio (Markowitz) e as proposições de Modigliano & Miller sobre estrutura de capital. Da década de 60, foi premiada a teoria de apreçamento de ativos de capital (CAPM, "capital asset pricing model") principalmente devido a Sharpe.

As bases para a teoria das opções começaram na década de 60 quando Samuelson (1965a), com ajuda do famoso matemático McKean, introduz o cálculo estocástico em finanças e deduz a condição de exercício ótimo da opção Americana perpétua, a qual ele chamou de condição de *contato-alto* ("high-contact"). Essa condição, *suficiente* para o exercício ótimo da opção, hoje é mais conhecida por *condição de contato suave* ("smooth-pasting condition").

Outros precursores da teoria das opções reais vieram da literatura ambiental, com os artigos de Arrow & Fisher (1974) e Henry (1974a, 1974b). Eles mostraram que a *irreversibilidade* das decisões cria o chamado valor de opção.

A literatura de modelos de opções reais em revistas de finanças começa a aparecer na década de 80, incluindo um famoso número especial sobre OR da revista *Midland Corporate Finance Journal*, em 1987, com artigos gerenciais. Dentre os artigos de OR mais citados da década de 80, deve-se destacar ao menos:

- Kester (1984), sobre opções de crescimento das firmas e o efeito da competição, modelado de forma exógena (no tempo de expiração);
- Brennan & Schwartz (1985), que valoraram uma mina de cobre considerando a interação entre as opções reais (investimento, parada temporária, reativação e abandono da mina);
- Titman (1985), que aplicou a teoria das OR na valoração de terras urbanas, iniciando uma extensa literatura nesse setor;
- McDonald & Siegel (1986), sobre a opção de espera, possivelmente o artigo mais importante da década para a teoria de OR;
- Majd & Pindyck (1987), sobre o efeito do tempo de construção ("time to build") e das opções seqüenciais;
- Trigeorgis & Mason (1987), sobre o valor da flexibilidade gerencial;
- Kulatilaka & Marks (1988), sobre a habilidade de não criar obrigações (compromissos) e o valor estratégico da flexibilidade;
- Paddock & Siegel & Smith (1988), com o modelo clássico de valoração de reserves de petróleo, que será analisado nesse capítulo;
- Pindyck (1988), sobre o conceito de irreversibilidade e escolha de capacidade (intensidade ótima de investimento);
- Ekern (1988), que analisou diferentes casos de investimentos em desenvolvimento de campos de petróleo;

- Dixit (1989a), que analisou a interação das decisões de entrada (investimento) e saída (abandono) de uma firma; e
- Sick (1989), sobre uma nova teoria de orçamento de capital ("capital budgeting") com o uso de opções reais.

Na década de 90, houve um crescimento extraordinário na literatura de opções reais com centenas de artigos em diversas áreas de aplicação e com diferentes níveis de profundidade de abordagem. Dentre os artigos mais citados da década de 90, deve-se destacar pelo menos:

- Triantis & Hodder (1990), sobre a valoração de opções complexas;
- Ingersoll Jr. & Ross (1992), sobre o efeito da incerteza da taxa de juros sobre o valor das opções reais;
- Dixit (1992), mostrando que a teoria das OR explica o chamado efeito de histerese nas decisões de investimento;
- Trigeorgis (1993), sobre a interação de múltiplas opções reais, que em geral não são aditivas (menos que aditivas em geral);
- Pindyck (1993), sobre a combinação da incerteza técnica com a incerteza de mercado (que será discutido no capítulo 3);
- Leahy (1993), que mostrou a coincidência entre o valor de gatilho da opção real de um monopolista com o gatilho de entrada de uma firma no caso de competição perfeita (isso será discutido no cap. 4);
- Quigg (1993), sobre testes empíricos da teoria das OR;
- Kogut & Kulatilaka (1994), que viram as capacidades estratégicas da firma como uma plataforma de opções reais;
- Capozza & Li (1994), sobre a intensidade de investimento e o momento ótimo para desenvolver terrenos urbanos;
- Smith & Nau (1995), comparando e combinando a teoria das OR com a tradicional teoria de análise de decisão;
- Abel & Dixit & Eberly & Pindyck (1996), sobre a nova teoria de investimento sob incerteza;
- Schwartz (1997), comparando diferentes modelos para a incerteza nos preços da commodity e seu efeito no valor das OR;
- Laughton (1998), sobre a moderna valoração da flexibilidade no preço dos ativos e o desenvolvimento de um campo de petróleo; e

- Moel & Tufano (1999), analisando as regras de licitação para a concessão de uma mina (caso real), usando a teoria das OR.

Na década de 90 também surgiram os primeiros livros-texto dedicados exclusivamente a opções reais e também inúmeros livros com coletâneas de artigos de opções reais. Lund & Øksendal (1991) foi o primeiro livro com coletânea de artigos de opções reais. Dixit & Pindyck (1994) foi o primeiro livro-texto de opções reais. Hoje em dia existem numerosos livros disponíveis focando exclusivamente esse tema, alguns especializados numa indústria (energia, telecomunicações, P&D, etc.). Os principais livros-texto de opções reais são:

- Dixit & Pindyck (1994), pioneiro, clássico, com foco em métodos em tempo contínuo (equações diferenciais) e com ênfase econômica sobre o tema de OR, continua sendo o mais avançado na área;
- Trigeorgis (1996), abrangente, mostra tanto a valoração em tempo contínuo (embora menos profunda que em Dixit & Pindyck) como em tempo discreto, com ênfase financeira, é outro clássico de OR;
- Amram & Kulatilaka (1999), um texto popular com estilo gerencial, tem poucas equações e muita discussão de conceitos, apresentando exemplos modernos (como investimento em internet); e
- Copeland & Antikarov (2001), de nível intermediário, com foco quantitativo e prático, foi o primeiro livro de OR traduzido para o português.

Outros livros-texto de OR que merecem destaque são: (a) Buckley (1998), dirigido ao público de MBA e com foco em investimento multinacional considerando a incerteza na taxa de câmbio; (b) Winston (1999), que é mais uma coletânea de aplicações de OR que são resolvidas com software da Palisade (@Risk e RiskOptimizer); (c) Ottoo (2000), com foco em opções de expansão, P&D, tecnologia da informação e valoração de empresas; (d) Howell et al. (2001), dirigido a executivos, inclui uma discussão sobre decisões de investimento em clubes de futebol(!) usando OR; (e) Mun (2002), que apresenta uma visão simplificada de OR com diversas aplicações usando o software da Decisioneering (Crystal Ball for Real Options); (f) Rogers (2002), um livro prático, conciso e bem escrito, com nível de MBA; (g) Brach (2003), um bom livro prático, também dirigido ao público de MBA; e (h) Vollert (2003), um bom livro para o público

mais avançado (nível do Dixit & Pindyck), discute técnicas de controle ótimo estocástico aplicadas a OR.

Alguns outros livros-texto publicados são de menor interesse aqui, seja por ter um enfoque misto de opções financeiras/OR, de maior interesse para a área bancária, como os livros de Moore (2001) e Broyles (2003), ou por ser apenas discursivo (visão qualitativa), como Boer (2002), ou mesmo por nada acrescentar, como Razgaitis (2003). Alguns livros-texto que combinam OR com outras teorias (especialmente a teoria dos jogos), serão mencionados nos capítulos 4 e 6.

Em língua portuguesa, além da tradução de Copeland & Antikarov (2001), existem dois livros-texto (ambos de nível introdutório), sendo um do professor português Eurico Lopes (2001, segunda edição – a primeira edição é de 2000) e outro da professora brasileira Andrea Minardi (2004), já com uma breve introdução aos jogos de opções reais.

Existem vários livros de coletâneas de artigos de OR. Além de Lund & Øksendal (1991), já mencionado, os mais relevantes são: (a) Trigeorgis (1995), com vários artigos importantes[3]; (b) Alleman & Noam (1999), uma coletânea de artigos focado em investimentos em telecomunicações com nível introdutório; (c) Trigeorgis (1999), tem artigos gerenciais relevantes, alguns baseados em casos reais (Boeing, Glaxo-Wellcome, etc.); (d) Brennan & Trigeorgis (2000), com artigos mais avançados e dos mais citados, inclusive de jogos de OR; (e) Schwartz & Trigeorgis (2001), uma grande coleção de artigos com destaque para a boa seleção de artigos clássicos de OR; (f) Ronn (2002), uma extensa coletânea de artigos focada em energia, inclusive petróleo; e (g) Paxson (2003), com foco em aplicações de P&D, mas não exclusivamente.

2.1.2. Teoria das Opções Reais em Empresas e Instituições

O mais antigo registro do uso da teoria das opções reais em empresas, data de 1985 quando a estudante de doutorado e consultora A. Kemna iniciou um longo trabalho na Shell holandesa que durou até 1990, desenvolvendo aplicações de OR em petróleo. Três dessas aplicações foram reportadas em Kemna (1993). Apenas alguns casos foram reportados de uso de OR no final da década de 80:

[3] Ver http://www.puc-rio.br/marco.ind/bib_book.html#Trig para uma breve descrição e comentários de cada artigo desse livro.

além da Shell, a HP, a Digital (Trigeorgis, 1996, p.342-344) e o debate público na Noruega (Bjerksund & Ekern, 1990, nota da p.80). Na grande maioria dos casos as empresas só começaram a usar OR na década de 90, especialmente na segunda metade da década de 90.

Existem diversos artigos reportando aplicações de OR em empresas. Alguns dos mais famosos são listados a seguir. Nichols (1994) apresenta aplicações de OR na Merck, especialmente P&D de novos produtos farmacêuticos[4]. Kaslow & Pindyck (1994), analisam casos da New England Power Co., em que a aplicação de OR fez diferença na decisão de investimentos. Faulkner (1996), mostrou aplicações na Kodak em projetos de P&D. Corman (1997) fez uma reportagem sobre o uso de OR em algumas empresas (Merck, New England Power, Enron[5], British Gas, etc.). Coy (1999) fez uma reportagem ainda mais ampla sobre casos reais de OR, destacando aplicações na Hewlett-Packard (HP)[6], Enron, Airbus, Anadarko e Cadence, mas também mencionando outros casos reais na Apple, Stern Stewart, Toshiba, Chevron e Tennessee Valley Authority. Detalhes de aplicações na Airbus são mostrados em Stonier (1999). A concorrente Boeing também vem usando OR, especialmente no Canadá, como mostrou Sick (1999). A Boeing é uma das empresas com maior grau de difusão corporativa de OR, conforme reportado em recente palestra de Mathews (2004). Micalizzi (1999a e 1999b) apresentou aplicações de OR nas firmas farmacêuticas Schering Plough e Glaxo-Wellcome. Arnold & Shockley Jr. (2001) apresentou uma história de sucesso de OR na cervejaria Anheuser-Busch ("BUD").

Triantis & Borison (2001) apresentam um importante levantamento da prática de OR, sintetizando as experiências na aplicação real de OR de 39 profissionais de 34 companhias agrupadas em 7 indústrias. As indústrias (e firmas entre parênteses) foram: (1) Produtos industriais e de consumo (DuPont, LLBean e Procter & Gamble); (2) Serviços financeiros (Credit Suisse First Boston e Morgan Stanley); (3) Informática e telecom (HP, Intel, Rockwell, Sprint e Ultratech); (4) Biotecnologia (Amgenm, Genentech e Genzyme); (5) Energia

[4] Ver Bowman & Moskowitz (2001) para uma análise recente dum caso de OR na Merck.

[5] O uso de OR e de outras ferramentas sofisticadas na Enron ajudaram o rápido crescimento dessa empresa na década de 90 e não tiveram nada a ver com as fraudes contábeis que a levaram a perder liquidez financeira e a conseqüente falência.

[6] Em conversa com um gerente da HP num seminário de OR em Chicago no ano 2000, ele afirmou que a HP usa opções reais em decisões de investimentos desde o final dos anos 80.

(Anadarko, Chevron, Cinergy, ConEdison, Conoco, Constellation Energy Group, Dynergy, El Paso, Enron, Lakeland Electric, Ontário Power Generation, Texaco, Wisconsin Public Service Co. e Xcel Energy); (6) Imobiliário (Beazer Homes); e (7) Transporte (Airbus, Boeing, British Airways, Canadian Pacific e General Motors). Eles também detalharam a experiência de três empresas aplicando OR (Genentech, Intel e Texaco), cujo sucesso as levaram a tomarem ações para uma difusão corporativa mais ampla. O caso Texaco será descrito ainda nessa seção.

Na maioria dos casos pesquisados em Triantis & Borison (2001) o uso de OR é recente (últimos 3 a 5 anos). Para essas empresas, OR não é vista como uma solução revolucionária e sim parte um processo evolutivo. Na maioria dos casos não foram pessoas da área de finanças que incentivaram o uso de ferramentas de OR e sim gerentes diretamente envolvidos em desenvolvimento do negócio, em planejamento estratégico, em operações, ou mesmo em marketing. Para alguns é surpresa que um dos setores que menos usam OR é o de bancos e serviços financeiros. Também, na literatura de OR as aplicações bancárias são minoria. No entanto, deve-se lembrar que OR faz muita diferença na valoração de empresas, que é uma atividade rotineira em vários bancos e firmas de serviços financeiros.

Triantis & Borison (2001) sintetizaram as técnicas ou processos de OR usadas nessas empresas pesquisadas em três classes:

1. Opções reais como uma maneira de pensar. Nesse caso OR é usada como linguagem, ajudando de forma qualitativa nas decisões.
2. Opções reais como uma ferramenta analítica. Modelos matemáticos são usados especialmente para análise de projetos bem definidos para a aplicação de OR.
3. Opções reais como um processo organizacional. Aqui OR é parte de um processo mais amplo, sendo usada como ferramenta gerencial para identificar e tirar proveito de opções estratégicas.

Tipicamente a adoção de OR muda o processo organizacional em diferentes maneiras. Primeiro, reforça a visão multidisciplinar das equipes, que trabalham nos estágios de formulação (“framing”), coleta de informações, análise e apresentação de resultados. Segundo, aumenta a ênfase no valor do acionista, em oposição a métricas “intermediárias” como a produção, receita ou parcela do mercado. Terceiro, dá grande ênfase em dinâmica e aprendizagem.

Uma das diferenças importantes de OR e o método tradicional do fluxo de caixa descontado (FCD) na prática de investimentos é que OR *incentiva a realização de investimentos por fases*, pois valoriza a aprendizagem entre as fases. A informação obtida numa fase serve para decidir otimamente sobre o projeto da fase subseqüente (exercer a opção adequada). Isso todos sabem mas o método do FCD não valora esse efeito, enquanto que OR o faz. Assim, freqüentemente o método do FCD recomenda a realização de um mega-projeto, em uma única fase (buscando ganho de escala), enquanto que OR recomenda outra alternativa: dividir o investimento em fases para usar a informação. Além disso, o investimento em fases é visto nas empresas como mais prudente do que uma aposta alta num projeto ignorando a incerteza e o valor do aprendizado. Por isso o método do FCD gera decepções práticas. Por ser a aprendizagem e o valor da informação num contexto dinâmico destaques fundamentais da motivação prática de uso de OR em empresas, essa tese dará ênfase a essas questões, na busca de uma base teórica adequada que gere uma metodologia prática e consistente para quantificar a aprendizagem em problemas complexos de OR.

Triantis & Borison (2001, p.19) mostram que apesar da diversidade das experiências de aplicação de OR, observa-se um caminho comum para o sucesso na adoção de OR nas empresas. Esse caminho é em estágios – de forma análoga a um projeto de P&D. Os estágios chaves para ter sucesso na adoção de OR são:

I. Conduzir um ou mais projetos pilotos, explicitamente experimentais;
II. Com base nesses projetos, conquistar os gerentes médios e seniores;
III. Codificar OR através de um grupo de especialistas, dar treinamento especializado e adaptar ferramentas aos clientes; e
IV. Institucionalizar e integrar OR em toda a empresa.

Uma dos maiores desafios na aplicação de OR é o estágio IV, especialmente na área de *avaliação de performance interna e política de recompensa*. Para uma institucionalização de OR é necessário criar um sistema de incentivos para recompensar a criação e exercício ótimo de OR. A maioria das empresas que usam opções reais não atingiu o estágio IV. Isso não é surpresa já que a maioria das empresas começou a usar OR recentemente. Algumas empresas que estão entrando no estágio IV foram destaques no artigo de Triantis & Borison (2001): Genentech, Intel e Texaco.

Uma outra aplicação prática interessante de OR é a política de dar opções reais a consumidores, isto é, embutir opções reais nos produtos para eles se tornarem mais valiosos e atrativos para o consumidor. Um exemplo é o carro bi-combustível ou tri-combustível, denominado carro com motor flexível ("flex-fuel"). Sabe-se (ex.: Trigeorgis, 1996, p.344) que várias firmas da indústria automobilística começaram a usar OR nos anos 90. É provável que esses produtos tenham sido pensados e/ou sido aprovados/incentivados por pessoas treinadas em OR. Mas isso pode também ocorrer de forma intuitiva em muitos negócios. Por ex., o grande sucesso dos restaurantes "a quilo" no Rio de Janeiro (também os de *bufê*) é devido principalmente à *flexibilidade* que é dada ao consumidor para escolher a combinação de alimentos no seu prato. Projetos de embutir OR em produtos para o consumidor é o grande nicho de aplicações para um tipo especial de OR híbrida: a combinação de OR com uma *teoria de preferências* (teoria da utilidade, teoria dos prospectos), que será discutida no Cap.6.

Como estará a proporção de empresas usando OR nas principais economias? O artigo de Graham & Harvey (2001) apresenta um grande levantamento da prática de finanças corporativas em empresas de todos os tipos e tamanhos nos EUA e Canadá. Eles entrevistaram 392 CFOs ("Chief Financial Officer", equivale a Diretor Financeiro) sobre a prática dessas empresas em relação a custo de capital, orçamento de capital ("capital budgeting") e estrutura de capital. Essa pesquisa foi feita em fevereiro de 1999, com um questionário de mais de 100 perguntas. Não há notícia de uma pesquisa similar mais ampla e representativa (com a ajuda de 10 alunos de MBA). Sendo os entrevistados CFOs, aumenta a confiabilidade das respostas em termos de representar efetivamente as decisões de finanças corporativas dessas firmas, pelo menos nas principais decisões.

Em relação a pesquisas anteriores, Graham & Harvey (2001) verificou que o uso do VPL como ferramenta primária nas decisões de investimento teve um grande avanço. Por ex., uma pesquisa de 1977 mostrou o VPL como indicador primário em 9,8% dos casos, época em que a TIR (taxa interna de retorno) era o indicador primário nas decisões de investimento com 53,6%. Agora os percentuais de usos do VPL e da TIR são aproximadamente iguais.

A maioria das firmas usa mais de um indicador econômico nas decisões de investimento. Graham & Harvey deram uma lista de técnicas e/ou indicadores e perguntaram aos CFOs quais delas eram usadas numa gradação de zero a 4, sendo

0 igual a "nunca", 3 igual "quase sempre", 4 igual a "sempre". O resultado mostrou um surpreendente rápido avanço do uso de opções reais.

A Tabela 1 a seguir (resumo da "table 2" de Graham & Harvey, 2001) resume os percentuais dessas técnicas/indicadores em que os CFOs afirmaram usar "sempre" (4) ou "quase sempre" (3) nas decisões de investimento, assim como a pontuação média obtida por cada técnica.

Tabela 1 – Técnicas Usadas Sempre ou Quase Sempre por Firmas dos EUA e Canadá

Indicador/Técnica de Análise Econômica	% "sempre" ou "quase sempre"	Média
Taxa Interna de Retorno	75,61	3,09
Valor Presente Líquido	74,93	3,08
Tempo de Retorno Nominal	56,74	2,53
Taxa de Vedação ("hurdle rate")	56,94	2,48
Análise de Sensibilidade	51,54	2,31
Abordagem de Múltiplos de Lucro	38,92	1,89
Tempo de Retorno Descontado	29,45	1,56
Opções Reais	**26,59**	**1,47**
Taxa de Retorno Contábil	20,29	1,34
Simulação ou "Value at Risk"	13,66	0,95
Valor Presente Ajustado (APV)	10,78	0,85
Índice de Lucratividade	11,87	0,83

Parece surpresa que OR tenha tido cerca do dobro do uso freqüente em relação à simulação de Monte Carlo *ou* "Value at Risk" (VaR)[7]. Claro que se somente bancos fossem consultados o percentual de uso de VaR seria próximo de 100%. Alguns críticos podem alegar que alguns CFOs confundiram o termo OR em projetos quando perguntados se "incorporaram as OR dum projeto na sua valoração". Outros alegam que isso refletiu a *bolha* da "nova economia" com firmas usando OR para justificar qualquer investimento[8]. Essas críticas são pouco consistentes, pois: (a) Mesmo os CFOs com relativamente baixa escolaridade participam de seminários e tem contato com firmas de consultoria. Assim a grande maioria – senão todos, tem no mínimo uma idéia do que seja OR; (b) A maior pontuação de uso (com 1,55) foi de empresas da velha economia ("non-growth") do que da nova economia ("growth"), que teve pontuação de 1,31. Assim, mesmo

[7] Indicador de exposição ao risco muito usado por bancos. Para detalhes, ver Jorion (2001).

[8] Também havia alguns analistas que justificavam o elevadíssimo valor das ações das empresas ".com" da nova economia através de um discurso de valor de OR. A alta demanda por OR fez surgir "consultores de OR" que não tinham base acadêmica para tal. Assim, é provável que uma parte dessas empresas da nova economia usaram OR de forma inadequada por má orientação.

que parte das empresas da nova economia esteja usando OR de forma inadequada, o resultado de Graham & Harvey não deixa de ser significativo e alentador.

Deve-se ter em mente que qualquer nova ferramenta – por melhor que seja na teoria e na prática, leva tempo para ser adotada nas empresas. Técnicas e conceitos de FCD levaram décadas para serem efetivamente usadas. Com OR isso não pode ser muito diferente, ainda mais com a maior complexidade dos modelos envolvidos. Mas os fatos têm mostrado uma adoção mais rápida que a esperada.

Note que a pesquisa de Graham & Harvey foi feita no início de 1999 e assim não capturou o grande crescimento de OR nos anos de 1999 a 2002 – período de grande quantidade de seminários gerenciais de OR e de maior concentração de lançamentos de livros de OR, um forte sinal de aquecimento da demanda por OR. Por ex., Champion (2002) reporta que a firma de consultoria Deloitte Consulting se capacitou na técnica de OR desde 1995, sem grande demanda na época, mas "desde o final do último ano" (2001) "ela tem tido 50 a 60 clientes interessados, um aumento dramático".

Na indústria do petróleo, além da pioneira Shell[9] (Kemna, 1993), tem vários outros casos reportados na literatura, tais como Petrobras, Texaco, Anadarko, Chevron, Statoil, British Gas, BP, etc., principalmente na área de exploração e produção (E&P). Ver Dias (1996, Cap.2) para referências e detalhes. O caso da BP (especialmente o campo de Andrew) é reportado com algum detalhe em Leslie & Michaels (1997). Recentemente, a BP vem propondo uma abordagem diagramática de OR para facilitar a difusão corporativa de OR, ver Leppard & Cannizzo (2002). Um caso da Chevron é reportado por Valdmanis (1999)[10]. Serão descritos em algum detalhe apenas os casos da Anadarko, Texaco e da Petrobras.

Algumas empresas tiveram um impulso no uso de OR a partir duma história de sucesso interna. Foi o caso, por ex., da Anadarko (ver Coy, 1999): "*OR nos deu confiança para dar um valor maior na licitação do bloco no Golfo do México chamado Tanzanite, que provou ser rico em óleo e gás*". A principal diferença aqui foi como OR capturou o valor adicional da possibilidade do bloco ter reservas maiores do que se enxergava com registros sísmicos. A licitação desse

[9] A maior aula prática de OR que o autor dessa tese teve foi quando analisou um contrato da Shell no Golfo do México em 1997, em que a Shell vendeu um bloco recebendo "apenas" uma série de OR contratuais, com tempos de maturação e condições de exercício bem desenhadas.

[10] Curiosamente, usando OR a Chevron investiu em um campo maduro da Califórnia (cujo valor por OR era muito maior que por FCD) e não investiu em exploração no Canadá.

bloco foi em 1990 e as importantes descobertas foram anunciadas em 1998. Aliás foi só a partir desse caso em 1998 é que se soube que a Anadarko tinha usado OR pelo menos desde 1990. Esse é um indício de que várias companhias de petróleo vêm usando OR de forma silenciosa em valoração de ativos importantes – como em leilões de direitos e aquisição/venda de ativos reais/firmas. Devido à interação estratégica com empresas competidoras nessas aplicações, a confidencialidade é necessária e isso tem limitado a divulgação de detalhes do uso real de OR.

No entanto, a divulgação de casos reais de OR permite ampliar o uso dessa técnica e isso trás benefícios estratégicos e até benefícios sociais. Primeiro, por facilitar negociações ganha-ganha entre as companhias. A ampliação do uso e entendimento de OR pelas firmas permite um diálogo mais equilibrado, aberto e menos assimétrico entre as companhias de petróleo na negociação de ativos em que o valor de opção tem claramente valor (ex., direitos exploratórios) e/ou em contratos de parceria. Segundo, McComarck & LeBlanc & Heiser (2003) destacam o benefício social com o uso mais amplo de OR, pois permite uma *coordenação no mercado* de energia que trás benefícios não apenas para os acionistas dessas companhias, como para os próprios consumidores. Por ex., projetos de "pico"[11] servem para limitar a disparada nos preços e/ou evitar/limitar um racionamento de energia, minimizando os problemas dos consumidores[12].

Dentre os ativos de pico que podem ser justificados no portfólio através do conceito de OR (mas não com o FCD), pode-se mencionar: (a) unidade termoelétrica para épocas de falha na oferta hidroelétrica e/ou aumento da demanda de energia; (b) poços terrestres com baixa produtividade/alto custo, que podem ser reativados com altos preços; (c) reservas de óleo pesado ou mesmo de xisto, podem ser desenvolvidas economicamente no cenário de altos preços; (d) estocagem de gás natural em reservatórios de campos já depletados, que podem voltar a ser produzido em caso de aumento sazonal/eventual da demanda de gás.

O artigo McComarck & LeBlanc & Heiser (2003) revela um pouco da visão que a Anadarko tem sobre o uso de OR[13]. Eles separam os campos e poços que

[11] Projetos que operam apenas quando a demanda ou o preço sobe muito.

[12] Ao suavizar o ciclo de preços (altos e baixos), o uso maciço de OR pelas empresas tende a reduzir o valor da flexibilidade, i. é, o uso amplo de OR reduz o próprio valor das OR!

[13] LeBlanc é gerente de planejamento estratégico da Anadarko, enquanto que McComarck e Heiser são consultores da Stern Stewart (criador do EVA) e Accenture, respectivamente. No artigo, são feitas algumas citações de declarações do CEO da Anadarko defendendo a visão de OR.

tem maior potencial para gerência ativa de opções operacionais, dos ativos com menor potencial. A Anadarko divide os ativos do E&P em dois tipos: os "básicos" ("base-load") de longo-prazo, e os de "pico", com maior agilidade para responder aos cenários de curto prazo. Assim, os campos terrestres da Anadarko nos EUA e Canadá ainda não desenvolvidos (ou parcialmente desenvolvidos) são particularmente valiosos pela agilidade em aproveitar conjunturas favoráveis de picos de preços do óleo e gás natural, já que essas reservas podem ser desenvolvidas e colocadas em produção num período de tempo menor. Já um campo marítimo é muito menos ágil, pois o tempo para colocar em produção um campo desses leva tipicamente de 2 a 3 anos. Além disso, os ativos de pico têm menores custos fixos para serem suportados em caso de fechamento temporário dos mesmos em cenários desfavoráveis de preços. Já um campo marítimo tem custo elevado para manter a plataforma de produção parada, aguardando melhores preços do petróleo.

O caso da Texaco é baseado em Triantis & Borison (2001). A Texaco tinha uma forte competência em diversas técnicas de análise econômica de projetos tais como FCD, simulação de Monte Carlo e análise de decisão. No entanto, os resultados da aplicação dessas técnicas em licitações de blocos/ativos e em projetos de novas tecnologias eram desapontadores algumas vezes. Em adição, surgiam novas companhias de petróleo aumentando a competição. Procurando melhoramento em suas técnicas, a Texaco começou a explorar o conceito de OR, reconhecendo a sua superioridade em relação às abordagens convencionais. Primeiro começou com uma formulação estratégica ampla e robusta das oportunidades do seu portfólio. Segundo, OR tinha forte ligação com algumas ferramentas familiares tais como FCD, análise de decisão e teoria financeira. Terceiro, OR poderia ser aplicada num *processo escalar*, isto é, em caso de bons resultados o seu uso seria ampliado e adotado em maior escala na corporação, assim como poderia ser conectada em harmonia com outros processos gerenciais.

Com isso, a Texaco decidiu testar e potencialmente adotar OR com ajuda de consultores externos. Após o sucesso do projeto piloto de OR na área de E&P, OR começou a conquistar tanto os executivos da empresa como os gerentes da área de análise econômica de projetos. Com isso a Texaco treinou diversos especialistas em áreas chaves de negócios e iniciou uma aplicação mais ampla de OR em outras atividades de E&P, em negócios com novas tecnologias, e em novos negócios –

tais como "e-business" e portfólio internacional de "downstream" (refino de petróleo). Assim, OR se tornava uma ferramenta chave na avaliação estratégica de grandes investimentos.

Já com um acúmulo de experiências nessa área, o próximo passo da Texaco foi integrar melhor as OR com outros processos gerenciais (estágio IV citado acima). Os dois processos chaves nesse caso são: (a) execução do plano de investimentos através do *gerenciamento dinâmico de projetos*; e (b) *avaliação de desempenho*, de forma a prover *incentivos* adequados para o exercício ótimo das opções e gerenciamento de projetos baseado no valor. Outras metas da Texaco foram combinar as OR com o gerenciamento de riscos corporativo e integrar as OR no processo de planejamento de portfólio.

A Petrobras também tem uma série de sucessos no uso de OR em diferentes aplicações[14]. A primeira tese de OR de um funcionário da empresa foi em 1990 (Oliveira, 1990), mas o primeiro curso interno de OR só ocorreu em dezembro de 1996 e a demanda gerencial por aplicações de OR só começou a partir de 1998, como a maioria das empresas citadas por Triantis & Borison (2001).

Em 1998 a oportunidade surgiu com a estruturação do *financiamento de projeto* ("*project finance*") do Campo de Marlim, o de maior produção na Bacia de Campos. Esse é um exemplo de como o pensamento de OR pode ser benéfico para ambas as partes (ganha-ganha). Como é típico nesse tipo de estruturação financeira, foi criada uma empresa-projeto que assumiu uma dívida de US$ 1,3 bilhão e com um capital de risco ("equity") de US$ 200 milhões. A parcela de risco (ações da empresa-projeto) teria de ter uma remuneração de risco que refletisse o risco do negócio. O desenho dessa remuneração de risco era o desafio. A primeira contribuição de OR foi qualitativa. Existiam propostas na mesa de negociações (entre Petrobras e agentes financeiros/investidores) em que a remuneração de risco estava vinculada à performance da *produção*, da *receita bruta* ou até da *receita líquida*. Isso no entanto limitaria a flexibilidade da Petrobras na alocação ótima de recursos[15] (ex.: sondas) ao ter obrigações de

[14] Por razões de confidencialidade não é possível dar detalhes. Aqui serão comentados apenas os casos que se tornaram públicos e alguns marcos gerais de OR na Petrobras. Além disso, dos pontos de vista social, econômico e estratégico, é ótimo divulgar casos reais *ganha-ganha*.

[15] O ótimo para Marlim pode não ser o ótimo para o portfólio de projetos duma grande empresa. Por ex., pode ser ótimo num certo cenário deslocar uma sonda programada para Marlim, para efetuar uma manutenção em um poço de outro campo ou mesmo perfurar um poço pioneiro.

garantir uma certa performance de produção para atender os investidores de Marlim. Do lado dos investidores isso também era ruim, pois retirar a flexibilidade da Petrobras demandaria um custo de transação elevado para monitorar a produção e os custos do campo. Além disso, mesmo com auditorias, permaneceria o problema inevitável de desconfiança advinda da *assimetria de informação* (a Petrobras tem mais informação do que os investidores sobre o projeto e os recursos a usar). Ou seja, mesmo monitorando, haveria desconfiança.

Com argumentos de OR e de custos de transação e de agência, mostrou-se que era muito melhor vincular a remuneração risco apenas à variável preço do petróleo, preservando toda a flexibilidade da Petrobras de gerenciamento ótimo dos recursos e reduzindo a zero tanto o custo de monitoração como o problema da assimetria de informação. Uma vez aceita essa idéia, era necessário um modelo de risco para os preços do petróleo. Foi adotado um processo estocástico de reversão à média com saltos de Poisson, similar ao usado no artigo de OR de Dias & Rocha (1998)[16]. Assim, foram usadas tanto as OR "como um modo de pensar" (qualitativo), como uma ferramenta analítica através de um modelo matemático típico de OR, um processo estocástico de reversão à média com saltos para modelar preços do petróleo. No item 2.2 serão discutidas alternativas de processos estocásticos para os preços do petróleo. A formatação feita no financiamento de Marlim, acabou servindo de modelo para outros projetos de financiamento.

Uma outra história de sucesso de OR se deu em 1999. Com a abertura do setor petróleo brasileiro, a Agência Nacional do Petróleo (ANP) publicou na internet uma minuta para regular o tempo do período exploratório visando os leilões de direitos exploratórios. No início de 1998, Dias & Rocha (1998) escreveram um artigo de OR analisando essas regras e sugerindo uma dilatação desse prazo com base em OR. Em 1999, poucos meses antes do primeiro leilão no Brasil, houve um debate público sobre o tema, com o Deputado Delfim Netto e as companhias de petróleo em geral defendendo uma dilatação desse prazo. Foi enviado ao influente Deputado Federal (e ex-Ministro da Fazenda) Delfim Netto o artigo de Dias & Rocha (1998). Ele foi analisado na coluna do deputado no jornal *Folha de São Paulo* em 14 de abril de 1999 (Delfim Netto, 1999), que elogiou e

[16] Foi adotado um modelo mais fácil de simular e de estimar os parâmetros de reversão do que o modelo de Dias & Rocha (1998). Esse processo estocástico foi denominado de Modelo de Marlim. Para detalhes desse modelo, ver: www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html#mc-mrj

ressaltou as conclusões do artigo defendendo o aumento do prazo exploratório. Poucos dias depois, a ANP sinalizou a reformulação das regras do leilão e depois aumentou o prazo para um valor próximo do que era defendido no artigo. Nunca se saberá se o artigo foi decisivo ou se apenas ajudou na pressão da indústria, mas o fato é que OR pela primeira vez participava de forma relevante de um debate público em jornal de grande circulação. Essa importante história de sucesso que deu um impulso adicional para a prática de OR na Petrobras. No item 2.4.7 serão mostrados outros detalhes da discussão de regulação no setor petróleo em geral e do modelo do artigo de Dias & Rocha (1998) em particular.

A partir de 1999 houve uma série de análises de OR em projetos específicos do E&P, principalmente para desenvolvimento de grandes campos, mas também para licitações (projeto "revelation" de 1999). A característica comum nessas análises é que foram todas centralizadas, feitas por um ou poucos especialistas. Em 2000, o tópico OR foi pela primeira vez incluído no Manual de Investimentos da Petrobras e houve pela primeira vez uma recomendação da Diretoria Executiva para análise de OR em projetos da área internacional. Em 2001 foi criado o primeiro projeto sistêmico de pesquisa, o Pravap-14, que desenvolveu inúmeros projetos de OR entre 2001 e 2004, tanto internamente como em associação com universidades, especialmente com a PUC-Rio, mas também com entidades externas (ex.: Ecole des Mines de Paris)[17].

Um outro caso público de OR envolvendo a Petrobras e a ANP foi relativo à tarifa de gás do gasoduto Bolívia-Brasil (Gasbol) em 2000 e 2001. Houve um litígio entre a TBG (dona do gasoduto e controlada pela Petrobras) e as empresas "entrantes" Enersil e British Gas (BG) para livre acesso ao gasoduto. As entrantes Enersil e BG queriam não só acesso livre ao duto como pagar uma tarifa do tipo "take or pay"[18] mas com a flexibilidade de usar ou não o gasoduto. Ou seja, apreciavam a flexibilidade mas queriam pagar uma tarifa igual aos contratantes que não tem essa flexibilidade (alternativamente, era como se a flexibilidade não tivesse nenhum valor). Usando um modelo de OR que considera a demanda de gás estocástica e o exercício ótimo de opções contratuais, a TBG mostrou para a

[17] O Pravap, Programa de Recuperação Avançada de Petróleo, é um dos principais programas de pesquisa da Petrobras, com vários projetos sistêmicos tais como o Pravap-14.

[18] Contrato "take-or-pay" significa que a firma paga essa tarifa transportando ou não o gás. Variantes desse contrato que misturam opções e obrigações são chamados de contratos "swing".

ANP que essa flexibilidade tinha valor e assim a tarifa tinha que ser maior para as entrantes quando comparada com a tarifa "take or pay". A decisão da ANP foi permitir o livre acesso para o gasoduto mas pagando 11% a mais de tarifa (ver ANP, 2002, p.6-7). Uma outra história vencedora de opções reais, apesar da ANP ter arbitrado um prêmio menor do que o reivindicado pela TBG. Para outros detalhes desse modelo, ver o item 2.4.7.

Nos últimos anos a demanda por OR tem se mantido firme na Petrobras, especialmente na área internacional, em aplicações de valor da informação para o desenvolvimento dos campos e em treinamento. No entanto, há muito a ser feito. Em termos de difusão corporativa de OR, a Petrobras ainda não chegou ao estágio IV e está atrás de empresas de petróleo como a Texaco e Anadarko em vários aspectos. Mas deve-se notar que apenas a partir de 1997, com a abertura do setor petróleo, é que a necessidade de técnicas *mais sofisticadas* de análise econômica começou a se tornar mais visível. Em termos de treinamento, desde 1996 foram dados cursos longos (de 24 a 32 horas) de OR para cerca de 120 funcionários e cursos curtos (8 horas) para cerca de 200 funcionários. Parece muito mas a Intel, por ex., treinou em OR também mais de 300 funcionários mas em apenas três anos (Triantis & Borison, 2001, p.16).

Em relação à evidência empírica e testes econométricos da teoria de OR, ver referências e discussão em Dias (1996, item 2.7) ou Dixit & Pindyck (1994, cap.7 e 12). Para o leitor interessado, ver duas referências mais recentes sobre evidência empírica de OR: Harchaoui & Lasserre (2001) e Moel & Tufano (2002). Na área de petróleo, a evidência empírica é reportada em Paddock & Siegel & Smith (1988). Embora avanços nessa área tenham ocorrido desde 1996, o foco dessa tese é com a análise e aperfeiçoamento da teoria das OR como uma *teoria normativa* (como se *deve* proceder) e não como uma *teoria positiva* (como as firmas *têm* procedido). Dessa forma, aqui só será ressaltada a conclusão de Dias (1996) que as decisões das firmas são mais consistentes com a teoria de OR do que com a regra pura do VPL, mesmo quando essas firmas desconhecem a teoria das OR.

No entanto, para fechar esse tópico deve-se registrar um interessante teste prático, desenvolvido em um projeto do Pravap-14, do uso de OR nas decisões de desenvolvimento de campos de petróleo. Nesse teste, chamado de "back-testing" de OR x VPL, a idéia foi responder a pergunta: Se uma companhia de petróleo usasse OR em vez do critério do FCD (investir imediatamente se o VPL > 0) para

aprovar projetos de seu portfólio, teria ela ganho mais dinheiro (VPL "ex-post")? Os resultados desse teste são discutidos em Moszkowicz (2003). No caso base do teste, foi considerado dois tipos de projeto: os muito atrativos, VPL >> 0 ("deep-in-the-money") e os ligeiramente atrativos, VPL = 0^+ ("in-the-money"). O preço do petróleo foi a única variável estocástica, modelada como um movimento geométrico Browniano (MGB) e o início do *back-testing* foi em 1970.

Os principais resultados foram: para projetos muito atrativos, a regra de OR foi superior ao do FCD, mas em apenas 16,6% a mais de VPL acumulado *ex-post*. Já para projetos ligeiramente atrativos, a regra de OR foi muito superior à regra do FCD: o VPL *ex-post acumulado* na regra do FCD foi ligeiramente negativo, enquanto que o VPL *ex-post acumulado* na regra de OR foi significativamente positivo, mesmo sendo a metade do valor obtido com o caso de projetos "muito atrativos". Isso porque, no caso de OR, não se investe logo no projeto que não está suficientemente atrativo ("deep-in-the-money"), se espera. Caso após um ano de espera os preços tenham melhorado o suficiente então se investe no projeto e, caso contrário, não se investe. Assim, como OR demanda um prêmio adicional para investir, a *probabilidade* do projeto ter um VPL ex-post negativo é menor do que se a regra do FCD for usada. É o *benefício da espera* (ou o *princípio das más notícias*, ver Dias, 1996, ou Dixit & Pindyck, 1994, p.40) funcionando na prática.

2.1.3. Introdução à Teoria das Opções Reais em Petróleo

A teoria de opções reais em petróleo começa com Tourinho (1979) e o modelo clássico de Paddock & Siegel & Smith (1988). Existem várias dezenas de artigos de opções reais em petróleo (algumas dezenas só na SPE, Society of Petroleum Engineers). Serão mencionados apenas alguns artigos mais conhecidos, parte deles analisados com algum detalhe em Dias (1996). Essa seção é parcialmente baseada em Dias (2004).

Ekern (1988), analisou o valor da opção de integrar um campo satélite em um sistema de produção existente quando o mesmo tiver capacidade ociosa versus a alternativa de maior investimento com uma plataforma de maior capacidade. Bjerksund & Ekern (1990) mostraram que para decisões de desenvolvimento inicial de campos de petróleo geralmente é possível ignorar tanto a opção de parada temporária como a de abandono *na presença da opção de postergar* o

investimento[19]. Kemna (1993) apresentou estudos de casos que ela desenvolveu durante a sua longa consultoria para a Shell (entre 1985 e 1990). Dias (1997) foi a primeira aplicação híbrida de opções reais com a teoria dos jogos no setor petróleo, usada para avaliar o momento ótimo para a perfuração exploratória (tema que será desenvolvido nessa tese). Dias & Rocha (1998) aplicaram pela primeira vez um processo estocástico de reversão à média com saltos de Poisson para preços do petróleo e analisaram as opções estendíveis na fase exploratória.

A grande maioria dos artigos de OR em petróleo é referente à área de E&P. Mas na área de refino existe também alguma literatura, como um dos casos descritos em Kemna (1993) e especialmente no artigo dos professores japoneses Imai & Nakajima (2000). Em aplicações típicas de refino, podem ser usados os modelos de histerese apresentados no capítulo 7 do livro-texto do Dixit & Pindyck (1994), em que é considerada a interação entre as opções de investimento, abandono, parada temporária e reativação.

Schwartz (1997) comparou modelos para preços do petróleo (e outras commodities), que serão discutidos nesse capítulo. Laughton (1998) mostrou que apesar das incertezas tanto no preço do petróleo como no volume de reservas aumentarem o valor do campo, a incerteza no preço do petróleo adia o exercício de todas as opções reais (da exploração ao abandono), enquanto que a incerteza técnica da reserva faz a exploração e a delimitação ocorrerem mais cedo. Cortazar & Schwartz (1998) aplicaram o flexível método da simulação de Monte Carlo para valorar a opção de desenvolver um campo de petróleo. Pindyck (1999) analisou o comportamento de longo prazo dos preços do petróleo e as implicações para modelos de opções reais (será visto aqui). Galli, Armstrong & Jehl (1999) discutiram e compararam OR, árvores de decisão e simulação de Monte Carlo em aplicações em petróleo.

Chorn & Croft (2000) estudaram o valor da informação de reservatório no contexto de OR. Saito et al. (2001) analisaram as alternativas de desenvolvimento de um campo combinando engenharia de simulação de reservatórios com opções reais. Kenyon & Tompaidis (1999, 2001) analisaram contratos de *leasing* para sondas marítimas usando OR. McCormack & Sick (2001) discutiram a valoração

[19] Isso foi analisado com mais detalhes na tese de doutorado de Bjerksund. Essa simplificação será assumida no modelo clássico descrito nesse capítulo e em outros modelos.

de reservas provadas não-desenvolvidas e também a correlação entre taxas diárias de sondas e preços do óleo e gás, a qual foi surpreendentemente próxima de zero. Sharma et al. (2002) analisaram com OR a tecnologia de *poços inteligentes*. Os livros de OR de Dixit & Pindyck (1994, principalmente o capítulo 12), Trigeorgis (1996, p. 356-363) e Amram & Kulatilaka (1999, capítulo 12), analisam modelos de investimento para a indústria de petróleo e de recursos naturais de forma geral.

Além dessa breve revisão da literatura, nessa seção serão mostrados exemplos simples para ilustrar conceitos e motivar o desenvolvimento de modelos mais complexos de OR em petróleo especialmente em E&P. Esses exemplos também irão motivar a modelagem da incerteza de mercado, da incerteza técnica e até da interação estratégica com outras firmas de petróleo. Será introduzida também a terminologia básica de investimentos em petróleo a ser usada na tese.

A Figura 1 mostra o processo típico de opções reais *seqüenciais* para as fases de investimento de E&P de petróleo, da exploração para a explotação.

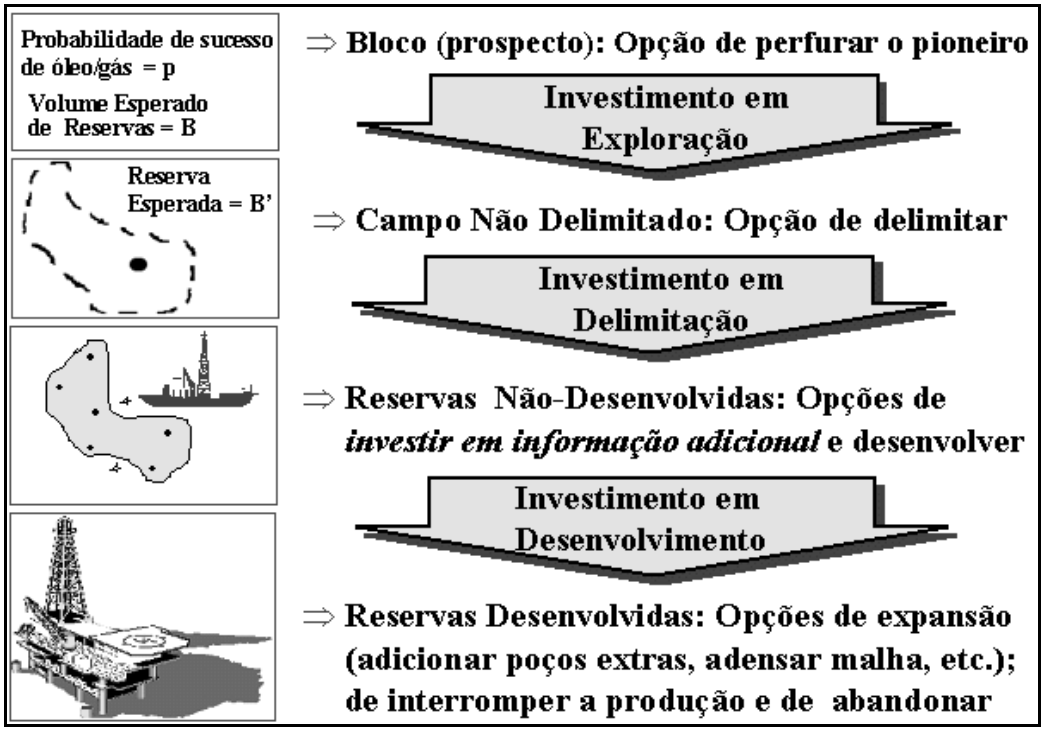

Figura 1 – Processo de Opções Reais Seqüenciais em E&P de Petróleo

A firma detém os direitos de um bloco exploratório obtido através de leilão ou adquirido no mercado. Durante a fase exploratória a firma tem de decidir se exerce a opção de perfurar um poço exploratório pioneiro ("wildcat well"), o qual é opcional na maioria dos casos. Esse investimento é totalmente irreversível. Caso essa opção seja exercida e em caso de sucesso (descoberta de óleo e/ou gás) a

firma obtém um campo não-delimitado, com elevada incerteza técnica. A firma tem a opção de investir na fase de delimitação ("appraisal phase") através da perfuração de poços de delimitação e sísmica 3D adicional[20]. O objetivo é obter mais informações sobre o volume e qualidade das reservas, reduzindo a incerteza técnica e obtendo reservas não-desenvolvidas embora delimitadas. Quando a incerteza técnica remanescente não justifica investimentos em informação adicionais, a firma tem a opção de desenvolver a reserva através de um grande comprometimento de investimento na fase de desenvolvimento. A firma pode também devolver a reserva não-desenvolvida para a agência governamental ou esperar por melhores condições de mercado (até uma certa data). Em caso de desenvolvimento, a firma obtém reservas desenvolvidas. Finalmente, a firma tem opções operacionais durante a vida produtiva tais como a opção de expandir a produção (ex., através de poços opcionais), a opção de parada temporária, e até a opção de abandonar a concessão.

A valoração é feita de trás para frente ("backward induction") como na *programação dinâmica*, ou seja, é necessário valorar a fase de desenvolvimento antes de, por ex., valorar o prospecto exploratório, já que o benefício esperado do prospecto está ligado ao valor do projeto de desenvolvimento (em que serão geradas as receitas).

Os modelos de opções reais dão duas respostas interconectadas, o valor da oportunidade de investimento (*valor da opção* real) e a regra ótima de decisão (o *gatilho* para o exercício ótimo da opção). Para ilustrar esses conceitos na área de petróleo, serão apresentados alguns exemplos simples que ilustram as diferenças entre OR e FCD. Entretanto, OR pode ser visto como a solução de um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos tem-se:

Maximizar o VPL (função objetivo típica) através do gerenciamento ótimo das opções (flexibilidades gerenciais) relevantes, sujeito a:

- Incertezas de mercado (preço do óleo, taxa de sondas, etc.); e
- Incertezas técnicas (existência, volume e qualidade do petróleo).

[20] Sísmica de reflexão é um processo muito usado em exploração de petróleo onde se emite um pulso sonoro (detonando uma carga sísmica) que é refletido nas diversas camadas de sub-superfície, sendo esse sinal capturado através de geofones ou hidrofones. Dá indicações sobre as estruturas de sub-superfície (espécie de raios-x). Na sísmica 3D, o levantamento de dados sísmicos é feito com linhas de carga paralelas afastadas da mesma distância dos fones receptores, varrendo uma área. É mais precisa que a sísmica 2D, que só dá uma idéia de seções verticais locais.

Dentre as opções relevantes, podem ser citadas a opção de postergar o investimento ("timing option"), a opção de expandir a produção e a opção de abandonar a concessão. Serão vistos alguns modelos sobre essas opções.

O primeiro exemplo é na fase de desenvolvimento e servirá para ilustrar de forma intuitiva os conceitos básicos de OR tais como o valor adicional de OR na presença de *incerteza de mercado*, o *valor da espera* e o momento ("*timing*") ótimo de investir, e a regra ótima de decisão (*gatilho*). Por razões de simplicidade, considere apenas dois períodos e dois cenários de incerteza de mercado. Essa será representada pelos preços do petróleo – que é de longe o parâmetro de mercado mais relevante e mais incerto para as decisões de investimento. Seja um campo de petróleo que foi descoberto e delimitado, mas não desenvolvido. Seja V o valor da reserva desenvolvida e I_D o custo de investimento para o desenvolvimento, de forma que o VPL de desenvolvimento da produção é dado pela equação:

$$\mathbf{VPL_{DP} = V - I_D} \qquad \mathbf{(1)}$$

Tanto V como I_D já estão em valor presente na data de início de investimento. Considere o caso em que o valor da reserva desenvolvida é proporcional ao preço de longo-prazo do petróleo (P), i.é, $\mathbf{V = k \, . \, P}$, onde o fator k depende do volume e qualidade da reserva de petróleo. No item 2.3 será discutida em detalhes a função VPL_{DP}. Suponha que a firma pode investir agora, ou devolver a concessão para a agência de petróleo, ou ainda adiar a decisão por um período (quando não poderá mais adiar a decisão). Se adiar a decisão, suponha que a expectativa de longo-prazo do preço do petróleo pode subir ou descer um dólar por barril, com 50% chances cada, conforme ilustrado na Figura 2 a seguir.

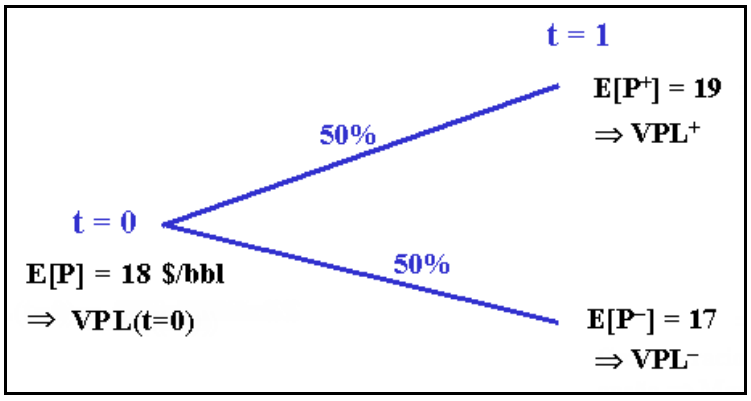

Figura 2 – Incerteza de Mercado e Opção de Espera

Ou seja, não se espera que os preços do petróleo aumentem, apenas que variem. Agora serão mostrados três exemplos simples. **Exemplo 1.a:** Considere

inicialmente os seguintes valores numéricos: k = 100 e I_D = 1850 MM$. Pode-se verificar facilmente que o imediato investimento tem VPL negativo: VPL(t = 0) = 100 . 18 – 1850 = – 50 MM$. Numa análise tradicional, esse projeto seria considerado sem valor. Mas a incerteza e o caráter opcional do investimento irá adicionar valor: se adiar o investimento e o preço subir para 19 $/bbl, então o VPL se tornará positivo: VPL^+ = 100 . 19 – 1850 = + 50 MM$. Isso ocorre com 50% chances. Com a mesma chance o preço pode cair e assim o VPL ficaria ainda mais negativo: VPL^- = 100 . 17 – 1850 = – 150 MM$, ou seja em média se teria o mesmo VPL(t = 0). No entanto, graças ao caráter opcional do investimento, a firma que esperar só investirá se o preço subir, obtendo VPL positivo. Caso caia o preço, a firma não é obrigada a investir e assim o valor nesse cenário se torna zero e não o valor negativo. Considere uma taxa de desconto μ de 10% no período. O valor da concessão F considerando a incerteza + opção é dada então pela equação:

$$\mathbf{F = Max\ [VPL(t = 0),\ E[Max\{0,\ VPL(t = 1)\}/(1 + \mu)]} \qquad \mathbf{(2)}$$

Onde E[.] é o operador de valor esperado e Max[.] é o operador de máximo. Assim, o valor da concessão nesse exemplo 1.a é:

$$F = Max[– 50,\ (50\% . 0 + 50\% . 50)/1{,}1] = + 22{,}73\ MM\$$$

Ou seja, o campo é bem mais valioso que a análise tradicional (sem considerar a opção de espera) indica. A diferença entre essas análises é igual ao prêmio da opção real de espera. Ignorar isso gera erros evidentes com importantes conseqüências não apenas para as *decisões de investimento* como também para *negociações de ativos* entre companhias de petróleo.

É fácil verificar também que uma maior incerteza de mercado aumenta o valor da oportunidade de investimento, pois gera um prêmio de opção maior. Exs.: (i) os dois cenários com 16 e 20 $/bbl (em vez de 17 e 19) ou (ii) 5 cenários com 20% chances cada, para preços de 16, 17, 18, 19 e 20 $/bbl. A Tabela 2 mostra os resultados para esses exemplos e para o caso-base, em função da variância.

Tabela 2 – Maior Incerteza de Mercado, Maior o Valor da Opção Real

Cenários Equiprováveis	Variância	VPL(t = 0)	Opção Real (F)	Prêmio
Caso-Base (17 e 18 $/bbl)	1	~50	22.73	72.73
5 cenários: 16, 17, 18, 19 e 20 $/bbl	2	~50	36.36	86.36
2 cenários extremos: 16 e 20 $/bbl	4	~50	68.18	118.18

Assim, "quanto maior a incerteza de mercado maior o valor de opção de um ativo" é mais um conceito geral em OR que não era percebida pela metodologia tradicional. Note que esse conceito independe da exata modelagem probabilística (ex.: real ou neutra ao risco, qual o processo estocástico exato), embora o seu valor exato dependa. Processos estocásticos serão visto ainda nesse capítulo.

Agora considere o **exemplo 1.b**: k = 100 e I_D = 1750 MM$ (ou seja, o investimento agora é menor). Pode-se verificar que assim o VPL(t = 0) se tornou positivo: VPL(t = 0) = 100 . 18 – 1750 = + 50 MM$. Esse é o valor da concessão ou falta algum valor de opção? Deve-se investir imediatamente ou a espera ainda tem valor? Pela teoria tradicional, deve-se investir em projetos de VPL positivo imediatamente (considere não haver restrições orçamentárias). Mas a teoria das OR insiste que se deva comparar as alternativas mutuamente exclusivas entre investir agora e investir mais tarde (a depender do cenário). Para responder basta aplicar a eq. (2) e verificar que F > VPL(t = 0) e logo a espera tem valor:

$$F = \text{Max}[+50, (50\% \cdot 0 + 50\% \cdot 150)/1{,}1] = 68{,}18 \text{ MM\$}$$

Assim mais uma vez a concessão tem valor maior que o VPL, i.é, o VPL subestima o valor da concessão. Além disso, é ótimo esperar, mesmo com o VPL em t = 0 sendo positivo e apesar de não se esperar uma melhora do mercado, apenas que o futuro é incerto. Essa é outro conceito de OR que se opõe ao método tradicional: contraria a regra do FCD de investir logo que o VPL seja positivo.

Será que é *sempre* ótimo esperar quando existe incerteza? A resposta é não, mas o projeto precisa estar suficientemente lucrativo em relação à incerteza corrente. Na linguagem de opções, o projeto precisa estar "deep-in-the-money". Para ver isso, considere finalmente o **exemplo 1.c**: k = 120 e I_D = 1750 MM$, ou seja, o fator k é maior (campo de maior reserva ou de melhor qualidade). Logo, VPL(t = 0) = 120 . 18 – 1750 = + 410 MM$[21]. Já a espera não tem valor, pois a opção seria exercida nos dois cenários de VPL(t = 1), ou seja, o valor da opção real é igual ao VPL(t = 0) nesse caso, conforme se vê aplicando a eq. (2):

$$F = \text{Max}[410, (50\% \cdot 290 + 50\% \cdot 530)/1{,}1] = \text{Max}[410, 410/1{,}1] = 410 \text{ MM\$}$$

Por continuidade das funções F e VPL, entre os valores dos parâmetros dos exemplos 1.b e 1.c existe um VPL*(t = 0) tal que se fica indiferente entre investir

[21] A planilha *miscelanea1.xls* (ver CD-Rom) resolve os exemplos 1.a, 1.b e 1c.

já ou esperar, i.é, existe um VPL*(t=0) = F. Dado que o investimento é constante, pode-se dizer que existe um valor de reserva desenvolvida V* o qual se ficaria indiferente entre esperar e investir já. Esse valor V* a partir do qual se deve investir imediatamente é chamado de valor de *gatilho* ("threshold" ou "trigger") da OR e dá a regra ótima de exercício da opção. Aqui a regra é investir já desde que $V \geq V^*$. Em muitos casos se olha diretamente a variável de mercado preço do petróleo P e a solução do problema de OR passa por calcular o gatilho P* a partir do qual se deve investir já. O cálculo do gatilho (ou de uma curva temporal de gatilhos) será visto em várias passagens dessa tese.

O segundo exemplo é na fase de exploração, onde a principal incerteza é sobre a existência de petróleo. Suponha uma firma com direitos exploratórios em um bloco com dois prospectos distintos mas com mesma idade geológica (mesmo "play" geológico). Esses prospectos foram mapeados através de registros sísmicos[22]. O fator de chance FC (ou *probabilidade de sucesso*) de encontrar petróleo é 30% para ambos os casos. O custo de perfuração nessa área é de I_W = US$ 30 milhões para cada poço exploratório. Em caso de sucesso, o projeto de desenvolvimento tem um VPL de US$ 95 milhões em cada caso. Ou seja, os prospectos são equivalentes economicamente. Na análise econômica tradicional, o valor do prospecto é dado *valor monetário esperado*[23] (VME) definido por:

$$\mathbf{VME = -I_W + [FC \,.\, VPL]} \qquad \mathbf{(3)}$$

Como os prospectos são iguais, ambos tem o mesmo VME negativo que é:

$$VME = -30 + [0{,}3 \times 95] = -1{,}5 \text{ milhões \$}$$

São os prospectos sem valor para a firma de petróleo? Para responder essa questão é necessário considerar dois aspectos não incluídos no cálculo tradicional do VME acima: a *revelação de informação* e a natureza *opcional* da perfuração. Esses prospectos são dependentes por estarem no mesmo "play" geológico. Assim, é necessário considerar uma perfuração seqüencial de forma que o resultado do primeiro poço revela informações sobre o outro prospecto. Em caso de sucesso no primeiro prospecto (revelação de informação *positiva*), aumenta a

[22] A sísmica de reflexão permite identificar estruturas com chances de armazenar petróleo. Mas só com a perfuração é que se pode verificar se a estrutura tem petróleo ou se tem apenas água. Além disso, existem incertezas na interpretação sísmica (no tempo de reflexão e na velocidade).

[23] Termo largamente usado na economia da exploração para valorar um prospecto considerando a chance de sucesso.

chance de ter petróleo também no outro prospecto, de forma que o fator de chance do segundo prospecto FC_2^+ aumenta. Em caso de insucesso no primeiro prospecto ("poço seco"), o fator de chance do segundo prospecto FC_2^- diminui. Imagine que um geólogo usando um método *Bayesiano* achou que em caso de sucesso o fator de chance aumenta para $FC_2^+ = 50\%$. Para ser consistente, a chamada *lei das expectativas iteradas*[24] exige que em caso de insucesso se tenha $FC_2^- = 21{,}43\%$. A Figura 3 mostra os fatores de chance para o segundo prospecto, antes e depois (condicionais) da revelação de informação com a perfuração do primeiro poço.

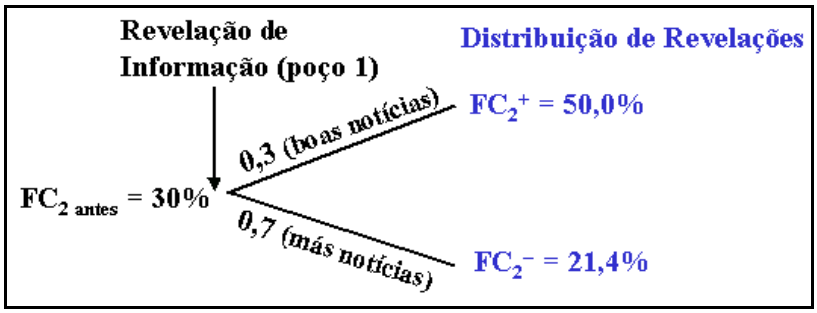

Figura 3 – Revelação de Informação para o Segundo Prospecto

Se o primeiro prospecto for perfurado e o resultado for uma revelação de informação negativa (más notícias, poço seco), o VME do segundo prospecto é revisado para um valor ainda mais negativo. Entretanto, a firma não precisa perfurar o segundo prospecto porque a perfuração é uma opção, não é uma obrigação. Assim, em caso de revelação negativa a firma pára as perdas e o segundo prospecto vale zero. Entretanto, em caso de revelação positiva (boas notícias) com a perfuração do primeiro prospecto (que tem apenas 30% de chance), o VME revisado é positivo: $VME^+_2 = -30 + [0{,}50 \times 95] = +17{,}5$ MM$ (ver eq. 3). Logo, considerando tanto a *revelação de informação* da primeira perfuração como o *caráter opcional* da segunda perfuração, o valor do bloco é:

$$E[VME_1 + \text{opção}(VME_2)] = -1{,}5 + [(0{,}7 \times \text{zero}) + (0{,}3 \times 17{,}5)] = +3{,}75 \text{ MM\$}$$

Um bloco que aparentemente não tinha valor é muito melhor que a análise tradicional indica. A fonte de valor de OR está ligada à *regra de decisão ótima*: "Perfure o primeiro prospecto. Exerça a opção de perfurar o segundo prospecto *somente* em caso de revelação de informação positiva na primeira perfuração". Os fatores-chave para esse valor positivo foram a *natureza opcional* da perfuração

[24] O valor esperado (média) da distribuição de expectativas condicionais é igual ao valor esperado original (da distribuição a priori). Isso será mostrado/provado/detalhado no capítulo 3.

dos prospectos e o efeito da *revelação de informação* de prospectos dependentes. Na falta de qualquer um desses dois fatores-chave, o valor do bloco seria igual ao calculado com a análise tradicional. A modelagem da incerteza técnica e da revelação de informações será tratada em detalhes no capítulo 3.

Existem importantes conseqüências para *negociações* entre companhias de petróleo que podem ser inferidas com esse exemplo simples. Tanto para compra de direitos ("*farm-in*") como para venda de direitos ("*farm-out*") de blocos exploratórios, essas firmas podem perder muito dinheiro se usarem apenas ferramentas tradicionais, ignorando o caráter opcional dos investimentos e a revelação de informação com o planejamento seqüencial dos investimentos.

Além disso, a companhia de petróleo pode desenhar algumas operações especiais de parceria usando esses conceitos. No exemplo acima, a firma (companhia X) poderia vender 100% dos direitos do primeiro prospecto por um valor igual a *zero* para uma outra firma (companhia Y), exigindo "apenas" que a companhia Y perfure imediatamente o (primeiro) prospecto e que forneça toda a informação da perfuração para o proprietário original desse prospecto (companhia X). Nesse caso, o VME do bloco para a companhia X se eleva para + 5,25 MM$ porque a companhia X não perfura o primeiro prospecto que tem $VME_1 = -1,5$ MM$. Esse tipo de negociação é possível porque as companhias de petróleo têm diferentes avaliações para o mesmo prospecto: para aceitar o negócio a companhia Y avalia que o primeiro prospecto tem VME positivo. Essa assimetria de valoração é devida principalmente a diferenças na *interpretação geológica*, mas outros fatores também influenciam tais como taxas de desconto diferentes, diferentes expectativas para o preço de longo-prazo do petróleo, etc. Ou seja, a assimetria de valoração e a visão de OR geram oportunidades "ganha-ganha" para parcerias entre companhias de petróleo.

Usando o mesmo exemplo, a situação é um pouco mais complicada se originalmente esses prospectos estiverem em dois blocos vizinhos, com duas companhias distintas detendo os direitos em cada bloco. Claramente continuaria existindo o potencial "ganha-ganha" de negociação[25], mas uma companhia poderia achar que a outra irá perfurar primeiro e, em vez de tentar um contrato de parceria, simplesmente esperar que a outra perfure primeiro a fim de usar essa

[25] Por ex., trocando 50% dos direitos de cada prospecto, repartindo o lucro de 3,75 MM$.

informação grátis[26] para sua própria decisão (agindo como um "free-rider"). A outra firma pode pensar o mesmo e também esperar.

Esse jogo da espera é conhecido como jogo de *guerra de atrito*. A negociação do desenho e dos valores em contratos de parceria é modelada através dos *jogos de barganha*. Esses assuntos fazem parte do ramo de conhecimento conhecido como *teoria dos jogos*, que será discutido juntamente com a teoria dos *jogos de opções reais* nos capítulos 4 e 5.

Em vista dos exemplos acima, a característica opcional de um ativo (ex.: poder postergar a decisão de investir) comparado a um ativo que não tenha essa característica (ex.: o mesmo ativo mas com a decisão sendo "agora ou nunca"), sugere a seguinte definição de opcionalidade:

Definição. **Opcionalidade de um ativo**: é a qualidade de um ativo em possuir opções embutidas. É o caráter opcional do ativo. A diferença de valor entre um ativo real com opcionalidade e o mesmo ativo sem opcionalidade, define o valor do prêmio de OR, que dá o valor da opcionalidade do mesmo.

A consideração do valor da opcionalidade é o que distingue o método de OR do método tradicional. Dessa forma, aqui é assumido que o que caracteriza o método de OR é considerar o valor da opcionalidade e não a exata modelagem probabilística para valorá-la. Dentro dessa definição, OR é mais ampla do que alguns pesquisadores sugerem e permite que se usem métodos híbridos para a descrição probabilística e para otimização sob incerteza. Com isso, essa tese discorda das críticas de Schwartz (1996) ao livro do Dixit & Pindyck (1994) em que Schwartz condena o método da *programação dinâmica* para avaliar OR no caso de *mercado incompleto*[27]. Isso tem levado a alguns autores fazerem uma distinção entre modelos de opções reais e modelos de investimento sob incerteza. Quando o mercado é incompleto, o ajustamento ao risco do valor de um ativo não é único (existem várias ou infinitas *medidas equivalentes de martingale*). Schwartz (1996) sugere que o único meio de selecionar essa medida é através de um modelo de equilíbrio. Mas se o mercado é incompleto, então essa seleção irá

[26] O resultado da perfuração de um poço pioneiro é considerado "informação relevante" para as bolsas de valores e tem de ser tornadas públicas imediatamente. Além disso, em vários países as agências reguladoras também exigem essa divulgação.

[27] Se o número de estados da natureza (mercado) for maior que o de ativos independentes com preços associados a esses estados, o mercado é incompleto; se for igual o mercado é dito completo; e se for menor então existe arbitragem (ver, por ex., Tavella, 2002).

depender de preferências ao risco e assim não se pode dizer que o uso de uma taxa de desconto exógena refletindo as preferências ao risco (usada por Dixit & Pindyck) esteja errada. Na prática corporativa, a única *referência* agregada de preferência ao risco está embutida na taxa de desconto ajustada ao risco usada na corporação. Dessa forma, parece melhor usar essa referência do que modelos teóricos de equilíbrio (descritos, por ex., em Duffie, 2001)[28] em que a estimativa de parâmetros para determinar o prêmio de risco é muito difícil e não menos arbitrário que o prêmio de risco embutido na taxa de desconto corporativo.

Como em Dixit & Pindyck (1994, p.7), essa tese não fará distinção entre os termos opções reais e investimento sob incerteza, e defende o uso mais amplo do termo opções reais para abrigar inclusive métodos híbridos para enriquecer essa teoria e permitir resolver problemas mais complexos. A essência das OR é valorar a opcionalidade de um ativo – um conceito que resistirá ao tempo, e não exatamente como isso é feito (que evolui com os avanços da teoria de finanças)[29]. Entretanto, isso não significa que se pode usar qualquer coisa[30]. Uma estimativa, mesmo imperfeita, baseada em dados de mercado é sempre preferível a uma estimativa baseada em preferências individuais. Além disso, se é razoável supor que o mercado é completo (como geralmente ocorre com OR em petróleo), não há porque usar o método da programação dinâmica se o método dos ativos contingentes pode e deve ser aplicado, dando um valor único de mercado.

Para ilustrar melhor o conceito de opcionalidade, a Figura 4 apresenta a *equação visual de opções reais*. Suponha um projeto que hoje tem um VPL (ou VME) negativo, mas a decisão de investimento pode ser postergada em até 5 anos. Na expiração (T), o valor desse ativo incluindo a sua opcionalidade é dado pela equação $F(T) = Max[VPL, 0] = Max[V – I, 0]$.

---

[28] Aliás, Duffie (2001) dedica um capítulo do livro para a programação dinâmica. Apenas o fator de desconto é baseado na função utilidade, que pode ser a de um *agente representativo*. Numa corporação, quem seria esse agente? A teoria de *agência* sugere que não se use a utilidade do presidente ou outro executivo para determinar o prêmio de risco de uma corporação. A taxa de desconto corporativa pelo menos reflete preferências *agregadas* dos acionistas em relação ao risco.

[29] Por ex., o belo resultado de Black & Scholes (1973) que o valor da opção independe da taxa de crescimento do ativo básico, não é válido se o ativo seguir um modelo de reversão à média.

[30] Mesmo em mercados incompletos, o conceito de arbitragem impõe limites ao que pode ser usado na valoração de ativos.

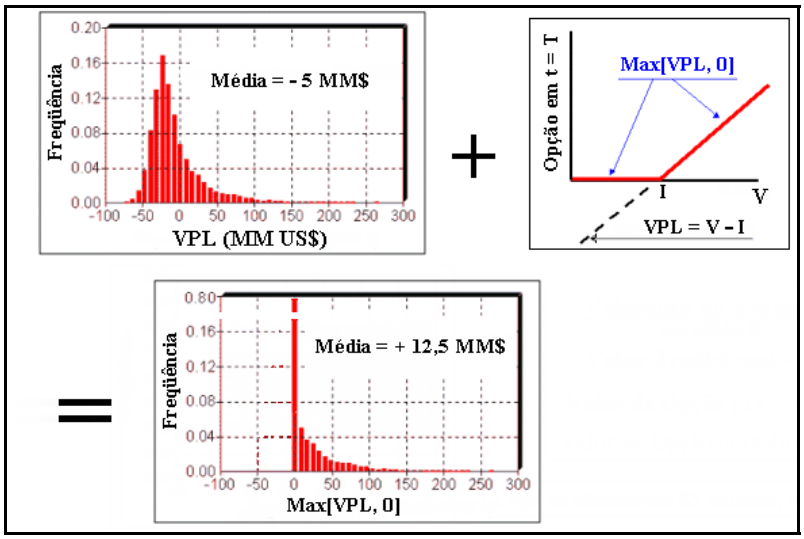

Figura 4 – Equação Visual de Opções Reais

Dada a natureza estocástica das variáveis usadas no cálculo do VPL, a primeira distribuição[31] na Figura 4 representa os possíveis valores do VPL desse projeto se o investidor esperar para decidir na data T. Como o investimento é opcional, nessa data ele só será feito se for positivo. Isso provoca uma assimetria na distribuição, fazendo com que os valores negativos se tornem zero, gerando uma massa concentrada no valor zero, como "resultado da equação". Essa equação captura a essência intuitiva do pensamento de opções.

2.2. Incerteza de Mercado e Processos Estocásticos

O processo estocástico (de longe) mais usado tanto em opções financeiras como em opções reais é o ***movimento geométrico Browniano*** (MGB). Uma das causas dessa popularidade é que o MGB possui excelentes propriedades matemáticas (tais como a homogeneidade, que será vista depois). Esse processo estocástico é usado tanto no modelo clássico de Black & Scholes (1973) e Merton (1973) para opções financeiras, como no modelo clássico de Paddock, Siegel & Smith (1988) de opções reais em petróleo.

No modelo de Paddock, Siegel & Smith (1988), a variável estocástica básica (chamada de "underlying asset" ou *ativo básico* no contexto de opções) é o valor da reserva desenvolvida V, mas em vários outros modelos a variável estocástica

[31] Em geral se usa distribuições ajustadas ao risco ou neutra ao risco, o que permite usar a taxa de desconto livre de risco para atualizar o valor da opção, ver item 2.2

básica é o preço do petróleo P. Sob a hipótese do MGB, a variável estocástica (V ou P) tem, a cada instante futuro t uma distribuição lognormal.

A equação de um processo estocástico em tempo contínuo para o ativo básico P, estabelece a variação infinitesimal dP para uma variação de tempo infinitesimal dt. Para o movimento geométrico Browniano essa equação é:

$$\mathbf{dP = \alpha P\, dt + \sigma P\, dz} \qquad \mathbf{(4)}$$

Onde α é a tendência ou "drift", σ é a volatilidade e dz é o conhecido *incremento de Wiener* dado por:

$$\mathbf{dz = \varepsilon \sqrt{dt}}\,, \quad \text{com} \quad \mathbf{\varepsilon \sim N(0, 1)} \qquad \mathbf{(5)}$$

Onde ~ N(0, 1) significa ter distribuição *Normal padronizada* (média zero, variância 1) de probabilidade. Sob a hipótese do MGB, a previsão dos preços tem as seguintes expressões para a média e a variância em função do tempo, onde a notação P_0 é o valor inicial (conhecido), i.é, P(t = 0):

$$\mathbf{E[P(t)] = P_0\ exp(\alpha\, t)} \qquad \mathbf{(6)}$$

$$\mathbf{Var[P(t)] = [P_0\ exp(\alpha\, t)]^2\ [exp(\sigma^2\, t) - 1]} \qquad \mathbf{(7)}$$

Onde exp(.) é o operador exponencial. Note pela eq.(7) que a variância é ilimitada, i.é, quando $t \to \infty$, $Var[P] \to \infty$. A Figura 5 ilustra o MGB para preços, mostrando uma seqüência de distribuições lognormal com variâncias que crescem monotonicamente com o horizonte temporal de previsão, e média (ou tendência ou "drift" α) que cresce (ou decresce se $\alpha < 0$) exponencialmente.

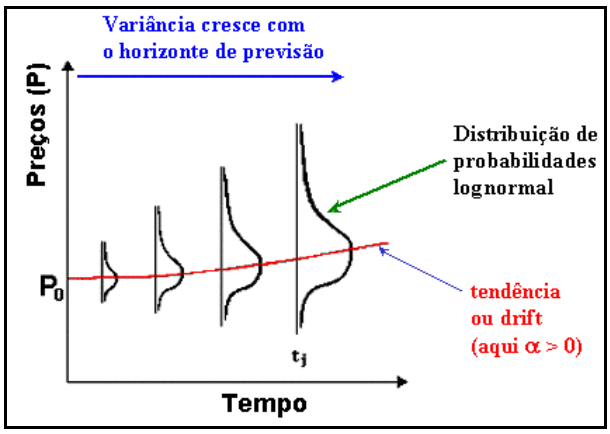

Figura 5 – Movimento Geométrico Browniano

É oportuno definir uma variação (ou melhor, uma *translação vertical*) do MGB. É o chamado MGB *livre de risco*. Esse processo pode ser obtido através

da subtração de um prêmio de risco π da tendência *real* α. Pode-se demonstrar facilmente[32] que a *tendência neutra ao risco* $\alpha - \pi$ é igual a:

$$\alpha - \pi = r - \delta \quad \textbf{(8)}$$

Onde r é a *taxa de desconto livre de risco* e δ é interpretada como a *taxa de conveniência* ("convenience yield"), se o ativo básico for o preço P de uma commodity[33], ou como a *taxa de distribuição de dividendos*[34] ("dividend yield"), se o ativo básico for o valor V da reserva desenvolvida ou do projeto operando. Assim, a equação *neutra ao risco* do movimento geométrico Browniano é:

$$dP = (r - \delta) P\, dt + \sigma P\, dz \quad \textbf{(9)}$$

Comparando a eq.(9) com a eq.(4), vê-se que apenas o termo de tendência mudou. O processo *neutro ao risco* (penalizado pelo prêmio de risco) é usado para avaliar opções e derivativos em geral, enquanto que o processo *real* é usado para fazer previsões e em algumas aplicações como em cálculo de "value at risk".

A Figura 6 mostra duas amostras de caminho ("sample paths") de um preço seguindo um MGB real e duas amostras de caminho equivalentes (mesmos parâmetros e mesmos choques estocásticos dz) para o caso de um MGB neutro ao risco. Note que a diferença é que a amostra neutra ao risco é sempre menor que a amostra real (a diferença é o prêmio de risco). Por isso se diz que a simulação neutra ao risco de um processo estocástico é a simulação real penalizado por um valor igual ao prêmio de risco.

---

[32] A taxa ajustada ao risco é $\mu = r + \pi$. Em equilíbrio, essa é a taxa de retorno total do ativo i.é, $\mu = \alpha + \delta$ (ganho de capital mais dividendos). Igualando $\alpha + \delta = r + \pi$, obtém-se a eq.(8).

[33] O conceito de taxa de conveniência foi introduzido por Kaldor e Working, ver Brenann (1958). Essa taxa δ explica certos fenômenos de preços futuros e estoques de commodities.

[34] Ou ainda taxa de distribuição de fluxos de caixa..

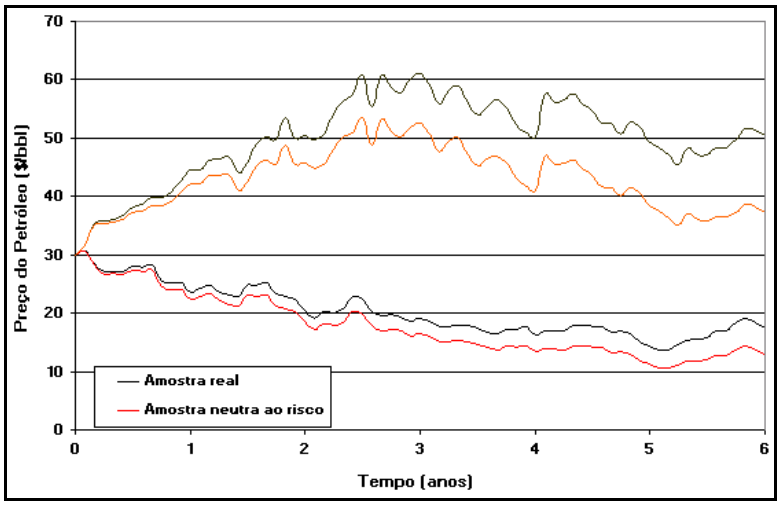

Figura 6 – Simulações: MGB Real x MGB Neutro ao Risco

A taxa de conveniência δ pode ser definida e estimada com o mercado futuro. Seja P_0 o preço à vista (ou do contrato de maturidade mais curta em $t = t_0$) e P_τ o preço de um contrato futuro com maturidade $t = \tau$. A relação entre esses dois preços é mostrada a seguir, que define a taxa de conveniência.

$$\mathbf{P_\tau = P_0 \ exp[(r - \delta)(\tau - t_0)]} \qquad \mathbf{(10)}$$

Para preços de commodities em geral – e para preços do petróleo em particular, muitos especialistas argumentam ser mais realista considerar um ***modelo de reversão à média*** (MRM) para os preços devido à lógica econômica de balanço oferta x demanda. A intuição por trás do MRM é que se o preço da commodity estiver distante (acima ou abaixo) de um certo preço de equilíbrio (ou média) de longo prazo $\overline{P}$, forças de mercado agirão para puxar os preços de volta para o nível de equilíbrio $\overline{P}$. Do lado da oferta, as forças de mercado irão agir para aumentar (se $P > \overline{P}$) ou reduzir (se $P < \overline{P}$) a produção e o investimento no setor. Do lado da demanda, a mesma tende a cair em caso de altos preços e tende a aumentar em caso de baixos preços. No caso de petróleo, podem ser relevantes os papéis da OPEP (Organização dos Países Produtores de Petróleo) e da intensidade e sucesso dos investimentos em E&P das companhias de petróleo fora da influência da OPEP. Esses mecanismos de mercado criam uma força de reversão análoga à *força de uma mola*: ela é mais forte quanto mais longe estiver o preço P em relação ao seu nível de equilíbrio $\overline{P}$.

Ao contrário do MGB, existem diversos modelos de reversão à média. O mais simples é o modelo que trabalha com o logaritmo dos preços, o qual segue

um processo conhecido por *processo (aritmético) de Ornstein-Uhlenbeck*[35]. As equações (onde ln(.) é o operador logaritmo natural) para esse processo são:

$$\mathbf{x = \ln(P)} \tag{11}$$

$$\mathbf{dx = \kappa\,(\bar{x} - x)\,dt + \sigma\,dz} \tag{12}$$

Onde κ é a velocidade de reversão, $\bar{x}$ é o valor de equilíbrio de longo-prazo, e os demais termos são como no MGB.

A variável x tem distribuição Normal e, portanto (pela eq. 11), a variável P tem distribuição lognormal. As equações para a média e variância da variável estocástica x são dadas pelas expressões a seguir, onde $x_0 = x(t = 0) = \ln(P_0)$

$$\mathbf{E[x(t)] = x_0 \exp(-\kappa\, t) + \bar{x}\,(1 - \exp(-\kappa\, t))} \tag{13}$$

$$\mathbf{Var[x(t)] = [1 - \exp(-2\,\kappa\, t)]\,\sigma^2 / 2\kappa} \tag{14}$$

A interpretação da eq. (13) é que o valor esperado é um valor intermediário entre o valor inicial x_0 e a média de longo-prazo $\bar{x}$, onde os pesos são taxas de declínio e esses pesos somam um. Note na eq. (14) que a variância é *limitada*, ao contrário do MGB, pois $Var[x(t = \infty)] = \sigma^2/2\kappa$.

Uma medida mais intuitiva de velocidade de reversão é a medida de lentidão de reversão chamada *meia-vida* H ("half-life"). Esse é o tempo esperado para uma variável alcançar a metade da distância entre o valor corrente e o nível de equilíbrio. Para o MRM descrito pela eq. (12), prova-se[36] que a meia-vida é:

$$\mathbf{H(x) = \ln(2) / \kappa} \tag{15}$$

Em modelos de reversão à média, o parâmetro δ (taxa de conveniência) é endógeno ao modelo e função do preço do petróleo. Ele é dado pela equação:

$$\mathbf{\delta = \mu - \alpha = \mu - \kappa\,(\bar{x} - x)} \tag{16}$$

Existem pelo menos duas maneiras de relacionar a variável estocástica x com a variável de real interesse P. A primeira é com a simples eq. (11), usada por ex. em Schwartz (1997, modelo 1). A desvantagem é que $\bar{P} \neq \exp(\bar{x})$ e também

[35] Estudado primeiro em Uhlenbeck & Ornstein (1930), daí o nome.
[36] Ver a demonstração em www.puc-rio.br/marco.ind/half-life.html.

$E[P(t)] \neq \exp(E[X(t)])$. A segunda maneira, tem-se tanto $\overline{P} = \exp(\overline{x})$ como $E[P(t)] = \exp(E[X(t)])$, mas a relação entre x e P é um pouco mais complicada[37]:

$$\mathbf{P(t) = \exp\{x(t) - 0{,}5\ Var[x(t)]\}} \qquad \mathbf{(17)}$$

A Figura 7 ilustra a reversão à média com o preço corrente acima do preço de equilíbrio.

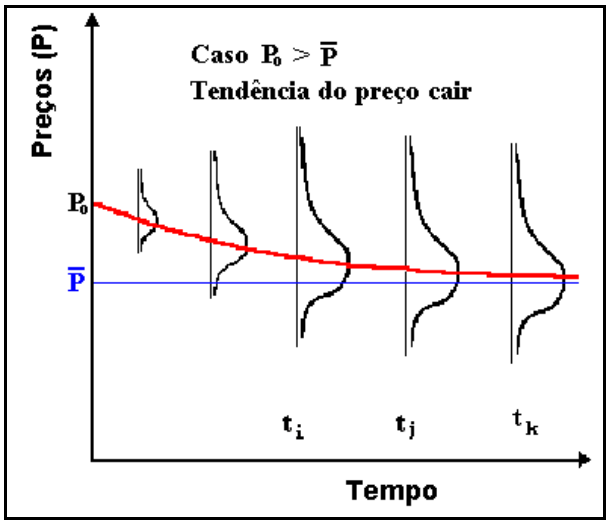

Figura 7 – Movimento de Reversão à Média

A curva que começa em P_0 (vermelha) é a curva de valor esperado dos preços P(t), os quais decrescem com o horizonte temporal de previsão se $P_0 > \overline{P}$. Essa curva de tendência vai em direção ao nível de equilíbrio $\overline{P}$ para modelos de reversão à média. Esse comportamento é mais consistente com o fenômeno chamado *backwardation* dos mercados futuros, quando o preço de um contrato futuro é inferior tanto ao preço à vista (*spot*) como a preços de contratos de maturidade mais curta. Ver Bessembinder et al. (1995, p.373-374) para esse ponto e para testes econométricos. Com o MGB, é necessário que a taxa de conveniência δ *varie com o tempo* (revertendo à média!) para explicar os fatos estilizados da estrutura a termo dos preços futuros. A Figura 8 mostra que em outubro de 2004 a estrutura a termo dos preços do petróleo (WTI) estava em *backwardation*.

[37] Para detalhes, ver www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html.

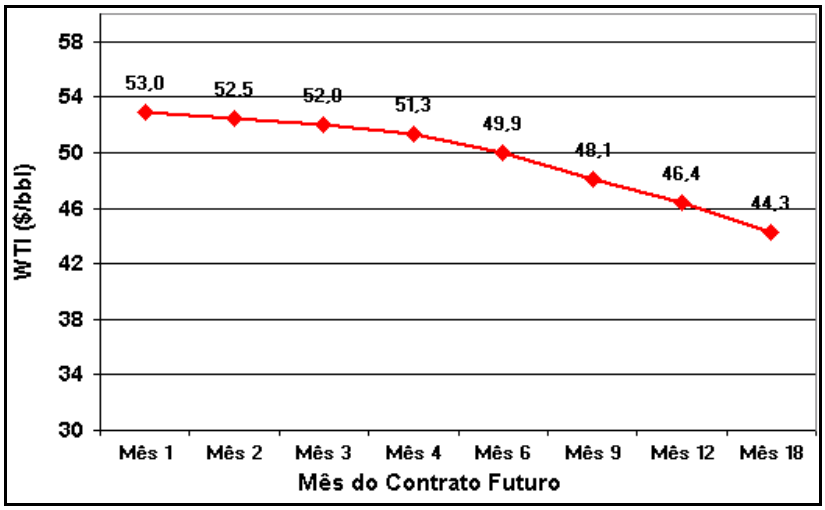

Figura 8 – Estrutura a Termo do Mercado Futuro (WTI) em Outubro de 2004

Apesar da distribuição dos preços futuros também ser lognormal como no MGB, note na Figura 7 que a variância cresce durante um certo tempo até t_i e depois permanece praticamente constante, conforme os comentários à eq. (14). A razão é o trabalho da força de reversão à media que, mesmo num futuro muito distante, não permite (faz improvável) que os preços P se afastem demais de $\overline{P}$.

O modelo de reversão à média é mais consistente com os mercados futuros, com testes econométricos *de longo-prazo* e com a teoria microeconômica. No entanto, o MGB é muito mais simples de usar. As questões que surgem são: É errado usar o MGB em aplicações de opções reais (como fizeram Paddock, Siegel & Smith, a ser visto)? É mesmo melhor o MRM que o MGB. É significante o erro ao usar o MGB em vez do MRM? Qual é um bom valor para o preço de equilíbrio $\overline{P}$? Essa seção discute essas e outras questões relacionadas analisando dois artigos relativamente recentes e importantes de dois dos mais importantes pesquisadores de processos estocásticos para preços de commodities, Robert Pindyck (MIT) e Eduardo Schwartz (UCLA). Mas antes será feita uma pequena discussão sobre um teste econométrico simples, usando regressão, em especial pelo apelo intuitivo.

O teste mais simples é através de uma regressão linear simples entre o retorno logaritmo (natural) dos preços do petróleo em relação ao nível corrente do logaritmo do preço do petróleo, ou seja, fazer uma regressão com a equação:

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + (b-1)\ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad (18)$$

Onde ε_t é o erro da previsão de retorno (relacionado à volatilidade) que é calculado junto com os coeficientes a e b. Esse último, dá a inclinação da reta da regressão e é o fator chave do teste. A idéia é que se os preços seguirem um MGB,

o retorno deve independer do nível de preços correntes e assim a inclinação deve ser próxima de zero (b ≅ 1). Já na hipótese alternativa de MRM, o retorno depende do nível em que se encontram os preços (preços altos tendem a cair e preços baixos a subir) e assim o parâmetro b deveria indicar um valor significativamente diferente de 1 (menor que 1, dando uma inclinação negativa). Usando dados do petróleo Brent e óleos de qualidade similar[38], se obteve o seguinte gráfico da Figura 9 para preços nominais entre janeiro de 1970 e outubro de 2004.

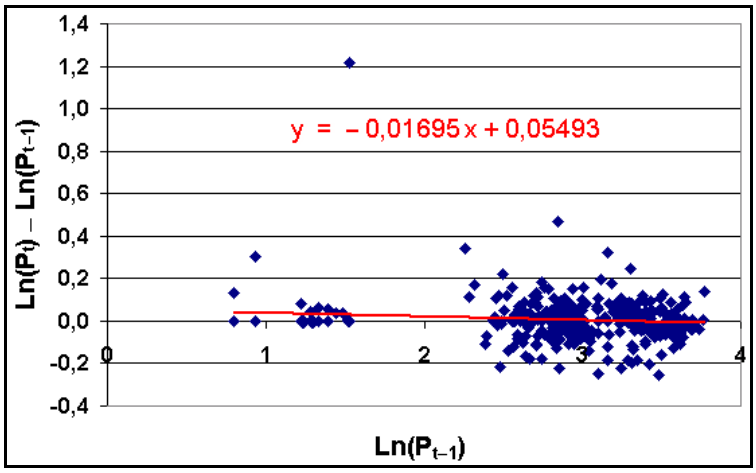

Figura 9 – Regressão para Brent e Óleos Similares (Jan/70 a Out/2004)

Note na Figura 9 que a inclinação da reta praticamente inexiste e assim visualmente parece que o retorno independe do nível corrente de preços (alto ou baixo), apontando que a hipótese do MGB não pode ser rejeitada a favor do MRM. Realmente, o teste econométrico padrão chamado de *teste da raiz unitária de Dickey-Fuller* (ver, por ex., Pindyck & Rubinfeld, 1991, p.459-465) não consegue rejeitar a hipótese do MGB nem para 1% e nem para 5% de significância para esse período de 34 anos. Outras tentativas (por ex., usando preços reais em vez de nominais, e/ou usando um período um pouco mais curto) também não conseguem fazer o teste de Dickey-Fuller rejeitar a hipótese do MGB. Consoante com os testes do autor, Dixit & Pindyck (1994, p.404n) apontaram que testes econométricos não puderam rejeitar a hipótese do MGB quando 30 anos de dados foram usados. Somente nos testes em que foram usados 117 anos de dados é que o MGB foi rejeitado em favor do MRM.

Alguns autores podem questionar se o uso de séries temporais tão longas (117 anos usado em Pindyck & Rubinfeld, 1991) é adequado, pois pode ter havido

[38] Dados do CD-Rom mensal do Fundo Monetário Internacional, IFS (International Finance Statistics) para Brent datado e óleos similares, complementado por dados da Platts.

mudança estrutural durante tão longo período (ver por ex., Maddala & Kim, 1998, cap. 13). No mercado de petróleo o aparecimento da OPEP no início dos anos 70[39] pode indicar uma quebra estrutural desse mercado em termos de séries temporais. Perron (1989) argumenta que houve uma mudança estrutural com o choque do petróleo de 1973 que afetou várias séries temporais da economia, prejudicando os resultados do teste tradicional de raiz unitária nessas séries.

Por outro lado, séries mais longas têm vantagens importantes, conforme demonstrado no livro texto de Campbell & Lo & MacKinlay (1997, p.364):

(a) Para estimativa de tendência, quantidade de dados não resolve. O melhor estimador é aquele baseado no maior intervalo de tempo. Ou seja a variância (erro) do estimador de tendência é proporcional a σ^2/T, onde T é o "time-span" (intervalo de tempo). Assim, quanto maior esse intervalo T, melhor a estimativa (menor o erro);

(b) Para estimativa de volatilidade, a quantidade de dados é o que resolve e não o intervalo tempo (ao contrário do caso da tendência). Isso porque a variância (erro) do estimador de volatilidade é proporcional a $2\ \sigma^4/n$, onde n é o número de observações (quantidade de dados).

Esse resultado motivou Pindyck e Rubinfeld (e outros) a usarem séries temporais muito longas para analisar o problema de tendência, crucial na comparação MGB x MRM. O dilema é que uma série muito longa pode não ser adequada por problemas de mudança (ou quebra) estrutural, conforme discutido antes. Assim, esse é um problema teórico e prático a ser ainda muito amadurecido.

Pindyck (1999) discutiu a evolução de longo prazo dos preços do petróleo usando 127 anos de dados. Ele detetou reversão à média, mas a velocidade de reversão encontrada foi menor (meia-vida de 5 anos) que a apresentada em alguns outros artigos (meia-vida de um a dois anos). No seu modelo, os preços do petróleo revertem para uma curva quadrática de equilíbrio em forma de U (em vez de um nível fixo $\overline{P}$ mostrado na Figura 7). O argumento para o modelo em U é que ele é consistente com modelos de reservas naturais exaustivas que incorpora mudanças tecnológicas. Ele apresenta um modelo de reversão para preços do petróleo chamado de *Ornstein-Uhlenbeck multivariado* onde os preços revertem

[39] A OPEP foi criada em 1960, mas somente nos anos 70 é que ela se tornou uma força atuante no mercado.

para essa curva de equilíbrio de longo prazo, onde essa curva de equilíbrio é ela mesma estocástica e segue um MRM.

Em outras palavras, Pindyck argumenta que o modelo de reversão à media é melhor para os preços do petróleo, mas o preço de equilíbrio futuro é incerto e a reversão é lenta. Para o caso de elevados preços (que vem ocorrendo em 2004), uma razão para a lentidão da reversão é que os investimentos de E&P levam muitos anos para colocar petróleo novo no mercado (efeito do "*tempo-de-construção*"). Além disso, em geral existe uma *inércia* de investimento (demora no exercício de opções) no lado da oferta que é explicada com modelos de opções reais. Ver a discussão sobre *histerese* em Dixit & Pindyck (1994, cap. 7).

Pindyck (1999) conclui que, para aplicações como opções reais "*a premissa do MGB é improvável que leve a grandes erros na regra ótima de investimento*". Essa conclusão é reafirmada em artigo mais recente (Pindyck, 2001). Assim, o simples modelo clássico (a ser visto) de Paddock, Siegel & Smith (1988) que usa o MGB, é uma razoável aproximação.

Schwartz (1997) compara 4 modelos para o comportamento estocástico dos preços de commodities: o MGB, o MRM "puro", e os chamados **modelos de *dois-fatores* e de *três-fatores***. O modelo de reversão à media *puro* é aquele das eqs. (10) e (11), em que a reversão à média se dá nos preços para um nível fixo (não-estocástico) de equilíbrio e sem qualquer outra variável estocástica. O modelo de dois-fatores é devido a Gibson & Schwartz (1990), no qual o preço do petróleo P segue um MGB mas a *taxa de conveniência* δ dessa commodity segue um MRM. O modelo de de *três-fatores* é como o de dois-fatores mas tendo a taxa de juros livre de risco r como a terceira variável estocástica e seguindo outro MRM. Ou seja, os modelos multi-fatores combinam o MGB e o MRM e assim o uso desses modelos deve levar a resultados intermediários entre o MGB e o MRM.

Schwartz (1997) prefere os modelos de dois e três fatores, os quais são menos previsíveis que os MRM puros. Ele apresenta um exemplo de opções reais no qual o MRM puro induz um erro maior (comparado com os modelos de dois e três fatores) que o MGB nas decisões de investimento. Mas alerta que o MGB pode induzir ao um adiamento demasiado do investimento por negligenciar fenômenos de reversão à média.

Considerando ambos (Pindyck e Schwartz) pontos de vista para modelos de OR, pode-se concluir que o MGB é uma boa aproximação em diversos casos. Interessante, em um projeto do Pravap-14 em que se comparou com um "back-testing" a performance da regra de OR versus a regra do FCD (ver o final do item 2.1.2), quando se usou o MGB a performance (soma de VPLs *ex-post*) foi muito melhor do que quando se usou o MRM. Ver os resultados em Moszkowicz (2003) e em Schäffer (2003). Embora não seja uma prova teórica de superioridade do MGB, assim como no exercício de Schwartz (1997), esse é outro *indicativo* que o MGB pode ser melhor que o MRM puro em aplicações de OR.

Entretanto, o MGB pode ser inadequado quando o preço à vista está *demasiado* longe de um nível de equilíbrio de longo prazo. A severidade da inclinação da curva de estrutura a termo do mercado futuro é um bom *indicador* se os preços à vista estão muito longe desse equilíbrio de longo prazo ou não. Apesar da vasta literatura científica, a modelagem de preços de petróleo é um tema ainda muito complexo e desafiador, de forma que uma boa dose de bom senso é necessária para a escolha do melhor modelo em cada situação.

Sob o paradigma do MGB, toda a variação no preço do óleo é um choque permanente na tendência de longo prazo projetada, enquanto que o modelo de reversão à média pura assume exatamente o oposto, i.é, que cada oscilação de preço é só um desvio temporário do previsível nível de equilíbrio de longo prazo. Ambos os pontos de vista parecem demasiadamente drásticos. Um ponto de vista mais razoável parece ser um modelo que não seja nem "tão imprevisível" quanto o MGB e nem "tão previsível" quanto o MRM. Três tipos de modelos com esse ponto de vista intermediário são discutidos a seguir. A Tabela 3 sumariza as alternativas de modelos de processos estocásticos para preços do petróleo.

Tabela 3 – Modelos de Preços do Petróleo para Uso em Opções Reais

Tipo de Modelo Estocástico	Nome do Modelo	Principais Referências
Modelo "Imprevisível"	Mov. Geom. Browniano	Paddock, Siegel & Smith (1988)
Modelo "Previsível"	Reversão à Média (pura)	Schwartz (1997, modelo 1)
Modelos Mais Realistas	Modelos de 2 e 3 fatores	Gibson & Schwartz (1990) e Schwartz (modelos 2 e 3)
	MRM com preço de equilíbrio estocástico	Pindyck (1999) e Baker, Mayfield & Parsons (1998)
	MRM + Poisson (saltos)	Dias & Rocha (1998)

Como em Pindyck (1999) e em Baker, Mayfield & Parsons (1998), outros autores como Pilipovic (1998, p.64-65) e Schwartz & Smith (2000) também apresentaram um modelo de reversão em direção a um nível *estocástico* de equilíbrio de longo prazo. Tanto Baker, Mayfield & Parsons (1998) como Schwartz & Smith (2000) concluíram que seu modelo é equivalente ao modelo de dois-fatores (P seguindo um MGB e δ seguindo um MRM). Curiosamente, Schwartz & Smith também concluíram que para muitos investimentos de longo prazo, se pode avaliar com segurança investimentos usando apenas o preço de equilíbrio como variável estocástica, modelando-o com um MGB!

Isso significa que se pode usar um MGB com *baixa volatilidade* para modelar a *expectativa de longo prazo dos preços do petróleo* em modelos de opções reais. A baixa volatilidade é por causa do fato estilizado que a volatilidade dos preços futuros – assim como a das expectativas futuras, é menor do que a volatilidade dos preços à vista (spot). Isso é um fato do mercado futuro. Em várias aplicações dessa tese – onde apenas preços de longo prazo são relevantes, se irá seguir a sugestão de Schwartz & Smith (2000), trabalhando apenas com a expectativa de longo prazo seguindo um MGB. O mercado futuro fornece um *proxy* desse valor tanto em termos de valor corrente como de volatilidade.

O terceiro modelo apresentado na Tabela 3 da classe "mais realista" é devido a Dias & Rocha (1998), os primeiros a modelar um ***MRM com saltos de Poisson*** tanto para preços de petróleo como para aplicações de OR em geral. Dias & Rocha (1998) consideraram a reversão à media em situações normais de

mercado[40], mas permitiram a ocorrência de grandes *saltos* devido a notícias anormais (raras), que são modeladas com um processo de Poisson. Em outras palavras, algumas vezes ocorrem notícias muito relevantes e surpreendentes como guerras, colapso de mercados, surpresas da OPEP, etc., gerando uma mudança radical de expectativas em relação ao balanço oferta versus demanda no mercado de petróleo. Esses tipos de notícias causam uma grande variação em semanas ou poucos meses. A Figura 10 mostra os preços históricos nominais do petróleo (média mensal) desde 1970, e com uma escala apropriada de longo-prazo (adequada para investimentos em E&P) em que fica evidente a ocorrência de grandes saltos em alguns momentos da história, inclusive o mais recente em 2004.

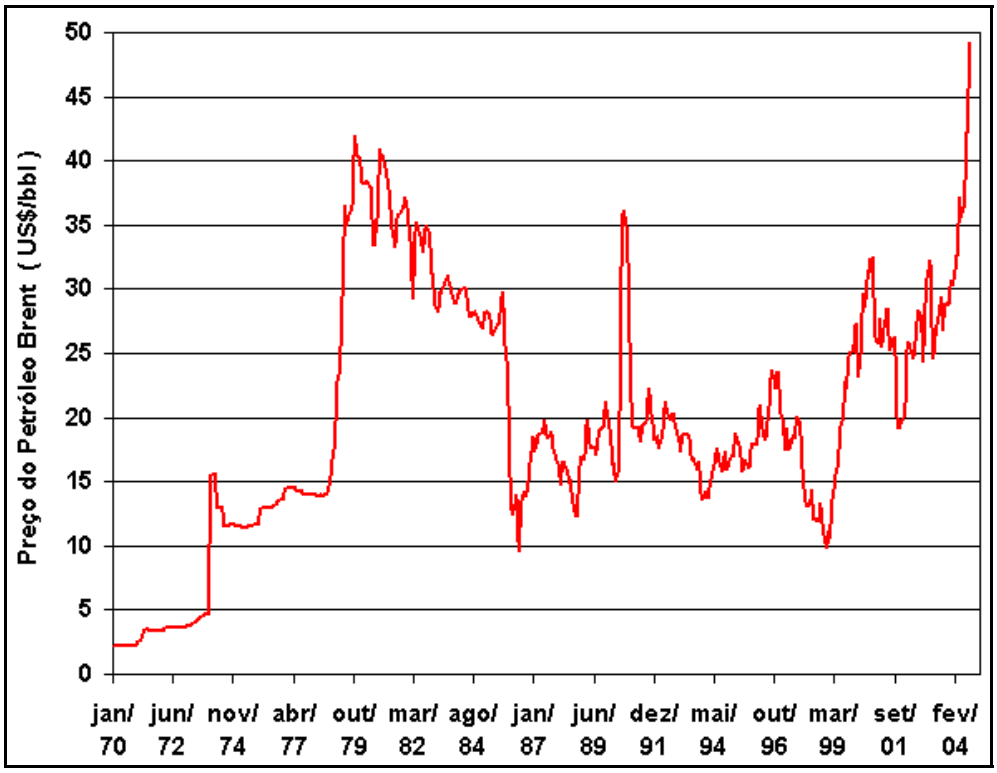

Figura 10 – Preços do Petróleo Brent e Similares (Janeiro/1970 a Outubro/2004)

Na Figura 10 pode-se observar *saltos para cima* ("jumps-up") em 1974, 1979, 1990, 1999, 2002 e 2004; e *saltos para baixo* ("jumps-down") em 1986, 1991, 1997 e 2001. Como nos dois outros modelos "mais realistas", o modelo de MRM + saltos não é tão previsível quanto o MRM puro (devido ao componente de saltos) e nem tão imprevisível quanto o MGB (devido ao termo de reversão).

[40] Em Dias & Rocha (1998) a reversão é em direção a um valor fixo de equilíbrio de longo prazo ($20/bbl). Entretanto, como principal sugestão de futuro melhoramento para o modelo, eles sugeriram considerar, adicionalmente, o preço de equilíbrio como sendo também estocástico.

No modelo original de Dias & Rocha (1998), os preços do petróleo foram descritos pela seguinte equação de reversão à média com saltos:

$$\frac{dP}{P} = [\kappa\ (\ \bar{P}\ -\ P\ )\ -\ \lambda\ k]\ dt\ +\ \sigma\ dz + dq\ \text{, sendo}$$

$$dq = \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \phi - 1, \text{ com probabilidade } \lambda dt \end{cases}$$

$$k = E[\phi - 1] \qquad \textbf{(19)}$$

Onde λ é a freqüência de saltos (para cima e para baixo, cada um com freqüência $\lambda/2$), dq é um processo de Poisson independente de dz, ϕ é distribuição de probabilidade do tamanho dos saltos, k é definido acima, e os demais parâmetros são como antes. Na primeira linha da eq. (19), o primeiro termo é a tendência de um processo de reversão à média[41] usado em Dixit & Pindyck (1994, cap.12), chamado de *Ornstein-Uhlenbeck geométrico*, e o último termo é o processo de Poisson que geral saltos com probabilidade λ dt.

Embora tenha obtido resultados consistentes, o modelo de Dias & Rocha (1998) – em particular a escolha dos termos de reversão à média, tem problemas práticos para a estimação de parâmetros e para aplicações que requer a simulação de Monte Carlo do processo estocástico. Em virtude disso, foi adotado no financiamento de Marlim um modelo um pouco diferente, mais prático, que será chamado de modelo de Marlim. Esse modelo é descrito pela equação a seguir:

$$dx = \kappa\ (\bar{x} - x)\ dt + \sigma\ dz\ + dq$$

$$dq = \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \phi, \text{ com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

Aqui não existe o termo de compensação de Poisson por ser simétrica a distribuição do tamanho dos saltos (e assim o valor esperado não depende do processo de Poisson). Nesse caso, dx não tem distribuição Normal pois os saltos geram "caudas gordas" ("fat tails") na distribuição. Os principais momentos probabilísticos (média, variância, assimetria e curtose) para esse processo foram deduzidos por Das (1998) usando a *equação diferencial estocástica de Komolgorov* que descreve a evolução da função densidade de probabilidade de uma variável estocástica (ver, por ex.: Dixit & Pindyck, p.88-92). Aqui serão

[41] O termo $-\ \lambda\ k$ é um termo de compensação devido a distribuição dos saltos não ser simétrica. Com esse termo, o valor esperado de P(t) independe dos saltos e o processo vira um *martingale*. Essa compensação de Poisson foi usada desde o artigo clássico de Merton (1976).

mostradas apenas a média e variância desse processo. A média é igual ao da eq. (13) e a relação entre x e P é dada pela eq. (17). Já a variância do MRM com saltos de Poisson é dada pela seguinte equação (Das, 1998):

$$\mathbf{Var[x(t)] = (1 - e^{-2\kappa t}) \, . \, (\sigma^2 + \lambda.E[\phi^2]) / (2\kappa)} \qquad \mathbf{(21)}$$

A eq. (21) mostra que, no longo prazo, a variância é limitada (como no MRM puro) e alcança o valor assintótico de $(\sigma^2 + \lambda.E[\phi^2]) / (2\kappa)$. Deve-se lembrar que $E[\phi^2] \neq (E[\phi])^2$ e assim $E[\phi^2]$ é calculado por integração numérica[42]:

$$\mathbf{E[\phi^2] = \int \phi^2 \, f(\phi) \, d\phi} \qquad \mathbf{(22)}$$

Onde $f(\phi)$ é a função densidade de probabilidades de ϕ. O aspecto particular do modelo de reconhecer a possibilidade de (grandes) saltos ou choques, pode induzir a melhores decisões corporativas em vários casos. Por ex., em títulos de créditos ligados ao preço do petróleo ("oil-linked credit securities") e em outros acordos/contratos referenciados ao preço do petróleo, a possibilidade de saltos ressalta a conveniência de colocar limites superior ("cap") e/ou inferior ("floor") no *spread* do título de crédito. Por ex., em dezembro de 1998, o preço do médio do petróleo (Brent) ficou abaixo de 10 $/bbl. Nessa época, a Petrobras e as instituições de crédito consideraram o modelo de reversão à media com saltos e estabeleceram os limites (*cap* e *floor*) na taxa de remuneração de títulos de risco em um importante contrato "ganha-ganha" ligado aos preços do petróleo (ver item 2.1.2). Um ano depois os preços do petróleo tinham subido cerca de 150% e o "cap" protegeu a Petrobras de pagar mais do que o desejável com o salto para cima em 1999. No ano 2000, os preços do petróleo alcançaram 30 $/bbl, três vezes o preço na época do contrato, e a proteção do "cap" permaneceu importante.

Assim, para modelagem de preços do petróleo essa tese tem duas recomendações. Para casos em que se precisa de modelos mais realistas ou que precise considerar tanto o curto como o longo prazo, o modelo de Marlim é uma boa alternativa, podendo ser ainda melhor se considerar o preço de equilíbrio de longo prazo como sendo também estocástico (extensão do Modelo de Marlim). Para análises de longo-prazo e/ou em estudo em que é necessário apenas um mapeamento razoável do comportamento dos preços do petróleo, essa tese

[42] Ver www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html#mc-mrj para a simulação do modelo de Marlim e www.puc-rio.br/marco.ind/rev-jump.html para MRM com saltos em geral.

considera uma boa alternativa a sugestão de Schwartz & Smith (2000) de modelar apenas o preço de equilíbrio de longo prazo como uma variável estocástica seguindo um MGB. Como fazer isso será agora brevemente discutido.

Existem algumas alternativas para se estabelecer o equilíbrio de longo prazo do preço do petróleo. A estimativa usando o MRM tradicional é fácil de ser feita[43] mas *não é adequada* pois é uma estimativa que usa toda a série de preços para estimar um $\overline{P}$ fixo, enquanto que num modelo como o sugerido por Schwartz & Smith (2000), o nível de equilíbrio é dinâmico e seguindo um MGB. A alternativa natural seria então a estimativa estatística complexa de um modelo MRM com $\overline{P}$ estocástico (MGB por ex.), onde todos os parâmetros tem de ser estimados conjuntamente. Nesse caso, os dois processos (o MRM de P e o MGB de $\overline{P}$) devem ser correlacionados positivamente. A estimativa de parâmetros desse processo ainda deve ser mais estudada na literatura para poder ser usada na prática. Isso porque, devido ao grande número de parâmetros a estimar, existe o sério problema de "*overfitting*" (super ajustamento) em que o modelo se ajusta muito bem aos dados passados mas tem um péssimo *poder de previsão* e pouca aderência com os fatos estilizados[44].

A segunda alternativa, que ainda é a mais usada nas empresas, se baseia em análise de cenários – a visão *cenarista*, que fornece previsões de preços de longo prazo. Essa visão geralmente tem uma forte dose de análise subjetiva e tem um grande potencial de erros grosseiros. Por exemplo, durante os elevados preços do início dos anos 80, havia previsões freqüentes de preços por volta de 100 US$/bbl para o ano 2000. Já na década de 90 houve exatamente o oposto.

Uma das previsões baseadas em cenários mais famosas pelo *erro*, ocorreu após os baixos preços de final de 1998[45] e foi publicada no talvez mais respeitado semanário de economia, *The Economist*, no início de março de 1999 (Cheap Oil, 1999). Nessa reportagem vários cenaristas, inclusive o respeitado Cambridge Energy Research Associates (CERA) fizeram previsões de preços de longo prazo

---

[43] Por ex., ver em www.puc-rio.br/marco.ind/revers.html#mean-rev como obter todos os parâmetros do MRM com uma regressão de um modelo AR1 (autoregressivo de primeira ordem).

[44] Ex.: pode haver um ajustamento *ótimo* num modelo em que a *volatilidade* do mercado a vista (*spot*) é estimada como sendo menor que a estimada para o preço de equilíbrio. Isso contraria tanto os fatos elementares do mercado futuro, como o que se observa nas expectativas de longo prazo em companhias de petróleo e bancos. Assim, esses parâmetros não poderiam ser usados.

[45] Em dezembro de 1998 a média do petróleo Brent data foi inferior a US$ 10/bbl.

entre 5 e 10 US$/bbl, que ficaram rapidamente *muito* distante da realidade. Era o auge da "bolha" da *nova economia*, e o petróleo, pertencente à "velha economia", era apontado como cada vez menos relevante na economia. A justificativa dos cenaristas era que, com as *novas tecnologias* e *ganhos de produtividade*, a tendência era haver preços ainda menores para o petróleo devido aos baixos custos de extração e a abundância. O fato é que a partir daquele momento os preços do petróleo começaram a dar um salto para cima, passando de pouco mais de 10 $/bbl para 20 US$/bbl já em agosto de 1999, e depois não experimentaram mais valores (média mensais Brent datado) sequer abaixo de US$ 18/bbl, sendo sua média no período agosto/1998 a outubro/2004 superior a US$ 28/bbl.

Na mesma época em que esses cenaristas fizeram suas previsões, o mercado futuro apontava para uma recuperação de preços (estrutura a termo do mercado futuro em *contango*), ou seja, o erro de quem investia no mercado futuro foi *bem menor* do que o erro dos cenaristas mencionados na reportagem da The Economist. Conforme mencionado antes, o modelo de Marlim, que apontava preços de longo prazo de US$ 20/bbl, errou ainda menos.

A terceira alternativa para estimar um $\overline{P}(t)$ inicial de um MGB é usar o mercado futuro como "proxy" para o valor corrente, que também pode ser usado para estimar a volatilidade (mais baixa que no caso do preço spot). Esse proxy tem apoio na literatura mais recente especialmente usando técnicas de *cointegração*[46], como discutido em Gülen (1998). Esse artigo suporta a hipótese de que o preço do mercado futuro é um previsor *não-tendencioso* do preço spot[47], usando dados do mercado Nymex (New York Mercantile Exchange). O artigo também destaca que, na prática, o mercado futuro vem sendo usado como referência, por ex., com a decisão do U.S. Minerals Management Service de adotar os preços do mercado futuro como padrão para calcular os royalties sobre a produção de petróleo, abandonando o padrão de preços "postados" (mercado à vista com entrega física). Também, muitos consultores da área de petróleo recomendam o uso do mercado futuro no lugar de "previsões internas" (ex.: Gallant, Kieffel & Chatwin, 1999).

Assim, $\overline{P}(t)$ na sugestão de Schwartz & Smith poderia ser uma extrapolação dos preços da estrutura a termo do mercado futuro que se observa na data t. Por

[46] A técnica de cointegração, que analisa séries temporais econômicas com *tendências comuns*, deu o Prêmio Nobel em Economia ao britânico Clive Granger em 2003.

[47] Não rejeita a hipótese de prêmio de risco igual a zero e fator multiplicativo igual a 1.

ex., a estrutura a termo mostrada na Figura 8 pode ser extrapolada fazendo algumas regressões não-lineares razoáveis. Usando uma função logarítmica, um valor de longo prazo (10 anos) seria em outubro de 2004 entre 39 e 40 US$/bbl, enquanto uma função potência daria uma extrapolação entre 40 e 41 US$/bbl[48]. Um ano antes em outubro de 2003 (antes do salto de 2004), essas mesmas extrapolações apontavam preços entre 23 e 24 US$/bbl, quando o preço à vista estava em torno de 30 US$/bbl (contra 53 US$/bbl em outubro de 2004).

No entanto, se basear apenas no mercado futuro tem as suas limitações, pois mesmo que ele seja eficiente (não-tendencioso), apresenta erros importantes em termos de prever o futuro preço spot. Talvez uma boa saída seja *condicionar* a estimativa da segunda alternativa (estimativa do MRM + MGB correlacionados) com um intervalo de valores de $\overline{P}$ indicado por estudos baseados na terceira alternativa (mercado futuro), a fim de minimizar a possibilidade de "overfitting".

Os baixos preços do petróleo na década de 90, tanto no mercado à vista como nas expectativas de longo prazo, levaram a uma *onda de fusões* de grandes (BP-Amoco, Exxon-Mobil, Total-Fina-Elf, Chevron-Texaco, dentre outras) e de pequenas empresas de petróleo. Uma análise apressada poderia concluir que as empresas estavam exercendo otimamente uma *opção de contração* através duma fusão, cujo objetivo primário era corte de despesas operacionais, especialmente na área de pessoal[49]. O problema é que essa contração tem efeitos *irreversíveis* tais como perder mão-de-obra treinada e altamente especializada, que levam anos para serem treinadas. Dificilmente essa mão-de-obra estará disponível para ser recontratada numa eventual posterior expansão do setor com uma melhora nos preços. Assim, essas companhias de petróleo talvez não tenham percebido que as fusões reduziram as suas *capacidades* para uma eventual expansão. Dada a volatilidade dos preços do petróleo e aos aspectos de reversão, talvez a opção de contração (fusão) não estivesse suficientemente madura para ser exercida. Talvez os *incentivos de curto prazo* dos executivos dessas empresas tenham precipitado o exercício dessas opções. Realmente, as fusões geraram ganhos importantes de

[48] As funções usadas foram $y = -3{,}085 \ln(x) + 54{,}516$ e $y = 54{,}735\, x^{-0{,}06297}$, onde x é o número de meses e y o preço (longo prazo) previsto. Deve-se ter cuidado com o problema de "overfitting": a função quadrática se ajustou melhor aos dados, mas previu preços futuros inicialmente caindo e depois subindo, sendo que a previsão para 10 anos foi maior que 130 $/bbl.

[49] No anúncio da fusão, o CEO da Chevron afirmou esperar um corte de cerca de 4000 empregos e redução de custo imediato da ordem de US$ 1 bilhão (O'Reilly, 2000).

curto e médio prazo para os acionistas dessas companhias. Mas o fato é que, nos anos recentes de elevados preços do petróleo, essas empresas tiveram performance inferior às companhias "nacionais" de petróleo, que não se envolveram em fusões no período de baixos preços[50]. Mais uma vez é necessário que haja um sistema de incentivos que premie o exercício ótimo de opções reais, para substituir o sistema de incentivos contábil tradicional que tem um viés de curto prazo que muitas vezes leva ao exercício (ou a falta de exercício) sub-ótimo das opções reais.

2.3. Modelos Para a Função VPL em Campos de Petróleo

Nessa tese será útil desenvolver uma forma funcional para calcular o valor presente líquido (VPL) em caso de exercício da opção de desenvolvimento do campo de petróleo. É de interesse para as aplicações dessa tese (e de OR em geral) que o VPL seja uma função do preço do petróleo e de outras variáveis relevantes tais como a qualidade e o volume dessa reserva a ser desenvolvida. Em especial, a parametrização do VPL em fatores chaves, é de grande utilidade em trabalhos que envolvem a simulação de Monte Carlo do VPL.

Considere a eq. (1), VPL = V – I_D. Como foi visto, V é o valor da reserva desenvolvida ou, em termos mais gerais, é o valor do projeto operando ou pronto para operar. Em termos de fluxo de caixa, V pode ser visto como o valor presente das receitas líquidas de custos operacionais e impostos. Já o investimento I_D pode ser visto como o valor presente dos investimentos líquidos de benefícios fiscais. No caso da indústria de E&P de petróleo, V pode ser estimado também a partir do *mercado de reservas desenvolvidas* (ver Dias, 1996, para uma discussão detalhada desse mercado). Na linguagem de OR, V (ou P) é o ativo básico e I_D o preço de exercício da opção.

Existem pelo menos três alternativas para considerar tanto as incertezas técnicas como as de mercado na função VPL. Primeiro usando um *modelo paramétrico* tão simples quanto possível, que considere os fatores chaves para a valoração econômica. Essa parametrização pode vir de uma visão de negócios do

[50] Ver o relatório Credit Suisse First Boston (2004) que mostra a tendência recente de melhora das "National Oil Companies" em relação às "majors" e a contribuição diferenciada dos preços do petróleo para isso. Por ex., baseado em dados de 2003, a Petrobras foi considerada a companhia "top performer 2004" do setor de E&P, dentre todas as companhias integradas.

projeto ou usando como base a planilha de fluxo de caixa. Essa alternativa será detalhada nessa seção.

A segunda alternativa é simular explicitamente todo o fluxo de caixa, por ex., uma integral com receitas e custos escritos como funções de variáveis com incerteza[51]. Mas uma planilha de fluxo de caixa para avaliar um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo é em geral bastante complexa, com inúmeras variáveis, e várias regras e tipos de tributos – especialmente com a atual legislação de impostos e taxas no Brasil, demandando um grande tempo computacional em simulações de Monte Carlo. Além disso, pode ser muito difícil colocar na planilha relações funcionais para rever custos operacionais, curvas de produção, investimentos, etc., em aplicações como as de valor da informação, em que o VPL tem de ser avaliado para cada novo cenário revelado pelo investimento prévio em informação, que muda o volume e a qualidade das reservas. Na análise de sensibilidade do investimento versus o VPL, maior investimento geralmente significa maior quantidade de poços, o que implica em maior custo operacional, já que o custo de manutenção dos poços é um dos itens mais importantes. Mas também implica em maior receita atualizada, etc. Assim, complexas relações de dependência funcionais são necessárias para usar a planilha completa de fluxo de caixa em vários (mas não todos) problemas de OR.

Mas a alternativa de usar em problemas de OR a planilha de fluxo de caixa completa de forma recursiva como "calculadora de VPL", não deve ser descartada em ambientes mais profissionais, pois a questão do tempo computacional é cada vez menos restritiva com a evolução da informática. O problema mais difícil é a questão de relações de dependência entre as variáveis na planilha. Mas isso vem sendo trabalhado pelas companhias de petróleo, que cada vez mais fazem análises de risco em cima da planilha de fluxo de caixa descontado e fazem análises de sensibilidade mais amplas em problemas de valor da informação.

A terceira alternativa para a função VPL, especialmente em simulações de Monte Carlo para cálculo de valor da informação, é o uso de complexos modelos de fluxo de caixa e ferramentas de simulação de reservatórios em paralelo ("tandem"). Ou seja, toda a complexidade da segunda alternativa, mas com uma

[51] A alternativa de modelar todo o fluxo de caixa foi usada num projeto do Pravap-14 de opção de expansão da produção através de novos poços (ver item 2.4.3). Mas esse caso foi mais simples que o caso geral porque o fluxo de caixa foi estabelecido para o poço em vez do campo.

análise ainda mais detalhada da incerteza técnica e do estudo de investimento ótimo (especialmente o número de poços ótimo). Nesse caso, as incertezas técnicas são introduzidas a nível mais básico, no *simulador de reservatórios*, que gera uma distribuição de curvas de produção e seus valores associados para V e I_D (e logo para o VPL) na planilha de FCD. O problema adicional é que o simulador de reservatórios é chamado em cada iteração da simulação de Monte Carlo, demandando um tempo computacional ainda proibitivo. Um simulador de reservatórios resolve um *sistema* de equações diferenciais parciais (chamadas de *equações da difusividade*) e por isso é bem lento com a atual tecnologia. No futuro, essa pode ser a alternativa mais realista e recomendada.

Assim, aqui se optará pela primeira alternativa. Agora serão discutidas as alternativas existentes para a adequada parametrização do VPL em função das variáveis relevantes com incerteza de mercado (preços de petróleo é a principal variável) ou com incerteza técnica (qualidade e quantidade de reservas).

A parametrização da função VPL depende primeiro do regime fiscal onde o campo de petróleo está localizado. Os dois principais regimes fiscais na indústria de E&P de petróleo são o *regime de concessões* – usado em países como o Brasil, EUA, Inglaterra e outros, e o *regime de partilha da produção* – usado por ex. na África. Ver por ex. Johnston (1995) para uma discussão dos regimes fiscais em petróleo. Para concessões, é muito razoável assumir que o VPL é uma *função linear*[52] dos preços do petróleo, que será discutido a seguir. Para o regime de partilha da produção, isso não é razoável. A Figura 11 a seguir mostra um típico gráfico não-linear da função VPL(P) para o regime de partilha da produção (baseado em um caso real, mas com uma translação vertical).

[52] Esse é um fato estilizado conhecido por pessoas que trabalham com planilhas de FCD no regime de concessão, ao fazer a análise de sensibilidade VPL x P.

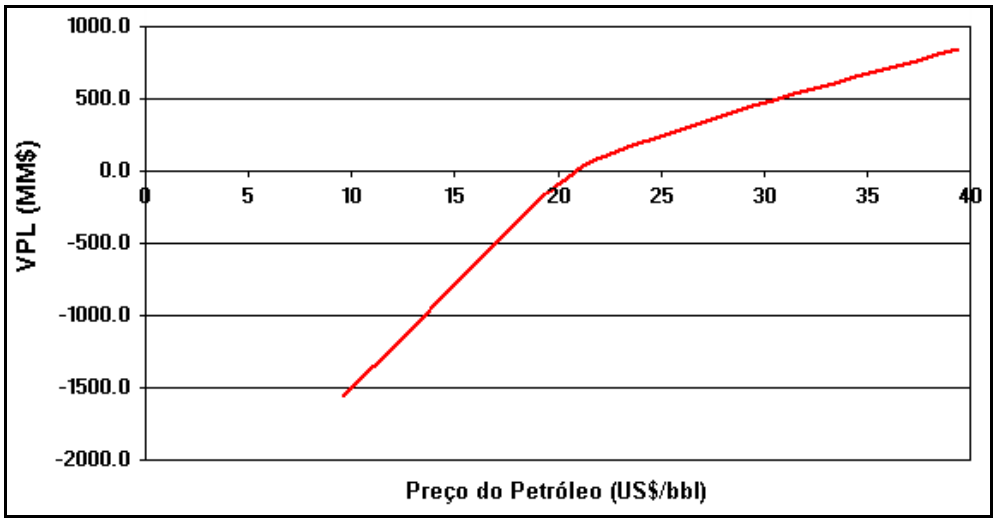

Figura 11 – VPL x P para Regime de Partilha de Produção

No modelo de concessão a função VPL é linear em P. No entanto, isso não considera a *opção de abandono* (só o custo de abandono) e outras *opções operacionais*, as quais introduziriam não-linearidades na função VPL. É oportuno apresentar um gráfico mostrando como se dá o efeito de não-linearidade na função VPL quando é considerada a opção de abandono[53]. O caso a seguir é baseado em Dixit & Pindyck (1994, p.188, eq.12), um caso simples por não existir custo de abandono. Apesar da simplicidade, o gráfico dá uma intuição qualitativa adequada do efeito da opção de abandono nessa função VPL, conforme mostra a Figura 12.

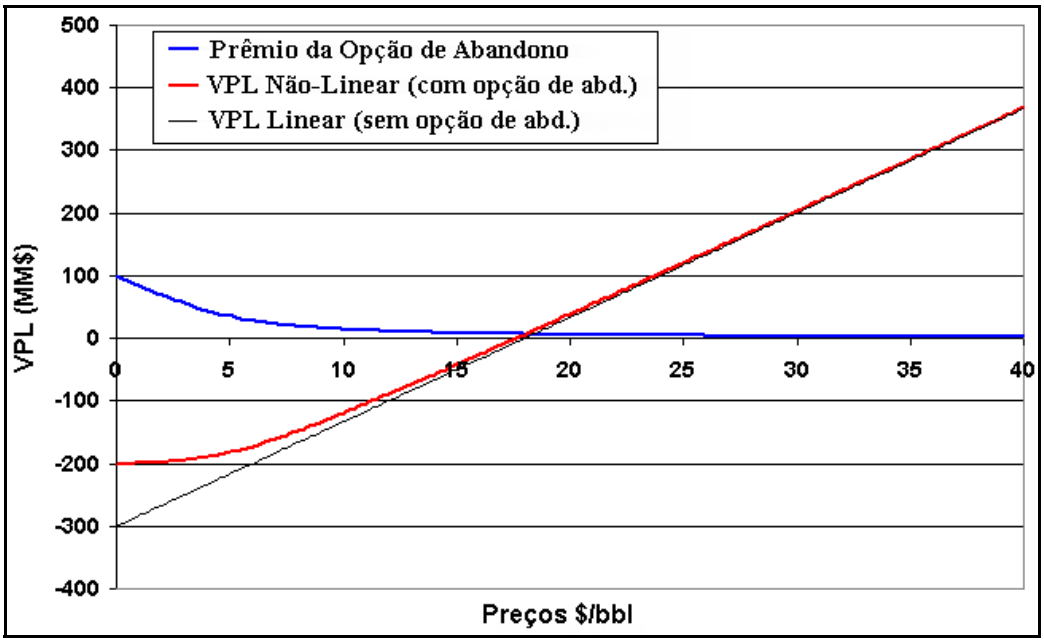

Figura 12 – VPL x P Não-Linear Devido à Opção de Abandono

[53] Para maiores detalhes desse e de outros tópicos sobre a função VPL, inclusive planilhas relacionadas, ver www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html.

Observa-se na Figura 12 que a opção de abandono só é relevante para o caso baixos preços, onde ela adiciona um prêmio relevante para a função VPL[54]. No entanto, quando os preços estão baixos a probabilidade de exercer a opção de investir nesse projeto é pequena. Quando a opção de investir no projeto está atrativa para ser exercida, a opção de abandono vale pouco. Isso dá uma intuição de um dos motivos que, conforme apontaram Bjerksund & Ekern (1990), se pode geralmente desprezar a opção de abandono *na presença* da opção de investir (opção de espera). O outro motivo é que os projetos de desenvolvimento da produção são de longa vida[55] e assim o abandono fica distante no tempo e seu valor é baixo devido ao efeito da taxa de desconto.

O modelo linear mais simples é considerar que o valor de mercado da reserva desenvolvida V é proporcional ao preço do petróleo P. Considere também que V é proporcional ao *volume da reserva* B (número de barris). Esse modelo será chamado de *modelo de negócios* ("business model") e é dado por:

$$\mathbf{V = q\,B\,P} \qquad \mathbf{(23)}$$

Onde q é chamado de *qualidade econômica da reserva*. Note que, da forma mais simples possível, a eq. (23) considera os três principais fatores no valor da reserva desenvolvida, i.é, o preço do petróleo (P), a quantidade (B) e a qualidade (q) da reserva.

A motivação para o nome "modelo de negócios" é proveniente das negociações no mercado de reservas[56], porque o produto q.P é o valor de um barril de reserva desenvolvida. A *regra de bolso* do "um-terço" é bem conhecida nos EUA, onde o valor médio pago por um barril de reserva desenvolvida é 33% do preço do petróleo na cabeça do poço, ver Gruy, Grab & Wood (1982)[57]. O valor de 1/3 pode ser apenas um caso particular nesse modelo, mas no caso de usar dados do mercado de reserva desenvolvida para *decisões de investimento*, o valor de q na eq. (23) tem de ser reduzido por um fator de desconto para considerar o

[54] Aqui se usa o termo VPL para o "payoff" resultante do exercício da OR de desenvolver o campo. Outros poderiam preferir que o termo VPL fosse usado apenas para o caso tradicional.

[55] Tipicamente o investimento em desenvolvimento é alto de forma que o projeto só é viável se no início a receita for *muito maior* que o custo operacional. Assim, durante vários anos a probabilidade de abandono é muito baixa. Com o declínio da produção, isso vai mudando.

[56] Ver Adelman, Koehn & Silva (1989, Table 2) ou Adelman & Watkins (1996) para dados e discussão sobre o valor de mercado de uma reserva desenvolvida e a discussão em Dias (1996).

[57] A regra do "um-terço" foi usada em exemplos em Paddock, Siegel and Smith (1988).

efeito do tempo de construção especialmente em reservas marítimas (*offshore*)[58]. Lembrar que V na eq. (23) está em valor presente na data de exercício da opção, i.é, na data de início de investimentos. Em geral se pode estimar o valor de q usando uma planilha de FCD (ver abaixo) ou usando dados de mercado de reserves se estiver disponível. O parâmetro q é chamado de qualidade econômica da reserva porque V aumenta monotonicamente com q e porque q depende da qualidade da rocha reservatório e da qualidade dos fluídos. É claro que o valor de q é menor que um, pois existem custos operacionais, taxas e tempo para trazer à superfície e vender um barril de reserva do reservatório. Para o caso geral (válido para VPL não-linear), a qualidade econômica da reserva é definida por:

$$\mathbf{q(P) = \frac{1}{B}\ \frac{\partial V(P)}{\partial P}} \qquad \mathbf{(24)}$$

Se V é linear em P, a qualidade econômica é independente de P e é constante. A qualidade q é um parâmetro agregado que reflete fatores técnicos (qualidade da rocha, dos fluídos, etc.) e fatores econômicos (custo operacional, taxas, taxa de desconto ajustada ao risco, etc.). Assim, em alguns problemas pode ser de interesse decompor essa qualidade q como o produto de dois fatores, um refletindo apenas a qualidade técnica da reserva q_T e outro refletindo apenas aspectos econômicos de mercado, a qualidade de mercado da reserva $q_M(t)$. Logo, a qualidade econômica da reserva q pode ser vista como:

$$\mathbf{q(P, t) = q_T\ q_M(P, t)} \qquad \mathbf{(25)}$$

Dessa forma, quando se estudar a incerteza na qualidade q pode-se considerar ambas as incertezas, técnica e de mercado. No caso de q_M pode ser conveniente estabelecer um valor em t = 0 igual a 1, i. é, $q_M(t = 0) = 1$ e assumir algum processo estocástico para esse fator. No entanto, é necessário modelar o processo estocástico de $q_M(t)$ de forma que o seu valor não suba muito – pois o produto q(t) precisa ser menor que 1, e nem desça para valores igual ou menor que zero. Uma maneira seria colocar uma *barreira refletora* em algum nível superior (por ex., q_M seria refletido para baixo toda vez que alcançasse o valor de 1,5) e uma *barreira absorvente*[59] no valor igual a zero.

---

[58] Tipicamente leva três anos entre o início de investimento e o início da produção. Dixit & Pindyck (1994, cap.12) usou a taxa δ para atualizar o valor da reserva para a data de exercício.

[59] Para discussão de barreiras refletoras e absorventes, ver Dixit (1993a).

A alternativa linear para o modelo de negócios é o chamado *modelo do fluxo de caixa rígido*, que é apresentado na equação abaixo.

$$\mathbf{V = q' B P - C} \qquad \mathbf{(26)}$$

Nessa equação, B representa o volume de reserva (como antes), q' é a qualidade econômica da reserva para esse modelo, e C é interpretado como o custo operacional em valor presente. O nome modelo do fluxo de caixa rígido é porque ele parece ser mais consistente com o FCD tradicional.

Em geral, C é função de B. Uma variante do modelo da eq. (26) é considerar C como uma função linear[60] de B:

$$\mathbf{C = c_1 B + c_2} \qquad \mathbf{(27)}$$

Onde c_1 pode ser interpretado como um custo operacional variável (por barril) atualizado[61] e c_2 um custo operacional fixo atualizado.

Combinando a eq. (1) com as eqs. (23) e (26) se obtém os dois modelos lineares para o VPL(P), que são mostrados na Figura 13.

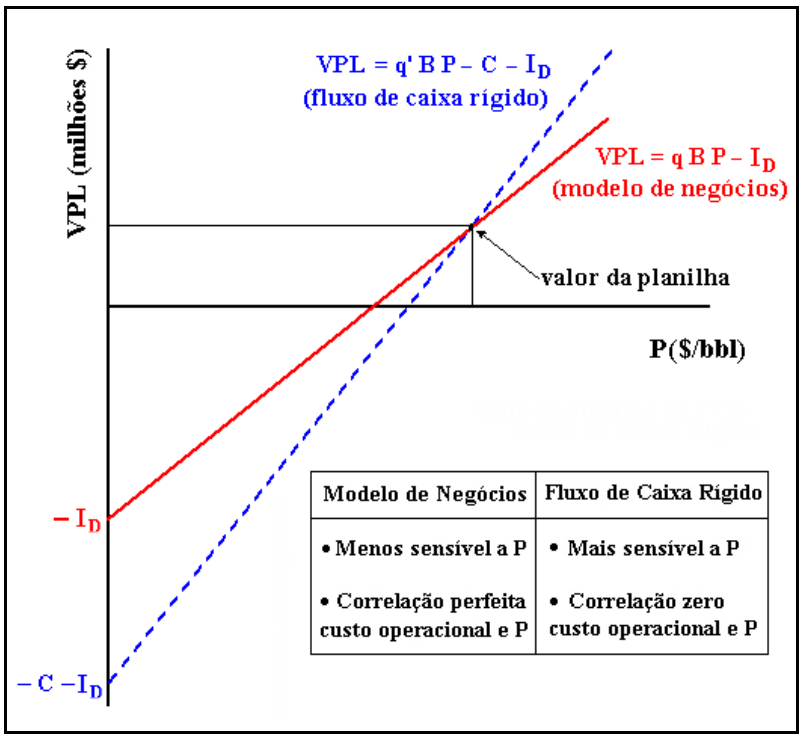

Figura 13 – Modelos Lineares para a Função VPL(P)

[60] Em algumas indústrias se poderia usar função quadrática de custos, por ex., o aumento da produção se dá com horas extras ou com turno noturno a um custo unitário maior. Isso não ocorre com produção de petróleo (os poços operam 24 horas/dia, se parar muitas vezes tem custo de reabertura) e o custo de pessoal é *custo fixo*. Custos variáveis aqui são principalmente os custos com produtos químicos e custos de transporte, que são exatamente proporcionais à produção.

[61] Na indústria é mais comum o uso de um volume de reserva atualizado B' < B. Nesse caso se teria c_1' que seria um custo operacional variável médio. Mas isso daria no mesmo: c_1' B' = c_1 B.

O gráfico da Figura 13 é construído a partir do valor da planilha de FCD, em que se plota o VPL do caso-base para o preço (médio) do petróleo usado[62]. Esse ponto é comum aos dois modelos. O outro ponto para definir a reta é plotado para P = 0, em cada modelo. No caso do modelo de negócios VPL(P = 0) = – I_D (lembrar que I_D é o valor presente dos investimentos líquidos de benefícios fiscais) e para o modelo de fluxo de caixa rígido é VPL(P = 0) = – C – I_D.

Na Figura 13 se vê claramente (pela inclinação das retas) que o modelo de negócios é mais conservador em termos de variação do VPL com os preços do petróleo do que o de fluxo de caixa rígido. Será visto que isso também resultará em valores mais conservadores para o valor da opção real e menor valor de gatilho para o modelo de negócios, comparado ao outro modelo.

Pode-se raciocinar que o modelo do fluxo de caixa rígido assume que não existe correlação entre o preço do petróleo e os custos operacionais, o que não parece ser realista[63]. Por outro lado, o modelo de negócios assume o oposto, que o custo operacional tem correlação perfeita e proporcional ao preço do petróleo (e logo q reflete também o efeito do custo operacional), o que também não parece ser realista. A verdade deve estar entre os dois modelos, o que sugere que em problemas práticos se calcule o valor da OR pelos dois modelos a fim de ter uma idéia do *intervalo* de variação do valor da OR e do gatilho.

Já o investimento para desenvolver o campo I_D, é uma função do tamanho do campo (ou melhor, do volume de reservas B). Quanto maior o campo, maior o investimento (ótimo) necessário, pois reservas maiores requerem uma maior quantidade de poços, maior capacidade de processo da planta, maior diâmetro dos dutos, etc. Já a qualidade q tem efeitos contrários sobre o investimento ótimo requerido para desenvolver a reserva. Por um lado, a produção por poço tende a ser maior, exigindo maior capacidade de processo e maior diâmetro de dutos, aumentando o investimento. Por outro lado, a maior produtividade por poço tende a reduzir a quantidade ótima de poços para explotar a reserva, reduzindo o

---

[62] Quando na planilha se usa uma estrutura a termo em vez de um único preço de petróleo, o preço usado na Figura 13 é o preço médio ponderado pela *produção* e pelo *efeito de desconto*: os preços nos primeiros anos de produção são mais relevantes tanto porque a produção é muito maior no início do que no final, como também pelo efeito de desconto mais severo em fluxos longínquos.

[63] Por ex., a média dos preços do petróleo Brent (IPE, 1º mês) em 2002 foi de 25,01 $/bbl e em 2003 foi de 28,47 $/bbl, um aumento de 13,8%. Os custos operacionais para as empresas integradas de petróleo subiram 15% no mesmo período e os custos de investimentos mais de 40%, conforme relatório do Credit Suisse First Boston (2004, p. 3).

investimento. Assim, aqui será considerado que o investimento ótimo para desenvolver a reserva será função de B, mas não de q.

Análises do autor (regressões I_D x B) com o portfólio de projetos da Petrobras mostram que é bastante razoável considerar a função $I_D(B)$ como *linear em B*, desde que condicional a um intervalo de aplicação. Essa equação é dada por:

$$\mathbf{I_D(B) = c_f + c_v\ B} \qquad \mathbf{(28)}$$

Onde c_f é um parâmetro de custo fixo e c_v é um parâmetro de custo variável (com B). No caso marítimo, deve-se estimar esses parâmetros da eq. (28) por intervalo de lâmina d'água (LDA)[64], por meio de uma regressão linear.

Além disso, o investimento I_D depende de variáveis (incertas) de mercado (custos de estaleiros, taxas diárias de sondas, etc.). Assim, em alguns modelos, pode ser de interesse que I_D também evolua como um processo estocástico, em geral correlacionado (positivamente) com o preço do petróleo. Seja $\upsilon(t)$ um choque estocástico de *mercado* que altera o valor de I_D ao longo do tempo, i. é, seja $\upsilon(t = 0) = 1$ e $\upsilon(t > 0)$ incerto e seguindo um processo estocástico qualquer. Dessa forma, a equação geral para $I_D(B, t)$ é dada por:

$$\mathbf{I_D(B, t) = \upsilon(t)\ [c_f + c_v\ B]} \qquad \mathbf{(29)}$$

Nos modelos usados nessa tese, o custo de abandono e recuperação ambiental é considerado um investimento e seu valor presente está incluído no valor de I_D. Para modelos de opção de abandono seria necessário separá-los.

As seguintes proposições sobre o modelo de negócios e sobre o modelo do fluxo de caixa rígido são demonstradas no apêndice (cap. 9).

Proposição 1: Se o preço do petróleo segue um movimento geométrico Browniano, com parâmetros α, δ, e σ, e se V(P) é definido pela eq. (23) (modelo de negócios), então V também segue um movimento geométrico Browniano e com os mesmo com parâmetros α, δ, e σ.

Proposição 2: Considere o problema clássico de escolha do momento ótimo de investimento (opção real de espera) para o desenvolvimento de um campo de petróleo com tempo de expiração finito. Se o preço do petróleo segue um movimento geométrico Browniano, então a equação diferencial parcial estocástica que rege o valor da opção real F(P, t) é exatamente a mesma tanto no

[64] Por ex., LDA < 200 m. (águas rasas); 200 < LDA < 500 (águas intermediárias); etc.

modelo de negócios como no modelo do fluxo de caixa rígido e é dada pela eq (29) abaixo. A diferença se dá apenas nas condições de contorno (cc.), as quais são mostradas na Tabela 4.

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 P^2 F_{PP} + (r-\delta) P F_P - r F + F_t = 0 \qquad (30)$$

Onde os subscritos denotam derivadas parciais. Essa equação é igual à famosa equação de Black & Scholes & Merton (versão com dividendos contínuos) se substituir o valor da ação por P.

Tabela 4 – Condições de Contorno Para os Modelos Lineares de VPL(P)

Tipo de Condição de Contorno	Modelo de Negócios	Modelo de Fluxo de Caixa Rígido	Equações
Trivial, P = 0	F(0, t) = 0	F(0, t) = 0	(31a) (31b)
Expiração: t = T	F(P, T) = max (q B P – I_D, 0)	F(P, T) = max (q' B P – C – I_D, 0)	(32a) (32b)
Continuidade ("value matching") em P = P*	F(P*, t) = q B P* – I_D	F(P*, t) = q' B P* – C – I_D	(33a) (33b)
Contato suave ("smooth pasting") em P = P*	F_P(P*, t) = q B	F_P(P*, t) = q' B	(34a) (34b)

Onde P* é o gatilho a partir do qual é ótimo o imediato investimento. A outra variável de estado é o tempo $t \in [0, T]$, onde T é o tempo legal de expiração do direito de investir no desenvolvimento do campo. A inserção das equações das cc. dentro da Tabela 4 facilita a comparação das mesmas. A solução da eq. (30) sujeita às cc. das equações da Tabela 4, pode ser obtida através do método das diferenças finitas, ou através de aproximações analíticas, ou outras (inclusive por simulação de Monte Carlo para opções americanas).

Na prática, a recomendação da tese é que a companhia de petróleo use os dois modelos. A idéia é que os modelos de negócios e do fluxo de caixa rígido estabelecem, respectivamente, os limites inferiores e superiores de opções reais, tanto para o valor da OR quanto para o gatilho de investimento ótimo.

Agora será mostrado um exemplo de OR que foi resolvido com os dois modelos para efeito de comparação. Os resultados estão mostrados na Tabela 5 abaixo[65]. Os parâmetros usados foram r = δ = 6% p.a., σ = 20% p.a., T = 2 anos, C = 400 MM$ e os demais são mostradas na Tabela 5.

[65] As planilhas disponíveis em www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html resolvem esse exemplo. Lá também se discute outros detalhes desses modelos lineares.

Tabela 5 – Exemplo de Opções Reais Comparando os Modelos de VPL(P)

	Modelo de Negócios	Modelo de Fluxo de Caixa Rígido
V (MM$)	640	640
I_D (MM$)	500	500
VPL = V – I_D (MM$)	140	140
Opção Real F (MM$)	147,53	178,95
Gatilho P* ($/bbl)	21,88	24,24
Probabilidade de Exercício (%)	84,3	71,2
Tempo Esperado de Exercício (condicional a haver) (anos)	0,61	1,06

A Tabela 5 mostra que foram obtidos valores mais conservadores para o valor da opção real e menor valor de gatilho para o modelo de negócios, quando comparado com o modelo de fluxo de caixa rígido. Esses são resultados típicos desses modelos e dão os dois limites mencionados. O modelo de negócios, por ser mais simples e com menos parâmetros, será usado nas aplicações da tese.

2.4. Alguns Modelos de Opções Reais Tradicionais em Petróleo

2.4.1. O Modelo Clássico de Paddock, Siegel & Smith

No começo dos anos 80, Paddock, Siegel & Smith começaram uma pesquisa no Laboratório de Energia do MIT usando a teoria das opções para estudar o valor de blocos marítimos nos leilões de direitos exploratórios nos EUA, assim como o momento ótimo de investimento. Eles escreveram uma série de artigos, dois deles publicados: Siegel, Smith & Paddock (1987) e Paddock, Siegel & Smith (1988). O modelo de Paddock, Siegel & Smith (PSS) é o mais popular de OR para aplicações em E&P de petróleo, merecendo destaque no livro de Dixit & Pindyck (1994, cap.12), que descrevem esse modelo de uma maneira mais compacta e didática. Esse modelo clássico é útil tanto para o propósito de aprendizagem de conceitos de OR, como para uma primeira aproximação na análise de investimento para o desenvolvimento de reservas de petróleo, mesmo considerando que na vida real são necessários modelos que se ajustam melhor às características do mundo real. Esse modelo tem vantagens práticas – quando

comparado com outros modelos, devido a sua simplicidade e aos poucos parâmetros de entrada que necessitam serem estimados. Um atrativo de PSS é a simples analogia entre as opções financeiras de Black-Scholes-Merton e o valor da opção real de uma reserva não-desenvolvida de petróleo. Essa analogia é mostrada na Tabela 6.

Tabela 6 – Analogia Opção Financeira com a Opção Real de Paddock-Siegel-Smith

Opção Financeira (Black-Scholes-Merton)	Opção Real (Paddock-Siegel-Smith)
Valor da opção financeira	Valor da opção real de uma reserva não-desenvolvida (F)
Preço corrente da ação	Valor corrente da reserva desenvolvida (V)
Preço de exercício da opção	Custo de investimento para desenvolver a reserva (I_D)
Taxa de distribuição de dividendos da ação	Fluxo de caixa líquido de depleção como proporção de V (δ)
Taxa de juros livre de risco	Taxa de juros livre de risco (r)
Volatilidade da ação	Volatilidade do valor da reserva desenvolvida (σ)
Tempo de expiração do contrato de opção	Tempo de expiração dos direitos de investimento (τ)

A analogia acima é também útil para outras aplicações de OR. Em vez do valor da reserva desenvolvida, é possível considerar qualquer valor V de projeto operando (ou pronto para operar) como ativo básico para esse modelo de opções. Por exemplo, F poderia ser uma terra urbana não desenvolvida, V o valor de mercado de um hotel ou edifício, e I_D o investimento para construir o hotel ou edifício. Na falta de um valor de mercado explícito para V, é possível computar V como o valor presente da receita líquida de custos operacionais e impostos. Conforme a eq. (1) o tradicional valor presente líquido é dado por $VPL = V - I_D$, onde I_D é o valor presente do fluxo de investimentos para desenvolvimento líquidos de benefícios fiscais. Em PSS, o investimento I_D é análogo ao preço de exercício da opção financeira, pois é o compromisso que a companhia de petróleo assume quando exerce a opção real de desenvolver o campo.

O tempo para a expiração (τ) dessa OR é o tempo até a data legal que os direitos de investir expiram. Nessa data a companhia de petróleo tem uma oportunidade do tipo "agora ou nunca": ou a firma se compromete com um plano de investimento imediato ou devolve os direitos de concessão para a agência do governo que regula o setor petróleo. Esse tempo varia de 3 a 10 anos na grande

maioria dos países (no Brasil até 9 anos). Em outras aplicações de OR pode não existir data de expiração, i.é, há casos de *opções perpétuas* (o que não ocorre com as opções financeiras), por ex., no caso de desenvolvimento de terrenos urbanos (e de re-desenvolvimento). Em outros, como patentes e direitos autorais, podem levar décadas para expirar a opção real de explotação exclusiva desses direitos.

Volatilidade (σ) em PSS é o desvio-padrão anual de dV/V. Como foi visto na Proposição 1, no caso de V ser proporcional a P, as volatilidades de P e V são iguais e assim é mais prático estimar a volatilidade de V usando uma série temporal de preços do petróleo. Dixit & Pindyck (1994, cap. 12) recomenda σ entre 15% e 25% por ano. Alguns autores (ex.: Baker, Mayfield & Parsons, 1998, p.119) usam valores maiores para σ, em torno de 30% p.a. Estimativas recentes do autor usando dados de janeiro de 1985 a outubro de 2004, para os petróleos Brent (IPE, bolsa de Londres) e WTI (NYMEX, bolsa de New York), indicavam volatilidades em torno de 30% para preços spot e 15% para preços futuros longos.

Outra possibilidade para estimar a volatilidade de V, e considerando outras variáveis com incerteza de mercado além do preço do petróleo (por ex., a taxa diária de sondas e outros custos), é a simulação de Monte Carlo dos diversos processos estocásticos dessas variáveis que evoluem no mercado e que afetam V. Essa metodologia é recomendada por Copeland & Antikarov (2001, cap. 9), que dessa forma obtém uma variância combinada em t = 1 ano e, com a ajuda da equação da variância do MGB (a eq. (7) mas para V em vez de P), se pode estimar a volatilidade de V. Nessa abordagem, Copeland & Antikarov (2001, ver também cap.8) recorrem a um teorema de Samuelson (1965b) que tem as seguintes implicações: mesmo que existam várias variáveis estocásticas seguindo diferentes processos estocásticos tais como reversão à média e outros e mesmo que esses processos sejam correlacionados, o retorno agregado da firma (ou agregado do projeto V) é aproximadamente um MGB. Isso implica que o retorno da firma segue um MGB mesmo que haja variações cíclicas em vários componentes desse retorno. Copeland & Antikarov usam esse teorema de Samuelson para defender o uso do MGB a nível agregado de projeto V em aplicações gerais de OR. As vantagens são: (a) o MGB é muito mais simples de trabalhar em OR do que os outros processos; e (b) nessa abordagem são

consideradas várias fontes de incerteza de mercado em V e não apenas a (ou as poucas) mais importante(s) como em outros modelos de OR.

Na analogia da *taxa de dividendos* ("dividend yield")[66], a taxa de distribuição de fluxo de caixa δ é o fluxo de caixa operacional líquido (anual) como uma percentagem de V. Para reservas de petróleo, existe o fenômeno da *depleção*, já que existe uma quantidade finita de petróleo no reservatório e sua pressão vai declinando com o passar do tempo produtivo. Isso gera um declínio na produção do campo ao longo da vida da reserva, que pode ser capturada pela *taxa de declínio* ω. A equação para estimar δ incluindo a taxa de declínio é apresentada no artigo original de Paddock, Siegel & Smith (1988) e também em Dixit & Pindyck (1994)[67], que assume um fluxo de caixa muito simplificado. Mas aqui serão apresentados a seguir dois caminhos mais práticos para estimar δ.

Para o modelo que assume que V é proporcional a P, conforme a Proposição 1, é possível interpretar δ como a *taxa de conveniência* (líquida) do preço do petróleo e assim estimar δ usando dados do mercado futuro, aplicando a eq. (10).

O segundo caminho é uma regra prática usando uma perspectiva de longo prazo que é útil para OR. Qual é um bom valor prático para a taxa de conveniência δ? Pickles & Smith (1993) sugerem a taxa de juros livre de risco, i.é, fazer δ = r. Eles escreveram (p.20-21): "*We suggest that option valuations use, initially, the 'normal' value of net convenience yield, which seems to equal approximately the risk-free nominal interest rate*"[68].

A EDP do modelo de PSS para o valor da OR (ou valor da reserva não-desenvolvida) é idêntica à famosa EDP de Black-Scholes-Merton com dividendos contínuos, que por sua vez é igual à eq. (30) se substituir P por V. Ou seja, a EDP

---

[66] Os fluxos de caixa do projeto são como "dividendos" que são ganhos apenas se a OR é exercida e o ativo básico inicia operações. Logo, a taxa de dividendos é um *custo de oportunidade da espera* que o investidor incorre se ele tem a opção mas não o ativo básico. Em contraste, a taxa de juros r *remunera a política de espera* (imagine que o investidor aplica I_D no banco). Logo, r e δ tem efeitos opostos em ambos no valor da opção e nos gatilhos de exercício ótimo, e assim é freqüente se ver a diferença r – δ em equações de derivativos, por ex., na EDP da eq. (30).

[67] Uma prova detalhada das equações de Paddock, Siegel & Smith (1988) está disponível em www.puc-rio.br/marco.ind/petmode1.html .

[68] Na valoração livre de risco, muito usada para precificar opções, a tendência neutra ao risco é r – δ (eq. 8). Usando a sugestão de Pickles & Smith (r = δ) se obtém um processo neutro ao risco *sem tendência* (ou igual a zero), o que soa razoável para um equilíbrio de longo-prazo neutro ao risco. Schwartz (1997, p.969) usa a taxa de juros r = 6% p.a. e uma taxa de conveniência para o *cobre* de 12%. Entretanto, ele sugere (nota 34) uma taxa de conveniência de *longo prazo* de 6%, i.é, igual ao valor da taxa de juros, assumindo assim δ = r, como sugerido por Pickles & Smith!

da opção do tipo *americana* é igual a da opção do tipo *européia*. O que muda são apenas as condições de contorno (cc), pois as opções americanas têm duas cc *adicionais* para levar em conta a possibilidade de exercício antecipado (antes da expiração)[69]. A dedução da EDP do valor de uma OR é oportuna para resumir o método dos *ativos contingentes* ("contingent claims").

O método dos ativos contingentes se baseia no conceito de *arbitragem*[70]. Um dos principais caminhos (ver a excelente exposição de Dixit & Pindyck, 1994) é construir um *portfólio livre de risco* formado pela compra (venda) da opção real F e pela venda (compra) de n unidades do projeto V. A idéia não é comprar ou vender fisicamente esses ativos e sim relacionar matematicamente essas variáveis (F e V) sabendo que o retorno exigido pelo investidor para um portfólio livre de risco é a taxa livre de risco r (independentemente de preferências do investidor). Com isso se evita o problema complexo de estimar a taxa ajustada ao risco de uma opção. Assim, se escolhe o valor de n de tal forma que o retorno desse portfólio seja livre de risco. Esse valor de n é conhecido por "*delta hedge*" e em geral basta fazer $n = F_V$ (derivada parcial de F em relação a V) para eliminar os termos com risco na equação do retorno do portfólio. A outra ferramenta básica na derivação da EDP é o *Lema de Itô*[71], ferramenta de cálculo estocástico que permite expandir o valor da opção em função das *variáveis de estado* (aqui V e t).

Proposição 3: A EDP que descreve o valor da opção real de maturidade finita F(V, t) de investir no ativo básico V(t) que segue um MGB com parâmetros $\alpha = \mu - \delta$ e σ, sendo a taxa livre de risco constante e igual a r, é dada por:

$$\mathbf{\tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,V^2\,F_{VV} + (r-\delta)\,V\,F_V - r\,F + F_t = 0} \qquad \mathbf{(35)}$$

Prova: A prova ilustrará os passos típicos para a obtenção da EDP de OR pelo método dos *ativos contingentes*. Essa metodologia é *geral*, mas os passos serão ilustrados para mostrar o caso da opção F(V, t) de PSS:

a) Escreva a equação do portfólio (Φ) livre de risco: $\Phi = F - n\,V$;

b) Escreva o retorno de Φ num tempo dt: $r\,\Phi\,dt = r\,(F - n\,V)\,dt$;

---

[69] Opções americanas podem ser exercidas em qualquer data até (inclusive) a expiração, enquanto que as opções européias só podem ser exercidas na expiração.

[70] Uma oportunidade de arbitragem é um plano de consumo que é sempre não-negativo e estritamente positivo em pelo menos um evento, e tem custo inicial não-positivo (Huang & Litzemberger, 1988, p.226). Para uma discussão detalhada de arbitragem, ver Varian (1987).

[71] Ver Dixit & Pindyck (1994, cap. 3). O Lema de Itô está para o cálculo estocástico assim como a expansão de Taylor está para o cálculo ordinário.

c) Escreva o retorno de Φ também como a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes desse portfólio. Para isso, lembrar que o retorno total é a soma da taxa de ganho de capital (α) com a taxa de dividendos (δ). Note também que a opção pode variar (ganho de capital dF) mas não distribui dividendo. Assim o retorno do portfólio também é: $dF - n (dV + \delta V dt)$;

d) Iguale as duas equações do retorno do portfólio (ver itens b e c) e obtenha: $r (F - n V) dt = dF - n (dV + \delta V dt)$;

e) Para obter dF usa-se o Lema de Itô: $dF = F_V dV + ½ F_{VV} (dV)^2 + F_t dt$;

f) Para obter $(dV)^2$ eleva-se ao quadrado a equação diferencial que descreve o processo estocástico da variável básica (aqui $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$), obtendo $(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$ (os termos em dt de ordem > 1 são desprezados);

g) Substitua esse resultado na equação de dF (item e), e obtenha $dF = F_v dV + ½ \sigma^2 V^2 F_{vv} dt + F_t dt$;

h) Substitua esse resultado na equação do retorno (item d) e obtenha a equação $r (F - n V) dt = (F_v - n) dV + ½ \sigma^2 V^2 F_{vv} dt + F_t dt - n \delta V dt$;

i) Para desaparecer o termo estocástico desse retorno (portfólio sem risco) é necessário eliminar o termo dV (pois função de dz). Para isso basta fazer $n = F_v$. Substituindo n, se chega a EDP da OR, eq. (35). □

Resolvendo essa EDP numericamente se obtém dois resultados interligados, o *valor da opção real* F(V, t) e a regra ótima de decisão dada pelo gatilho V*(t). Lembrar os exemplos simples do início desse capítulo para a intuição desses conceitos. Aqui, graças à analogia feita, qualquer bom software que resolva o problema de uma opção americana de compra (com dividendos contínuos) também resolve o modelo de OR de PSS[72].

A regra de decisão dada pelo valor *crítico* ou *gatilho* V*(t), determina o valor mínimo em que a OR está suficientemente atrativa ("deep-in-the-money") para ser exercida. Ou seja, deve-se investir otimamente somente se $V(t) \geq V^*(t)$. Para modelos em que V é proporcional a P, é mais fácil raciocinar com P*(t), o preço do petróleo que faz um específico campo de petróleo não-desenvolvido ficar "deep-in-the-money". Nesse caso, a regra é investir quando $P \geq P^*$.

[72] Por ex., a planilha "Timing", disponível em www.puc-rio.br/marco.ind/timing.html.

A Figura 14 apresenta uma solução típica para um campo não-desenvolvido com 100 milhões de barris de reserva (e q = 0,187, logo V = 18,7 x P). As curvas representam valores de OR para os casos de 5 anos para a expiração dos direitos (τ = 5 anos), um ano (τ = 1 ano) e na expiração (τ = 0). Na última situação, conhecido com o caso "agora ou nunca", a regra do VPL é válida de forma que o valor da OR é o máximo entre o VPL e zero.

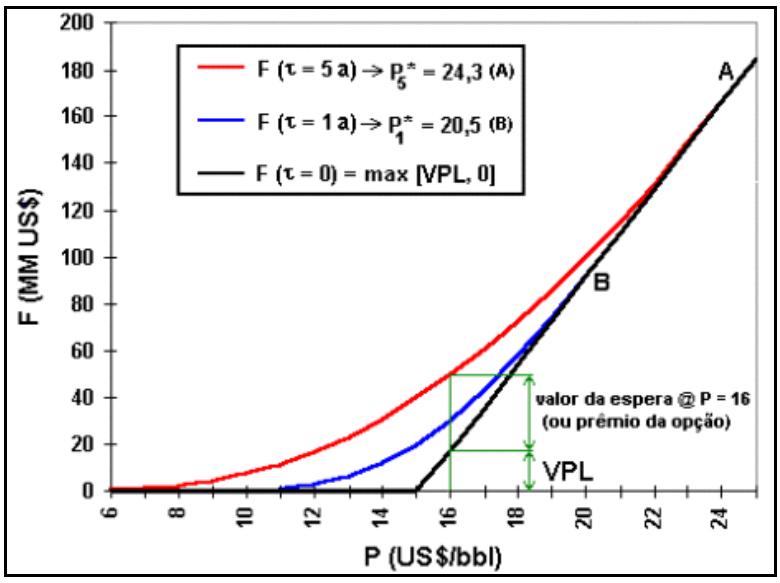

Figura 14 – Valor da Opção Real em Função do Preço P

A Figura 14 mostra que para P = 15 $/bbl o VPL é zero. Assim, 15 $/bbl é o preço de nivelamento ("*break-even* price" ou CUP, custo unitário de produção) para esse projeto. A Figura 14 também mostra que para 16 $/bbl o VPL é positivo, mas o valor líquido da espera, chamado de *prêmio da opção* (a diferença F – VPL), para τ = 5 anos não é zero – ele é até maior que o VPL. Logo, a $16/bbl a política ótima nesse exemplo é "esperar e ver". O prêmio da opção é *zero* apenas no ponto de tangência entre a curva de opções (azul e vermelha) e a linha do VPL (preta), o qual ocorre somente nos pontos de gatilho A (P*(τ = 5) = 24,3 $/bbl) e B (P*(τ = 1) = 20,5 $/bbl). O contato suave das curvas da OR nos pontos A e B ilustra a condição de contorno também chamada de "contato suave" (ver eq. 34a e eq. 34b).

A Figura 15 apresenta a curva de gatilhos para esse mesmo exemplo, desde o instante inicial (faltando τ = 5 anos para a expiração) até a expiração. Note que os pontos A e B correspondem aos casos mostrados antes na Figura 14.

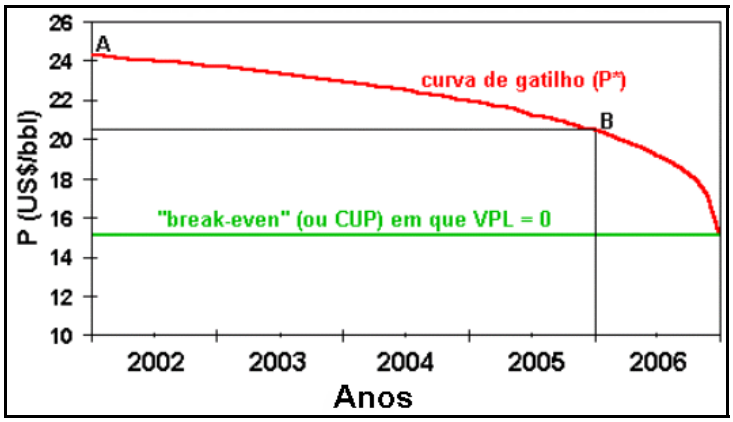

Figura 15 – Regra de Decisão de OR: Curva de Gatilhos

Note a diferença de regras de decisão da teoria de OR (curva vermelha) e do FCD (linha verde): no primeiro caso o projeto precisa ser suficientemente robusto para se investir imediatamente (em cima ou acima da curva de gatilhos), enquanto que para o FCD basta o preço estar acima do CUP. Somente na expiração (caso "agora ou nunca") é que a regra das OR colapsa para a regra do FCD, i. é, investir se VPL ≥ 0 ou, de forma equivalente, se P ≥ CUP (aqui o CUP = 15 $/bbl).

2.4.2. Modelo com Opção de Escala de Investimento

Nessa e nas próximas seções, serão apresentados alguns modelos desenhados para importantes aplicações em desenvolvimento da produção de petróleo. As idéias dessa e da próxima seção foram mais tarde desenvolvidas e detalhadas em projetos do Pravap-14 entre a Petrobras e a PUC-Rio. O modelo apresentado nessa seção foi detalhado em Dias & Rocha & Teixeira (2003).

Considere um campo de petróleo delimitado mas ainda não-desenvolvido, sendo que o preço do petróleo é a fonte de incerteza relevante. Em adição ao problema de momento ótimo de investimento (investir já ou "esperar e ver"), se pode também escolher uma de um conjunto de alternativas mutuamente exclusivas de escala para desenvolver o campo. Assuma que o volume de reservas B é aproximadamente o mesmo para todas as alternativas de escala.

Será usada a função VPL(P) dada pelo simples "modelo de negócios" (eq. 23, conjugada com a eq. 1) para desenvolver essa aplicação, mas pode-se trabalhar perfeitamente com o modelo de fluxo de caixa rígido (eq. 26) de maneira similar. Nessa aplicação, o conceito de *qualidade econômica da reserva* (q) joga um papel essencial. Essa qualidade depende de vários fatores técnicos e econômicos tais

como a qualidade do fluido, a qualidade do reservatório, o custo operacional e taxas (regime fiscal), a taxa de disconto, etc. Mas esse fator também depende da intensidade de capital (investimento) aplicada para desenvolver essa reserva, i. é, o número de poços usados, a capacidade da planta de processamento, o diâmetro dos dutos de escoamento da produção, etc. Uma maior quantidade de poços significa produção mais rápida (e logo maior valor presente para a receita) e um maior valor para q do que se for usado uma menor quantidade de poços de desenvolvimento. Entretanto, a alternativa com mais poços tem um maior custo de investimento I_D, e assim existe um "trade-off" (troca parcial) entre q and I_D quando se escolhe a quantidade de poços para desenvolver a reserva. A solução desse dilema, a escolha da escala ótima sob incerteza de mercado, é o objeto dessa seção. Se a OR de desenvolver o campo de petróleo com a alternativa j for exercida, se obtém o seguinte VPL_j:

$$\mathbf{VPL_j = V_j - I_{Dj} = (q_j \,.\, P \,.\, B) - I_{Dj}} \qquad \mathbf{(36)}$$

O conceito de qualidade q facilita a análise de alternativas mutuamente exclusivas para desenvolver o campo sob incerteza, porque o "trade-off" de V com o investimento I_D é capturado por um simples parâmetro q[73]. A seleção da melhor alternativa para desenvolver um campo é exemplificada considerando três alternativas $A_1(I_{D1}, q_1)$, $A_2(I_{D2}, q_2)$ e $A_3(D_3, q_3)$, onde $I_{D1} < I_{D2} < I_{D3}$ e $q_1 < q_2 < q_3$. Qual a alternativa com maior VPL corrente? A resposta depende do preço do petróleo. A Figura 16 apresenta os VPLs das três alternativas como função dos preços do petróleo, conforme a eq. (36). Em OR, esse é o gráfico da situação "agora ou nunca" (ou seja, na data de expiração da opção).

[73] No modelo de fluxo de caixa rígido, se captura com duas variáveis, q' e C.

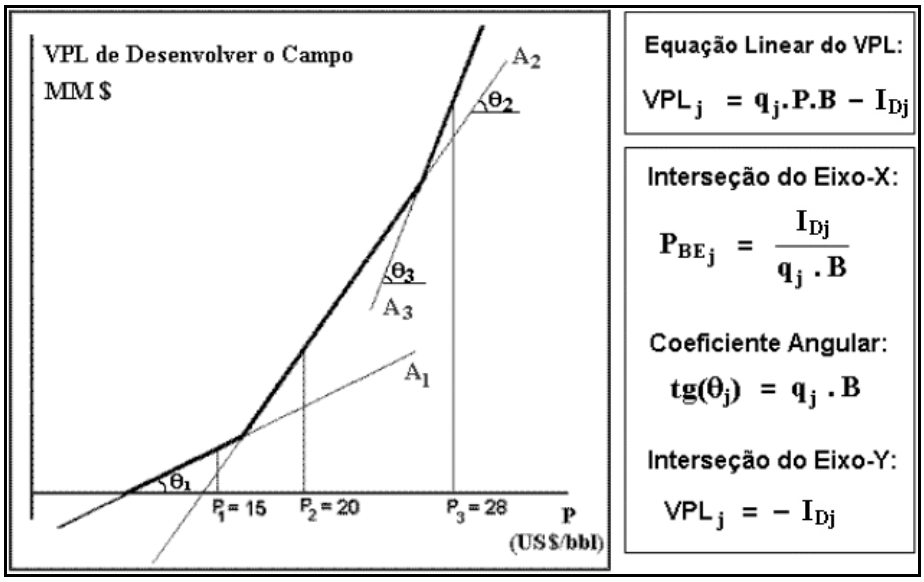

Figura 16 – VPL(P) para as Três Alternativas de Desenvolvimento

Cada alternativa tem um coeficiente angular específico, assim como uma interseção específica no eixo dos X. Esse último ocorre para VPL = 0, de forma que dá o CUP (preço de "break-even" em US$/bbl) para cada alternativa. Já a interseção com o eixo dos Y dá o custo de desenvolvimento I_{Dj} da alternativa j. Já o coeficiente angular (tangente de θ_j) é relacionado à qualidade q_j. Esses parâmetros são fáceis de obter com uma planilha de FCD.

A Figura 16 também mostra que, para baixos preços do petróleo, por ex., para P_1 = 15 $/bbl, a alternativa 1 tem o maior VPL, enquanto que para um preço intermediário P_2 a melhor é a alternativa 2. Já a alternativa 3 é mais atrativa para o caso de preços mais elevados do petróleo, com em P_3. Assim, nessa situação "agora-ou-nunca" a melhor alternativa de escala depende do preço do petróleo (ou da expectativa corrente de longo prazo para P, ver item sobre processos estocásticos). Entretanto, os preços do petróleo são incertos e em geral a decisão não é do tipo "agora-ou-nunca", a companhia de petróleo tem algum tempo antes da expiração dos seus direitos de investir em desenvolvimento. Qual a melhor decisão nesse caso? Será melhor investir numa alternativa que já esteja "deep-in-the-money" ou é melhor esperar para ver a possibilidade de investir numa alternativa mais atrativa numa data futura?

A Figura 17 mostra o mapeamento dos gatilhos das alternativas ao longo do tempo, mostrando as regiões de exercício ótimo para cada alternativa (brancas) e as regiões de espera (cinzas), de dois anos antes da expiração até a expiração. Esse gráfico foi feito com ajuda do software do projeto de pesquisa Pravap-14.

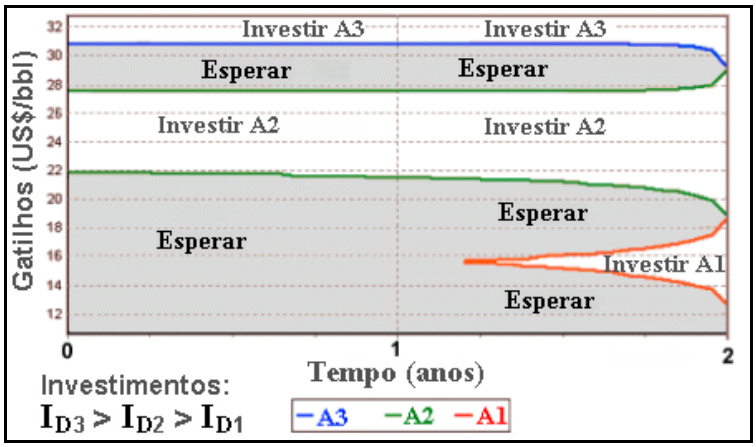

Figura 17 – Curvas de Gatilhos das Alternativas de Investimento

Note que, na expiração (t = 2), a regra de investimento é escolher a alternativa com maior VPL (a regra indicada na Figura 16, mas para um caso numérico um pouco diferente). A Figura 17 mostra que, para dois anos antes da expiração (t = 0) e para um preço do petróleo de US$ 28/bbl, a política ótima de investimento é "esperar e ver". Se o preço do petróleo aumentar para US$ 31/bbl, a melhor ação é investir imediatamente na alternativa 3 (A3), enquanto que se o preço cair para US$ 27.5/bbl o ótimo é investir logo na alternativa 2. A intuição por trás do ultimo caso é que se o preço do petróleo cair para US$ 27,5/bbl, o valor da espera pela alternativa 3 é menor que o valor de exercer a alternativa 2. Em outras palavras, o custo de postergar o exercício da alternativa 2 é maior que o benefício da espera pelo possível maior benefício de exercer eventualmente a alternativa 3 no futuro (a depender da evolução dos preços do petróleo).

Assim, a Figura 17 mostra a existência de *regiões intermediárias de espera*, por ex., para t = 1 ano existe essa região de espera entre as regiões de exercício ótimo das alternativas 2 e 3 para P entre 21,7 e 30,9 US$/bbl. A existência dessa região intermediária de espera não foi considerada no artigo de Dixit (1993b), que apresenta esse modelo para o caso de opção perpétua[74].

A Figura 18 mostra o gráfico dos VPLs das alternativas e o valor da opção real de escala (curva vermelha) para uma data anterior a expiração. Note a existência da região intermediária de espera entre as alternativas 2 e 3.

[74] No ano 2000, usando aproximações analíticas, o autor da tese encontrou essa surpreendente região de espera que contrariava Dixit (1993b). Isso motivou dois projetos do Pravap-14 para confirmar sua existência. Primeiro um projeto usando algoritmos genéticos e mais tarde um projeto usando o método tradicional de EDP. Com esse último projeto do Pravap-14, mais preciso que o primeiro, foi definitivamente confirmada a existência dessas regiões.

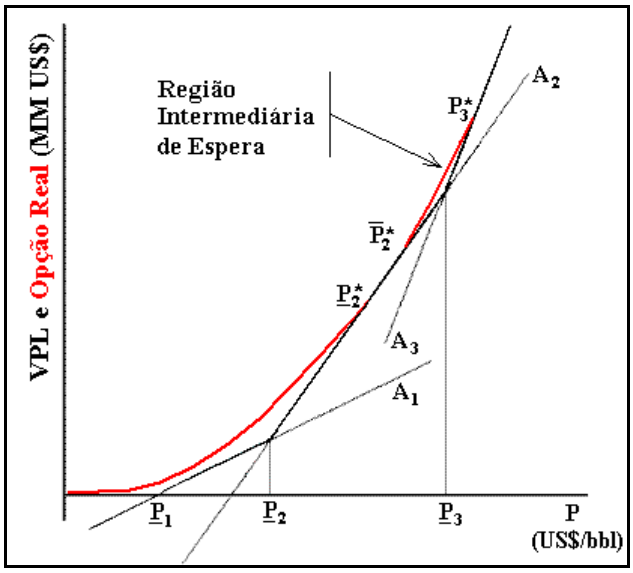

Figura 18 – Valor da Opção de Escala Antes da Expiração

Assim, a função valor da opção F(P, t) não possui "quinas", exceto na expiração. Trabalhando independentemente e com opção perpétua (em vez de opção finita como aqui), Décamps & Mariotti & Villeneuve (2003) *provaram* matematicamente que essa região de espera em torno do ponto de indiferença entre os VPLs das alternativas 2 e 3 *sempre* ocorre (região é não-vazia) se eventualmente for ótimo investir na alternativa 2. Eles mostraram que se o "*investimento em um projeto de escala menor for eventualmente ótimo, ... a região de investimento ótimo é dicotômica*". Eles mostraram (proposição 3.2) que o ponto de indiferença onde $VPL_{A2} = VPL_{A3}$ não pertence à região de exercício ótimo. Ou seja, não pode haver "quinas" (descontinuidade na derivada) da função valor da opção. Eles provaram isso com ajuda do conceito de *tempo local*[75] para o *semimartingale* contínuo P(t), aplicado a esse ponto de indiferença[76].

Provavelmente a conclusão de Décamps & Mariotti & Villeneuve (2003) é ainda mais geral, sendo também *sempre* verdade para opções de maturidade finita, *exceto* na expiração da opção. Dias & Rocha & Teixeira, 2003, mostraram que isso é verdade para opções finitas pelo menos em todos os exemplos em que trabalharam, mas não foi feita uma prova formal que isso sempre ocorre.

[75] Ver, por ex., Karatzas & Shreve (1991, seção 3.6) para uma discussão sobre *tempo local*.
[76] Agradeço ao Professor Thomas Mariotti por me informar sobre seus resultados e pela proveitosa discussão por *e-mail* sobre o modelo de Dixit (1993b).

2.4.3.
Modelo com Opção de Expansão

Nessa seção será apresentado um modelo de opção de expansão através de poços opcionais. Essa seção está baseada principalmente em Dias (2001a) e Dias (2004). O modelo anterior de análise de alternativas de escala sob incerteza de mercado proporciona uma importante ferramenta prática para avaliar a *intensidade ótima de investimento* para desenvolver um campo de petróleo. No entanto, o modelo é simples e por isso tem suas limitações. Por exemplo, ele não considerou a incerteza técnica remanescente sobre o tamanho e/ou qualidade da reserva. Ele também não considerou a possibilidade de prover as alternativas de menor escala com opções de expansão, de forma que em caso de cenários favoráveis (por ex., altos preços do petróleo), a produção possa ser aumentada.

Isso pode ser feito adicionando alguns poços ao sistema de produção e, em muitos casos, acrescentando módulos de processo para aumentar a capacidade do sistema de produção. No mar, isso é factível apenas *se* a plataforma for planejada, na fase de projeto, com áreas e cargas livres que tornem viáveis a interligação de novos poços e a instalação de novos módulos, para a eventualidade do exercício da opção. Ou seja, principalmente para o caso de plataformas marítimas, para embutir uma opção de expansão da produção na alternativa de escala escolhida existe um custo relevante, pois áreas e cargas em plataformas são caras, especialmente em sistemas flutuantes de produção (usado em águas profundas). Também, os dutos de escoamento da produção (oleoduto e gasoduto) podem ser dimensionados com um diâmetro um pouco maior (a um certo custo) que o necessário para atender a eventualidade de uma expansão da produção.

Em relação à incerteza técnica, a opção de expansão pode ser particularmente importante. Muitas vezes a melhor maneira de reduzir a incerteza técnica da reserva ao um nível adequado (a ser definido), é com o investimento prévio em informação, i. é, *antes do desenvolvimento* se investe em informação através da perfuração de poços adicionais de delimitação, ou testes em poços existentes, ou investindo num sistema piloto de produção, dentre outras *alternativas de investimento em informação*. Isso será estudado no cap. 3 e cap. 5.

Entretanto, algumas vezes o melhor caminho para reduzir a incerteza técnica remanescente na reserva é usando a *informação gerada pela produção acumulada*

no campo, por ex., analisando o comportamento dessa produção em vários pontos do reservatório (vários poços) e/ou medindo a pressão de fundo de poço depois de meses ou poucos anos de produção. Nesses casos, o investimento em informação antes do desenvolvimento não é adequado devido ao baixo potencial de revelar informação vis a vis o custo de obter essa informação.

Para esses casos o melhor meio para obter essa informação (reduzir a incerteza técnica) é embutindo opções de expansão na alternativa selecionada para desenvolver o campo. Dessa forma, dependendo da informação revelada pela produção acumulada sobre a quantidade e qualidade da reserva, se decide exercer ou não a opção, assim como que opção exercer (quais dos poços opcionais perfurar). Assim, em muitos casos pode ser ótimo planejar *poços opcionais* no plano de investimento. Esses poços serão perfurados (opções serão exercidas) em caso de combinações de cenários de mercado (preço do petróleo, taxas de sonda) e de cenários técnicos revelados com a informação proveniente da produção acumulada do reservatório. Em adição, a localização ótima exata de cada um dos poços opcionais, irá depender da informação obtida com a produção inicial do campo. O tema incerteza técnica será discutido em detalhes no cap. 3, mas esse exemplo será mais uma motivação para a análise do cap. 3, em especial o uso do conceito de distribuição de revelações, que é particularmente útil nos casos práticos de opção de expansão por permitir usar a simulação de Monte Carlo para combinar cenários de mercado (distribuições de processos estocásticos) com cenários técnicos revelados pela informação (distribuições de revelações).

Além da alternativa de embutir uma opção de expansão deixando áreas e cargas na plataforma, se poderia analisar a possibilidade de esperar o próprio declínio da produção (depleção do reservatório) que com o passar do tempo deixaria capacidade ociosa de processo. Com isso se poderia incorporar poços opcionais à plataforma quando a capacidade de processamento permitisse, conforme o simples modelo de OR de Ekern (1988). Mas mesmo nesse caso é necessário considerar a possível nova carga na plataforma dos novos *risers*[77] dos poços opcionais, assim como o possível custo adicional devido à modificação na *configuração submarina* ("subsea layout") para considerar a possibilidade das

[77] Riser é um termo técnico usado na indústria para as *tubulações verticais* (muitas vezes flexíveis) que sobem na plataforma, ligando os poços à plataforma e a plataforma aos dutos submarinos de escoamento da produção processada.

linhas de fluxo dos poços opcionais irem em direção à plataforma. Também, em muitos casos o declínio da produção de óleo é acompanhado com um aumento da produção de água, de forma que a capacidade total da planta aos líquidos (óleo + água) não fica ociosa com o declínio da produção de óleo.

Entretanto, esses custos de embutir a opção de expansão são, em geral, só uma fração do investimento total e podem ter um grande potencial de benefícios ao perfurar esses poços apenas em cenários favoráveis de reservatório e/ou cenários favoráveis de mercado. Por outro lado, como o custo de embutir a opção de expansão se dá na fase de construção e o benefício só ocorre meses ou poucos anos após o início da produção, o efeito do desconto desses benefícios distantes reduz a atratividade da opção, de forma que é necessária uma valoração cuidadosa dos custos e benefícios da opção de expansão através de poços opcionais.

A análise econômica da opção de expansão com poços opcionais requer um estudo detalhado da contribuição marginal de cada poço no desenvolvimento global da reserva. Nesse estudo é necessário identificar os *poços candidatos* que podem se tornar poços opcionais. Poços com elevado risco de reservatório são candidatos primários porque com novas informações de reservatório esses poços poderiam se tornar desnecessários ou a sua localização ótima no reservatório poderia ser diferente. Outros poços candidatos a opcionais são aqueles que apresentaram VPL marginal negativo ou mesmo apenas um pouco positivo na análise da contribuição marginal de cada poço[78] de forma que a opção de perfurar esses poços não está suficientemente madura (não está "deep-in-the-money").

Um aspecto que algumas vezes pode ser importante é a *depleção secundária* na área do reservatório que seria drenada por poços opcionais. A produção dos principais poços causa um diferencial de pressão no reservatório, induzindo alguma migração de petróleo da área dos poços opcionais para a área em que está havendo produção. Na maioria dos casos, a migração de petróleo no reservatório não significa que esse óleo será produzido pelos poços principais em operação pois esse petróleo pode ficar retido em zonas de baixa produtividade, ou mesmo pode levar um tempo excessivo (muitos anos) para chegar na distante região produtora. Em muitos casos esse petróleo jamais será produzido (campo será

[78] O método direto de estimar o VPL marginal de um poço é através da simulação do reservatório com e sem cada poço. Com as curvas de produção em cada caso, são calculados os dois VPLs, sendo que o VPL marginal de cada poço é a diferença entre esses VPLs.

abandonado antes). Essa depleção secundária age como um *dividendo* perdido pelo dono da opção, causando o mesmo efeito que a taxa de dividendos no modelo tradicional de OR – é maior o incentivo para exercer logo a opção (perfurar logo o poço opcional) quanto maior for o efeito da depleção secundária. Em outras palavras, a depleção secundária é um custo de oportunidade adicional da espera. A Figura 19 ilustra o fenômeno da depleção secundária num campo de petróleo.

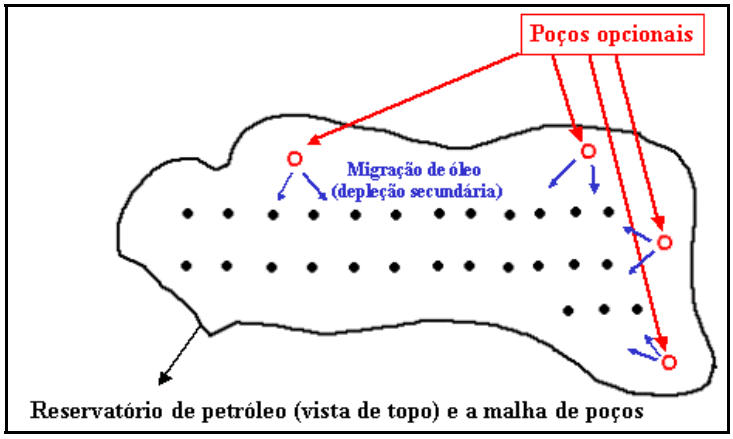

Figura 19 – Depleção Secundária em Reservatório de Petróleo

O método geral para analisar a opção de expansão através de poços opcionais, desde um ponto de vista prático, é:

- Defina a quantidade de poços "deep-in-the-money" para começar o plano básico de investimento em desenvolvimento da reserva, fazendo a análise da contribuição marginal de cada poço no VPL do campo através de diversas simulações de reservatórios;
- Defina a quantidade máxima de poços opcionais;
- Defina o momento esperado (pela produção acumulada) que a informação do reservatório será revelada (informação acumulada é suficiente para rever o estudo de geologia de reservatórios);
- Defina a produção marginal de cada poço opcional como função de parâmetros incertos e os possíveis cenários (distribuições de revelação a serem vistas no cap. 3) a serem revelados pela produção acumulada;
- Considere o fenômeno da depleção secundária nas áreas dos poços opcionais, caso se queira esperar mais após aprender sobre o reservatório;
- Simplifique o esforço computacional limitando a expiração da opção de perfurar os poços opcionais – lembrar que o VPL marginal desses poços é declinante devido à depleção secundária e pelo efeito da taxa de desconto;

- Adicione incerteza de mercado, simulando o processo estocástico para os preços do petróleo e talvez para a taxa diária de sondas que podem perfurar e completar esses poços opcionais;
- Combine as incertezas usando a simulação de Monte Carlo;
- Use uma curva de gatilhos para considerar o exercício ótimo antecipado da opção de perfurar os poços marginais e calcule o valor dessa opção; e
- Compare esse valor de opção com o custo de embutir a opção de expansão. O valor da opção de expansão deve ser maior que o custo de embutir a opção para justificar esse custo de flexibilidade no plano de desenvolvimento.

A Figura 20 apresenta a linha de tempo do problema da opção de expansão para um campo marítimo típico, que ajuda a entender os aspectos práticos da modelagem desse problema.

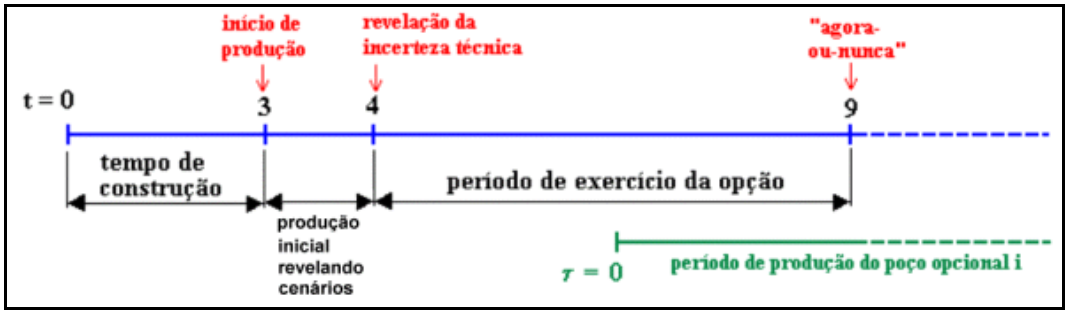

Figura 20 – Linha de Tempo (anos) da Opção de Expansão

A linha de tempo da Figura 20 considera um tempo de construção de três anos, do início do investimento até o início de produção em t = 3 anos. Entre os anos 3 e 4, a produção inicial dos poços (não-opcionais) e eventuais testes de produção gera toda a informação técnica relevante nesse exemplo. Para o período entre o ano 4 e o ano 9, o exercício da opção de perfurar poços opcionais é considerado. A data limite de exercício (expiração) das opções no ano 9 é somente um valor prático devido tanto a depleção secundária como ao efeito de desconto de benefícios distantes que reduzem o seu valor (presente), de maneira que o valor da opção é muito pequeno após o ano 9 para propósitos práticos (lembre que o custo de embutir a opção de expansão se dá entre t = 0 e t = 3).

A Figura 20 também apresenta a linha de tempo para o poço opcional i que pode ser perfurado em qualquer data entre os anos 4 e 9.

Nesse exemplo, a simulação de Monte Carlo *para a incerteza técnica* é feita apenas em t = 4. A simulação do processo estocástico dos preços do petróleo

começa em t = 0 e é necessária apenas até o exercício da opção de perfuração (em $\tau_i = 0$ para o poço opcional i). Depois do exercício da opção, é necessária somente a curva de valor esperado do preço do petróleo, pois aqui não são consideradas outras opções (como a opção de abandono), que poderiam introduzir assimetrias na distribuição de valor de cada poço. Para calcular o valor da opção real pelo método dos *ativos contingentes* e usando a *simulação de Monte Carlo*, deve-se trabalhar com valores neutros ao risco. A função *valor neutro ao risco* do poço opcional i, V_i é dada pela seguinte integral (Dias, 2001):

$$V_i = \int_{t=\tau_i}^{\tau_i+30} \text{Max}(0,\ \{[P(t)\ Q_i(t)] - [COV_i\ Q_i(t)] - \\ - COF_i - [ROY\ P(t)\ Q_i(t)]\}\ (1 - T_c)\ e^{-r(t-\tau_i)}\ dt \qquad \textbf{(37)}$$

Onde $Q_i(t)$ é a curva de produção esperada para o poço i, COV_i é o custo operacional variável desse poço, COF_i é o custo operacional fixo devido a esse poço (custo de manutenção do poço), ROY é a alíquota de royalties de produção (taxa típica aplicada à produção de petróleo) e T_c é a alíquota marginal corporativa de imposto de renda mais contribuição social. Está sendo considerado um tempo de produção fixo de 30 anos e custo de abandono igual a zero, para simplificar. O preço de exercício da opção do poço i (não mostrada na eq. 37) é a soma do custo de *perfuração* desse poço, com o custo de *completação* (equipagem do poço para poder produzir) e o custo de *linhas de fluxo + riser* desse poço, para interligá-lo à plataforma de produção. Note na eq. (37) que V_i está atualizado para a data de exercício da opção (em τ_i) com a taxa livre de risco r. Já o valor da opção, calculado na data τ_i, deverá ser atualizado novamente com a taxa livre de risco até a data t = 0, a fim de poder comparar a soma dos valores das opções, ΣF_i, com o custo de embutir a opção real no projeto.

Na eq. (37), P(t) representa a curva de valor esperado do processo estocástico *neutro ao risco*. Lembrar que o valor da opção (F_i) e a determinação do valor ótimo de exercício (V_i*) são calculados simulando processos estocástico neutros ao risco quando se usa o método de ativos contingentes. Nesse exemplo, está sendo considerado que a única fonte de incerteza de mercado é o preço do petróleo. Todos os fatores de custos são determinístico nesse exemplo.

Já Q(t), que também é incerto na data t = 0, não precisa nenhum ajuste ao risco em sua distribuição de probabilidades, já que o risco técnico é diversificável

e não demanda prêmio de risco para acionistas de companhias de petróleo, assumindo que são investidores diversificados (ver detalhes no cap. 3). A curva $Q_i(t)$ é uma função dos fatores incertos relacionados ao volume de reservas a ser drenado pelo poço i, B_i, e à qualidade (produtividade) dessa reserva. A qualidade da reserva aqui será capturada por um *fator de declínio principal* ω_i, pois quanto maior for esse fator, mais rápida a reserva B_i será produzida (e assim maior o valor presente de V_i). Além disso, o potencial de produção $Q_i(t)$ é penalizado por um outro fator de declínio β_i, causado pela depleção secundária, de forma que a curva de produção $Q_i(t)$ do poço i é dada pelas equações:

$$\mathbf{Q_i(t) = Q_i'(0)\, e^{-\omega_i (t-\tau_i)}} \quad , \; t \geq \tau_i \qquad \textbf{(38a)}$$

$$\mathbf{Q_i'(0) = Q_i(0)\, e^{-\beta_i (t-4)}} \quad , \; t \geq 4 \qquad \textbf{(38b)}$$

$$\mathbf{Q_i(0) = \frac{1.000.000 * B_i}{365 * \sum_{t=0}^{29} e^{-\omega_i t}}} \qquad \textbf{(38c)}$$

Onde $Q_i(0)$ é a produção inicial do poço i caso o início da produção ocorra no ano 4 em barris de óleo equivalente por dia (boe/dia); e $Q_i'(0)$ é a produção inicial do poço i na data de exercício da opção (em boe/dia). B_i está em MM bbl.

Os valores de declínio ω_i e β_i devem ser obtidos preferencialmente por simulação de reservatórios. Caso não seja possível/conveniente (prospecto exploratório, por ex.), pode-se usar uma média da área ou usar analogias com reservatórios similares. No caso de β_i, a simulação de reservatórios deve considerar a produção com os poços opcionais entrando na data t = 4 anos (imediato exercício da opção de expansão) e em datas subseqüentes. Isso permite até estimar um $\beta_i(t)$. Em vez das eqs. (37_), a alternativa de usar diretamente simuladores de reservatórios para obter $Q_i(t)$ é possível, mas pode demandar um trabalho muito maior em termos computacionais e de preparação de dados de entrada. Mas o uso de simuladores para obter $Q_i(t)$ é uma tendência para o futuro.

Dessa forma são simuladas as incertezas técnicas na data de revelação de informação (ou data de revisão do estudo de reservatórios), que nesse exemplo ocorre no ano t = 4 (um ano de produção acumulada). A informação gerada após t = 4 é considerada irrelevante para alterar o modelo de reservatórios (ou os ajustes posteriores são considerados de pequena monta).

A simulação de Monte Carlo para avaliar OR em geral necessita de ser acompanhado por um algoritmo de otimização. Até cerca de 10 anos atrás se considerava inviável o uso de simulação de Monte Carlo para avaliar opções do tipo americana, que são a maioria dos casos de OR. No entanto, hoje existem inúmeras maneiras de se fazer isso. O mais popular método hoje é o chamado método dos *mínimos quadrados*, detalhado no artigo de Longstaff & Schwartz (2001), que tem sido analisado em livros textos tais como Tavella (2002).

A implementação dessa opção de expansão demanda um gerenciamento ativo em todas as fases do projeto. A comunicação entre as equipes de projeto nas diferentes fases do mesmo (estudo conceitual, estudo de viabilidade, projeto básico, projeto executivo, construção e montagem) é necessária para preservar a flexibilidade embutida na unidade de produção (plataforma) e na configuração submarina. Caso contrário, o desejo de "otimização" e "redução de custo" podem destruir o valor dessa opção em fases subseqüentes por equipes de projeto não-informadas sobre o valor dessa flexibilidade.

O modelo aqui apresentado pode ser inserido dentro da análise de alternativas de escala apresentada no item 2.4.2, ou seja, analisando cada alternativa com e sem opção de expansão. Isso foi implementado numa etapa posterior de um projeto do Pravap-14 e mostrou que alternativas de menor escala que eram praticamente dominadas por outras de maior escala, recuperavam a sua competitividade quando se acrescentam opções de expansão. Os problemas advindos dessa combinação de modelos são: (a) requer um maior cuidado na preparação dos dados de entrada do modelo para cada alternativa; e (b) é computacionalmente muito intensivo. Esse último é um problema cada vez menor com o avanço de velocidade dos computadores.

2.4.4. Modelo com Opções Estendíveis

Essa seção é baseada no artigo de Dias & Rocha (1998). As opções reais estendíveis ocorrem ou ocorreram no setor de exploração de petróleo em algumas regiões tais como na Europa (Kemna, 1993), Brasil e EUA. A idéia é que a expiração da opção pode ser estendida (ou prorrogada) para uma data futura a um certo custo. Em Kemna (1993), a análise considerava que se estava na *primeira expiração* da opção de investir para desenvolver o campo, de forma que o objetivo

era calcular o valor de uma opção simples a fim de verificar se ela pagava o custo de estender por mais um período essa opção. No caso esse custo era a perfuração de um poço exploratório que se sabia de antemão que seria seco. No setor petróleo o custo para estender a opção, muitas vezes é a realização de investimento exploratório adicional no bloco em questão (ou o pagamento do equivalente em dinheiro para a agência reguladora governamental). Em Dias & Rocha (1998) foi estudado o caso mais complexo em que se quer avaliar um bloco oferecido que tem essa característica de, após certo período se estender (ou não) o período da opção de desenvolvimento de um campo de petróleo descoberto no bloco.

Opções estendíveis ocorrem também no mercado financeiro e foi estudado pioneiramente por Longstaff (1990). O livro texto de Briys et al (1998) dedica um capítulo às opções estendíveis (cap. 16). Opções estendíveis são mais gerais que opções compostas pois podem ser vistas como o máximo entre uma opção de compra comum ("vanilla") e uma opção composta ("call on a call", opção de compra sobre opção de compra) menos o custo para obtê-la.

No caso de OR em petróleo, na maioria das vezes existem duas expirações. Mas existem casos (Brasil) de até três expirações. Considere o caso com duas expirações, sendo a primeira ocorrendo em $t = T_1$, quando a companhia de petróleo tem três opções: desenvolver o campo; devolver o bloco/campo para o governo; e estender a maturidade da opção para $t = T_2$ (segunda expiração) a um custo K (que pode ser um investimento exploratório adicional). A Figura 21 ilustra as opções envolvidas na valoração de opções estendíveis em dois períodos.

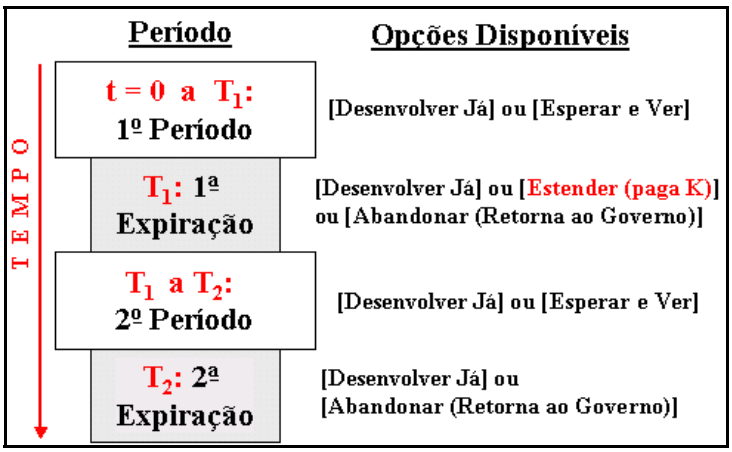

Figura 21 – Opções Estendíveis em Petróleo (Dois Períodos)

Escrevendo o resultado do exercício da opção como uma função do preço do petróleo, i. é, o VPL de desenvolvimento como VPL(P), obtém-se uma EDP para

o valor da opção F(P, t) de desenvolver o campo. No caso do preço (de longo prazo) seguir um MGB, essa EDP é igual à eq. (30) apresentada anteriormente. Em Dias & Rocha (1998) foi considerado um processo estocástico de reversão à média com saltos e assim a EDP é um pouco diferente. As condições de contorno são mostradas a seguir na Tabela 7, para o caso do valor da reserva desenvolvida V(P) ser descrita pelo modelo de negócios, eq. (23)[79]. Nessas equações, F_1 denota o valor da opção no primeiro período, ou seja, vale para $t \in [0, T_1]$; F_2 denota o valor da opção no segundo período, i. é, vale para $t \in [T_1, T_2]$; e F (sem índice) é geral, valendo para os dois períodos, i. é, para $\forall\ t \in [0, T_2]$.

Tabela 7 – Condições de Contorno para as Opções Estendíveis

Tipo de Condição de Contorno	Condição de Contorno	Equações
Trivial, P = 0	$F(0, t) = 0$	(39)
Primeira Expiração: $t = T_1$	$F_1(P, T_1) = \text{Max}[q\ B\ P - I_D, F_2(P, t) - K, 0]$	(40)
Continuidade ("value matching") em $P = P^*, \forall\ t$	$F(P^*, t) = q\ B\ P^* - I_D$	(41)
Segunda Expiração: $t = T_2$	$F_2(P, T_2) = \text{Max}[q\ B\ P - I_D, 0]$	(42)
Contato suave ("smooth pasting") em $P = P^*, \forall\ t$	$F(P^*, t) = V_P(P^*) = q\ B$	(43)

A Figura 22 a seguir mostra a curva do valor da opção real (ou valor da concessão) em $t = T_1$ para o caso do preço do petróleo seguir um MGB.

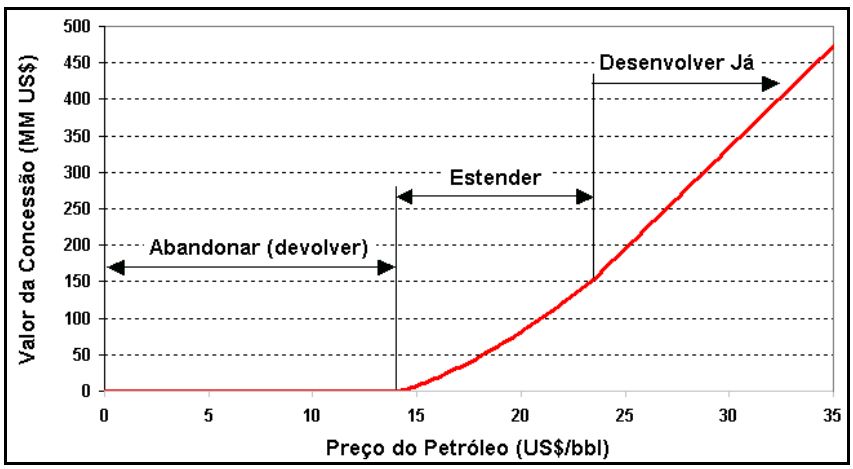

Figura 22 – Opção Estendível (MGB) na Primeira Expiração

Note que o gráfico da Figura 22 é similar ao caso de uma opção tradicional na expiração (Max[VPL(P), 0]), com exceção dos valores da opção em um

[79] É um pouco diferente de Dias & Rocha (1998), onde os resultados foram normalizados pelo volume de reserva: lá o VPL, a opção F e o investimento I_D, são valores *por barril*.

intervalo de preços (aqui entre ~ 14 e 23,8 US$/bbl) onde, em vez de uma linha reta, aparece uma curva. Essa curva ocorre pois nesse intervalo é ótimo pagar um valor K para estender a maturidade da opção real e assim é uma *curva de valor de opção*. Para valores abaixo de US$ 14/bbl, o ótimo é devolver o campo para a agência governamental (não vale a pena nem pagar K e nem desenvolver o campo), enquanto que para valores superiores a US$ 23,8/bbl, o melhor é desenvolver logo o campo (a concessão estaria "deep-in-the-money"). O formato desse gráfico é similar ao mostrado em Longstaff (1990, Fig.1, p.939). Para outros detalhes sobre opções estendíveis, ver Dias & Rocha (1998)[80].

2.4.5. Modelo com Opção de Abandono

Assim como foi visto que a opção de investir (desenvolver) é análoga a uma opção de compra (americana), a opção de abandono também pode ser vista como análoga a uma *opção de venda*. Essa analogia muitas vezes é usada em software para opções reais de abandono de um projeto, mas não exclusivamente.

O abandono de um campo de petróleo é inevitável em função do declínio da produção de um campo de petróleo ao longo dos anos. Um fator de declínio de produção típico é da ordem de 10% ao ano. A análise da opção real de abandono em campos de petróleo é importante na prática por pelo menos três razões.

Primeiro, para determinar o momento ótimo de se tomar uma decisão irreversível de abandonar esse campo. Será aqui visto que o uso do fluxo de caixa descontado (FCD) leva ao abandono prematuro do campo quando comparado com a teoria das OR.

Segundo, na análise de valor de campos maduros (campos próximos do final da vida produtiva) para efeito de venda total ou parcial, a não consideração do valor das OR leva a companhia de petróleo a subestimar o valor dos campos e assim vendê-los barato. Lembrar (item 2.1.2) que a Chevron usou OR para valorar e comprar campos maduros (possivelmente o vendedor subestimou o valor desses campos ao ignorar o valor das OR em campos maduros).

Terceiro, as reservas do campo (volume recuperável de petróleo) são subestimadas quando se usa o FCD como critério de abandono, em vez da teoria

[80] Ver também www.puc-rio.br/marco.ind/extend.html para discussões adicionais.

das OR, devido ao abandono prematuro recomendado pelo FCD. Assim, a teoria das OR é bastante relevante para efeito de estimar o volume de reservas.

Note que para efeito de cálculo de reservas, a consideração da data esperada de abandono é bem relevante em qualquer fase da vida do campo (mesmo antes de ser desenvolvido), pois o indicador "volume de reservas" é nominal (não sofre efeito de desconto de atualização, como ocorre com valor monetário). Já para decisões de desenvolvimento do campo, o valor da opção real de abandono geralmente não é muito relevante devido ao efeito do desconto, já que a vida produtiva esperada de campos de petróleo em geral é superior a 20 anos. Rever a discussão da Figura 12 sobre o efeito da OR de abandono na função VPL(P).

O abandono de campos de petróleo incorre em custos de tamponamento seguro dos poços, remoção de equipamentos e recuperação ambiental. São os *custos de abandono*, os quais podem ser substanciais para campos marítimos[81]. As decisões de abandono ou de *desinvestimento*, na presença de custos de abandono, são similares às decisões de investimento. Conforme definem Dixit & Pindyck (1994, p.3), "*investimento é o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios*" e "*uma firma que fecha uma planta que gera prejuízos está também 'investindo' ... benefício é a redução de perdas futuras*". Assim a opção de abandono pode ser tratada de forma similar a opção de investir. Realmente, as opções de compra e de venda têm relações de *paridade* (ou simetria) entre si (mesmo as americanas, ver McDonald & Schroder, 1998). Isso significa que um software que resolve opções (americanas) de compra, resolve também opções (americanas) de venda através duma permutação específica dos dados de entrada.

Para entender a diferença entre os critérios do FCD e OR em relação ao abandono, especialmente o fato que o abandono é prematuro quando se usa o critério do FCD, considere um exemplo bem simples. Seja o custo de abandono igual a zero a fim de focar no efeito da incerteza na data de abandono. Considere que a decisão é entre abandonar no início do ano t ou no início do ano t + 1, sendo que não se pode abandonar depois do final de t + 1 (imagine que é o limite legal do prazo da concessão e ela não será renovada). Assuma também que a incerteza é apenas no valor do fluxo de caixa no início de t + 1 e que essa incerteza é

[81] O custo de abandono esperado do campo de Marlim, na Bacia de Campos, é da ordem de 500 milhões de dólares americanos.

representada apenas por dois cenários de mercado (preço do petróleo): otimista e pessimista. Imagine que a firma tem a prática de vender toda a produção do ano no mercado futuro, fixando o preço do início do ano. Assim, o fluxo de caixa líquido hoje, no início do ano t, é conhecido e igual a – 1 milhão de US$ (prejuízo). A Figura 23 a seguir ilustra esse exemplo estilizado conceitual.

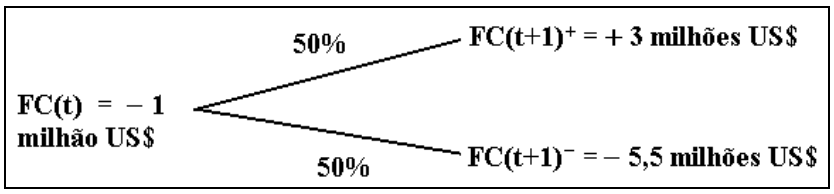

Figura 23 – Efeito da Incerteza na Data de Abandono

Note que o valor esperado em t + 1, E[FC(t+1)] = 50% x 3 + 50% x (– 5,5) = – 1,25 é menor que FC(t). Isso ocorre por causa do declínio da produção ao longo do tempo. Um raciocínio de FCD poderia sugerir o imediato abandono (evitando o FC negativo de – 1 MM$), sabendo-se que a tendência é *em média* o prejuízo aumentar. Mas como existe incerteza e opções, a teoria das OR pode recomendar a espera na decisão de abandono. Realmente, no início de t + 1 se ocorrer o cenário otimista, a firma vai produzir até o final de t + 1; enquanto se ocorrer o cenário pessimista ela exerce a opção de abandonar no início de t + 1 (evitando o prejuízo de – 5,5 MM$). Assim, em t + 1 o valor de opção é 50% x 3 + 0 = 1,5 MM$, valor positivo. Seja 10% a taxa de desconto. O valor atualizado é então = 1,5/1,1 = 1,364 o que mais que compensa o prejuízo em t. Assim, o valor da opção no início do instante t é F(t) = Max[0, – 1 + 1,364] = 0,364 MM$.

A regra de decisão das OR nesse exemplo é: (a) produza em t mesmo com prejuízo; (b) no início do ano t + 1, caso ocorra o cenário otimista, continue produzindo e ganhe 5,5 MM$, caso contrário exerça a OR de abandono. Já o FCD recomendaria abandonar logo no início de t. Assim, a data de abandono das OR ocorre depois (ou melhor, nunca antes) da data recomendada pelo FCD.

Logo, usando o critério das OR a firma produz de um ano a dois anos *a mais* que no critério do FCD, nesse exemplo simples. Isso significa que o indicador "volume de reservas" é maior quando se leva em conta a incerteza de mercado e se reconhece que o abandono é uma opção. Portanto, o FCD não só subestima o valor do campo (especialmente em campos maduros) como também subestima o volume de reservas, devido a recomendar o abandono prematuro.

O esquema anterior pode ser generalizado com uma diferença de tempo pequena entre t e t + 1, e assim o raciocínio anterior é válido mesmo se a firma vende diariamente a produção no mercado spot. Com probabilidades ajustadas (neutras) ao risco e consistentes com um processo estocástico adequado e considerando um intervalo de tempo pequeno, pode-se aplicar as ferramentas tradicionais de solução de OR (binomial, métodos de EDP, etc.).

Os dois principais modelos de opção de abandono são devidos a Myers & Majd (1990) – que explora a analogia entre opção de abandono e opção financeira de venda, e os *modelos de histerese* descritos no capítulo 7 de Dixit & Pindyck (1994) – que considera a interação de outras opções como a de parada temporária e a de reativação, assim como os respectivos custos de preservação (em caso de parada temporária) e de reativação.

Uma extensão do modelo de Myers & Majd (1990), com duas variáveis estocásticas, pode ser usado também para a aplicação de *opção de troca de ativos* ("switch option"), em que se abandona um projeto em troca de outro projeto, i.é, se procura um uso alternativo para um ativo em um outro projeto. Isso será visto a seguir, sendo mencionado um caso real famoso da Petrobras.

2.4.6. Modelo de Opção de Mudança de Uso

Esse modelo é baseado no apêndice do artigo de Myers & Majd (1990). Tecnicamente é uma opção de troca de um ativo de risco por outro ativo de risco ("switch option"). Antes, será descrito um caso real de um ativo (navio P.P. Moraes) que foi usado em vários diferentes projetos ao longo de mais de 40 anos, o que ilustra a relevância da opção de mudança de uso no setor petróleo.

O Navio Presidente Prudente de Moraes ("P.P. Moraes") foi construído no final da década de 50 no estaleiro da Verolme, na Holanda, com 32.945 ton. de porte bruto e comprimento de 202,54 m. (navio de porte médio). Em janeiro de 1959 foi incorporado à frota de petroleiros da Petrobras, sendo denominado "Presidente Juscelino" (presidente da época)[82]. Em 1966 teve um problema nas turbinas e caldeiras e foi enviado para um estaleiro de Baltimore (EUA), onde mudou o nome para "Presidente Prudente de Moraes". Assim, o primeiro uso foi em projetos de transporte de petróleo na costa brasileira.

[82] Recentemente (2004), esse navio voltou a ser chamado "Presidente Juscelino".

Em 1971 foi docado no Japão sofrendo a sua primeira conversão (primeiro exercício da opção de mudança de uso): aumento de capacidade para 53.600 ton. de porte bruto, com acréscimo no comprimento e na altura (acréscimo de uma extensão no meio do casco, e de uma faixa para elevá-lo). Assim, foi usado em viagens de longo curso internacionais (Líbia, Nigéria, Gabão, EUA, Venezuela), ainda no transporte de petróleo, mas ampliando os horizontes. Uma motivação para isso foi a elevação dos preços de fretes no mercado internacional.

Em 1976, uma nova e mais radical conversão em estaleiro no Japão fez o P.P. Moraes passar de navio-tanque para navio de processo, abandonando o transporte de petróleo para se dedicar à produção: sistema provisório de produção do campo de Garoupa, na Bacia de Campos, em 100 metros de lâmina d'água (considerada profunda na época). Houve atrasos e o sistema só entrou em produção em fevereiro de 1979. Foi o terceiro uso desse ativo e o segundo exercício da opção de mudança de uso.

Em outubro de 1981, com a instalação do sistema definitivo de Garoupa, o P.P. Moraes sofre nova mudança de uso, saindo de Garoupa e indo antecipar a produção do campo de Badejo, enquanto uma plataforma auto-elevatória era preparada para produzir o campo. Assim, o projeto provisório de Garoupa foi abandonado e o ativo usado em um novo projeto.

Após deixar o campo de Badejo três anos depois, ele sofre nova conversão em estaleiro do Rio de Janeiro: é instalado um sistema para processar também o gás natural e sofre uma adaptação no sistema de ancoragem. Em outubro de 1987 entra em produção a Fase 1 do campo de Albacora, registrando um recorde mundial de ancoragem (230 m.). O projeto de Albacora foi o mais longo da fase de navio de processo do P.P. Moraes: 5 anos e meio. Foi o quinto uso desse ativo e a quarta vez que a opção de mudança de uso foi exercida.

Em 1993 é desativado esse sistema piloto de Albacora (entrou o sistema definitivo). O P.P. Moraes é então docado em estaleiro no Rio de Janeiro para nova conversão. É instalado o maior sistema "turret" do mundo, tendo sido feito uma abertura de 12 metros de diâmetro na sua proa, além de outras adaptações e reformas na estrutura e na planta de processo. Em 1997 entra em produção o sistema piloto de Barracuda/Caratinga na Bacia de Campos, em lâmina d´água (LDA) de 840 metros. O nome do navio passa a ser Petrobras 34 (P-34).

Em 2003 foi abandonado o projeto piloto de Barracuda/Caratinga. A P-34 é novamente enviada para conversão em estaleiro visando produzir em LDA de 1350 metros em um novo projeto, dessa vez na costa do estado do Espírito Santo, no campo de Jubarte, com início de operação previsto para 2005. A obra inclui adaptação da planta de processamento para produzir/processar óleo pesado. Foi o sétimo uso desse ativo e a sexta vez que a opção de mudança de uso foi exercida!

O modelo de Myers & Majd (1990) com duas variáveis estocásticas é adequado para análise de várias (mas não todas) decisões irreversíveis de mudança de uso de ativos na indústria de petróleo, dentre as quais pode-se citar:

(a) Conversão duma sonda de *perfuração* do tipo semi-submersível em um sistema flutuante de *produção*[83], dependendo do valor da taxa diária de sonda no mercado e do valor de mercado do sistema flutuante de produção;

(b) Essa mesma sonda de perfuração flutuante pode ser convertida num flotel, ou seja, um hotel flutuante usado para dar apoio operacional principalmente em instalações de novas plataformas;

(c) Converter uma unidade semi-submersível que só perfura em águas rasas para ancorar em águas profundas e/ou instalar um sistema de posicionamento dinâmico, estendendo a aplicabilidade da sonda. Isso vai depender da diferença de taxas diárias de sondas do mercado para águas rasas e águas profundas;

(d) A recompletação de um poço, abandonando uma zona produtora (com baixa vazão devido à depleção) para produzir outra zona do reservatório atravessada pelo poço; e

(e) Abandono duma unidade de refino, convertendo-a numa unidade diferente (produto de maior valor ou de menor custo) ou até mesmo para aproveitar o terreno localizado na refinaria e/ou a capacidade das utilidades (geração elétrica, ar comprimido, sistema de VAC) associadas ao projeto para atender uma outra unidade.

Para o caso mais geral de uma seqüência de opções de mudança de uso, pode-se usar um modelo mais geral de opções compostas. O modelo de Myers & Majd considera apenas uma opção de mudança. Embora seja uma simplificação,

[83] Retira a torre de perfuração (e outros equipamentos) e instala uma planta de processo.

já é um grande avanço em relação ao método do FCD tradicional que não considera opções interagindo com a incerteza. Assim esse modelo já incorpora um valor adicional que o FCD não captura. Se incluir outras opções de mudança de uso, existirá um valor adicional não capturado pelo modelo de Myers & Majd (e que o modelo tradicional do FCD ficaria ainda mais distante), mas deve-se levar em conta que devido ao efeito do desconto do valor no tempo, essas opções da *segunda* mudança de uso em diante teriam valores presentes menores do que a primeira opção de mudança de uso (seriam efeitos de segunda ordem).

Para apresentar o modelo de Myers & Majd, primeiro deve-se definir o valor de uso alternativo. O valor de uso alternativo (E) (ou "salvage value" ou valor residual, ou valor de oportunidade), em qualquer instante, é o valor de mercado do ativo para o melhor uso alternativo. Esse valor tem de ser *líquido* de todos os custos para converter de um uso para o outro.

A Figura 24 a seguir, baseada em Myers & Majd (1990), mostra o valor corrente do projeto (V) e o valor de uso alternativo (E) dos ativos do projeto declinando exponencialmente com a passagem do tempo. Esses declínios esperados podem (e em geral são) diferentes. Por ex., no caso de um reservatório com duas zonas produtoras, enquanto a zona em produção sofre um esperado declínio exponencial, a zona alternativa (jazida mais profunda) tipicamente se mantém com o mesmo potencial (nesse caso a curva E seria uma reta horizontal). Já no caso de um petroleiro o uso principal no transporte de longo curso teria um valor declinante com o tempo (custo crescente com o tempo, restrições ambientais limitando o mercado[84], etc.) enquanto que o uso alternativo como unidade de produção (FPSO[85]) teria um declínio menor no seu valor (teria algum declínio, já que os custos de conversão são crescentes com a idade/estado do navio).

[84] Ex: existem portos que exigem que os petroleiros tenham casco duplo para operar, por segurança ambiental (essa exigência não existia na época de construção de muitos petroleiros).

[85] Floating Production Storage and Offloading, unidade que processa e armazena petróleo.

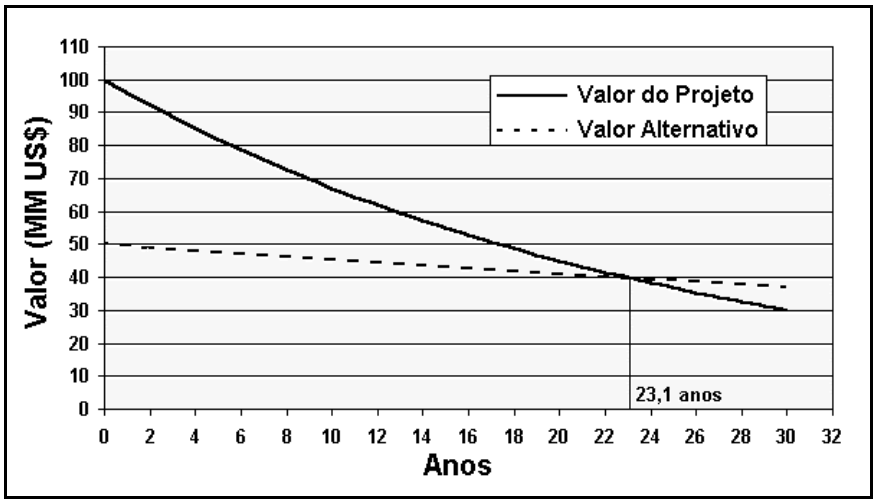

Figura 24 – Valor do Projeto (Ativo) e Valor de Uso Alternativo

Na Figura 24, se não houvesse nenhuma incerteza, haveria uma mudança de uso após 23,1 anos. No entanto, devido à incerteza em V e em E, o tempo em que isso ocorrerá é incerto. Adicionalmente, mesmo na situação dos dois ativos com valores iguais e um com tendência de declínio superior ao outro, devido à incerteza existente e a irreversibilidade associada a essa tomada de decisão, o exercício da opção de mudança de uso exige um valor superior (E > V) por um montante igual ao chamado *prêmio de opção*, que é um custo de oportunidade adicional de abandonar o projeto em troca de outro.

Em outras palavras, é necessário considerar a probabilidade do valor do projeto V subir (ou declinar menos que o esperado) e/ou o valor de E declinar além do esperado, depois da firma incorrer no custo irreversível de conversão do ativo. Assim, o ativo E precisa estar suficientemente "deep in the money" para que a opção de mudança de uso seja exercida otimamente.

No caso mais geral do modelo de Myers & Majd, tanto o valor do projeto V como o valor de uso alternativo E são incertos (com tendências declinantes), ou seja, V e E seguem processos estocásticos. O modelo adota para ambos os ativos o MGB. Assim as equações estocásticas para V(t) e E(t) são:

$$\mathbf{dV/V = \alpha_V\, dt + \sigma_V\, dz_v} \qquad \mathbf{(44)}$$

$$\mathbf{dE/E = \alpha_E\, dt + \sigma_E\, dz_E} \qquad \mathbf{(45)}$$

Os ativos V e E em geral são correlacionados, e essa correlação geralmente é positiva, pois os usos alternativos são dentro da mesma indústria (no caso a do petróleo). Formalmente, se esses dois processos são correlacionados, então:

$$\mathbf{E[dz_v\ dz_E] = \rho\, dt} \qquad \mathbf{(46)}$$

Onde ρ é o coeficiente de correlação entre os dois processos estocásticos.

Para deduzir a EDP do modelo de Myers & Majd (1990), pode-se usar o Lema de Itô para duas variáveis estocásticas, que dá a expansão de F(V, E, t):

$$\mathbf{dF = F_t\,dt + F_V\,dV + ½\,F_{VV}\,(dV)^2 + F_E\,dE + ½\,F_{EE}\,(dE)^2 + \\ + ½\,F_{VE}\,(dV\,.\,dE)} \qquad \mathbf{(47)}$$

Onde os subscritos denotam derivadas parciais (ex.: $F_{VE} = \partial^2 F / \partial V\,\partial E$). A correlação aparece no termo dV dE, por ex., se V e E seguem MGB correlacionados, então $dV\,dE = \sigma_V\,\sigma_E\,V\,E\,\rho\,dt$ (como antes, os termos dt de expoente > 1 são desprezados quando comparados com os termos em dt).

No entanto, se os processos estocásticos de V(t) e E(t) são MGB, é possível reduzir a dimensionalidade do problema graças as excelentes propriedades matemáticas do MGB que o tornaram tão popular. Especificamente, como no clássico artigo de McDonald & Siegel (1986), o valor da opção F é homogêneo de grau um em V e E, enquanto que o gatilho normalizado (V/E)* é homogêneo de grau zero, se V e E seguirem MGB em geral correlacionados. Homogeneidade de grau um significa que se dobrar ambos V e E, o valor da opção F será dobrado também[86]. Na aplicação, pode-se trabalhar normalizando os valores em relação à variável E, ou seja, defina **p = V/E** e **f = F/E**, então graças à homogeneidade de F:

$$\mathbf{F(V, E, t) / E \;=\; F(V/E, 1, t) \;=\; f(p, t)} \qquad \mathbf{(48)}$$

Assim reduziu-se a dimensionalidade do problema, pois em vez de trabalhar com duas variáveis estocásticas V e E, se trabalha com apenas uma variável p, resultando numa EDP mais simples de trabalhar e bastante familiar. Pode-se demonstrar[87] que essa variável estocástica p = V/E segue o seguinte MGB:

$$dp = (\alpha_V - \alpha_E + \sigma^2_E - \rho\,\sigma_V\,\sigma_E)\,p\,dt + (\sigma_V\,dz_V - \sigma_E\,dz_E)$$

Também se pode provar que a EDP do valor da opção normalizada f(p, t) é:

$$\mathbf{½\,(\sigma^2_V - 2\,\rho\,\sigma_V\,\sigma_E + \sigma^2_E)\,p^2\,f_{pp} + (\delta_E - \delta_V)\,p\,f_p - \delta_E\,f + f_t = 0} \qquad \mathbf{(49)}$$

Note as semelhanças da eq. (49) com a eq. (30). Aqui δ_E faz o papel da taxa de juros livre de risco r e, por comparação, a parcela entre parênteses no primeiro termo da eq. (49) é uma volatilidade do ativo básico normalizado p = V/E, denominada volatilidade combinada σ_p:

---

[86] Uma função é homogênea de grau n em **x** se $F(t\mathbf{x}) = t^n\,F(\mathbf{x})$ para todo t > 0, n ∈ ℤ (inteiros), sendo **x** um vetor de variáveis.

[87] A demonstração é igual ao do caso análogo em Dias, 1996, onde as duas variáveis estocásticas eram o valor V e investimento I.

$$\sigma_p^{\,2} = \sigma_V^{\,2} - 2\,\rho\,\sigma_V\,\sigma_E + \sigma_E^{\,2} \qquad \textbf{(50)}$$

Essa eq. (50) também é conhecida por ser a variância da diferença de duas variáveis aleatórias correlacionadas V – E.

Outros parâmetros do modelo a serem estimados são as taxas de dividendos dos ativos V e E. Isso pode ser feito por pelo menos duas maneiras equivalentes:

(a) Sabe-se que o retorno total ou a taxa ajustada ao risco é $\mu = \alpha + \delta$. Tendo a taxa μ e uma estimativa do declínio (α), então a taxa de dividendos sai por diferença: $\delta = \mu - \alpha$. Na aplicação, a tendência α é negativa, tanto para o valor corrente V como para o de uso alternativo E; e

(b) Na estimativa dos fluxos de caixa para calcular o atual valor de mercado de V ou E, basta fazer a relação entre o valor do fluxo de caixa de cada ano (t) com o valor restante do projeto corrente V(t) ou do projeto alternativo E(t) (valor presente dos fluxos de caixa restantes a partir de t) e depois tirar uma média[88] dos valores de $\delta(t)$.

Um exemplo: Se a taxa de declínio do ativo V é $\alpha_V = -4\%$ pa. e a taxa de desconto (real e após os impostos) é $\mu_V = 6\%$ pa., então a taxa de dividendos de V é $\delta_V = 6 - (-4) = 10\%$ aa. Se a taxa de declínio do ativo E é $\alpha_E = -1\%$ aa., e a taxa de desconto é $\mu_E = 5\%$ aa., então $\delta_E = 5 - (-1) = 6\%$ aa.

As condições de contorno da EDP dada pela eq. (49) devem considerar que o preço de exercício agora é unitário, mas essa é uma opção de venda ("put"). Ou seja, deve-se exercer a opção quando a variável p atingir um preço de gatilho $p^* = (V/E)^*$, suficientemente baixo pois E tem de ser suficientemente maior que V para que seja atrativo fazer a troca de V por E. Assim, se obtém condições de contorno facilmente, por ex., a condição de continuidade ("value matching") é dada simplesmente por $\mathbf{f(p^*, t) = 1 - p^*}$, enquanto que a condição de contato suave é ainda mais simples: $\mathbf{f_p(p^*, t) = -1}$.

O gráfico típico do valor da opção de mudança de uso, para um certo momento t antes da expiração, é mostrado na Figura 25. Note que o perfil desse gráfico é igual ao de uma opção de venda ("put") americana.

---

[88] Repare que a taxa de dividendos δ não necessariamente é declinante: embora no caso os fluxos de caixa tenham tendência declinante, o valor do projeto também declina. Assim a razão δ pode se manter aproximadamente constante. O artigo de Myers & Majd (1990) inclui um exemplo em que as taxas de dividendos variam com o tempo (3 taxas em 3 fases de V).

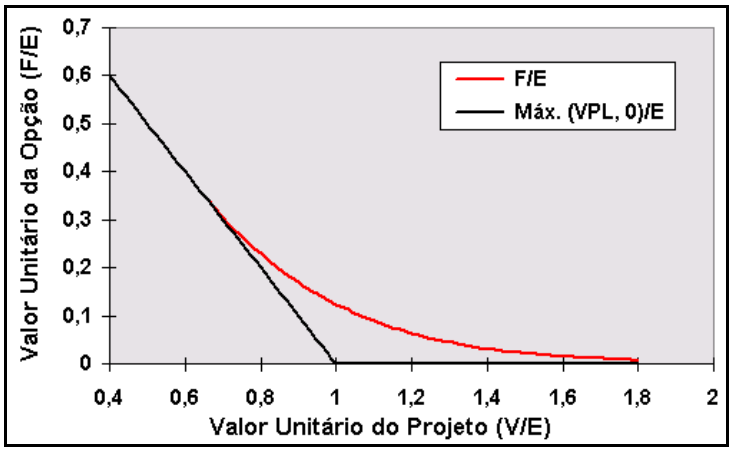

Figura 25 – Valor da Opção de Mudança de Uso Antes e na Expiração

O *tempo de expiração* da opção de mudança de uso é geralmente longo. Muitas vezes se pode colocar o tempo de vida do projeto, outras vezes colocar um valor perto da vida útil de algum equipamento chave do projeto, etc. Ao contrário do caso de concessões de blocos de exploração, em que o tempo de expiração é determinado no edital de licitação, no caso de petroleiros, sondas, unidades de refino, etc., esse tempo tem de ser estimado[89].

2.4.7. Modelos de Regulação e Incentivos em Petróleo

Nesse item será visto, de forma sumária, como a teoria das OR pode ajudar o *desenho de incentivos* e o aperfeiçoamento da regulação do setor petróleo. Serão apenas mencionados casos selecionados, alguns sendo aplicações reais de opções reais no setor petróleo. Em termos de literatura, existem artigos gerais (não específicos do setor petróleo) de regulação usando opções reais, como em Dixit (1991) e Teisberg (1988, 1993, 1994). Na indústria brasileira, os artigos de Gonçalves & Medeiros (2002) e de Santos & Guerra & Nunes (2001), tratam do tema. Há uma carência de literatura específica de regulação no setor petróleo.

2.4.7.1. Tempo de Expiração da Opção Exploratória

O primeiro caso é sobre a regulação do tempo exploratório que as firmas tem para explorar um bloco. Após esse tempo a firma devolve o bloco todo exceto a área em que tenha sido descoberto algum campo (se houver). Nesse caso, a

[89] Existe uma literatura recente de opções com tempo de expiração incerto, por ex., Berrara (1999). Algumas aplicações de opções reais irão se beneficiar dos resultados desses estudos.

firma tem de apresentar um plano de imediato investimento no desenvolvimento do mesmo. Com a abertura do setor petróleo brasileiro, esse tópico foi objeto de um debate público no Brasil, onde o artigo de Dias & Rocha (1998) teve uma importante participação, através de um artigo do ex-ministro e Deputado Federal Delfim Netto (1999).

Em 1997 uma nova lei foi aprovada no Congresso Nacional regulando a abertura do setor petróleo brasileiro e definindo o regime fiscal (sistema de concessão). Essa lei previa a licitação de áreas para exploração de petróleo, abertas a todas as companhias que preenchessem um nível mínimo de capacitação técnica e econômica. No início de 1998, a ANP disponibilizou na internet (para debate e sugestões) a primeira minuta das regras para a licitação dos blocos exploratórios, que incluía o prazo do período exploratório e a característica de poder estender esses prazos em caso de novo comprometimento em investimento exploratório (visto no tópico sobre opções estendíveis). Em cima dessa minuta, foi escrito o artigo de Dias & Rocha (1998). Nesse artigo, foi analisada a proposta de prazo da minuta da ANP em relação aos prazos das fases de exploração, assim como alternativas para esses prazos.

Na minuta da ANP, a proposta era um prazo total de 5 anos, sendo três anos no primeiro período e uma extensão para mais dois anos em caso de comprometimento de fazer investimentos exploratórios adicionais (um ou dois poços, a depender da área). Esse prazo foi considerado muito curto pela indústria de petróleo, especialmente para casos como a exploração de águas profundas (áreas mais atrativas no Brasil) e em outros locais de difícil acesso e poucas informações existentes, como na Amazônia. Nos EUA, por ex., exploração de águas profundas tem de 8 a 10 anos de prazo exploratório. Apesar das reclamações, a ANP não parecia ceder. O argumento da ANP na época, para não aumentar o prazo é que isso iria adiar os investimentos no desenvolvimento da produção, mesmo para bons projetos, em caso de descoberta.

Após a publicação de um artigo do ex-Ministro e Deputado Federal Delfim Netto, a ANP finalmente aumentou o prazo para até 9 anos em até três períodos exploratórios. Ver item 2.1.2 para detalhes.

Aqui será visto os argumentos usados em Dias & Rocha (1998) para justificar a sugestão de aumento de prazo da opção exploratória.

Em Dias & Rocha (1998), argumentou-se que a política de prazo tem dois efeitos que o regulador tem de considerar. Primeiro, o valor do bônus que as empresas pagariam no leilão pelas áreas a serem licitadas. Uma política menos restritiva de prazo viabilizaria não só uma maior participação no leilão como cada companhia de petróleo tenderia a oferecer maiores bônus, uma vez que essas áreas se tornariam mais atrativas para as empresas. O segundo efeito é aumentar a espera, ou seja, aumentando o prazo exploratório, em caso de descoberta as companhias tenderiam a adiar os investimentos maiores que se dão na fase de desenvolvimento. Assim, existem dois efeitos contrários (maior bônus x maior espera) e o balanço ótimo é um tema complexo e aparentemente subjetivo.

Como foi aqui visto, os modelos de OR dão duas respostas básicas: o valor da oportunidade de investimento (valor da OR) e a regra ótima de decisão (ex.: gatilho para investir). Dias & Rocha (1998) argumentaram que o valor da OR é uma boa referência para o valor do bônus a ser pago, incluindo o efeito da incerteza de mercado e o efeito do prazo exploratório (= tempo de expiração da opção). Ou seja, quanto maior o valor da OR, maior o bônus esperado para o bloco. Por outro lado, o gatilho P* é um bom indicador da espera: quanto maior o gatilho, mais as companhias iriam esperar. Por ex., um bom projeto que seria feito imediatamente com um prazo de 5 anos, poderia ser adiado se o prazo fosse aumentado para 8 anos pois o gatilho P* subiria (quanto maior o prazo da opção, maior o gatilho necessário para fazê-lo imediatamente). Ou seja, o valor da opção e o valor do gatilho capturavam o dilema (“trade-off”) da política de prazos da concessão para o período exploratório.

Assim, foi visto o efeito de um aumento do prazo da opção tanto no valor da opção como no valor do gatilho. Usando um processo de reversão à média com saltos, Dias & Rocha (1998, Table 2) acharam que o aumento percentual no valor da opção (e logo no bônus) era maior ou bem maior do que o aumento no valor do gatilho. Por ex., passando de 5 anos para 8 anos (de prazo total), o valor da opção aumentava 19,2 %, enquanto que o gatilho aumentava apenas 3,2 %. No entanto, para valores de prazo superiores a 10 anos, o aumento no valor da opção era muito pequeno (4,5 % quando se aumentava de 10 para 12 anos) e assim, não parecia muito recomendável prazos superiores a 10 anos. Assim, o artigo sugeria que prazos entre 8 e 10 anos (por coincidência os prazos usados nos EUA) eram os mais adequados. Antes do primeiro leilão a ANP revisou o prazo para até 9 anos,

conforme reportado no item 2.1.2, o que estava consoante com as sugestões de Dias & Rocha (1998) e a prática da indústria.

2.4.7.2. Tarifa de Transporte de Gás Natural

Outro caso real de regulação no setor petróleo brasileiro em que a teoria das OR teve uma importante participação foi o caso da tarifa para transporte de gás natural no gasoduto Bolívia-Brasil (GASBOL) nos anos de 2000 e 2001, que envolveu a companhia TBG[90], proprietária do gasoduto, e as firmas British Gas (BG) e Enersil. Essa disputa envolvia duas questões: (1) livre acesso ao GASBOL por parte das empresas BG e Enersil, apesar de toda a capacidade estar vendida à Petrobras através de tarifa "take-or-pay" (também denominado contrato "firme")[91]; (2) em caso de livre acesso, qual o valor da tarifa de transporte.

A solução arbitrada pela ANP para a primeira questão foi favorável ao pleito das empresas BG e Enersil, que conseguiram acesso na modalidade de transporte "não-firme" (ou "interruptível"), devido à ociosidade do duto na época. Na segunda questão, o valor da tarifa, é que entrou a análise de opções reais e que resultou numa vitória (ao menos parcial) para a TBG. O argumento básico é que os entrantes (BG e Enersil) teriam flexibilidade de firmarem contratos de acordo com a evolução da demanda. Caso a demanda caísse, esses contratos não seriam renovados e eles não seriam obrigados a pagar tarifas, como ocorreria se o contrato fosse do tipo "take-or-pay". Assim, o contrato não-firme deveria pagar um prêmio adicional devido à maior flexibilidade que possui, quando comparada com a tarifa "take-or-pay". Esse prêmio adicional é um prêmio de opções reais.

Em 11/01/2001, a TBG apresentou na ANP um modelo de opções reais para valorar a tarifa não-firme. Nesse modelo a demanda por gás é incerta e evolui segundo um movimento geométrico Browniano. Se a demanda sobe acima de um determinado patamar, os carregadores irão otimamente exercer a opção de fechar contratos padrões de 100.000 m3/d por um certo período e só nesse caso irão pagar tarifas. Caso a demanda caia e esses contratos não sejam renovados, os carregadores nada pagam de tarifa. Para maiores detalhes desse modelo, ver

[90] Transportadora Brasileira Gasoduto Bolívia Brasil S.A. (Petrobras é a maior acionista).

[91] Tarifa "take-or-pay" significa que o carregador do gás é obrigado a pagar uma tarifa ao transportador (TBG) considerando 100% de utilização, mesmo que use menos. Assim, é uma tarifa em que o carregador tem flexibilidade igual a zero (só tem obrigação, não tem opção).

Carvalhinho Filho & Dias (2001). A TBG argumentou que, simulando a incerteza e o exercício de opções de fechar contratos, o carregador deve ficar indiferente entre o custo das tarifas "firme" (TF) e "não-firme" (TNF) e isso só seria possível se a TNF fosse maior que a TF, com a diferença sendo o prêmio da flexibilidade (opção). Essa diferenciação pode ser feita através de um fator de carga (FCa) com valor entre 0 e 1, de forma que TNF = TF / FCa. Na simulação da TBG, foi encontrado um FCa de equilíbrio igual a 0,77 e foi reivindicado um FCa de 0,80. Já a BG pedia um FCa ≥ 1. A arbitragem do conflito pela ANP resultou em um FCa = 0,9 (ver ANP, 2001a e 2001b, p. 6-7 em ambos os documentos) o que resulta numa TNF superior em 11% ao valor da TF ("take-or-pay") refletindo, pelo menos parcialmente, o valor de opção ou de flexibilidade maior.

Foi outra vitória da aplicação de OR na regulação do setor de petróleo e energia brasileiro. O mais importante é que a idéia de valor da flexibilidade foi incorporada em análises subseqüentes da ANP em outras regulamentações. Por ex., no documento ANP (2002, p.6-7), a ANP mostra a distinção entre os termos "capacidade de transporte até determinada Zona de Entrega" e "capacidade de entrega em determinado Ponto", se dá pela flexibilidade, exemplificando:

"*…um Carregador pode contratar, por exemplo, 2 MMm3/d de Capacidade de Transporte até a Zona X, composta por quatro Pontos de Entrega, e contratar apenas 0,5 MMm3/d de Capacidade de Entrega em cada Ponto, ou, caso tenha interesse em uma maior flexibilidade de entrega, pagar uma tarifa de entrega mais elevada e dispor de até 2 MMm3/d de Capacidade de Entrega em cada Ponto, o que o permitiria, conforme a sua necessidade, entregar todo o seu gás em um único Ponto.*"

Ou seja, no contrato global (2 MMm3/d no exemplo) se o carregador quiser ter a *opção* de concentrar entregas maiores em alguns pontos e menos em outros, ele deve pagar pela flexibilidade adicional quando comparado ao contrato em que ele não tem essa flexibilidade. Mais uma vez o valor da opção (flexibilidade) é reconhecida pela ANP em seus pareceres que regulam o setor petróleo.

2.4.7.3. Regras de Leilão de Concessões e Outras Regras no E&P

Um outro caso real famoso (importante "case study" na Harvard Business School nos anos 90), dessa vez na mina peruana de Antamina, foi objeto de

análise dos incentivos embutidos nas regras do leilão da concessão sob o ponto de vista da teoria das opções reais em Moel & Tufano (1999). O objetivo do governo peruano era de conseguir o maior investimento possível da firma vencedora. Essa deveria investir em duas fases, uma fase exploratória (para determinar a quantidade e qualidade dos minérios) e uma fase de desenvolvimento da mina, em que os maiores investimentos seriam feitos. Na regra do leilão, o peso mais importante era a promessa de investimento na fase de desenvolvimento, caso a firma vencedora quisesse desenvolver a mina após a fase exploratória. Esse tipo de regra incentivou as firmas menores a fazerem lances mais agressivos, já que o desembolso imediato em bônus era relativamente pequeno.

Apesar das boas intenções (as intenções quase sempre são boas), Moel & Tufano (1999) mostraram que essa regra diminuía a probabilidade de serem feitos investimentos no desenvolvimento (exatamente o oposto da intenção), além de incentivar práticas condenáveis de difícil/custosa monitoração. Exs.: em alguns cenários, incentivam investimentos não-econômicos para complementar o valor prometido, com a aquisição de caminhões adicionais, helicópteros ou jatinhos, e/ou escolher uma alternativa com maior grau automação, mesmo sendo menos econômica, a fim de aumentar o investimento para reduzir o custo operacional (reduzindo o emprego de forma anti-econômica, o que acabou ocorrendo ao se optar por dutos de minério em vez de caminhões); ou até mesmo a prática de inflar preços de transferência na aquisição de bens e serviços de firmas afiliadas.

Assim a regra do leilão incentiva as firmas participantes (“bidders”) a prometerem um investimento elevado para desenvolver a mina, ou seja, a regra do leilão incentiva as firmas a prometerem um elevado *preço de exercício* da opção real de desenvolver a mina. No entanto, esse vultoso investimento só será justificado (a opção só será exercida) do ponto de vista racional se a fase de exploração mostrar resultados muito mais favoráveis do que o esperado. Caso contrário, a firma ganhadora poderá não desenvolver a mina e o governo peruano terá duas alternativas: (a) refazer todo o processo com uma nova licitação (adiando o desenvolvimento por mais alguns anos); (b) renegociar com a firma ganhadora para reduzir o montante de investimento prometido no leilão, a fim de iniciar logo o desenvolvimento da mina.

Um outro exemplo de boas intenções que podem gerar incentivos perversos e um alto custo de monitoração é o caso das regras de leilão da ANP para blocos

exploratórios no Brasil, onde os participantes devem ofertar, além do bônus, uma promessa de percentual mínimo de *conteúdo nacional* nos investimentos. Ou seja, a firma ganhadora deverá realizar o investimento com um percentual mínimo de compras no mercado nacional. Esse item tinha pouco peso nos primeiros leilões, mas no último leilão essa promessa se tornou bem mais importante do que o próprio bônus na pontuação do leilão[92]. Como no caso de Antamina, isso criou um incentivo para firmas (especialmente as de menor porte) a serem agressivas na promessa de conteúdo nacional (combinado com uma oferta pequena de bônus)[93].

O problema é que os maiores investimentos só ocorrerão após a exploração e delimitação, na fase de desenvolvimento, que ocorrerá cerca de 7 a 10 anos após a data do leilão. Como estará a indústria nacional nessa época? Ela estará com capacidade ociosa ou não? Terá capacidade de atender toda a demanda prometida em prazos e custos razoáveis ou será um entrave no aumento da produção de petróleo? Estará a indústria nacional capacitada tecnologicamente para suprir nessa época os diversos bens e serviços necessários no percentual prometido? Como aferir/monitorar o conteúdo nacional? Ou seja, mais uma vez se tem uma regra bem intencionada, mas que na prática reduz a probabilidade de investimento no setor, incentiva firmas oportunistas a aproveitar a difícil monitoração e cria relevantes incertezas adicionais para firmas sérias, que não querem se comprometer com promessas que tem boa chance de não poderem ser cumpridas.

Para desenvolver a indústria nacional, parece melhor dar incentivos para ela aumentar a sua produtividade e a sua capacitação (inclusive investimento em tecnologias e em gestão) através de política tributária ou de instrumentos indiretos (ex.: investimento em educação) e não através de medidas protecionistas que trarão aumento de custos às empresas, incertezas adicionais aos investidores, custos adicionais de monitoração e redução da credibilidade do setor petróleo.

Já a inclusão na pontuação do leilão de blocos do item referente à promessa de investimento exploratório, embora menos grave que no caso do investimento de desenvolvimento (Antamina), também contribui para a *ineficiência* na alocação

---

[92] No leilão de 2004 os pesos foram os seguintes: (a) 40% para conteúdo local; (b) 30% para o bônus; e (c) 30% para o programa exploratório mínimo (promessa de investimento exploratório).

[93] Realmente, as empresas americanas Devon e Kerr-McGee e a coreana SK, ganharam o bloco CM-61 (que muitos consideravam o melhor bloco do leilão) mesmo oferecendo cerca de R$ 10 MM a menos que a Petrobras, mas oferecendo um conteúdo nacional de 81% contra 60%.

de investimentos na economia. A perfuração de um poço exploratório que é esperado ser seco, só gera um crédito fiscal imediato e o "cumprimento da promessa". Seria muito melhor para a economia que essa sonda perfurasse um poço numa área com real chance de descoberta ou que fosse usada para perfurar poços de desenvolvimento. Um caso real similar, que ocorreu com a Shell, foi apresentado no artigo da Kemna (1993) e discutido em Dias (1996).

Um outro problema de regulação, que cria incertezas desnecessariamente e gera incentivos perversos, é o caso do período da concessão na fase produtiva (período de *explotação*, não confundir com o período legal de *exploração*). De forma diferente de outras concessões, um campo petrolífero atinge um pico de produção nos anos iniciais e a seguir começa uma longa fase de declínio da produção (depleção do reservatório). Tipicamente, após 20 a 25 anos (período legal típico da concessão) a produção do campo é baixa, a indesejável produção de água é alta e o campo tem uma rentabilidade muito pequena. Não apenas no Brasil, mas em várias partes do mundo, as regras de renovação da concessão não são claras e dependerá muito da boa vontade política na época. Isso gera três tipos de incentivos perversos, o primeiro em relação ao reservatório, o segundo em relação à conservação/manutenção de equipamentos e o terceiro relativo ao reinvestimento na concessão.

O primeiro problema – relativo à gerência de reservatórios, é conhecido há décadas no mercado financeiro em casos de *financiamento de projetos* ("project finance") e é conhecido como "depletion risk". Esse é o risco da companhia de petróleo, ao ver se aproximar a data final em que ela poderá ter de devolver o campo para o governo, adotar uma política de produção que aumenta a produção no curto-prazo (aumentando a abertura do "bean"), mas que prejudica a produção no médio e longo prazo ao danificar o reservatório[94]. No caso de financiamento de projetos, onde uma parcela da receita esperada é usada para pagar os agentes financeiros, essa política gerava um excesso de receita alguns anos antes do final do financiamento (receita extra capturada pelas companhias de petróleo) e uma falta de receita mínima para pagar os agentes financeiros nos últimos anos do

[94] "Bean" é uma válvula que controla a abertura dos poços e assim a sua vazão e o diferencial de pressão no fundo do poço. Uma abertura excessiva danifica o reservatório ao produzir "cones de água" e/ou "cones de gás" e/ou tamponamento por migração de argilas e areias.

contrato de financiamento[95]. No caso da ameaça de retomada da concessão (falta de transparência na regra de prorrogação da concessão), existe o mesmo incentivo perverso para as companhias de petróleo: de forma discreta e de difícil monitoração e/ou punição, elas tem incentivos para aumentarem a produção no curto prazo em detrimento da produção de médio e longo prazo.

O segundo incentivo perverso é relativo à conservação e manutenção de equipamentos de produção (plataformas, poços, dutos, linhas de fluxo, etc.). Nas regras de concessão, em caso de devolução da concessão, os equipamentos de produção deixam de pertencer à companhia de petróleo e passam a ser propriedade do governo. Se a renovação da concessão é incerta, as companhias de petróleo tendem a reduzir os custos de manutenção ao mínimo necessário para a segurança de seu pessoal. A simples atividade de pintura (que previne corrosão da plataforma e equipamentos) tende a não ser feita nos últimos anos. Também, um poço que parar de produzir por problemas mecânicos, ficará parado, pois a empresa não tem incentivos de enviar uma sonda para fazer uma cara manutenção se o benefício tiver relevante probabilidade de ficar apenas (ou principalmente) com o governo e não com a empresa.

O terceiro incentivo perverso é em relação ao reinvestimento. Com o passar do tempo de produção e com ajuda de tecnologias de sísmica 4D[96], a companhia de petróleo teria incentivos de reinvestir na concessão perfurando novos poços, ou mesmo um ajuste ótimo nas cotas de produção e injeção de água nos poços existentes que aumentaria a recuperação de petróleo, principalmente no médio e longo prazo. Se a renovação da concessão é incerta, a companhia de petróleo não tem os mesmos incentivos para fazer isso. Investimentos em sísmica 4D (especialmente nos últimos 5 a 10 anos da concessão) tendem a não ser feitos. O mesmo ocorre com investimento de *adensamento de malha* (perfuração de novos poços produtores). Assim, a falta de transparência nessas regras reduz os investimentos no setor, a produção de petróleo no país e os impostos que ela gera. Certamente os bem intencionados reguladores não têm essa intenção, mas o efeito prático da falta de transparência desconhece essas boas intenções.

---

[95] Nesse tipo estruturado de financiamento, é criada uma *empresa-projeto* fora do balanço da companhia de petróleo. Se a empresa-projeto ficar inadimplente, o prejuízo é dos financiadores.

[96] Sísmica 4D é uma sísmica 3D (pesquisa área e profundidade) feita repetidamente ao longo do tempo (a quarta dimensão). Ela permite, por ex., acompanhar melhor a performance de injeção de água e da produção de petróleo no reservatório, e assim otimizar a produção e a injeção.

2.4.8.
Poços Inteligentes e Outros Modelos de OR em Petróleo

Existem outros modelos de OR muito interessantes e que por falta de espaço não serão cobertos com o mínimo de detalhe que merece. Dentre esses modelos se destacam os de valoração de investimentos em *poços inteligentes* e os de desenvolvimento de *tecnologias para águas ultra-profundas*. Esses dois casos serão abordados brevemente nessa seção, sob o ponto de vista de OR.

Também existem modelos clássicos de OR que não são adequados para petróleo, especialmente E&P. Um exemplo é o "modelo de tempo de construção" de Majd & Pindyck (1987). Embora os campos marítimos levem tipicamente cerca de três anos para iniciar produção após o início de investimentos, esse caso é muito diferente das aplicações típicas desses modelos, que são as usinas nucleares, grandes usinas hidrelétricas e algumas grandes obras públicas (ex.: túnel sob o Canal da Mancha). Nesses casos, embora o tempo de construção seja geralmente maior (5 anos ou mais), essa não é a característica principal de diferenciação do caso de petróleo. Enquanto aquelas obras são feitas no próprio local onde será a produção (e logo se parar a obra só afeta o próprio local), uma plataforma marítima de petróleo é construída em um estaleiro e depois transportada para o local de produção. Assim, não existe a opção de deixar a plataforma parada no estaleiro no meio da construção aguardando melhores condições de mercado. Por isso os contratos dos estaleiros com as empresas de petróleo não permitem que essas fiquem exercendo opções de parada temporária do investimento. A existência de OR durante o tempo de construção é que caracteriza os "modelos de tempo de construção" e não simplesmente o tempo esperado de construção[97]. Assim, as conclusões de "modelos de tempo de construção" sobre o prêmio da OR sobre o VPL ou sobre o gatilho de imediato investimento, em geral não se aplicam ao caso de desenvolvimento da produção de petróleo e sim apenas a casos específicos citados. Como no FCD, em OR o tempo de construção é importante porque tem efeito no valor presente de receitas e custos, afetando o valor do ativo básico V (no *modelo de negócios* afeta o valor de q) e o preço de exercício I_D.

[97] Como o tempo de construção é uma das diferenças entre opções financeiras e reais, muitos iniciantes no tema de OR tendem a achar que é necessário usar modelos de "tempo de construção" para serem mais realistas. Mas, na maioria dos casos, as opções nesse período não existem ou são pouco relevantes, como ocorre em desenvolvimento da produção de petróleo.

Já no caso de construção de *refinarias de petróleo* (que são construídas no próprio local), o modelo de tempo de construção pode ter relevância *se* o contrato com a construtora permitir (provavelmente a um certo custo) a interrupção.

Uma da mais naturais aplicações de OR em produção de petróleo é a valoração dos *poços inteligentes* ou poços espertos ("smart wells"). A tecnologia de poços inteligentes é recente (ainda em desenvolvimento), e seu custo em geral não pode ser justificado com a ferramenta tradicional do FCD. A valoração econômica de poços inteligentes através de OR é também bem recente. Existe um software comercial de OR para valorar poços inteligentes da firma WellDynamics. Aqui será discutida essa aplicação fazendo referência a dois artigos baseados nesse software, Sharma et al. (2002) e Han (2003).

Na completação convencional de um poço para produzir, são instalados equipamentos simples, onde os *canhoneados*[98] são fixos (abertos) e se quiser fechar parte deles (ex., por problemas de produção excessiva de água ou "cone de água") é necessário o uso de sondas, que são caras especialmente em águas profundas. Além disso, poços convencionais não têm medições de fundo de poço de variáveis tais como vazão, pressão, percentagem de água, razão gás-óleo, etc.

Numa completação inteligente, são instalados no poço vários equipamentos adicionais mais sofisticados, requerendo um investimento incremental. Esses equipamentos em geral incluem sensores e medidores para a monitoração em tempo real de variáveis de fundo do poço e válvulas que permitem fechamento selecionado dos canhoneados, remotamente. Por ex., em caso do indesejável "cone de gás" (que não só reduz o fluxo de óleo como despressuriza o reservatório, reduzindo a recuperação de óleo), pode-se fechar apenas os canhoneados superiores remotamente, sem incorrer no custo de intervenção por sondas e num tempo muito menor que no caso de ter de mobilizar uma sonda.

O "grau de inteligência" de um poço pode variar, mas em geral significa um investimento adicional razoável, para o equipamento ser confiável em elevadas pressões e temperaturas do fundo do poço. A heterogeneidade da rocha reservatório faz com que, mesmos em campos bem delimitados, existam incertezas que impedem uma configuração ótima pré-determinada nos

[98] Canhoneados são perfurações no revestimento do fundo do poço por onde o petróleo é produzido (ou a água é injetada, em caso de poços injetores). Esses furos são feitos por projéteis disparados por equipamentos chamados *canhões*, daí o nome.

canhoneados de cada poço. Em águas profundas, onde as intervenções de sonda nos poços são ainda mais caras, essa tecnologia pode ser ainda mais relevante.

O benefício dos poços inteligentes está associado ao valor da flexibilidade operacional de ajustar as válvulas do fundo dos poços a partir da análise feita com a chegada (contínua) de novas informações dos sensores de fundo. A chegada dessas novas informações vai *reduzindo a incerteza técnica* sobre o comportamento do reservatório a nível "micro", i. é, ao nível de cada poço.

Assim, poços inteligentes permitem o exercício ótimo de OR operacionais conforme a incerteza técnica vai sendo reduzida. Como mostrado tanto em Sharma et al. (2002) como em Han (2003), existem *dois benefícios* com essa tecnologia, a redução de incerteza e o ganho de valor (ou *salto* de valor). Para ilustrar esses dois benefícios eles usaram uma figura similar à mostrada na Figura 26 a seguir, onde as distribuições podem representar tanto as receitas líquidas de custos operacionais como retornos obtidos pelos poços convencionais e poços inteligentes.

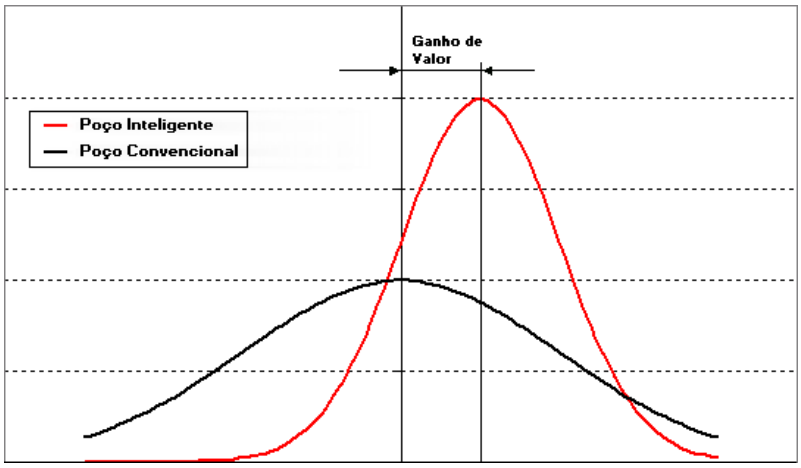

Figura 26 – Poço Inteligente: Ganhos de Valor e de Redução de Incerteza

O ganho de valor se dá principalmente através de redução da intervenção de sondas nos poços, redução de produção de água, aceleração da produção (aumenta o valor presente das receitas) e aumento da recuperação de óleo. Conforme os mencionados artigos argumentam, métodos tradicionais de valoração tais como o FCD, especialmente ignoram o valor advindo da redução na variância da incerteza técnica da produção. O valor da redução da incerteza com a chegada de novas informações que é especialmente capturada pela técnica de OR.

A discordância dessa tese em relação aos dois artigos mencionados está em como calcular o valor de OR dos poços inteligentes. Esses dois artigos usaram a

equação de Black & Scholes (1973) e a equação de Merton (1976) para a combinação de MGB e saltos (Poisson). A idéia dos saltos não é má, pois esses ganhos de valor ocorrem com uma certa freqüência mas de forma aleatória, assim como os tamanhos desses saltos são incertos. No entanto, o uso de um processo de difusão (MGB) para a incerteza técnica incorre num relevante erro conceitual. A chave do erro está em como se interpreta a volatilidade e todo o processo de redução de incerteza com o acúmulo de informação. Isso será discutido em detalhes no cap. 3. Aqui, será descrito como os artigos interpretam a equação de Black & Scholes na aplicação de poços inteligentes (será usada a notação da tese).

O valor do ativo básico V é o valor presente das receitas líquidas esperadas com base na completação convencional. O preço de exercício é o valor presente do investimento I para obter V[99]. A volatilidade σ é a quantidade de incerteza em V que é resolvida (reduzida) no período t. A expiração da opção é o tempo para o primeiro benefício da completação inteligente. No lugar da taxa livre de risco r eles usam uma taxa de desconto ajustada ao risco, tal como o custo médio ponderado de capital (CMPC). Segundo os artigos, com a equação de Black & Scholes (sem dividendos) se captura o primeiro benefício que é a redução de incerteza.

O primeiro comentário é que embora a intuição esteja certa – a redução de incerteza tem um efeito que *lembra* a volatilidade ao aumentar o valor da opção, não há sentido em modelar a incerteza técnica (ou a redução da mesma) como um MGB, em que a variância cresce pelo simples passar do tempo e de forma ilimitada (ver detalhes no cap. 3). O uso de um tempo de expiração igual ao tempo do primeiro benefício, parece arbitrário mas de certa forma procura minimizar o erro de adotar um processo estocástico de difusão tais como o MGB, pois tempos maiores fariam a variância do MGB atingir valores demasiadamente elevados, resultando em valores exagerados do valor da opção, reduzindo a confiabilidade da valoração de OR. Outro problema é que mesmo que a informação chegue continuamente com o tempo de produção, a redução esperada de variância é maior no início da produção do que no final. Assim, a taxa de redução da variância vai diminuindo ao longo do tempo (com o acúmulo de informações) para valores bem

[99] Adotado em Sharma et al (2002). Em Han (2003), V e I são valores incrementais do poço inteligente em relação ao poço convencional. Ambos os casos tem os seus problemas.

menores que no início. Nesse caso a "volatilidade" deveria ser uma função decrescente com o tempo para tentar representar a redução esperada de incerteza.

Outro comentário é em relação ao uso da taxa de desconto CMPC em vez da taxa livre de risco. Isso tem sido usado em Dixit & Pindyck (1994) para o caso de *mercados incompletos* com o chamado método da *programação dinâmica*, que é uma alternativa ao método dos ativos contingentes. No entanto, não parece ser o caso de mercado incompleto. Além disso, o uso da solução analítica da equação de Black & Scholes supõe que se está usando o método dos ativos contingentes e não o da programação dinâmica. Assim, para um mínimo de consistência, deveria ser usada a taxa livre de risco r em vez do CMPC e as receitas em V deveriam ser calculadas com os preços do petróleo seguindo uma tendência livre de risco (ou seja, valores penalizados pelo prêmio de risco, como visto anteriormente).

O artigo de Sharma et al. (2002) detalha bem mais a metodologia de OR empregada do que o artigo de Han (2003). Eles apresentaram 4 exemplos de avaliação de OR em poços inteligentes por tipo de benefício: (a) redução do custo de intervenção nos poços; (b) aceleração da produção; (c) aumento do fator de recuperação de petróleo (aumento do volume de reservas B); (d) aceleração da produção e aumento do fator de recuperação.

A alternativa proposta nessa tese para resolver esse tipo de problema de OR em que a incerteza técnica tem um papel chave é através de uma modelagem mais rigorosa desse tipo de incerteza. No próximo capítulo será visto como as reduções esperadas de variância dão diretamente as variâncias das *distribuições de revelações*, que podem ser usadas para calcular o valor da OR em simulações de Monte Carlo de forma consistente.

No entanto, há de se reconhecer a complexidade do tratamento da incerteza técnica de reservatórios. O ideal seria realizar milhares de simulações de reservatórios, para a mesma malha de poços, considerando os dois casos, poços convencionais e poços inteligentes. Cada uma das (milhares de) simulações consideraria um cenário de heterogeneidade e de outras características de reservatório (contato óleo-água, permeabilidade de falhas, etc.). No caso de poços inteligentes, quando por ex. começasse a ser revelado um cenário de "cone de água" num certo poço, seria exercida imediatamente a opção de fechar uma parte dos canhoneados inferiores. No caso de poço convencional, essa informação chegaria atrasada (pois não tem medição em tempo real) e com ruído (medição

apenas na plataforma e não no fundo do poço) e o tempo e o custo para mobilizar uma sonda seria considerado. Em muitos casos, com poço convencional o problema de "cone de água" não justificaria uma cara intervenção por sonda e assim, com essa tecnologia convencional, teria de conviver com a perda de produção de óleo e a redução de fator de recuperação. O problema é que a velocidade dos computadores de hoje ainda não permite que se façam milhares de simulações de reservatórios num tempo razoável.

Em resumo, a tecnologia de poços inteligentes é uma típica aplicação em que a teoria das OR pode fazer muita diferença na sua valoração, já que o cerne de seu valor é justamente a possibilidade de exercer opções operacionais (fechamento e abertura de válvulas) conforme os cenários de incerteza técnica forem sendo revelados ao longo da produção. No entanto, em vista da complexidade do problema da incerteza técnica e as limitações dos simuladores de reservatórios[100], a valoração correta por OR ainda é um desafio. Para enfrentar esse desafio é necessário começar por uma modelagem mais rigorosa e adequada da incerteza técnica. O capítulo 3 dessa tese procura dar uma contribuição nessa direção.

O caso de valoração de investimento em *tecnologias para águas profundas e ultraprofundas* é outra aplicação em que o uso de OR pode ser decisivo quando comparado com a valoração tradicional do FCD. No Brasil, desde a década de 70 que se sabe que os maiores volumes de reserva a descobrir se encontram em águas profundas do litoral brasileiro. A história do investimento nessas tecnologias na Petrobras nos anos 80 e 90, principalmente através do Procap (Programa de Capacitação em Águas Profundas), é um ótimo exemplo para ilustrar o valor de OR dessas tecnologias. Izetti (2000), faz um resumo da história do Procap, analisa o valor de projetos de inovação tecnológica com ajuda da teoria das OR e exemplifica valorando a tecnologia de bombeamento centrífugo submerso em poços de petróleo.

O investimento de uma companhia de petróleo em tecnologias de águas profundas não apenas permite a viabilidade técnica e o aumento da atratividade

[100] Baixa velocidade, caracterização de incertezas técnicas de reservatórios ainda na infância, simuladores não preparados para realizar automaticamente o fechamento selecionado de canhoneados, etc. Isso faz com que a simulação de reservatórios seja uma restrição maior à rigorosa avaliação de poços inteligentes do que o necessário progresso de OR na área técnica.

econômica de projetos do portfólio de reservas não-desenvolvidas dessa firma, como dá a opção dessa companhia atuar de forma privilegiada em licitações de blocos exploratórios em várias partes do mundo. Além disso, a capacitação da companhia de petróleo nessa área a torna mais valiosa para realizar parcerias com outras companhias de petróleo que tenham reservas não-desenvolvidas e/ou prospectos exploratórios em águas profundas. A prática tem mostrado que a capacitação nessa área é um ativo valioso de uma companhia de petróleo, pois a tendência é que cada vez mais as novas descobertas no mundo sejam feitas em águas cada vez mais profundas.

Programas de investimentos nessas tecnologias, como o Procap, tem alocado recursos tanto em projetos de *extensão tecnológica* com em projetos de *inovação tecnológica*. O primeiro tem menor risco de falha, mas benefícios limitados, e se propõe a estender tecnologias usadas em águas mais rasas para águas mais profundas, procurando, por ex., fazer adaptações para resistir a maiores pressões e menores temperaturas. Já os projetos de inovação tecnológica são projetos mais arrojados e propõem mudanças mais profundas usando, por ex., novos conceitos, novos materiais, etc.

Não existe um modelo único de OR para valorar essas tecnologias. Isso irá depender do tipo de aplicação. A literatura de valoração de projetos de P&D com OR é vasta. Há muito tempo que patentes são vistas como OR, ver por ex., Pakes (1986). Existem modelos mais simplificados e outros mais realistas, mas mais complexos (mais parâmetros para estimar, mais intensivos computacionalmente, etc). Um bom exemplo de modelos mais elaborados e complexos é o de Schwartz & Zozaya-Gorostiza (2000). Mas existem muitos modelos mais simples que dão uma idéia muito melhor de valor da tecnologia do que o método tradicional de FCD. Um bom exemplo é Lint & Pennings (2001), baseada numa experiência real de aplicação de OR na Philips Eletronics, para avaliar o investimento no desenvolvimento de novos produtos.

As principais opções a serem consideradas em modelos para aplicações de P&D são a opção de abandono da pesquisa e a opção de desenvolvimento (transformar uma patente em produto comercial).

A primeira opção (de abandono) é mais valiosa quanto mais arrojada for a pesquisa. Isso porque maior é a probabilidade que o investimento em P&D leve a um resultado que não valha a pena patentear, por não obter uma solução técnica

adequada. Nesse caso a pesquisa pode ser abandonada, limitando as perdas. Mas os cenários em que esse investimento gera uma patente valiosa, podem justificar economicamente o início do investimento em P&D em produtos inovadores.

A segunda opção (de desenvolvimento) é típica da atividade de P&D. Patentes não são nada mais do que opções reais (americanas) de longa duração em que o detentor tem o direito de desenvolver com exclusividade produtos a ela relacionados. Como visto, essa opção tem de estar madura para ser exercida. Muitas vezes ainda existem incertezas técnicas que justificam o exercício em fases da opção de desenvolvimento: construção de protótipo, sistema piloto de produção, teste de mercado com produção limitada, etc.

Um exemplo simples é o investimento paralelo em duas tecnologias diferentes para a mesma aplicação. Muitos podem pensar que seria melhor investir numa tecnologia apenas. Mas o investimento nas duas tecnologias dá ao investidor a opção de investir no máximo de dois ativos de risco. Isso é bem conhecido na literatura de opções (desde pelo menos Stulz, 1982) e possibilidade de escolher a tecnologia de maior valor pode justificar o investimento adicional. Um exemplo é a concorrência em termos de *nicho de aplicação* das tecnologias de *separação submarina*[101] e de *bombeamento multifásico submarino*[102]. Enquanto a primeira é mais bem caracterizada como extensão tecnológica, a segunda está mais para inovação tecnológica. Um outro exemplo, na área de telecomunicações, seria o investimento em capacitação nas tecnologias ISDN e ADSL, que permitem um melhor aproveitamento de banda (ex.: em aplicações de banda larga para acesso à internet por linha telefônica) para a malha de linhas de cobre existente.

Uma pergunta típica a ser respondida com modelos de OR é até quanto vale a pena gastar para ter a capacitação que permita daqui a um ano implantar uma das duas tecnologias em um grande mercado? Para simplificar, suponha que a capacitação leve um ano e a firma terá naquela data uma opção "agora-ou-nunca" de implantar uma das duas tecnologias[103]. Sejam V_1 e V_2 os valores correntes de

[101] Equipamento submarino que separa os líquidos (óleo e água) do gás, envia esses fluidos em linhas separadas para a plataforma, reduzindo a contrapressão nos poços e aumentando a sua produção.

[102] Equipamento submarino que bombeia a mistura óleo + água + gás para a plataforma, reduzindo a contrapressão nos poços e aumentando a sua produção.

[103] No caso de petróleo pode-se pensar que campos importantes de águas profundas expiram daqui a um ano. Em telecomunicação, suponha que a entrada de concorrentes destrua a opção de implantar a tecnologia em caso de espera adicional.

mercado do desenvolvimento de projetos usando as tecnologias 1 e 2. Esses valores esses que seguem processos estocásticos correlacionados (se tem o mesmo nicho a correlação deve ser positiva). Os preços de exercício são I_1 e I_2 (investimentos para desenvolver o projeto com cada tecnologia). Nesse caso, se tem uma opção do tipo européia de máximo de dois ativos de risco. Na expiração (t = T), o valor da OR nesse caso é dado por:

$$\mathbf{F(V_1, V_2, I_1, I_2, T) = Max[(V_1 - I_1, V_2 - I_2, 0)} \qquad \mathbf{(51)}$$

Pode-se resolver essa opção através da simulação de Monte Carlo neutra ao risco dos processos estocásticos correlacionados de V_1 e V_2, aplicar a eq. (51) e calcular o valor presente multiplicando o resultado da média simulada da eq. (51) pelo fator de desconto livre de risco, que é igual a exp(– r T).

No caso de V_1 e V_2 seguirem MGB correlacionados e caso $I_1 = I_2$, pode-se aplicar uma fórmula analítica para resolver esse problema de OR, ver por ex., Haug (1998, p.57).

A vasta literatura de OR em P&D dá um conjunto de *opções* de modelos de OR, e o modelador deve selecionar o mais adequado em termos de aplicação e de balanço realismo x complexidade. Existem livros com coletâneas de artigos de OR em P&D, por ex., Paxson (2003). Também existem livros mais avançados, que inclusive considera aspectos estratégicos da ação de outras companhias usando a teoria dos jogos combinada com OR, os jogos de OR analisados em Huisman (2001). Esse será um assunto dos capítulos 4 e 5.

3
Incerteza Técnica, Valor da Informação e Processo de Revelação

3.1.
Incerteza Técnica e Valor da Informação

3.1.1.
Introdução sobre Incerteza Técnica e a Teoria de Finanças

A incerteza técnica é aquela relacionada às características específicas de um projeto. Uma classe relacionada de incerteza é aquela descrita por Zeira (1987) como "incerteza estrutural", na qual a firma não conhece totalmente a sua própria função lucro e pode descobri-la através de investimentos. Dessa forma, "*investimento sob incerteza estrutural cria uma interação entre a acumulação de capital e a acumulação de informação*" (Zeira, 1987, p.204-205). Embora Zeira estivesse mais preocupado em efeitos macroeconômicos de acumulação de capital e em aplicações sobre incentivos para fazer testes de mercado para conhecer a sua função demanda, essa incerteza estrutural – tal como a incerteza técnica aqui focada, incentiva o investimento em processos de aprendizagem da função lucro.

Incerteza técnica tem um papel muito importante na valoração de muitos ativos especialmente em E&P em petróleo. Aqui, será focada a incerteza técnica sobre a existência, o volume e a qualidade de um campo de petróleo. Mas a metodologia pode ser estendida para incertezas técnicas de outras indústrias[104], por ex., em mineração, em P&D de inovação tecnológica (especialmente os realizados em fases, como na indústria farmacêutica), etc.

Em E&P de petróleo, na primeira fase exploratória (rever Figura 1), onde se tem a opção de perfurar o poço pioneiro, estão presentes os três tipos de incerteza técnica da reserva (existência, volume e qualidade), com destaque ao mais primário de todos, que é a existência de um campo de petróleo. Essa incerteza é

[104] Devem ser também observadas as características específicas que demandam adaptações.

modelada pelo fator de chance exploratório (distribuição de Bernoulli), que será particularmente discutida nesse capítulo (item 3.4).

Já nas fases de delimitação e desenvolvimento, as incertezas remanescentes são o volume e a qualidade. Em geral, a seqüência de investimento em exploração e explotação da reserva, e o histórico de produção, vai reduzindo essa incerteza.

Na fase de produção, em geral a incerteza técnica do reservatório ainda existe, mas é muito menor que antes do início do investimento e da produção. Mas mesmo assim essa incerteza técnica pode ser ainda suficientemente importante para justificar investimentos em informação adicional nessa fase, tais como a sísmica 4D[105] e conversão de poços convencionais em poços inteligentes.

Um dos principais objetivos dessa tese (senão o principal) é prover os modelos de OR de uma abordagem mais rigorosa – mas ao mesmo tempo prática, para tratar a incerteza técnica. Em contraste com a incerteza de mercado, a modelagem de incerteza técnica tem sido pobremente analisada na literatura de OR, com raras exceções. Assim, a necessidade motivou o autor para desenvolver novos caminhos para modelar a incerteza técnica visando aplicações de OR.

Dada a importância do tema, a literatura mais recente de OR em petróleo começa a abordar com freqüência os temas de incerteza técnica e processos de aprendizagem. Ver por ex., Chorn & Carr (1997); Chorn & Croft (2000); Dias (2001b); Gallant, Kieffel & Chatwin (1999); Galli, Armstrong & Jehl (1999); Galli, Armstrong & Dias (2004); Sharma et al. (2002); Whiteside & Drown & Levy (2001), entre outros. Como foi visto no cap. 2, incerteza técnica é o foco de várias aplicações de OR em petróleo tais como a avaliação econômica de poços inteligentes e de opção de expansão.

Berk & Green & Naik (2004) analisam a questão do prêmio de risco em projetos com incerteza técnica (P&D), mas considerando: (a) que o valor do projeto (ou da firma de P&D) tem componentes de risco não-sistemáticos (incerteza técnica), mas também components de risco sistemático (fluxos de caixa após a completação do projeto de P&D); (b) o efeito seqüencial das OR altera o prêmio de risco do projeto. Mas eles chegam a conclusões (p.3) já esperadas pela própria literatura de opções financeiras: o risco da opção de compra é maior do

[105] Análises de VOI na Petrobras em 2003 mais que justificaram os investimentos em sísmica 4D para vários campos marítimos.

que o risco do ativo básico para o caso de opção "out-of-money" e igual ao do ativo básico para opções "deep-in-the-money".

Na literatura teórica de finanças, um artigo famoso que já foi usado em aplicações de OR relacionadas à incerteza técnica é o de Merton (1987) sobre *mercado incompleto*. Mais recentemente Merton (1998) voltou a abordar o problema de mercado incompleto com um modelo de "tracking error" que segue um movimento Browniano. No entanto, essas abordagens parecem mais úteis do ponto de vista da decisão de um acionista na avaliação de uma ação com razoável risco específico (ex.: obter mais informações sobre uma firma pouco conhecida ou avaliar discrepâncias econométricas de retorno para obter algum retorno anormal) do que do ponto de vista de uma firma, que deve decidir se investe ou não em informação num projeto com incertezas técnicas bem específicas.

Num mercado incompleto existem ativos (ações de firmas) em que a informação disponível no mercado a respeito do seu retorno é incompleta, ou distribuída de forma assimétrica entre os investidores, ou flui numa velocidade menor que a requerida para um mercado eficiente e completo. Isso pode fazer com que os retornos esperados de certas firmas dependam não só do risco de mercado como também da variância total, fenômeno que é chamado por Merton (1987) de discrepância α_k da ação k (que é zero se o mercado é completo). Mas essa discrepância é um fenômeno relevante apenas para certos tipos de firma. Por ex.: "*firmas menores tendem a ter maior variância total e menor correlação de seus retornos com o mercado geral*", "*firmas menores tendem a ter muito menos acionistas que firmas grandes*", "*firmas mais conhecidas e com maior base de acionistas terão menores* α_k" (Merton, 1987, p.497).

Nessa tese, em que o foco está em aplicações em petróleo do ponto de vista de corporações com grande base de acionistas, e que em geral são firmas antigas e conhecidas no mercado, essa discrepância é muito pequena (ou muito menor que para firmas da "nova economia", por ex.) e assim será considerado a premissa razoável de que o mercado é suficientemente completo para se usar a teoria clássica de finanças. A visão de que riscos técnicos (ou únicos ou diversificáveis) não demandam prêmio de risco é assumida rotineiramente em livros texto de finanças corporativas tais como, por ex., Brealey & Myers (1999, p.167-169).

Proposição 4: A incerteza técnica não demanda prêmio de risco por parte de corporações com acionistas diversificados.

Prova: A teoria neoclássica de finanças, em especial a teoria de portfólio e o CAPM ("capital asset pricing model") mostra a distinção entre *risco diversificável* e *risco não-diversificável*. Pelo CAPM, a taxa ajustada ao risco $\mu = r + \pi$, onde π é o prêmio de risco demandado por investidores diversificados, dado pelo produto do fator β pelo spread de retorno do mercado ($r_M - r$), onde r_M é o retorno do portfólio de mercado e β a covariância do retorno do ativo com o retorno do mercado, normalizada (dividida) pela variância de mercado. Mas a incerteza técnica é *independente* da evolução do mercado (flutuações do mercado não afetam a probabilidade de ocorrência de petróleo, o volume, etc.) e, logo, tem *correlação zero* com o retorno do portfólio de mercado (é um *risco diversificável*). Assim, pela definição, tem-se $\beta = 0$ e, portanto $\pi = 0$. Logo, a incerteza técnica não demanda prêmio de risco por parte de investidores diversificados de corporações – como os acionistas de companhias de petróleo. □

A Proposição 4 tem importantes implicações na valoração de OR, especialmente nos métodos que usam a valoração neutra ao risco (Bingham & Kiesel, 1998), tipicamente aplicando a teoria dos martingales (Musiela & Rutkowski, 1997). Exemplos de métodos neutros ao risco são os métodos *binomial* (Cox, Ross & Rubinstein, 1979) e o da *simulação de Monte Carlo de processos neutros ao risco*[106]. Enquanto que os processos estocásticos são ajustados ao risco através da subtração de um prêmio de risco (ver a eq. 8), as distribuições de probabilidade da incerteza técnica não necessitam de nenhum ajustamento ao risco, pois o prêmio de risco requerido por investidores diversificados é zero.

Assim, a combinação de incertezas técnicas com incerteza de mercado em modelos de OR pode se dar de uma forma mais simples se for usado um método neutro ao risco. Especificamente, pode-se usar a taxa livre de risco r para descontar valores futuros, caso se trabalhe com processos estocásticos neutros ao risco (i. é, penalizados por prêmios de risco) para as variáveis de mercado, combinados com as distribuições de probabilidade que representam as incertezas técnicas, as quais já são *naturalmente* neutras ao risco.

[106] Já o método da EDP (ver Proposição 3) parte de processos reais e não neutros ao risco. Lá a neutralização ao risco é feita depois, através da construção de um portfólio livre de risco.

O fato da incerteza técnica não demandar prêmio de risco é reconhecido não só na teoria como na prática das empresas de petróleo. Por ex., num mesmo país, as companhias de petróleo usam a mesma taxa de desconto ajustada ao risco para projetos de exploração (que têm elevada incerteza técnica) e para projetos de desenvolvimento da produção (que têm incerteza técnica muito menor). No entanto, muitos gerentes e praticantes de análise econômica ainda confundem esse ponto, achando que essa incerteza deveria ser penalizada na taxa de desconto e que não penalizá-la seria ignorar esse risco. Essa seção introdutória tem a intenção de esclarecer esse ponto.

Existe também o problema conhecido na literatura como *agente x principal* ou problema de *agência*, indesejável, mas comum em corporações. O problema é que o gerente (agente) nem sempre está alinhado com os acionistas (principal). Em geral o gerente não é diversificado como os acionistas e assim não representa de forma perfeita os seus interesses. A *assimetria de informações* (agente é mais bem informado), dificulta o principal a monitorar o agente. No caso da incerteza técnica, o gerente tem a tendência de aversão maior por não ser diversificado e isso pode levá-lo a considerar suas preferências ao risco técnico nas suas decisões de investimento em detrimento das preferências agregadas dos acionistas (que em geral podem ser medidas no mercado). Isso é um desvio que é enfrentado através do desenho de incentivos adequados, ver por ex. Mas-Colell, Whinston & Green (1995). Mas a discussão de prêmio de risco não é tudo no caso da incerteza técnica e os gerentes têm um papel fundamental para maximizar o valor do acionista com o gerenciamento da incerteza técnica.

Não demandar prêmio de risco é um importante e incontestável resultado da teoria neoclássica de finanças corporativas, mas é apenas *um dos aspectos* do papel da incerteza técnica na valoração de ativos. Não demandar prêmio de risco não quer dizer que a incerteza técnica não seja importante ou que seja menos importante que a incerteza de mercado. Os acionistas esperam que os gerentes otimizem o valor da firma inclusive através do gerenciamento ótimo da incerteza técnica. Ao contrário dos acionistas, os gerentes podem fazer muito melhor do que apenas *diversificar*, eles podem *alavancar* o valor da firma através do gerenciamento ótimo da incerteza técnica. Em outras palavras, uma teoria sobre o prêmio de risco, como o CAPM, é válida e necessária, mas *não é suficiente* para maximizar o valor da firma sob incertezas.

A incerteza técnica em projetos de investimento tem dois lados. Um é o lado da *ameaça*, pois a incerteza técnica leva quase certamente a decisões sub ótimas de investimento. O outro lado é o da *oportunidade*, pois cria oportunidades de investimento em informação, em que o exercício de *opções de aprendizagem* ("learning options") pode ser muito valioso.

O lado negativo da incerteza técnica é que, apenas por sorte, o projeto otimizado *ex ante* se mostrará também otimizado na realidade *ex post*. Para ver isso, suponha que existe uma distribuição de probabilidades representando a incerteza do volume de reservas B. Suponha que o investimento ótimo (quantidade de poços, capacidade de processo, diâmetro de dutos, etc.) para desenvolver o campo foi calculado usando E[B] (o valor esperado minimiza o erro). Suponha que o investimento ótimo é uma função monotônica crescente de B, por ex. linear como na eq. (28). Assim, se ex post o cenário verdadeiro revelado de B for maior que E[B], então o investimento será *insuficiente* (sub-ótimo), enquanto que se o verdadeiro cenário revelado for B menor que E[B], então o investimento será *excessivo* (sub-ótimo também) para o tamanho da reserva. Assim, se a distribuição de probabilidades de B é contínua, então se pode dizer que a incerteza técnica leva *quase certamente*[107] a investimentos sub-ótimos.

Além disso, a incerteza técnica pode levar tanto ao exercício prematuro da opção (quando, para o *verdadeiro* cenário técnico, o ótimo seria esperar) como ao não exercício da opção quando o melhor seria exercê-la de imediato (para o *verdadeiro* cenário técnico de volume e qualidade da reserva). Assim, a incerteza técnica diminui o valor do projeto por levar a decisões sub ótimas de investimento e não devido a uma aversão ao risco técnico ou devido à "função utilidade do gerente", como alegado por alguns pesquisadores da escola tradicional de *análise de decisão*, que ignoram conceitos básicos da teoria de finanças corporativas, em especial a distinção de riscos diversificável e não-diversificável.

O investimento em informação pode alavancar o valor do projeto, pois pode levar a melhorar bastante a rentabilidade do projeto em caso de informações favoráveis e evitar fazer um mau projeto (ou de investir em excesso) em caso de informações desfavoráveis. Ou seja, em ambos os casos a informação é valiosa.

---

[107] *Quase certamente* significa que só não é válida em um conjunto de *medida* (de probabilidade) *igual a zero*. No caso, só é ótimo em *um* cenário num universo de *infinitos* cenários.

Assim a incerteza técnica provoca dois efeitos de sentidos opostos no valor de projetos. Em especial, o lado do benefício pode ser mais bem avaliado com métodos de OR, que valoriza a flexibilidade de resposta com a chegada de novas informações. Nesse contexto, surge a chamada análise de valor da informação, a ser vista a seguir, inicialmente desde um ponto de vista tradicional, e depois visto de uma nova forma para se adaptar ao contexto mais dinâmico de OR.

3.1.2. Introdução à Análise de Valor da Informação

A análise de valor da informação (VOI ou "value of information") é bem antiga (ver item 3.1.3 para revisão da literatura) e uma das principais aplicações da escola de *análise de decisão* (Raiffa, 1968). Um problema de decisão é definido pelo espaço de ações disponíveis e pela função que relaciona o resultado ("payoff") a essas ações e aos estados da natureza (Arrow, 1992, p.169).

Problemas de valor da informação são de grande importância não só em aplicações econômicas, mas também em várias outras áreas tão distintas como medicina, P&D (pesquisa e desenvolvimento) em geral, e até no dia a dia das decisões individuais. Por isso a literatura de aplicações de VOI ocorre em diversas disciplinas. A seguinte definição do objetivo da análise de valor da informação é tirada da literatura de *saúde ambiental*, Yokota & Thompson (2004), exceto o grifo, mas é suficientemente geral para ser válida também em outros contextos tais como o econômico: "*A análise de valor da informação avalia o benefício de coletar informação adicional para reduzir ou eliminar incerteza num contexto de tomada de decisão específico*".

O grifo na definição em "reduzir ou eliminar incerteza" destaca o fato que essa definição sugere que uma análise de VOI demanda medidas de redução de incerteza (medidas de aprendizagem) e também a modelagem de como um processo seqüencial de aquisição de informação pode resultar na eliminação total, ou parcial, da incerteza. Essas demandas serão especialmente atendidas nesse capítulo com uma metodologia inovadora sobre *medidas de aprendizagem* e *processos de revelação*. Esses conceitos serão diretamente relacionados com o conceito de *expectativa condicional* e será, portanto, de grande aplicabilidade em finanças e em outras disciplinas, ao simplificar de forma adequada a solução de problemas de VOI.

Embora o desenvolvimento teórico de análise de VOI tenha se iniciado nas décadas de 50 e 60, sua aceitação e/ou aplicação ainda é bastante limitada especialmente devido à complexidade tanto na sua modelagem como na solução de problemas de VOI, (Yokota & Thompson, 2004, abstract). Esses autores ainda ressaltam a grande complexidade prática de resolver problemas de VOI trabalhando com distribuições contínuas (como inputs) "*apesar da simulação permitir o analista a resolver problemas mais complexos e realistas*". Essas mesmas preocupações são compartilhadas nessa tese[108] e é a motivação de alguns conceitos e proposições. Por exemplo, as proposições sobre *distribuições de revelações* irão facilitar tanto o uso de simulação de Monte Carlo em problemas de VOI com qualquer tipo de distribuição (exige-se apenas média e variância finitas) bem como a integração do VOI em modelos clássicos de opções reais. Isso também será objeto desse cap. 3.

O VOI é sempre avaliado ex-ante porque ele é calculado antes de decidir se investe ou não em informação. Ou seja, é necessário avaliar o VOI antes, a fim de decidir se o benefício da informação supera (o suficiente) o custo de adquiri-la.

Informação é em geral valiosa na presença de incerteza. Conforme Arrow (1973, p.138), "*quando existe incerteza, existe usualmente a possibilidade de reduzi-la através da aquisição de informação. Logo, informação é a medida negativa de incerteza*" (grifos dessa tese). Aqui será particularmente explorado esse tema ligando o valor da informação com a redução esperada da incerteza (ver item 3.3 sobre medidas de aprendizagem).

A seguinte definição é adequada no contexto de valor econômico da informação (Lawrence, 1999, p.2):

Definição. **Informação**: é qualquer estímulo que muda o conhecimento do receptor da informação, i. é, que mude a distribuição de probabilidade do receptor a respeito de um bem-descrito conjunto de estados. Por razões de conveniência para o comportamento matemático, será incluído nessa definição o caso trivial do *limite* de pouca relevância da informação, limite esse chamado *não-informativo*.

Naturalmente, a definição acima engloba o caso de *limite* oposto, de muita relevância, em que a distribuição de probabilidade do receptor muda radicalmente,

---

[108] Apesar dos grandes avanços nos últimos 3 anos na introdução de metodologias de valor da informação na Petrobras (particularmente no E&P), a complexidade de análises mais realistas é o grande desafio que essa tese procura lidar.

colapsando em um ponto de probabilidade 1. Esse caso será chamado de *informação perfeita*, que permite a *revelação total* do verdadeiro estado da natureza. Esse limite será discutido em detalhes, devido à sua importância.

A distinção entre informação e *conhecimento* pode ser mais bem entendida no contexto de uma analogia com a *teoria econômica do capital* feita por Boulding (1966) e discutida em Lawrence (1999, p.3). Capital físico é *estoque* (ativo) e investimento é *fluxo* que, quando ocorre, muda o estoque de capital. Da mesma forma, conhecimento é estoque e informação é o fluxo que altera o conhecimento. Esse conhecimento é descrito por uma distribuição de probabilidades e a (nova) informação altera essa distribuição e o conhecimento. Também de forma análoga à *depreciação* de capital, está o *esquecimento* do conhecimento. Em ambos os casos, pode haver um custo para repor o capital ou para manter o conhecimento.

Seguindo Lawrence (1999, p.5), num problema de decisão sob incerteza, a distribuição a priori engloba todo o conhecimento inicial do decisor em relação à realização de cada estado. Uma *mensagem* ou *sinal* é a forma final de saída de uma *fonte de dados*. Por ex., o médico é a fonte de dados e a mensagem/sinal é o seu diagnóstico. Como em Arrow (1992), aqui se usará preferencialmente o termo "sinal". Dados são símbolos, imagens, sons e idéias que podem ser codificados, estocados e transmitidos. Um sinal pode levar ao decisor alterar a distribuição a priori através da eliminação de alguns estados, redução da probabilidade de outros estados e aumento da probabilidade dos restantes. O uso do sinal para atualizar o conhecimento gera a distribuição posterior.

Esse autor faz também a importante distinção entre *informação estatística* e *informação pragmática*. A primeira é relativa somente às propriedades das distribuições de probabilidade envolvidas e a segunda é a aplicação da primeira, ou seja, o impacto potencial da informação estatística em um problema de decisão. Os atributos da primeira são, por ex., coerência, formato e acurácia, enquanto que na segunda os atributos são, por ex., relevância, completitude e tempo de ocorrência. Uma mensagem pode trazer informação estatística, mas não trazer informação pragmática, ou seja, não ter relevância para alterar as decisões.

Um *modelo probabilístico de aprendizagem* trabalha com o relacionamento de variáveis aleatórias de interesse (vetor de estados **X**) com variáveis aleatórias que provém informação ou *sinais* (vetor **S**) para se conhecer melhor X. Assim, o

modelo probabilístico de aprendizagem trabalha com *distribuições a priori* de variáveis aleatórias G(**X**), *distribuições conjuntas* de variáveis aleatórias J(**X**, **S**) e *distribuições condicionais* de variáveis aleatórias H(**X** | **S**). Por isso, é necessário discutir aspectos teóricos desses relacionamentos de variáveis aleatórias para poder elaborar uma metodologia consistente de OR envolvendo incerteza técnica e investimento em informação.

Dado o conhecimento inicial representado pela densidade de probabilidades p(x), o conjunto de decisões ou ações $\mathcal{A}$ e a função valor ("payoff") que aqui é dada pela opção real F(**X**, t, a), onde a $\in \mathcal{A}$, o VDP, valor da decisão a priori (sem a informação) é aquele obtido com a ação que maximiza o valor esperado da OR:

$$\mathbf{VDP = Max_a\{E[F(X, t, a)]\} = Max_a \{\int_X F(x, t, a)\, p(x)\, dx\}} \qquad \mathbf{(52)}$$

Ou seja, é necessário testar todas as possíveis decisões e escolher aquela que maximiza o valor esperado da OR, o qual é função do vetor de variáveis aleatórias **X** (incertezas técnica e/ou de mercado) e do tempo t,

Já o valor esperado da decisão informada (VDI) considera que, para cada possível sinal s $\in$ S, o decisor irá tomar a ação ótima (como antes) e assim o VDI considera o valor esperado (em relação a S) das ações que maximizam a OR dada a informação revelada. Ou seja:

$$\mathbf{VDI = E[Max_a\{E[F(X, t, a) \mid S]\}] = \int_S Max_a\{\int_X F(x, t, a)\, p(x \mid s)\, dx\}\, p(s)\, ds} \quad \mathbf{(53)}$$

A eq.(52) e a eq.(53) consideram que as distribuições p(x), p(s) e p(x | s) são contínuas, mas o conceito vale também para distribuições discretas (usa-se somatório em vez da integral) e para casos mistos que combinem distribuições discretas e contínuas (usa-se a integral de Lebesgue-Stieltjes[109], em vez da integral de Riemann). Nas aplicações, como é usual na literatura de OR e também para simplificar a notação, em geral será subentendido que o valor da OR já considera a ação ótima sob incerteza (em muitos casos a decisão binária de exercer ou não

[109] Uma maneira intuitiva de ver a diferença entre essas integrais é que as somas de Riemann são feitas com retângulos *verticais* e as somas de Lebesgue são feitas com retângulos *horizontais* (Shorack, 2000, Figure 1.1, p.2). A integral de Lebesgue garante a convergência geral de integrais de funções quando $f_n \rightarrow f$, enquanto na integral de Riemann isso nem sempre ocorre.

uma opção) e assim será suprimido da notação o operador de maximização e também será usado simplesmente F(X, t) em vez de F(X, t, a).

Em geral o VOI é a diferença entre o valor da decisão informada e o valor da decisão sem essa informação (ou a priori), i. é[110]:

$$\mathbf{VOI = VDI - VDP} \qquad \mathbf{(54)}$$

Essa diferença é sempre positiva ou zero para problemas sem interação estratégica, i. é, para um único decisor maximizador de riquezas. É fácil ver isso, pois com mais informação o decisor pode escolher tanto as ações que ele faria sem a informação como ações mais adequadas à nova informação, sendo que essas últimas só seriam escolhidas se forem melhor que as outras ações sob o ponto de vista de maximização de riquezas.

Já para múltiplos decisores, como na teoria dos jogos, existem casos em que mais informação *diminui* o valor desses jogadores. Um exemplo clássico é o mercado de seguros de automóveis (e de seguros em geral). Se tanto o segurador como os segurados tivessem, antes de assinar o contrato, acesso à informação *perfeita* ("bola de cristal") sobre o que ocorrerá com o bem segurado no período de contrato (sinistro ou não-sinistro), então um dos dois lados não iria querer assinar o contrato de seguro. Isso faria desaparecer o mercado de seguros, o que seria pior tanto para a seguradora (deixaria até de existir) como para os consumidores que demandam seguro (que não poderiam fazê-los). Assim, essa informação perfeita seria pior para ambas as partes.

Segundo Hilton (1981), os quatro determinantes do valor da informação são:

1. A estrutura do conjunto de ações, i. é, a *flexibilidade* de ação;
2. A estrutura da função valor resultante ("payoff"). Tradicionalmente, é a função valor monetário e sua relação com a *função utilidade*;
3. O grau de incerteza inicial, dado pela *distribuição a priori*; e
4. A percepção do decisor para o *mapeamento dos sinais* S para os estados da natureza da variável de interesse X. Tradicionalmente, é a função verossimilhança, i. é, a distribuição $g(s|x)$ como função de x.

[110] Assim como em geral se faz na literatura tradicional de VOI, inicialmente não está sendo considerado o tempo para adquirir a informação. Mas no modelo dinâmico será considerado o *tempo de aprendizagem*, para poder comparar as alternativas de investimento em informação, uma vez que em finanças o valor do dinheiro no tempo é muito importante.

A metodologia dessa tese concorda com a importância da lista acima, mas com algumas importantes alterações. Os itens 1 e 3 terão um papel mais importante do que tem normalmente na literatura tradicional. A questão do valor da flexibilidade não tem sido explorada pela literatura de análise de decisão como tem sido pela literatura de OR, especialmente em contextos dinâmicos. Na análise de decisão tradicional, raramente as aplicações envolvem a variável tempo. Processos estocásticos e controle ótimo estocástico também em geral não fazem parte da literatura de análise de decisão[111]. O papel da distribuição a priori será maior do que na literatura tradicional tanto por causa da aplicação em petróleo – onde o conhecimento a priori é muito importante e tem de ser bem modelado, como por causa da metodologia aqui usada, onde a distribuição a priori é usada como limite de um processo de revelação.

Já nos itens 2 e 4 da lista de Hilton (1981) acima, a palavra "tradicionalmente" foi usada para indicar que nessa tese, em contraste, será seguido um caminho diferente. No caso do item 2, em vez da função utilidade de valores monetários, será usado o valor da opção real para calcular os "payoffs" do valor da informação[112]. Essa combinação de teorias (OR + VOI) está dentro do espírito *híbrido* dessa tese, mas não seria a primeira vez que se faria.

Para o item 4 essa tese apresenta uma *novidade metodológica*, em que será feita uma análise não usual em problemas de VOI para a relação entre as variáveis aleatórias de interesse (X) e os sinais (S). Aqui não será preciso usar a função verossimilhança. Em vez disso, jogarão um papel maior as distribuições a priori e a de expectativas condicionais (ou de *revelações*). Será mostrado que a verossimilhança não é uma medida de aprendizagem adequada, sendo melhor para isso uma medida de *redução esperada de variância* que, além de melhores propriedades para esse tipo de aplicação, é mais prática, intuitiva e de fácil obtenção com os mais populares métodos estatísticos, desde as simples regressões, até métodos um pouco mais sofisticados como os de análise de

[111] Uma notável exceção é o relativamente recente livro de Bather (2000).

[112] Não que as funções utilidade e opções reais sejam excludentes em geral. No cap. 6 será visto aplicações em que se usa a função utilidade para obter o valor da OR, por ex., no desenho de *OR para o consumidor*, onde é necessário avaliar as utilidades do tipo específico de consumidor que se busca atingir. Mas na maioria das aplicações, OR usa valores de mercado refletindo preferências agregadas em relação ao risco e retorno dos investidores.

variância (ANOVA). Será mostrado que essa medida de aprendizagem está diretamente ligada à distribuição de revelações.

A literatura distingue dois tipos de VOI, o *valor esperado da informação perfeita* (VEIP) e o *valor esperado da informação imperfeita* (VEII).

Dados os valores das opções reais $E[F(\mathbf{X}, t) \mid S_{perf}]$ e $F(\mathbf{X}, t)$, para os casos de valor esperado de OR com a informação perfeita e OR sem a informação (ou incondicional, ou antes da informação), então o VEIP é obtido por:

$$\mathbf{VEIP = E[F(X, t) \mid S_{perf}] - F(X, t)} \quad \mathbf{(55)}$$

O caso de informação imperfeita é mais complicado, mas bem mais relevante na prática por ser mais realista. Naturalmente o VEII é menor ou igual que o VEIP. De forma análoga ao caso do VEIP, o VEII é dado por:

$$\mathbf{VEII = E[F(X, t) \mid S_{imperf}] - F(X, t)} \quad \mathbf{(56)}$$

Nos capítulos 3 e 5 será detalhado o cálculo dos termos das equações (55) e (56). O exemplo a seguir será útil inicialmente para introduzir uma série de conceitos importantes de uma maneira simples e intuitiva, para poderem depois ser usado em casos bem mais complexos. Depois ele será usado para exemplificar o cálculo do VEIP e as suas dificuldades e características.

Seja um caso simples de um campo delimitado, mas não desenvolvido, com incerteza residual sobre o volume de reservas B. Suponha que existam duas alternativas, a primeira é desenvolver o campo imediatamente e a segunda é investir previamente em informação. Com a primeira alternativa, para minimizar o erro, o investimento (capacidade de processo, etc.) é dimensionado para o valor esperado do volume E[B], pois a teoria elementar de probabilidade ensina que dessa forma se minimiza o erro de dimensionamento. Na segunda alternativa, suponha que o investimento em informação *revela toda a verdade* a respeito do volume da reserva B, i. é, a nova informação é perfeita. Até quanto se pagaria por essa informação perfeita, i. é, qual é o VEIP?

Para simplificar esse exemplo, suponha que a incerteza em B é representada por apenas três cenários equiprováveis B^+, $B^=$ e B^-, ou seja, se tem uma *distribuição a priori* de B discreta e com três cenários. Se a informação é perfeita então o investimento em informação provoca uma *revelação total* ("full revelation") de B. Nesse caso então, um desses três cenários será revelado como o verdadeiro valor de B, i. é, B^+, $B^=$ e B^- são, respectivamente, (o verdadeiro valor

de) B dado boas notícias, B dado notícias neutras e B dado más notícias. A Figura 27 ilustra esse exemplo de informação perfeita que provoca a revelação total de B.

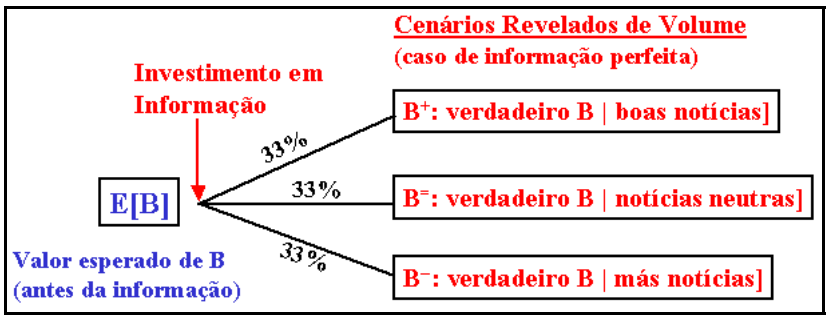

Figura 27 – Exemplo de Informação Perfeita ou Revelação Total

Dessa forma, fica claro que, por consistência, a distribuição de cenários revelados com a informação tem de ser igual à distribuição a priori, *se* a informação é perfeita (revelação total). Se não fosse assim, por ex., se o analista achar que o investimento em informação pode revelar um cenário que não está na distribuição à priori, então ele deveria mudar a distribuição a priori para incluir esse cenário. A definição seguinte formaliza esse ponto.

Definição. **Distribuição a priori**: representa, em forma de uma distribuição de probabilidades, todo o conhecimento inicial (a priori) que o decisor tem de uma variável aleatória (baseado em Lawrence, 1999, p.5)[113]. Ou seja, o suporte[114] da distribuição à priori inclui todos os possíveis valores (cenários) que pode assumir essa variável, enquanto que a densidade de probabilidade representa a melhor estimativa possível da densidade de probabilidade de ocorrência desses cenários, usando o conhecimento corrente (a informação a priori).

Definição. **Distribuição posterior** (ou distribuição a posteriori): é a distribuição a priori atualizada com o sinal ou (nova) informação. Expressa o que é conhecido da variável *depois* de observar o dado (O'Hagan, 1994, p.10).

Assim, se a informação é perfeita, então a distribuição posterior é um cenário ou número ("singleton") que ocorre com probabilidade igual a 1 (Lawrence, 1999, p.69). Nesse caso, a distribuição posterior é dita degenerada. Ou seja, a informação perfeita faz a variância da distribuição posterior colapsar para zero. Nesse exemplo, existem três distribuições posteriores possíveis (de variância

[113] Equivale à definição de O'Hagan (1994, p.10): A distribuição a priori de X expressa o que é conhecido sobre X, antes de observar o dado.

[114] Suporte de uma distribuição p(x) é o conjunto de valores onde p(x) > 0.

zero). Para distribuições a priori contínuas, a quantidade de distribuições posteriores é infinita.

Já a distribuição de cenários revelados com a informação, mostrada na Figura 27, é única e será aqui chamada de distribuição de revelações (a ser definida num contexto mais geral). Note que, se a distribuição a priori fosse contínua, a distribuição de revelações continuaria sendo única, embora com infinitos cenários (distribuição contínua) em vez de três. Esses pontos serão retomados num contexto mais geral.

Com a discussão acima fica claro que, em caso de informação perfeita (revelação total), a distribuição de revelações é igual à distribuição a priori. Isso decorre diretamente da definição de distribuição a priori. No exemplo da Figura 27, p(B) é uma distribuição a priori discreta com três cenários equiprováveis que nesse caso de informação perfeita é igual à distribuição de revelações.

Formalmente, seja um espaço de estados $\mathbf{X} = \{x\}$ de interesse (que pode ser enumerável ou não-enumerável), descrito por uma distribuição a priori de probabilidades p(x), e um espaço de mensagens (ou de sinais) $\mathbf{S} = \{s\}$.

Se a informação é perfeita então o espaço de mensagens é igual ao espaço de estados, i. é, $\mathbf{X} = \mathbf{S}$ (Lawrence, 1999, p. 69). Para ver isso, considere a Figura 27. Nesse exemplo $\mathbf{X} = \{ B^{+}, B^{=}, B^{-}\}$, isto é, os volumes de reservas possíveis de ocorrer. Se a informação é perfeita, $\mathbf{S} = \{ B^{+}, B^{=}, B^{-}\}$ também pois a informação revela o verdadeiro estado da natureza de X (ou seja, uma distribuição posterior degenerada de B). Se a informação fosse imperfeita, então a mensagem revelaria uma distribuição não degenerada, i. é, uma distribuição posterior p(x | s) com variância estritamente positiva.

Defini-se informatividade como a qualidade de um sinal em ser informativo. Seja θ uma medida genérica de grau de informatividade de uma estrutura de informação. No caso de aplicações estatísticas como a de *planejamento de experimentos* (“experimental design”), θ é o tamanho da amostra. Nos casos clássicos de VOI, se usa muito a função verossimilhança. Nessa tese será usada uma medida de aprendizagem relacionada com a redução esperada de incerteza. A informatividade estatística varia desde o caso $\theta = 0$ (nenhuma informação) até o caso de informação perfeita (máxima informatividade). No interior desse intervalo se tem a chamada informação imperfeita.

Definição. **Estrutura de informação**: compreende o espaço de mensagens (sinais) mais a medida conjunta de estados e mensagens (Lawrence, 1999, p.16)[115]. Assim, uma estrutura de informação $\mathcal{I}$ é definida por:

$$\mathcal{I} = \{ S, p(x, s)\} \quad (57)$$

Essa medida conjunta é a *distribuição conjunta de probabilidades* de duas variáveis aleatórias p(x, s). Isso sugere que é necessário estudar distribuições bivariadas e multivariadas de probabilidades para a análise de VOI. A definição acima sugere também uma *comparação de estruturas de informação*, para determinar em que medida existe uma estrutura mais informativa que a outra. Esse foi o tema dos dois artigos clássicos de Blackwell (1951) e (1953), ver também Blackwell & Girshick (1954). Esse tema será comentado no item 3.1.4.2.

Uma estrutura de informação é completamente não-informativa se a distribuição de probabilidades condicional do sinal g(s | x) é a mesma para todos os estados da natureza (Radner & Stiglitz, 1984, p. 34). Ou seja, com uma estrutura não-informativa, o decisor toma a mesma decisão independentemente do sinal recebido, já que qualquer que seja o verdadeiro valor de X, o sinal é o mesmo. Uma outra maneira de definir estrutura não-informativa é através da distribuição posterior, i. é, p(x | s) = p(x) se a estrutura é não informativa.

Para calcular o VEIP do caso simples mostrado na Figura 27, considere a equação do VPL de desenvolvimento, eq. (1), o modelo de negócios, eq. (23), e a equação do investimento (ótimo) em função do volume da reserva, eq. (28). Combinando essas três equações, se obtém a seguinte equação do VPL:

$$\mathbf{VPL = V - I_D = (q\ P\ B) - (c_f + c_v\ B)} \quad (58)$$

Se a informação é perfeita, então ela permite conhecer o verdadeiro valor de B nesse exemplo e assim dimensionar otimamente o investimento, conforme a eq. (28). Em geral, para cada B se faria um projeto que, além de dimensionar o investimento ótimo (eq. 28), permitiria calcular o novo valor de q através do fluxo de caixa, conforme descrito no cap. 2 (ver comentário após a Figura 13). Assim, em geral q é uma função de B. Tentar descobrir essa função é factível, mas muito trabalhosa, pois teria de fazer vários projetos (para vários B), estimar os fluxos de

[115] Radner & Stiglitz (1984, p.34) definem estrutura de informação como a matriz de Markov de funções (distribuições) verossimilhança g(s | x). No contexto da tese, onde a função verossimilhança será desnecessária, ficará claro que a definição de Lawrence é mais adequada.

caixa *de cada um deles*, para depois calcular os vários q e assim obter a função q(B), dado que o investimento ótimo é obtido com eq. (28).

Para manter o exemplo o mais simples possível, suponha que o valor de q é independente de B *se* o dimensionamento da capacidade for feito adequadamente, i. é, o valor de q é constante para todos os cenários de B se o investimento for dimensionado otimamente usando a eq. (28). Esse ponto será detalhado depois, mas a idéia é simples. Como q dá a velocidade com que a reserva B é produzida, então se a planta de processamento estiver dimensionada adequadamente, ela não será restrição e os poços poderão produzir o seu potencial. Entretanto, se a planta estiver sub-dimensionada, essa velocidade de produção da reserva B será menor devido à restrição de capacidade que impedirá que os poços produzam o seu potencial máximo. Essa redução de velocidade da produção de B irá reduzir o valor presente das receitas e por conseqüência o valor de q.

Dimensionar otimamente só é plenamente possível se a informação sobre B for perfeita. Ou seja, para se usar a eq. (28) é necessário saber o verdadeiro valor de B. A falta dessa informação (i. é, se B é incerto), leva a usar E[B] no lugar de B como dado de entrada na eq. (28), já que E[B] minimiza o erro técnico de dimensionamento[116]. Dessa forma, sem informação perfeita, o investimento será dado por:

$$\mathbf{I_D = c_f + (c_v\ E[B])} \qquad \mathbf{(59)}$$

Mas nesse caso (sem informação perfeita sobre B), nos cenários ex-post em que B é maior que E[B], a capacidade de processo será uma restrição e assim q será menor. De forma geral, se B é incerto então $E[q\ B] \leq E[q]\ E[B]$, e logo:

$$\mathbf{E[V] = E[q\ P\ B] \leq E[q]\ E[B]\ E[P]} \qquad \mathbf{(60)}$$

Dessa maneira, sem a informação, nos cenários de boas notícias (B^+), o investimento é o mesmo (dimensionado para E[B]), mas o valor de V é penalizado devido à restrição de capacidade que reduz o valor presente das receitas e, portanto, reduz o valor de q. Já no cenário de más notícias, V em geral não é penalizado, mas perde-se VPL devido ao investimento I_D maior que o necessário.

Pode-se também criticar a eq. (23) no contexto de incertezas argumentando que B é função de P, ou seja, se P for maior então a data esperada de abandono é

---

[116] Eventualmente pode ser ótimo *economicamente* dimensionar a planta de processo para um valor um pouco diferente de E[B], a depender de um estudo detalhado. Na falta desse estudo econômico, recomenda-se usar E[B] para minimizar o erro *técnico* de dimensionamento.

postergada, aumentando B. Em alguns casos isso não ocorre porque existe uma data legal de final da concessão da fase de produção. Mas o mais importante é que essa variação, na imensa maioria dos casos, só ocorre em fluxos de caixa (produção) muito distantes da data em que os fluxos de caixa são avaliados (geralmente entre 25 e 30 anos), e assim o impacto em V (que está em valor presente na data de início de investimento) é muito pequeno e não seria bem capturado pela eq. (23) a menos que se reduzisse o valor de q, fazendo q(B(P)). Assim, para usar a eq. (23) no contexto de incertezas, comete-se um erro menor se for considerado que B não é função do preço P. Já a restrição de dimensionamento tem impacto logo no início de produção (o pico de produção de um projeto de desenvolvimento em geral ocorre em um ou dois anos) e assim é muito importante considerar esse efeito para problemas de decisão de investimentos em desenvolvimento da produção, ao contrário do efeito de P sobre B.

Para levar em consideração o problema de dimensionamento, i. é, q(B), será introduzido um fator multiplicativo $\boldsymbol{\gamma_+(B) < 1}$ para corrigir o valor de q e logo o valor de V em cenários que a capacidade limitada se torna uma restrição técnica que reduz V, ou seja:

$$\mathbf{V = \gamma_+ q P B} \quad , \qquad \text{se } B > E[B] \tag{61}$$

No exemplo simples em que apenas um cenário é maior que E[B], será usado apenas um valor para $\gamma_+ = 0{,}8$. No caso mais geral esse fator depende da diferença entre B e E[B], i. é, quanto maior for essa diferença, mais severo (menor) deve ser esse fator, pois mais sub-dimensionada estará a capacidade de processo e o investimento. O caso mais geral e como calcular com simulações de FCD será visto depois. Para o caso do cenário revelado de B ser exatamente E[B], esse fator claramente é igual a 1. Já no caso do cenário revelado de B ser *menor* que E[B], não haveria restrição de capacidade, ao contrário. O excesso de capacidade, no entanto, não aumentaria o valor presente da produção e, sendo assim, se assume que o um fator de correção γ_- seria igual a 1[117].

Com isso, já é possível calcular o VEIP do exemplo simples da Figura 27. Suponha nesse exemplo simples que a decisão é "agora ou nunca" t = T, ou seja,

[117] Está se assumindo que a planta de processo é dimensionada para atender ao *pico* de produção. Se o ótimo econômico mostrar que o melhor é dimensionar a planta com um pouco de restrição (para reduzir um pouco os investimentos), o fator γ_- pode ser um pouco *maior* que 1, pois aliviaria a restrição de capacidade nos cenários em que B se revelar *menor* que E[B].

F(B, T) = Max(E[VPL], 0). Assuma também os valores numéricos P = 25 US$/bbl, q = 20%, c_1 = 180 MM US$, c_2 = 2 US$/bbl, { B^+, $B^=$, B^-} = {150, 100, 50} MM bbl; e γ_+ = 0,8. Os valores do VPL nos diversos cenários revelados de B são calculados com a eq. (58) para o caso com informação perfeita. Já os VPLs dos cenários de B para o caso sem informação, são calculados com a eq. (1) acoplada com a eq. (59) para o investimento, com a eq. (28) para os casos de cenários de B ≤ E[B] e com a eq. (61) para o caso de cenário de B > E[B]. A Tabela 8 a seguir sumariza os cálculos do VEIP, mostrando os valores de V, I_D e VPL tanto para o caso condicional à informação perfeita como para o caso incondicional (ou sem a informação).

Tabela 8 – Cálculo dos VPLs Com e Sem a Informação Perfeita (em MM US$)

Cenários de B		Com Informação Perfeita			Sem Informação		
Prob.	MM bbl	V | B	I_D | B	Max[VPL | B, 0]	V(E[B])	I_D(E[B])	VPL ex-post
33,3%	B^+ = 150	750	480	270	600	380	220
33,3%	$B^=$ = 100	500	380	120	500	380	120
33,3%	B^- = 50	250	280	0	250	380	– 130
E[F(B, T) | B] =				**130**	**F(B, T) =**		**Max[70, 0]**

Aplicando a eq. (55) nesse exemplo simples, o valor esperado da informação perfeita VEIP é simplesmente:

VEIP = E[F(B, t) | B] – F(B, t) = 130 – 70 **= US$ 60 MM**.

Assim, nesse exemplo se pagaria até US$ 60 MM para obter a informação perfeita. Esse exemplo mostrou que existem sutilezas para calcular o VOI mesmo nos casos mais simples, com poucos cenários, informação perfeita e sem ainda considerar interações com incertezas de mercado, valor da espera da opção, etc. Em geral, otimizar sob certeza é muito mais fácil do que otimizar sob incerteza.

Considere agora o caso mais realista de aquisição de informação imperfeita. Seja o exemplo anterior baseado na Figura 27, mas agora com a informação imperfeita ou revelação parcial do verdadeiro valor de B. A Figura 28 representa esse caso, mostrando que a informação revela cenários ainda incertos que podem ser representados por um conjunto de distribuições posteriores ou de forma mais simples pelos seus valores esperados, através de uma distribuição de expectativas condicionais, que aqui será chamado de *distribuição de revelações*.

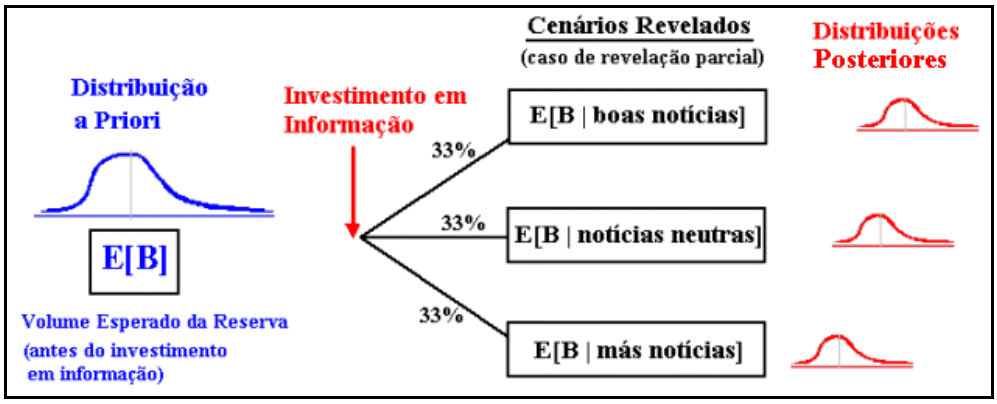

Figura 28 – Exemplo de Informação Imperfeita ou Revelação Parcial

Na Figura 28, para simplicidade de exposição, o investimento em informação revela apenas três cenários. Em geral, no entanto, existe uma distribuição contínua de sinais S, originando infinitos cenários ou infinitas distribuições posteriores de densidades $p(B \mid S = s_i)$, $i = 1, 2, \ldots \infty$. Como a informação imperfeita não revela o verdadeiro cenário da distribuição posterior – apenas a distribuição, após essa informação o decisor terá de tomar a decisão ótima (investimento ótimo) dada uma distribuição posterior obtida para cada sinal $S = s_i$. Essa decisão pode ser baseada em momentos probabilísticos dessas (infinitas) distribuições posteriores, especialmente as medidas baseadas no primeiro momento (valor esperado condicional ou expectativa condicional) e no segundo momento (variância condicional). Em geral note que, enquanto ex-ante existem infinitas distribuições posteriores, a distribuição de expectativas condicionais – ou distribuição de revelações, é única.

Nessa tese se trabalhará especialmente com a distribuição de revelações (expectativas condicionais) que tem propriedades matemáticas convenientes, intuitivas e simples de trabalhar. Também será usada em muitos casos a variância *esperada* das distribuições posteriores, que dá a incerteza técnica residual esperada após o investimento em informação.

Uma propriedade conhecida (que depois será mostrada) é que, se a informação for relevante em termos estatísticos, então a variância *esperada* das distribuições posteriores é menor que a variância da distribuição a priori. Ou seja, a informação ou sinal gera uma *redução esperada na variância*, reduzindo a incerteza técnica residual esperada. No entanto, pode ocorrer o caso de um ou mais sinais específicos gerarem algumas distribuições posteriores com variância *maior* que a variância da distribuição a priori. Mas, em média, a variância

posterior nunca é maior que a variância da distribuição a priori. Assim como ocorre com a distribuição de expectativas condicionais, a distribuição de variâncias condicionais é única. No entanto, ao que consta, ela não tem propriedades matemáticas intuitivas, convenientes ou fáceis de trabalhar. Por isso, essa tese irá trabalhar apenas com a distribuição de expectativas condicionais e com a variância residual esperada (média das variâncias posteriores), que são fáceis de obter e convenientes para trabalhar, como será visto.

O método tradicional de VOI da escola de análise de decisão usa geralmente a representação diagramática denominada *árvore de decisão*. Nela existem os nós de decisão (representados por pequenos quadrados) e nós de chance (pequenas circunferências). O exemplo a seguir ilustrará os problemas de trabalhar com árvores de decisão. Baseado em Raiffa (1968, p.241), a Figura 29 mostra o clássico problema de perfuração do poço pioneiro sem e com teste sísmico prévio.

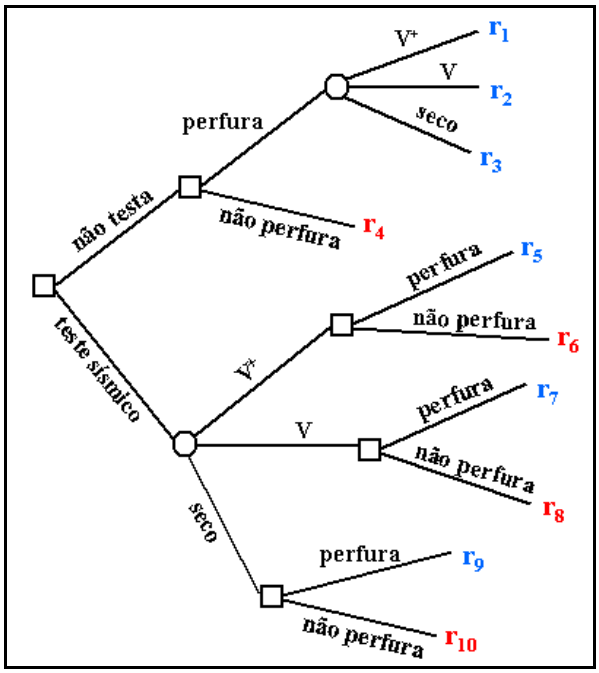

Figura 29 – Árvore de Decisão com Teste Sísmico Perfeito

Os cenários V^+ e V representam descobertas de reservas respectivamente de grande e médio tamanho[118], enquanto "seco" significa inexistência de petróleo. Nesse caso estilizado, a sísmica indica o verdadeiro cenário (informação é perfeita), e logo o número de cenários apontados pela sísmica tem de ser igual a

[118] A terminologia é um pouco diferente de Raiffa, que usou "wet" para V, "soaking" para V^+, "no structure" para a indicação "seco" pela sísmica, "open structure" para indicação V pela sísmica e "closed structure" para indicação V^+ pela sísmica.

três, pois, como foi visto, S = X para informação perfeita. Além disso, é intuitivo que a distribuição a priori de X (probabilidade dos ramos r_1, r_2, r_3) tem de ser igual à distribuição de sinais S (probabilidades do teste indicar V^+, V, seco). Veremos que a *intercambiabilidade* das distribuições de X e S é uma condição necessária para a informação ser perfeita (haver revelação total). A Figura 30 apresenta o mesmo caso, mas com o teste sísmico revelando informação imperfeita.

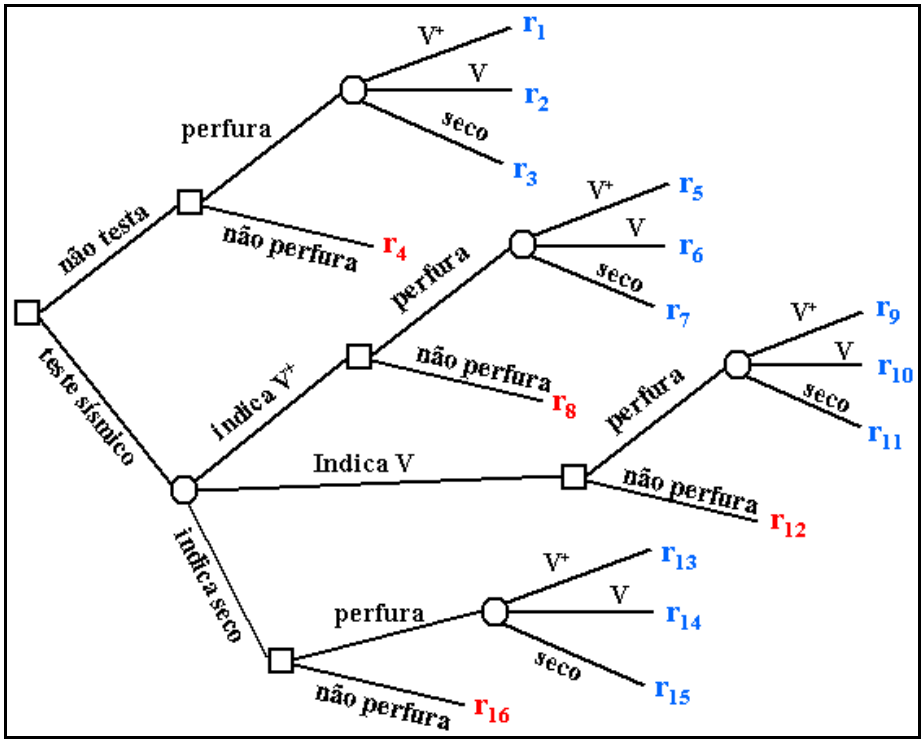

Figura 30 - Árvore de Decisão com Teste Sísmico Imperfeito

Aqui está se supondo que, embora imperfeito (com ruído), a sísmica dá indicações para todos os cenários da distribuição a priori X = {seco, V, V^+}. Comparando as figuras 29 e 30, note que as partes de cima ("não testa") das árvores são iguais. A diferença entre as árvores está na parte de baixo da árvore ("teste sísmico"), onde o caso de informação imperfeita tem muito mais ramos.

Os ramos terminais das árvores em vermelho são aqueles de cálculo trivial de seus valores (valor igual a zero na parte de cima e de menos o custo da sísmica na parte de baixo). Os que dão mais trabalho para calcular são os ramos terminais azuis especialmente os da parte de baixo da Figura 30, principalmente pela necessidade de computar probabilidades condicionais inversas de forma consistente. Comparando essas duas árvores, a de informação perfeita tem três ramos azuis na parte de baixo, enquanto que a de informação imperfeita tem 3^2 = 9 ramos azuis. É fácil verificar que se o número de cenários fosse 4, esses ramos

azuis passariam de 4 para $4^2 = 16$, etc. Ou seja, apesar da vantagem intuitiva da árvore de decisão, com alguns poucos cenários a mais o número de ramos da árvore "explodiria", tornando o método de difícil manuseio prático.

Os ramos terminais azuis da parte de baixo da árvore da Figura 30 usam *probabilidades inversas* p(s | x) que são medidas de *confiabilidade* da informação. Por ex., a probabilidade de ocorrer o ramo r_9 é a probabilidade da sísmica indicar V dado que o verdadeiro cenário é V^+. A função que descreve essa confiabilidade da informação é a chamada *função verossimilhança*. Essas probabilidades inversas podem ser difíceis de estimar na prática por profissionais da indústria.

Além disso, a função verossimilhança requer regras de consistência probabilística em geral mais complicadas do que as que serão propostas nessa tese. Por ex., na Figura 30, os três primeiros ramos têm as probabilidades iguais às da distribuição a priori. Já as probabilidades (inversas) dos ramos r_5, r_6, r_7, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{13}, r_{14} e r_{15}, têm de ser consistentes tanto com as probabilidades a priori (ou dos ramos r_1, r_2 e r_3) como com as probabilidades dos sinais. Ex.: $p(r_5 + r_9 + r_{13}) = p(r_1)$; $p(r_9 + r_{10} + r_{11}) = p(s = V)$, etc. Ou seja, é necessário montar uma *matriz de probabilidades inversas* p(s | x) consistentes, que nesse exemplo seria 3 x 3.

Problemas de compatibilidade de probabilidades ou distribuições inversas são freqüentes na literatura tradicional Bayesiana. Ver, por ex., Arnold & Castillo & Sarabia (2001) para discussão e para um detalhado exemplo discreto.

As aplicações profissionais de valor da informação usando a literatura clássica de análise de decisão, em geral apresentam importantes limitações:

- Muitas vezes usam árvores de decisão e assim precisam limitar o número de cenários (ex.: três) revelados pela informação;
- Muitas vezes assumem que toda a incerteza será resolvida com o investimento em informação (revelação total, informação perfeita);
- Não quantificam e nem comparam alternativas de diferentes custos e diferentes potenciais de revelar informações relevantes;
- Não consideram as interações das incertezas técnicas e de mercado, apesar de ambas afetarem o valor econômico da reserva; e
- Ignoram o tempo legal de expiração dos direitos de investir e o tempo de aprendizagem, em geral diferente para cada alternativa.

Essa última limitação é particularmente relevante em problemas de OR, ou seja, é necessário obter o valor *dinâmico* da informação, onde o adjetivo "dinâmico" está relacionado ao tempo como variável de estado.

3.1.3. Revisão da Literatura de VOI e Opções Reais Relacionadas

3.1.3.1. Revisão da Literatura de Valor da Informação

Na literatura tradicional de VOI, o único livro texto avançado visando cursos de mestrado ou doutorado é o de Lawrence (1999), o qual tem sido aqui citado algumas vezes. Mas mesmo assim ele não é todo satisfatório, por ex., ele desconhece a literatura de opções reais, ele cita a medida de dependência chamada cópula (que será definida) mas não cita a razão de correlação η^2 que será aqui usada, aplicações dinâmicas são raras, etc. Já o livro de Bather (2000), embora também para pós-graduação e sobre teoria da decisão, é mais um livro de programação dinâmica com aplicações em decisões seqüenciais onde inexistem aplicações diretamente relacionadas a VOI (embora o método de cálculo possa contribuir nessa análise). Livros clássicos de análise de decisão como o de Raiffa (1968) e o de Lindley (1985, primeira edição de 1971), abordam bastante o tema de VOI, mas a nível mais elementar (graduação) e não consideram problemas de VOI num contexto mais dinâmico. Em todos esses livros, tanto a literatura neoclássica de finanças como a teoria de OR, são ignoradas.

Apesar da intuição de que a informação poderia ser vista como uma commodity, com custo de suprimento e preço de mercado baseado na demanda e oferta de informação, as tentativas de assim caracterizá-la e desenvolver uma teoria geral da economia da informação, não tem sido bem sucedidas. Por ex., Moscarini & Smith (2002) consideram que o problema de como valorar/apreçar a informação é ainda "*um problema não-resolvido na teoria Bayesiana de decisão*".

Conforme assinala Arrow (1984, Preface), apesar de não ser difícil perceber que num mundo de incertezas a informação é valiosa no sentido econômico, "*tem sido provado difícil conceber uma teoria geral de informação como uma commodity econômica, porque diferentes tipos de informação não têm uma unidade comum que tenha ainda sido identificada*".

Tentativas, no entanto, foram feitas. Em particular, atraiu muita atenção a revolucionária *Teoria da Informação* oriunda da área de engenharia de comunicação, desenvolvida por Shannon nos anos 40 e sintetizada no livro de Shannon & Weaver (1949). Essa abordagem matemática baseada no conceito de *entropia*, levou à criação de um novo ramo na estatística e levou eminentes economistas como Arrow e Marschak a investigarem a aplicabilidade dessa teoria em problemas de VOI, especialmente na década de 50. A teoria da informação (incluindo o conceito de entropia) será discutida no item 3.1.4.3.

Conforme reportam diversos autores, tais como Lawrence (1999, p.x), Lindstädt (2001, p.352) e Arrow (1978), Jacob Marschak foi o grande contribuidor das bases teóricas e da formalidade matemática/probabilística para a análise econômica da informação. Seus artigos nessa área, Marschak (1954), Marschak (1959) e Marschak & Miyasawa (1968), e seus livros Marschak (1974, coletânea) e Marschak & Radner (1972), são os mais conhecidos. Arrow (1978, p.xiii) destaca que a maior novidade de Marschak foi "*a síntese da teoria estatística da decisão, com a teoria econômica da decisão sob incerteza e a teoria da organização, a cuja combinação ele deu o nome de teoria das equipes*". Assim, a maior contribuição de Marschak segundo o Prêmio Nobel K. Arrow, foi obtida através de uma *hibridização* de teorias econômica, estatística e organizacional! O livro Marschak & Radner (1972) sobre teoria econômica de equipes teve grande impacto na literatura da economia da informação, em especial a primeira parte do livro (decisão individual), pela clareza e rigor da exposição.

Para Lawrence (1999, p.x), Marschak foi o maior contribuidor dessa área e ele está para a economia de informação como Alfred Marshall está para a microeconomia clássica. Laffont (1986, p.68) afirma que o primeiro tratamento importante sobre o papel da informação na teoria econômica foi Hayek (1945), mas ele baseou o seu capítulo sobre estrutura de informação na "*abordagem fundamental*" do cap. 2 de Marschak & Radner (1972).

Nessa tese será discutido de forma crítica um exemplo numérico de Marschak (1959), o qual será usado para defender uma medida de redução esperada de incerteza como superior à função verossimilhança usada por ele.

Em paralelo com a teoria econômica da informação, surgia a *teoria estatística da decisão*, sendo particularmente pioneiro e fundamental para a teoria do VOI os artigos clássicos de Blackwell (1951 e 1953) que fundou a teoria da

comparação de experimentos ou *comparação de estruturas de informação*. Hoje esse é um ramo da teoria estatística, sendo que o tratado de Torgersen (1991) é dedicado totalmente a ele e com grande rigor matemático (com o uso da teoria da medida). Marschak & Miyasawa (1968) usaram as idéias de Blackwell para comparar sistemas econômicos de informação. Esse tópico será ainda discutido no item 3.1.4.2.

Na teoria estatística ajudaram também trabalhos sobre *decisões seqüenciais* de Wald (1947) e os *axiomas Bayesianos* introduzidos por Savage (1954). Na década de 50 também houve grandes avanços na área de *métodos de otimização dinâmica*, com a teoria da *política s-S* para regra de decisão ótima (ver Arrow & Harris & Marschak, 1951)[119] e métodos de retro-indução (indução "backwards") e de parada ótima em Arrow & Blackwell & Girshick (1949)[120]. Ambos foram precursores do método mais geral chamado de *programação dinâmica* por Bellman na década de 50, sintetizado no seu livro texto (Bellman, 1957).

A popularização dos métodos de VOI para estudantes de pós-graduação e para o público profissional se deu apenas na década de 60, com a emergente (na época) teoria de *análise de decisão*, especialmente com a publicação do livro texto de Raiffa (1968), difundindo métodos mais intuitivos baseados em árvores de decisão, aproveitando o grande impacto que teve o artigo de Hertz (1964). Um artigo muito citado e representativo dessa literatura é o de Howard (1966).

Historicamente, pode-se dizer que o livro do Raiffa (1968) está para a *análise de decisão* assim como o livro de Dixit & Pindyck (1994) está para *opções reais*. Assim, a teoria das opções reais é cerca de uma geração mais nova que a teoria de análise de decisão. OR cresceu num ambiente em que a teoria moderna de finanças corporativas estava mais bem estabelecida, o que não ocorreu com a teoria de análise de decisão, especialmente nas primeiras décadas.

Da literatura econômica clássica, tem sido muito citado em artigos acadêmicos de OR (e também em Dixit & Pindyck, 1994, p.352) o conhecido artigo de Roberts & Weitzman (1981) sobre VOI. Eles consideram investimentos seqüenciais onde o custo é incerto e sua variância vai sendo reduzida com o

---

[119] A idéia é escolher dois níveis, inferior (s) e superior (S) para uma política ótima sob incerteza. No caso de estoques, o nível s é o *gatilho* que detona a reposição de estoques através de uma compra que eleva o estoque de s para S. A escolha ótima de s-S minimiza uma *função perda*.

[120] Conforme assinala Bather (2000, p.166), eles provaram um resultado fundamental da análise seqüencial, a otimalidade do "sequential probability ratio test", usando retro-indução.

investimento acumulado[121]. Mas para simplificar o modelo, os estágios exploratórios são modelados como um *processo contínuo*. Já em exploração de petróleo, por ex., o foco da valoração é em *eventos pontuais*: podem-se passar anos sem nenhum evento relevante e depois se perfurar um poço revelando a existência de petróleo. Em Roberts & Weitzman (1981) a incerteza técnica não interage com a de mercado, um efeito importante que é um dos focos do modelo dessa tese.

Conforme mencionado antes, são poucos os artigos de OR relacionados a VOI que tem real interesse e que não cometem erros conceituais relevantes. Um deles é o de Martzoukos & Trigeorgis (2001). Eles modelam um processo de aprendizagem custoso (investimento em informação) como um processo endógeno de "saltos" de tamanho aleatório. Os saltos são ativados pelo gerente e assim é um processo indexado por *eventos*, como será feito nessa tese, e não pela simples passagem do tempo (erro mais comum da literatura de OR + VOI). Na metodologia que eles usaram, a aprendizagem é relacionada somente com o valor do ativo básico (nessa tese é incluído também o fundamental efeito no preço de exercício ótimo da opção, por ex., na eq. 28, I_D é função de B) e o foco deles foram o momento ótimo de aprendizagem ("timing of learning") e a aprendizagem multi-estágio. O mérito do artigo é que eles tiveram a intuição correta de que a revelação de informação técnica gera saltos no valor do ativo básico, assim como na indexação do aprendizado a eventos opcionais (e não ao tempo). Mas ao contrário do modelo apresentado nessa tese, eles não teceram considerações sobre como obter a distribuição do tamanho dos saltos (nessa tese será visto que os tamanhos dos saltos devem ser amostrados da *distribuição de revelações*), nem consideram o problema de seleção da melhor alternativa de investimento em informação e nem outros detalhes como a inclusão do tempo de aprendizado.

Outro artigo importante de OR aplicado a VOI é o recente de Murto (2004), que usa justamente o exemplo de incerteza técnica na decisão de desenvolvimento de um campo de petróleo. No caso ele usa a incerteza técnica no volume de reservas, além da incerteza de mercado modelada com um MGB.

Murto (2004) critica dois artigos de OR que consideram incerteza técnica no parâmetro de tendência ("drift") do processo estocástico: "*a aprendizagem é*

[121] Pindyck (1993) faz a mesma coisa mas num modelo mais completo que será aqui visto.

passiva, pois as firmas atualizam as suas crenças continuamente enquanto esperam, meu foco é em aquisição ativa de informação discreta". Essa tese concorda plenamente com isso e tem o mesmo foco.

As divergências dessa tese com o modelo de Murto (2004)[122] começam com os detalhes da modelagem, que reflete em parte o pouco conhecimento dele sobre a indústria de E&P de petróleo. Primeiro, ele assume oportunidade perpétua de desenvolvimento para eliminar o tempo como variável de estado. Com exceção de países com monopólios ou campos terrestres em terrenos particulares em alguns países, existe um tempo legal finito para essa opção. A simplificação adicional de que o aprendizado é instantâneo (na tese será considerado o caso mais realista de tempo de aprendizagem, em geral igual ou maior que um mês), prejudica um pouco o objetivo dele de tirar conclusões gerais sobre o momento ótimo de aprender. Outra simplificação feita por Murto foi de que a atividade de aprendizagem "*revela o verdadeiro valor do parâmetro*" a um certo custo. Ou seja, foi considerado o caso pouco realista de revelação total (informação perfeita). No modelo dessa tese a informação é em geral imperfeita e a revelação de informação é parcial. Murto evita definir a forma funcional da função VPL de exercício da opção de desenvolvimento, o que só faz na sua seção 5 quando faz um exemplo ilustrativo, onde assume uma distribuição a priori *uniforme*[123] do volume de reservas e que o custo de desenvolvimento é constante e independente da variável com incerteza técnica. Essa última premissa é muito inadequada, pois o investimento ótimo claramente depende de B (na seção 3.1.3.2 será visto que essa simplificação pode levar a erros no VOI muito grandes, maior até que 50%).
Mas Murto (2004) tem também interessantes contribuições, pois modela de forma endógena a questão do momento ótimo de investir em informação vis a vis com o momento ótimo de desenvolver o campo[124]. Com isso, seu modelo faz o balanço entre postergar o custo de aprender versus o possível benefício de que a revelação antecipada da informação pode ser mais benéfica ao projeto.

---

[122] Após elogiá-lo pelas importantes contribuições, o autor dessa tese expôs todas as críticas aqui listadas no debate público que se seguiu após a apresentação desse artigo em Montreal.

[123] A distribuição uniforme significa quase total ignorância do volume B. Isso não é realista e não é usado nem em prospectos exploratórios pela indústria. Distribuições lognormais ou triangulares, por ex., seriam bem mais adequados ao conhecimento prévio dessa fase de E&P.

[124] Na tese essa questão será analisada no cap. 5 como uma *sensibilidade* à data de investimento em informação, resolvendo o modelo para diferentes datas de investimento em informação. A menor importância da tese a essa questão é de ordem prática: o montante do investimento em informação é apenas cerca de 1 a 5% do investimento em desenvolvimento.

Da literatura de OR + VOI deve-se mencionar também artigos como o de Mayor et al. (1999) e principalmente o de Childs & Ott & Riddiough (2001) que usam a *teoria de filtração ótima* ("optimal filtering theory"), ver, por ex., os livros texto de Jazwinski (1970) ou de Bensoussan (1992). A aplicação dessa teoria assim como esses artigos serão comentados abaixo, no subitem 3.1.3.2.

Antes de discutir a teoria da filtração, é necessário comentar o artigo clássico de Pindyck (1993) que combina de forma elegante a incerteza técnica com a de mercado. Esse modelo está sumarizado em Dixit & Pindyck (1994, p. 345-353) e tem algumas conexões com o modelo defendido nessa tese.

No modelo de Pindyck (1993), o custo total do projeto K é incerto e a taxa ótima de investimento é zero ou k. Quando ocorre o investimento, existe uma revelação de informação de forma que a variância da incerteza técnica é reduzida. Assim, em consonância com essa tese e em oposição ao modelo de Cortazar & Schwartz & Casassus (2001), a variância da incerteza técnica só é reduzida na ocorrência de um evento como o investimento. Ou seja, tanto aqui como em Pindyck (1993), a variância da incerteza técnica não muda pela simples passagem de tempo como em Cortazar & Schwartz & Casassus (2001). Da mesma forma, em caso de apenas incerteza técnica, os valores dos parâmetros técnicos mudam somente se a firma está investindo (também em oposição ao modelo de Cortazar et al., 2001, que muda pela simples passagem do tempo).

No modelo dessa tese será visto que a variância da distribuição de revelações aumenta linearmente com a redução esperada de variância. De forma similar, no modelo de Pindyck a variância instantânea da taxa de variação da variável técnica aumenta linearmente com a razão I/K. Lá existe um máximo quando essa razão é igual a 1, o que também é similar ao caso de revelação total (informação perfeita) usada na tese, porque será visto que o máximo da variância da distribuição de revelações ocorre no caso de revelação total quando a medida de aprendizagem $\eta^2 = 1$. No caso de Pindyck (1993), o próprio investimento seqüencial de desenvolvimento do projeto gera informações (*modelo de tempo de construção* aplicado a usinas nucleares). Já nessa tese, o investimento em informação não reduz necessariamente o custo de desenvolvimento do projeto (mas será visto no cap.5 casos em que reduz).

Pindyck (1993) é um modelo rigoroso e que captura os fatos estilizados da incerteza técnica, mas ele é focado em um tipo de aplicação onde o aprendizado

ocorre durante a construção do projeto. Aqui será visto casos em que se pode investir antes em informação para depois decidir se desenvolve ou não o projeto e, caso desenvolva, o investimento deve se ajustar a essa realidade técnica revelada.

3.1.3.2. Teoria da Filtração Ótima Aplicada a Opções Reais e VOI

Antes de comentar os artigos de Mayor et al. (1999) e de Childs & Ott & Riddiough (2001), é necessário fazer a seguinte caracterização para problemas de estimação em geral em que o processo de incerteza é indexado pelo tempo (contínuo ou discreto, abaixo será usado o discreto por simplicidade). Essa definição é baseada em Jazwinski (1970, p.143-145) e em Kellerhals (2004, p.24).

Seja o problema de estimar um parâmetro, fator ou variável ξ_t, usando a informação disponível até o tempo discreto s, representada pelo *conjunto de informação* $\mathcal{F}_s = \{y_s, \ldots, y_2, y_1\}$, onde y_τ é uma observação mensurável na data τ.

Distinguem-se então três casos, dependendo do conjunto de informação usado:

1. Problema de Filtração: para $t = s$,
2. Problema de Suavização ("smoothing"): para $t < s$, e
3. Problema de Predição: para $t > s$.

Como destaca Jazwinski (1970, p.143), filtração e predição são usualmente associadas com operações em tempo real, ou seja, as observações são disponíveis imediatamente. Isso já dá uma idéia de aplicações típicas dessa abordagem. A mais óbvia é a estimativa de parâmetros de processos estocásticos que representam a evolução de preços ou outras variáveis da economia que podem ser medidas em tempo real. No caso de incerteza técnica em OR em petróleo, raramente existe a chegada contínua ou mesmo periódica de informações em tempo real para se fazer uma atualização contínua de uma variável com incerteza técnica usando essa informação em tempo real.

Uma exceção, no entanto, pode ser o caso de poços inteligentes (ver último tópico do cap. 2), onde existe uma incerteza técnica residual no reservatório (e logo na produção dos poços), sendo que esses poços são equipados com sensores que enviam informações em tempo real a uma plataforma (ou a um sistema inteligente) que usa essas informações para atualizar o modelo e eventualmente tomar ações corretivas (abertura ou fechamento de zonas do poço) à luz dessas novas informações. Nesse caso poderia se pensar em modelos tais como os

desenvolvidos por Childs & Ott & Riddiough (2001). No entanto, na maioria dos problemas, a nova informação técnica só ocorre se for feito um projeto de investimento em informação que dará uma resposta pontual. Tipicamente, a perfuração de um poço exploratório ou de delimitação, só gera informação quando o poço atinge a zona de interesse (no final da perfuração), e qualquer decisão só é tomada após a análise do relatório do poço, que dará informações sobre a existência, quantidade e qualidade do petróleo. Ou seja, na maior parte dos problemas de relevantes incertezas técnicas em E&P de petróleo, a revelação de informação técnica só ocorre pontualmente, após semanas ou meses após o início de algum investimento em informação.

É demasiadamente grosseira a alegação que, numa bacia exploratória com muitas firmas atuando, a freqüência de perfurações exploratórias poderia tornar razoável um modelo com revelação contínua de informação exploratória. Parece bem mais realista nesse caso, modelar essa chegada de informação como um processo de Poisson, por ex., com $\lambda = 2$ meses para muitas firmas explorando a bacia. Além disso, do ponto de vista de uma firma que tem um prospecto nessa bacia e quer usar essa informação, muitas dessas perfurações exploratórias não têm correlação (ou são muito fracas) com o prospecto de interesse, seja por pertencerem a outro "play" geológico, seja por serem muito distantes.

Mas deve se reconhecer, que fora da área de petróleo, pode haver aplicações em que a informação técnica pode chegar em tempo real ou com grande freqüência e assim aplicar os modelos que serão comentados nessa seção. Por ex., um teste de mercado de um novo produto, onde a incerteza técnica é a função demanda e/ou a reação de consumidores ao produto, etc., pode ser observado diariamente e assim justificar o uso desses modelos para esses tipos de aplicação. Outra aplicação *adequada* desse modelo é no mercado imobiliário ("real estate"), que possivelmente estava na mente dos autores quando escreveram o primeiro artigo, Childs & Ott & Riddiough (2001), a julgar pelos dois artigos relacionados subseqüentes, Childs & Ott & Riddiough (2002a e 2002b)[125]. Num mercado imobiliário amplo, pode-se pensar que existem transações freqüentes que provêem informações sobre o verdadeiro valor de um ativo específico que o modelo está

[125] Grenadier (1999) também modela a revelação de informação no mercado imobiliário, mas num contexto estratégico em que existe assimetria de informação.

analisando. Mas mesmo assim, apenas as transações de "ativos comparáveis" são relevantes para reduzir o nível de ruído do verdadeiro valor do ativo, que ao mesmo tempo oscila devido à incerteza de mercado (oferta x demanda). Assim, modelos em que informações sobre incerteza técnica (ruído) chegam continuamente ao longo do tempo, assumem uma premissa que nem sempre é válida para apreçar um imóvel específico. Além disso, é bem complicado separar o que é uma oscilação de preço devido ao mercado daquela devido a uma revisão do ruído técnico (eles procuram separar esses efeitos através de medidas de autocorrelação da série, usando técnicas de cointegração).

Mas infelizmente, esses modelos de OR com filtração não têm a generalidade que os autores desses modelos em geral supõe. Por ex., em P&D de um novo remédio, existem estágios bem definidos[126], sendo que a informação relevante (ou processada) só se dá ao fim de cada estágio, com um relatório técnico analisando e tirando conclusões que são usadas para exercer ou não a opção de realizar o próximo estágio. Assim, também em projetos de P&D de novos remédios, as metodologias que prevêem chegadas freqüentes de informação técnica relevante em tempo real, não são adequadas para a decisão ótima de exercícios de OR. A exceção é a análise *agregada* de investimentos em P&D.

Uma importante conexão da teoria de filtração e de predição com a abordagem de expectativas condicionais que será usada nessa tese, é que para *todos* os problemas de filtração e predição, e independentemente das propriedades da função densidade de probabilidade condicional, a expectativa condicional é a melhor estimativa desses problemas (no sentido de menor erro quadrático médio, que é o critério usualmente aplicado), ver Jazwinski (1970, p.149-150). Por isso, esses problemas trabalham basicamente com equações de evolução da densidade condicional e de evolução da expectativa (ou média) condicional.

O artigo de OR de Mayor et al. (1999) talvez tenha sido o primeiro a usar a teoria de filtração ótima em problemas de OR. O foco de aplicação é justamente a aprendizagem através de pesquisas de mercado (que é um nicho adequado de aplicação, ver discussão acima). Num único modelo, o artigo combina os aspectos da aprendizagem do verdadeiro estado da economia e o clássico problema do

---

[126] Tipicamente (Rogers, 2002, p.25-26): 1) descoberta; 2) testes pré-clínicos; 3) testes clínicos, fase I; 4) idem, fase II; 5) idem, fase III; 6) aprovação da agência de saúde; 7) testes pós-aprovação (para desenvolver extensões do produto, dosagens para crianças, etc.).

momento ótimo de investimento. Eles estendem a abordagem de Roberts & Weitzman (1981) não apenas com ingredientes de OR como assumindo que o processo de aprendizagem e a sua intensidade são endógenos ao modelo (i. é, opções da firma). Assim, a firma pode "*controlar a quantidade de informação que ela compra ao longo do tempo*". A firma tem três opções: (a) desenvolver o projeto; (b) continuar observando sinais com ruídos a um certo custo (compra de informação); (c) abandonar o projeto.

Mayor et al. (1999) argumentam que a opção de aprendizagem é valiosa "*porque permite à firma reduzir o risco de desenvolver um projeto com valor ('payoff') negativo*". Como em Martzoukos & Trigeorgis (2001), a opção de aprendizagem tem impacto apenas no valor do ativo básico V, não no preço de exercício. O investimento I para desenvolver o projeto é fixo e conhecido. Essa é uma simplificação matemática muito conveniente para resolver o modelo. No entanto, é uma simplificação inaceitável em muitas aplicações, pois as reais características técnicas de um projeto (ex.: o real tamanho do mercado para um produto) é um dado de entrada fundamental para dimensionar o investimento adequado para desenvolver V. Logo, em geral, o preço de exercício I não pode independer das verdadeiras características técnicas de V que forem reveladas.

Para se ter uma idéia do erro em não reconhecer esse fato elementar do dimensionamento de um projeto, considere novamente o exemplo dado no item 3.1.2, especialmente a Tabela 8. Se a informação perfeita fosse útil apenas para decidir se a opção deve ou não ser exercida, não influenciando o investimento I, então a primeira linha de dados da Tabela 8, cenário B^+ seria igual para o caso com ou sem informação, i. é, VPL(B^+) = 220 (em vez de 270 para informação perfeita). O único benefício da informação seria com o cenário B^- onde a informação perfeita evitaria um exercício equivocado da opção de desenvolver o projeto. Nesse caso o VEIP cairia de US$ 60 MM para US$ 43,3 MM, um erro de 28% nesse caso simples. Se aumentar o número de cenários e/ou se o projeto for um pouco melhor, o erro tende a ser ainda maior e não é difícil mostrar exemplos onde esse erro superaria o patamar de 50%. Se o projeto fosse melhor, por ex., se

a qualidade aumentasse de q = 0,2 para q = 0,25, então o erro de ignorar o dimensionamento ótimo pularia de 28% para 64%[127]!

O artigo de Childs & Ott & Riddiough (2001) também assume investimento fixo independente da incerteza técnica e assim também deixa de considerar uma das principais fontes de valor da aprendizagem. Eles fazem outras simplificações que limitam a sua aplicabilidade, mas que permitem ter soluções analíticas, como o caso de opção perpétua de desenvolvimento. Mas é um artigo que trás inúmeras contribuições que podem ser úteis, mas num intervalo mais restrito de aplicações onde a incerteza técnica possa ser indexada pelo tempo (o que em geral não ocorre com aplicações em E&P de petróleo e P&D). Essa incerteza ou ruído tanto pode diminuir como aumentar pela simples passagem do tempo. Além disso, a informação pode ser comprada em pequenas quantidades e o dono da opção pode escolher o número de vezes que a informação é adquirida e o nível de redução de ruído (leia-se redução esperada de variância). O artigo usa uma terminologia que guarda similaridade com o usado em Dias (2002) e nessa tese. Exemplos, eles usam o termo "revealed variance", enquanto aqui se usa "variância da distribuição de revelações"; eles usam o termo "full information" e aqui é usado "revelação total". Childs & Ott & Riddiough (2002b, eq.8a) usa uma equação em que "informação total = variância revelada + variância residual"[128], que é similar a uma equação que será usada nessa tese no item 3.2. Como nessa tese, a variância revelada tem um papel fundamental para "*a determinação do valor e política de exercício das opções*" (Childs & Ott & Riddiough, 2002b, p.440).

O artigo de Childs & Ott & Riddiough (2001) é bastante rigoroso na aplicação da teoria de filtração ótima, mas ao mesmo tempo é didático na explicação dos termos. Eles obtêm equações para a expectativa condicional do valor do projeto (e também para a variância residual) que, conforme Jazwinski (1970), é típico em aplicações da teoria de filtração. Esse é um ponto de contato interessante da teoria de filtração com a metodologia da tese, que também trabalha basicamente com distribuições de expectativas condicionais. Eles obtêm uma série de resultados analíticos que permitem tirar algumas conclusões interessantes. Por

[127] Com q = 0,25, o VEIP seria de US$ 62,5 MM considerando dimensionamento ótimo como benefício da informação e de apenas US$ 22,5 MM se considerar apenas o benefício de exercer ou não a opção. Ver no CD-Rom as planilhas ex_inf_perf.xls e ex_inf_perf2.xls.

[128] Nesses artigos, a *variância residual* mede a precisão da estimativa do valor verdadeiro e a *variância revelada* mede a quantidade de informação que chega num certo intervalo de tempo.

ex., o valor da opção é menor na presença de ruído (incerteza técnica) do que sem ruído. Na tese isso ocorre porque o ruído diminui o VPL de exercício, pois com ruído quase certamente o investimento será sub-ótimo. Na "Figure I" do artigo, eles mostram um exemplo em que o gatilho para o desenvolvimento ótimo diminui com o aumento da variância da incerteza técnica. Interpretar esse resultado é difícil, pois no modelo deles o ruído pode crescer com a simples passagem de tempo e assim o exercício antecipado evitaria exercer uma opção com mais ruído. Essa conclusão do artigo é até um pouco perigosa, pois se com muito ruído o gatilho é baixo, pode-se querer desenvolver logo um projeto em que o melhor seja investir em informação. Mas no artigo, o aumento do ruído também aumenta o valor de adquirir informação, amenizando o problema.

Como nessa tese, Childs & Ott & Riddiough (2001, p.59) usam uma medida de aprendizagem (que eles chamam de fator β) em que o valor 1 corresponde ao caso de "fully revealing signal" e o valor zero ao caso completamente não informativo. No entanto, ao contrário dessa tese, eles não desenvolvem uma teoria de medida de aprendizagem, não estabelecem propriedades para esse fator e nem percebem a ligação direta dessa medida com o conceito de expectativas condicionais, como aqui será mostrado. Além disso, no artigo subseqüente Childs & Ott & Riddiough (2002a, eq.9) eles usam o clássico *coeficiente de correlação de Pearson*, que só é válido em casos específicos (como distribuição Normal, ver item 3.3) para estabelecer uma medida que eles chamam de "instantaneous information ratio", enquanto que nessa tese a medida será bem mais geral em termos de distribuições que podem ser usadas (só exige média e variância finitas).

3.1.4. Temas Clássicos de VOI e Conexões com Outras Teorias

3.1.4.1. Concavidade e Não-Concavidade no Valor da Informação

Na literatura econômica, especialmente a *teoria da demanda de informação*, o artigo de Radner & Stiglitz (1984) sobre a não-concavidade no VOI, causou grande impacto na comunidade acadêmica e foi objeto de muito debate (exs.: Lindstädt, 2001; Kihlstrom, 1984b; Chade & Schlee, 2002; Lawrence, 1999).

Esse tema tem um interesse adicional nessa tese, devido à metodologia que emprega uma medida de aprendizagem para estimar o VOI. Dessa forma é

importante saber como a função VOI se comporta (toda côncava, parcialmente côncava, linear, etc.) entre os limites de nenhuma informação até o de informação perfeita. Conhecendo as características dessa função, é possível fazer melhores interpolações entre esses limites extremos de informatividade, simplificando dramaticamente o problema de VOI especialmente em contextos dinâmicos.

O teorema de Radner & Stiglitz (1984) diz que, sob certas condições razoáveis e ao menos que a informação seja sempre inútil, *o valor marginal de uma pequena quantidade de informação é zero e a informação deve exibir retornos marginais crescentes sobre algum intervalo*, pelo menos num intervalo vizinho ao caso não informativo. Mas o próprio artigo de Radner & Stiglitz (1984) mostra exemplos[129] no qual a informação exibe retornos marginais decrescentes, ou seja, "*claramente o VOI não é sempre não-côncavo*" (Chade & Schlee, 2002). Isso tem implicações na teoria econômica do tipo: "a demanda por informação é uma função descontínua de seu preço", "agentes nunca comprarão pequenas quantidades de informação"[130] e "agentes tenderão se especializar na produção de informação" (para produzir uma quantidade suficientemente grande), etc.

Além disso, a não-concavidade complica qualquer análise de aquisição de informação pois a condição de primeira ordem não é suficiente para maximizar o valor de um agente demandando informação. Isso pode, por ex., impedir a existência de equilíbrio competitivo, ou o equilíbrio em expectativas racionais lineares, assim como prejudica toda a literatura de aprendizagem ativa, inclusive porque pode impedir a prova da existência de equilíbrio perfeito em estratégias puras em alguns modelos (ver Chade & Schlee, 2002, p.422-423).

À primeira vista, as condições de validade do teorema de Radner & Stiglitz são apenas condições que freqüentemente ocorrem em modelos aplicados, i. é, condições de *suavidade* e de *continuidade* da estrutura de informação com um certo índice de informatividade θ. Em particular eles assumem que existe a derivada da estrutura de informação para $\theta = 0$. Radner & Stiglitz também assumem um número finito tanto de cenários da variável de interesse (ou de estado) X, como para cenários do sinal S. Mas eles trabalharam com a função verossimilhança como estrutura de informação, mais especificamente uma matriz

[129] Um dos exemplos de Radner & Stiglitz (1984) é justamente em exploração de petróleo.
[130] Isso prejudica bastante os modelos econômicos que usam análise *diferencial* em geral.

de Markov de distribuições condicionais inversas, i. é, uma matriz p(s | x). Na discussão de um exemplo de Marschak no item 3.4, será visto que com verossimilhança ou confiabilidade da informação p(s | x), o VOI nem sempre é definido para todo o intervalo de p(s | x), i. é, em todo o intervalo [0, 1], contrastando com a medida alternativa η^2 a ser proposta. Assim, uma sugestão dessa tese é repensar o teorema de Radner & Stiglitz usando outra abordagem em termos de estrutura de informação.

Como aponta Chade & Schlee (2002, p.423), existe uma rica classe de problemas para o qual o VOI é côncavo. Por ex., o modelo dinâmico de aquisição de informação em tempo contínuo de Moscarini & Smith (2002) e modelos de outros artigos, sugerem que o VOI pode ser em geral uma função côncava do *tamanho da amostra*. Esses modelos em geral assumem ou um número infinito de cenários para a variável de estado X ou um número infinito de cenários para o sinal S. Por outro lado, também existem casos de não-concavidade que não atende as premissas de Radner & Stiglitz. Chade & Schlee (2002, p.424) mostram ainda que, num modelo de muita generalidade, é difícil descartar a não-concavidade.

Nessa tese o índice de informatividade θ é uma medida de aprendizagem chamada redução (percentual) esperada de variância η^2. A pergunta natural é: essa medida também exibe não concavidade para regiões próximas de $\theta = 0$ como em Radner & Stiglitz (1984)? Nas aplicações dessa tese, a exigência de realismo faz a solução ser numérica e assim dificulta tirar conclusões gerais que seriam mais fáceis de serem obtidas em modelos simplificados teóricos com solução analítica. Mas experimentos foram feitos com os modelos usados nessa tese, tendo sido encontrado não concavidade para regiões próximas de $\theta = \eta^2 = 0$. Uma dessas aplicações que será mostrada no cap. 5 exibe esse efeito, mas de forma não severa, e uma linearidade com o valor de η^2. Esse caso é mostrado na Figura 31 a seguir.

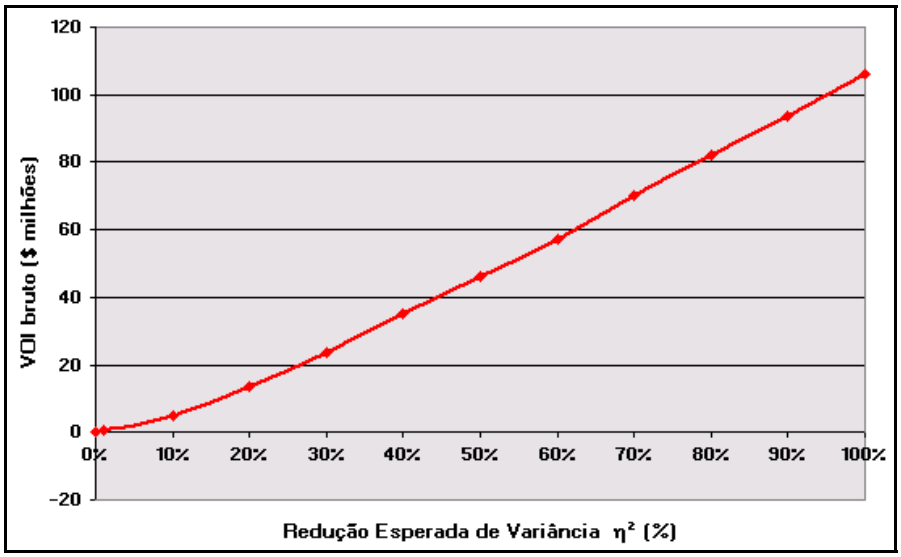

Figura 31 – Não-Concavidade do Valor da Informação

Note na Figura 31 que a não concavidade ocorre apenas na região próxima do caso não informativo. Em muitas aplicações práticas (mas não todas), essa região é de menor interesse prático, pois as reduções de variância são maiores que 30%[131]. Na Figura 31, o VOI é bruto, i. é, não considera o custo da informação e nem o efeito do tempo de aprendizagem. Além disso, o gráfico acima considera apenas a incerteza técnica (incerteza de mercado tem volatilidade igual a zero). Interessante é que continua existindo essa linearidade[132] na *região de maior interesse prático*, para nessa mesma aplicação mesmo quando se considera incerteza de mercado, como será visto no cap. 5. A qualidade dessa aproximação linear dependerá do tipo de aplicação, mas isso facilita algumas aplicações rápidas (gerenciais) em que se resolve apenas o caso de informação perfeita $\theta = \eta^2 = 1$, e com o outro ponto na *origem* se descreve uma reta que dá uma aproximação do VOI em relação a uma medida de aprendizagem. Mas o modelo dessa tese não dependerá dessa linearidade. Mas não deixa de ser um bom indício prático a ocorrência de linearidade do VOI com a medida de aprendizagem proposta.

Lawrence (1999, p.226) apresenta a seguinte conclusão prática geral do teorema de Radner & Stiglitz: "*nós podemos simplesmente concluir que os efeitos econômicos benéficos da informação começam lentamente*".

Um caso que não é mencionado nos artigos citados é a análise do efeito de escala no VOI, por ex., o efeito da aquisição de informação com o mesmo θ para

[131] Mas serão vistas também aplicações para o fator de chance exploratório com $\eta^2 \leq 10\%$.
[132] Com excelente ajuste linear, $R^2 > 0{,}998$.

projetos de tamanho diferentes (jazida pequena x jazida grande, etc.) pode fazer diferença na concavidade da função VOI x θ.

Isso foi analisado por Wilson (1975), que apresenta um modelo de economia de escala advinda da aquisição de informação para dimensionamento ótimo, i. é, uma informação positiva justifica um aumento na escala de operações, etc. Formalmente, ele considera o conjunto de possíveis estados da natureza, sendo a informação descrita como uma partição desse conjunto. Assim, a aquisição de informação é uma partição de um intervalo unitário em subconjuntos. Por exemplo, considere n *sucessivas biseções*, onde cada subintervalo tem igual comprimento $\Delta = 2^{-n}$ e assim adquirir informação significa a *revelação*[133] de algum inteiro $k \in [1, 2, \ldots 2^n]$ de forma a reduzir a incerteza de uma variável X com incerteza tecnológica. Por exemplo, se $X \sim U[0, 1]$, então dado k pode-se saber que X cairá num subintervalo (a, b] onde $a = (k - 1)\Delta$ e $b = k\Delta$ (Wilson, 1975, p.186). No caso de nenhuma informação então n = 0, Δ = 1, k = 1 (pois k vale no máximo 2^{-n}) e assim a = 0 e b = 1, ou seja, a distribuição *a posteriori* de X é igual a sua distribuição *a priori*.

Mas o mais interessante no trabalho de Wilson (1975) é que ele mostrou vários exemplos em que o valor da informação *por unidade de escala* é estritamente côncavo, enquanto que o valor da informação *líquido do seu custo*[134] de aquisição é estritamente convexo. Isso é devido ao fato que, enquanto o custo *unitário* da informação diminui com o aumento de escala, o valor unitário da informação não diminui. Assim, Wilson conclui que a demanda por informação pode ser ilimitada, embora na prática a firma não possa aumentar a escala indefinidamente e nem possa refinar sua informação perfeitamente nesse contexto.

Desde um ponto de vista mais prático, quando se considera informação custosa, pode haver aquisições *inúteis* de informação – informação insuficiente para mudar a ação ótima que se tomaria sem essa informação; aquisições *antieconômicas* de informação – informação é útil para mudar a ação ótima, mas não o suficiente comparado a seu custo; aquisições *econômicas* de informação – quando o valor supera o custo; e *desperdício* ou aquisição excessiva de

[133] Nota histórica: o termo "*revelation*" foi usado pelo próprio Wilson (1975, p.186).

[134] Assume que o custo é uma função convexa da informação, por ex., o custo de n biseções é proporcional a n. Usando o conceito de *entropia* (ver item 3.1.4.3), o custo de descobrir um subintervalo de comprimento Δ é proporcional a – log(Δ), Wilson (1975, p.189).

informação – quando é adquirida mais informação do que a necessária (também é antieconômico). Seja um índice de *grau de informação* ("*informativeness*") θ, que pode ser a redução percentual esperada de variância (ou *poder de revelação*), o tamanho da amostra, um índice baseado na função verossimilhança, ou outra qualquer. Seja $\theta \in [0, 1]$. A Figura 32 a seguir, baseada em Lawrence (1999, p.274), ilustra essas diferentes situações de economicidade do valor líquido da informação.

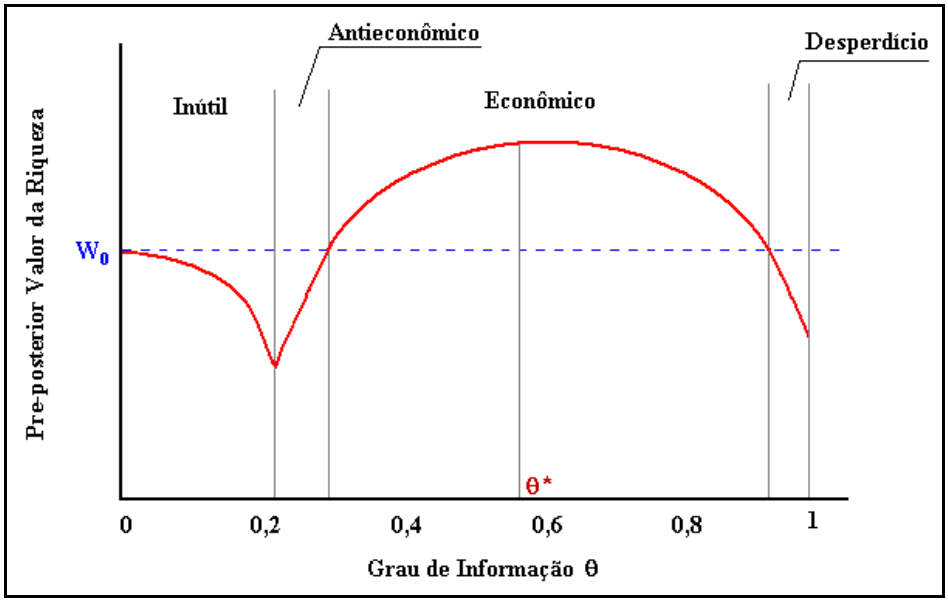

Figura 32 – Valor Líquido da Informação para Vários Graus de Informação

Na Figura 32 se vê que só a partir de $\theta > 0{,}2$ é que a informação pode ser útil e só a partir de $\theta > 0{,}3$ é que a aquisição de informação custosa (custo proporcional a θ) se torna econômica. Sendo essa função côncava na região em que $\theta > 0{,}2$, então existe uma aquisição ótima de informação em θ*. Note que a partir de $\theta > 0{,}9$ ocorre um desperdício de informação, pois devido ao seu custo a revelação total ($\theta = 1$) é antieconômica nesse exemplo. No ponto ótimo de aquisição da informação em $\theta^* \cong 0{,}6$, a riqueza é maximizada com a aquisição de informação. Mas na prática, nem sempre as alternativas de aquisição (ou investimento) em informação são disponíveis para qualquer valor θ. De qualquer maneira, o gráfico acima sugere o objetivo da primeira aplicação do cap. 5 que é selecionar a alternativa ótima de investimento em informação, de um conjunto discreto de alternativas. Em E&P de petróleo, esse conjunto é constituído de alternativas de projetos de investimento em informação, com diferentes custos, tempos de aprendizagem e poderes de revelação (diferentes η^2).

3.1.4.2.
Visão Estatística do VOI e Comparação de Experimentos

A teoria estatística em geral e o ramo chamado *teoria estatística da decisão*, em particular, sempre se preocuparam com questão da informação, por ex., o tamanho ótimo de uma amostra para fazer uma previsão dentro de um certo intervalo de confiança. A teoria estatística da decisão, especialmente a visão Bayesiana, teve grande influência na escola de *análise de decisão*. Por ex., Raiffa é autor não só do clássico de análise de decisão como co-autor de um clássico de teoria estatística da decisão, em Raiffa & Schlaifer (1961) e numa versão mais moderna com a colaboração de Pratt em Pratt & Raiffa & Schlaifer (1995).

Um dos mais influentes trabalhos sobre VOI desde um ponto de vista estatístico, mas com relevância em aplicações econômicas, foram os artigos de Blackwell (1951 e 1953), ver também o livro de Blackwell & Girshick (1954, cap.12). Blackwell foi um dos pioneiros[135] da teoria da *comparação de experimentos*, que compara estruturas de informação que possam ser preferidas a outras estruturas, independentemente da distribuição a priori assumida.

Como nota Arrow (1992, p.169), "*seria útil ter pelo menos um ordenamento parcial dos sinais que seja independente do problema de decisão*". Esse foi o ambicioso objetivo teórico de Blackwell. Ele obteve, no entanto, condições restritas em que se pode realmente fazer esse ordenamento genérico. Antes de examinar os resultados de Blackwell é oportuno fazer algumas definições estatísticas que serão úteis nesse e/ou em outros itens dessa tese.

A visão estatística de valor da informação é originalmente derivada do conceito de estatística suficiente ("sufficient statistics") T(S) onde "*o valor da informação a qual está contida na estatística T(S) é a mesma que o valor da informação da amostra original S*" (Jammernegg, 1988). Dessa forma, pode-se usar a estatística T(S) em vez de toda a amostra S, já que T(S) sintetiza o essencial da amostra S nesses problemas. Formalmente, uma estatística T(S) é suficiente para X se a distribuição de probabilidade condicional dos dados S dada a estatística T(S), não depender de X. O conceito de estatística suficiente tem um papel importante na teoria original de Blackwell.

---

[135] Segundo o próprio Blackwell (1951, summary) e Torgersen (1991, p.222), essa literatura começou em 1949 com um artigo não publicado de Bohnenblust & Shapley & Sherman.

O conceito de estatística suficiente tem a seguinte limitação apontada por DeGroot & Schervish (2002, p.387): "*a existência e forma de uma estatística suficiente em um problema particular depende criticamente da forma da função assumida para a distribuição de probabilidade*". Ou seja, uma estatística suficiente para uma distribuição $f(x \mid \theta)$ pode não ser estatística suficiente para uma outra distribuição $g(x \mid \theta)$.

Informação de Fisher $I(\xi)$ é um indicador estatístico clássico da *quantidade de informação* que uma amostra de dados contém sobre um parâmetro ξ de valor incerto. Menor incerteza significa dados mais informativos e logo um valor $I(\xi)$ maior. Uma propriedade importante de $I(\xi)$ é que numa amostra aleatória de n observações iid (independentes e identicamente distribuídos), a informação de Fisher $I_n(\xi)$ é simplesmente n vezes a informação de Fisher de uma única observação $I(\xi)$, isto é, $I_n(\xi) = n\, I(\xi)$. Prova: DeGroot & Schervish (2002, p.438). No item 3.4.1 sobre distribuição de Bernoulli, se mostrará que *não* é conveniente trabalhar com $I(\xi)$ como medida de aprendizagem em problemas de VOI.

A idéia da teoria de comparação de experimentos é responder a pergunta: dados dois experimentos ou duas estruturas de informação S e S', quando se pode dizer que uma a estrutura S é sempre melhor que a estrutura S'? Uma outra maneira de dizer a mesma coisa é com o conceito de estatística suficiente: quando que a estrutura de informação S é estatisticamente suficiente para S'? Torgersen (1991) usa também a frase: quando que a estrutura S é mais informativa que S'? Em Blackwell (1953), um experimento S é suficiente (ou mais informativo) que o experimento S' se existe uma transformação estocástica de S para uma v.a. Z(S) tal que, para toda a distribuição a priori p(x), as v.a. Z(S) e S' tem distribuições idênticas. Nem sempre é fácil conseguir um caso real que pode ser assim provado.

Conforme aponta Arrow (1992), pode-se ver claramente que um sinal é pelo menos tão bom quanto outro, quando o outro sinal é apenas um sinal misturado ("garbling") do primeiro. Ou seja, é apenas um *sinal do* primeiro *sinal*, como se pegasse o primeiro sinal e se adicionasse apenas ruído. Arrow argumenta ainda que em vez do conceito de mistura/alteração de sinal, pode ser mais conveniente trabalhar com os conceitos de suficiência e quase-suficiência estatística, esse último definido por ele usando a função verossimilhança.

Essas comparações de experimentos são feitas com base apenas em mérito estatístico, ignorando o custo do experimento (ou custo da aquisição de informação), ou seja, avalia-se o mérito de uma estrutura de informação antes de considerações sob seu custo. Se as estruturas tiverem o mesmo custo, a estrutura mais informativa será preferível. Mas a teoria de comparação de experimentos sozinha não ajuda muito na valoração do "trade-off" em caso de uma estrutura mais informativa, porém mais cara que outra. Também não considera que uma estrutura mais informativa poderia ser um projeto de investimento em informação não só mais caro como com maior tempo de aprendizagem. Essas importantes questões estarão contempladas no modelo proposto nessa tese.

Arrow (1992) mostra a interpretação econômica dessa teoria apontando que um sinal é pelo menos tão bom quanto outro no sentido da informação, se o resultado ("payoff") esperado baseado no primeiro sinal for pelo menos tão grande quanto o resultado esperado baseado no outro sinal, para todo problema de decisão. A seguinte definição (adaptada de Lawrence, 1999, p.198) é útil no contexto de OR: dada a opção real F(X, t), detida por um único decisor, a estrutura $\mathcal{I}(\theta)$ é estatisticamente mais informativa que $\mathcal{I}(\theta')$ se e somente se:

$$\mathbf{E[F(X, t) \mid \mathcal{I}(\theta)] \geq E[F(X, t) \mid \mathcal{I}(\theta')]} \qquad \mathbf{(62)}$$

Para todos os problemas de decisão relacionados, i. é, independente da distribuição a priori p(x). Em palavras, o valor esperado da opção real dada uma estrutura de informação mais informativa é igual ou maior que o valor esperado dessa opção real para uma estrutura menos informativa. Como antes, X é um vetor de variáveis aleatórias de interesse e t é o tempo.

Lawrence (1999, p.197-204) mostra que existem pelo menos 4 condições equivalentes para caracterizar que uma estrutura é mais informativa que a outra, valendo para distribuições a priori arbitrárias. Primeiro, a comparação via verossimilhança, que foi a abordagem original de Blackwell. A segunda condição equivalente é a comparação via probabilidades posteriores. A terceira é a comparação via possíveis utilidades. A quarta é a comparação via funções incerteza. Conforme aponta Kihlstrom (1984a), embora equivalentes, nem todas

são igualmente convenientes em cada aplicação. Por ex., a literatura de *planejamento seqüencial de experimentos* usa o critério da função incerteza[136].

A quarta condição, que usa uma função incerteza côncava (ex.: entropia, ver item 3.1.4.3), foi mostrada por Blackwell e por DeGroot (1962) e pode ser enunciada da seguinte maneira: *uma estrutura de informação é mais informativa que outra se e somente se reduz mais a incerteza esperada do que a outra*. Ver também a demonstração em Kihlstrom (1984a, definition 4 e theorems 4, 5 e 6).

O detalhamento desse tema foge do escopo dessa tese, mas a última condição sugere justamente fazer o que se propõe nessa tese e considerar uma estrutura de informação relacionada à redução esperada de incerteza. Na tese será considerada a seguinte *flexível* estrutura de informação alternativa para o caso de uma variável de interesse X e um sinal específico S.

$$\mathcal{I} = \{\eta^2(\mathbf{X} \mid \mathbf{S}), \bullet\} \qquad \textbf{(63)}$$

Onde $\eta^2(X \mid S)$ é a redução esperada de variância em X devido à revelação de informação S (a ser discutida no item 3.3) e o símbolo $\bullet$ indica um critério adicional para definir totalmente a estrutura da informação, sendo que o critério mais conveniente depende da aplicação. Em alguns casos (aplicação do cap. 5) esse critério pode ser simplesmente assumir que o *tipo* (se normal, triangular, etc.) de distribuição de revelações é o mesmo do caso *limite* de informação perfeita; em outras aplicações (caso exploratório, item 3.4) o critério pode ser assumir que as variáveis aleatórias X e S são *intercambiáveis*. Isso será discutido ainda nesse capítulo. Mas $\bullet$ pode ser também o critério mais convencional, i. é, a distribuição conjunta p(x, s). Em todos esses casos, o critério $\bullet$ junto com η^2, definem totalmente o impacto de S sobre X em qualquer problema de VOI. Mas outros critérios podem ser mais fáceis ou mais práticos do que a distribuição conjunta p(x, s). O importante é que a estrutura seja consistente, i. é, a combinação de η^2 com $\bullet$ deve ser feita dentro de certos limites, pois a distribuição conjunta p(x, s) tem de obedecer aos chamados limites de Hoeffding-Fréchet (ver item 3.3.1).

A estrutura de informação da eq. 63 é mais flexível pois dá liberdade para trabalhar com critérios mais convenientes para a aplicação, mas sempre

[136] O problema de planejamento de experimentos é seqüencial quando a escolha de um experimento em qualquer estágio é feita com o conhecimento dos resultados dos experimentos anteriores. O critério de escolha é a minimização da incerteza esperada medida por essa função.

acompanhada de uma unidade de medida de aprendizagem η^2. Essa estrutura flexível será usada em diversas aplicações.

Para fechar esse item é oportuno estabelecer o famoso teorema de Bayes e os fatos elementares sobre distribuições condicionais. Sejam os eventos $X_1, X_2, \ldots X_k$, partições do espaço X tal que $Pr(X_j) > 0$ para j = 1, 2, … k e seja S um evento tal que Pr(S) > 0. Então, para todo i = 1, 2, … k, o teorema de Bayes estabelece:

$$\mathbf{Pr(X_i \mid S) = \frac{Pr(X_i)\ Pr(S \mid X_i)}{\sum_{j=1}^{k} Pr(X_j)\ Pr(S \mid X_j)}} \qquad \mathbf{(64)}$$

Como se pode notar, o teorema de Bayes trabalha com probabilidades inversas $Pr(S \mid X_i)$ para determinar a probabilidade condicional $Pr(X_i \mid S)$.

Seja a distribuição de probabilidades conjunta da variável de interesse X e do sinal S, dada pela distribuição conjunta p(x, s). Seja p(s) > 0 a distribuição (marginal) de probabilidades do sinal S. A distribuição posterior é dada por:

$$\mathbf{p(x \mid s) = \frac{p(x, s)}{p(s)}} \qquad \mathbf{(65)}$$

Seja a distribuição a priori p(x) > 0. A *probabilidade inversa* ou *confiabilidade* de S ou ainda verossimilhança de S, é dada analogamente por:

$$\mathbf{p(s \mid x) = \frac{p(x, s)}{p(x)}} \qquad \mathbf{(66)}$$

Fixando s e vendo p(s | x) como uma função de x, se define a chamada função verossimilhança. Combinando as eqs. 65 e 66, chega-se à seguinte equação que também é chamada de teorema de Bayes (Lawrence, 1999, p.59):

$$\mathbf{p(x \mid s) = \frac{p(s \mid x)\ p(x)}{p(s)}} \qquad \mathbf{(67)}$$

A combinação da distribuição a priori p(x) com a verossimilhança p(s | x) é uma abordagem comum e popular entre os estatísticos para obter a distribuição conjunta p(x, s), mas certamente não é a única (Lawrence, 1999, p.59). Apesar do merecido sucesso da função verossimilhança na teoria e prática estatística (ex., a estimação por *máxima verossimilhança* é uma das mais importantes em estatística) e seu amplo uso em testes de hipóteses, não se pode pensar que isso automaticamente a credencia como o melhor elemento para estruturas de informação em problemas de valor econômico da informação. Apesar do seu amplo uso na literatura acadêmica *econômica* de VOI por Arrow, Marschak,

Radner & Stiglitz, etc., essa tese irá propor trabalhar com outra estrutura de informação que usa a redução esperada de incerteza em vez da função verossimilhança. As várias vantagens de se fazer isso serão discutidas nos itens 3.2 (expectativas condicionais) e no item 3.3 (medidas de aprendizagem).

Uma maneira de facilitar a matemática envolvida com essas distribuições em aplicações da teoria estatística da decisão é o uso de *distribuições conjugadas*. Distribuições conjugadas pertencem a uma família de distribuições com a seguinte propriedade: se a distribuição a priori escolhida é um membro dessa família conjugada, então a distribuição posterior também pertence a essa família (ver DeGroot & Schervish, 2002, seção 6.3).

3.1.4.3. O Conceito de Entropia e a Teoria da Informação

A teoria da informação (também chamada de *teoria estatística da comunicação*) foi desenvolvida por Shannon nos anos 40 tendo em mente aplicações em engenharia de comunicação. Mas o caráter inovador dessa teoria aliado a sua elegância matemática, a fez ter grande impacto não só na engenharia como em áreas diversas tais como estatística teórica e economia da informação. Essa teoria, que usa o conceito de entropia como medida de incerteza, foi sintetizada no livro de Shannon & Weaver (1949). Uma discussão crítica das bases matemáticas dessa teoria é feita por Khinchin (1953).

Na área de matemática, o livro texto de estatística teórica de Kullback (1959) teve um grande impacto e iniciou um novo ramo na estatística, que continua com grande prestígio nos dias de hoje. Kullback usou esses conceitos para estabelecer uma famosa medida de divergência entre distribuições que dá a distância entre duas distribuições. Outra importante contribuição é o livro texto de Jaynes (2003), um inovador e crítico tratado sobre os fundamentos da teoria da probabilidade, que discute também o famoso *princípio da máxima entropia* para a distribuição a priori (será vista aqui). Poderiam ser mencionadas muitas outras importantes contribuições do conceito de entropia e da teoria da informação[137].

[137] Por ex., Kolmogorov na década de 50 usou fatos matemáticos sobre entropia para mostrar que nem todos os processos iid são mutuamente isomórficos. Isso iniciou um grande desenvolvimento na *teoria ergódica* em que a entropia tem um papel chave. A *teoria da complexidade* de Kolmogorov, também usa a teoria da informação como base matemática.

A seguir serão apresentadas as definições de entropia e informação mútua para o caso discreto. Considere uma distribuição a priori discreta univariada p(x). No sentido de Shannon, entropia (H) é a medida de incerteza definida por[138]:

$$\mathbf{H(X) = -\sum_i p(x_i)\log[p(x_i)]} \quad \mathbf{(68)}$$

A base do logaritmo na equação da entropia é arbitrária. Conforme mostra Shannon (p.32-33), uma escolha conveniente poderia ser a base 2, de forma que a entropia é convenientemente medida em "bits"[139]. Já em trabalhos analíticos onde se trabalha com operações de diferenciação e integração, a base neperiana "*e*" é mais útil. Na definição de entropia se poderia multiplicar o somatório por uma constante positiva para mudança de escala, que foi a equação original de Shannon.

Note na eq. 68 que para o caso de revelação total (ou informação perfeita), a entropia colapsa para zero pois log(1) = 0. Mais precisamente, $H(X) = 0 \Leftrightarrow$ um dos números $p(x_i)$ é igual a um e todos os outros $p(x_j)$, $j \neq i$, são iguais a zero (Shannon & Weaver, 1949, p.51). Para todos os outros casos a entropia é estritamente positiva.

Uma aplicação de interesse da tese é o estabelecimento da distribuição a priori usando o chamado *princípio da máxima entropia*. Esse princípio é muito usado em exploração de petróleo, especialmente na área de geofísica (interpretação de registros sísmicos). Esse princípio diz que as probabilidades a priori devem ser atribuídas de forma a ser a de maior entropia dentre aquelas consistentes com o conhecimento a priori. A intuição é que dessa forma se obtém uma distribuição que assume o mínimo da variável incerta (distribuição *honesta*).

Jaynes (1968) recomenda que a determinação da distribuição a priori seja feita com o princípio da máxima entropia conjugada com a chamada *teoria de grupos*[140], muito usada em física teórica. A forma da distribuição a priori é unicamente determinada se o domínio fundamental do grupo se reduz a um ponto. A aplicação de métodos analíticos da física em finanças e em economia tem crescido muito, geralmente com enfoque muito mais teórico que prático e muita

---

[138] Assuma que 0 . log(0) = 0. Entropia também pode ser interpretada como o valor esperado de log[1/p(x)].

[139] Bits = "binary digits". Uma chave liga-desliga armazena um bit de *informação*, ver Shannon & Weaver, 1949, p.32.

[140] Grupo é um par (A, •) onde A é um conjunto não vazio e • é uma operação binária em A que obedece três propriedades (associativa, identidade e inversa), ver Kholodnyi (1998, p.13-14).

vezes competindo com métodos tradicionais mais simples. Mas essa hibridização sempre abre novas possibilidades. A teoria de grupos, por ex., foi usada em Kholodnyi (1998) para formalizar matematicamente o conceito de *simetria*[141] na valoração de ativos contingentes, especialmente em mercados cambiais.

Conforme aponta Arrow (1972, p.134), Shannon vê H(X) também como *quantidade de informação*. Isso porque uma proposição de Shannon diz que um *canal de comunicação* com capacidade H não será uma restrição, i. é, tem capacidade de enviar uma mensagem sobre o real estado da natureza de X com um erro arbitrariamente pequeno. No entanto, é muito mais útil e adequada a interpretação da entropia como medida de incerteza.

Na definição de entropia (eq. 68), note que não interessa os valores dos cenários, apenas as probabilidades dos diferentes cenários são consideradas. Assim, a entropia é uma medida adimensional, o que trás vantagens matemáticas importantes, mas também desvantagens. A entropia tem a vantagem da simplicidade para representar a incerteza. Mas, em problemas de *valoração econômica* onde a *magnitude* de perdas e ganhos tem importância[142], essa característica pode ser freqüentemente uma desvantagem ou será preciso uma variável adicional para conjugar probabilidades e valores dos cenários.

Para o caso de distribuição de probabilidades p(x) contínua, a entropia é de forma análoga definida por Shannon & Weaver (1949, p.87) como:

$$\mathbf{H(X) = -\int_X p(x)\ log[p(x)]\ dx} \qquad \mathbf{(69)}$$

No entanto, usando o limite do caso discreto, Jaynes (1968, eq.40) argumenta que é preferível usar log[p(x)/m(x)] no lugar de log[p(x)] na eq.69, onde m(x) é uma *função de medida invariante*. O livro texto de Cover & Thomas (1991, cap.9) usa a eq.69, mas chamando-a de *entropia diferencial* e alerta de que são necessários certos cuidados no uso do conceito de entropia para distribuições contínuas. Por ex., no caso de uma distribuição uniforme contínua no intervalo [0, a], a qual tem p(x) = 1/a, aplicando a eq.69 obtém-se h(X) = log(a). Mas se a < 1 $\Rightarrow$ h(X) < 0. Assim, ao contrário da entropia discreta, a entropia diferencial pode

[141] A teoria de grupos e conceitos como "gauge symmetry" deram a formalidade matemática que permitiu uma revolução na física no século XX (Kholodnyi, 1998).

[142] No projeto de um *canal de comunicação* isso não é problema pois os cenários são mensagens medidas em bits e não quantidades numéricas.

ser negativa. Isso complica o uso desse conceito em aplicações com distribuições contínuas.

A *entropia condicional* de X dado S, também conhecida como *entropia esperada* ou *equivocação* ("equivocation", ver McEliece, 2002, p.20), é a entropia média das distribuições posteriores p(x | s) para todos os possíveis valores do sinal S, i. é, para o caso discreto o conceito de entropia condicional é definida como:

$$\mathbf{H(X \mid S) = -\sum_x \sum_s p(x, s) \log[p(x \mid s)]} \quad \mathbf{(70)}$$

Em palavras, a entropia condicional mede a incerteza esperada remanescente sobre X depois de S ter sido observado. Também pode ser vista como o valor esperado de log[1/p(x | s)]. Note que H(X | S) ≤ H(X), com igualdade ocorrendo se e somente se X e S forem independentes (prova: Cover & Thomas, 1991, p.27-28). Em geral essa medida é *assimétrica*, e por isso seria uma candidata a medida de aprendizagem (ver item 3.3.2).

A diferença entre a entropia (incondicional) H(X) e a entropia condicional H(X | S) é uma medida de redução esperada de incerteza devido à informação revelada por S, onde a medida de incerteza é a entropia. Essa quantidade é chamada de *informação mútua*, ou *informação transmitida* ou *incerteza removida* (Lawrence, 1999, p.62) ou ainda *taxa de transmissão* (Shannon), é definida por:

$$\mathbf{I(X; S) = H(X) - H(X \mid S)} \quad \mathbf{(71)}$$

A informação mútua pode ser vista como uma medida de quantidade de informação que uma variável aleatória (v.a.) tem da outra. Esse é o conceito mais importante da teoria da informação no contexto dessa tese por ser uma medida de redução de incerteza. Além disso, num contexto teórico de utilidade logarítmica, I(X; S) é o próprio VOI (Arrow, 1972, p.136-137). Será visto que a medida de aprendizagem proposta na tese está intuitivamente associada à idéia da eq. 71, mas usando variância no lugar da entropia para medir incerteza. No caso de variáveis aleatórias discretas, a informação mútua pode ser escrita como:

$$\mathbf{I(X;S) = \sum_x \sum_s p(x, s) \log\left[\frac{p(x, s)}{p(x)\, p(s)}\right]} \quad \mathbf{(72)}$$

Para o caso de distribuições contínuas, a informação mútua é escrita como:

$$\mathbf{I(X;S) = \iint_{X\,S} p(x, s) \log\left[\frac{p(x, s)}{p(x)\, p(s)}\right] dx\, ds} \quad \mathbf{(73)}$$

Uma propriedade importante da informação mútua é a simetria, que vale tanto no caso discreto como contínuo, i. é:

$$\mathbf{I(X; S) = I(S; X)} \tag{74}$$

Além disso, I(X; S) ≥ 0, com a igualdade ocorrendo se e somente se X e S forem independentes (prova: Cover & Thomas, 1991, p.27). Outra propriedade é que se T(S) for estatística suficiente, então I(X; T(S)) = I(X; S), ou seja, a estatística suficiente preserva a informação mútua e vice-versa.

Um conceito muito usado em probabilidade, inclusive no estudo de medidas de dependência de variáveis aleatórias, e que é relacionado a I(X; S) é o de *entropia relativa*, mais conhecida como distância de Kullback-Leibler entre duas distribuições de probabilidade p(x) e q(x). Essa "distância" no caso discreto é[143]:

$$\mathbf{D(p \,||\, q) = \sum_x p(x) \log\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right]} \tag{75}$$

Entretanto, D(p || q) *não* é uma verdadeira distância pois ela não é uma medida simétrica, ao contrário da mútua informação. Tem-se que D(p || q) ≥ 0, com a igualdade ocorrendo se e somente se p(x) = q(x) para todo x. Para o caso de distribuições contínuas, a medida de Kullback-Leibler é dada por:

$$\mathbf{D(p \,||\, q) = \int_x p(x) \log\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right] dx} \tag{76}$$

Tem-se que D(p || q) é finito apenas se o suporte de p(x) está contido no suporte de q(x). Ela pode ser definida para um vetor X de n v.a. (na eq. 76, substituir q(x) por um produtório de n distribuições $q(x_i)$), e por isso alguns autores dizem que D(p || q) é uma generalização da informação mútua para o caso multivariado. A medida chamada *divergência* (Kullback, 1959, p.6) é definida pela soma das medidas de Kullback-Leibler:

$$\mathbf{J(p; q) = D(p \,||\, q) + D(q \,||\, p)} \tag{77}$$

Arrow (1972) faz uma análise crítica do uso da teoria da informação para a análise de VOI no contexto da teoria econômica. Conforme também apontado por Marschak (1959, p.81), se for assumido que o custo de um canal de comunicação é proporcional à sua capacidade, então a entropia é uma medida de preço de *suprimento* da informação e não o valor da *demanda* por informação. Mas Arrow (1972, p.134) aponta que foram feitos esforços para tentar interpretar a entropia

[143] Com as convenções: 0 log(0/q) = 0 e p log(p/0) = ∞.

como valor (no sentido de demanda) da informação, inclusive por Marschak (1959, p.92-95). A limitação da entropia nesse caso vem da sua própria definição que só considera as *probabilidades* dos cenários e não o *valor* dos cenários. Por isso que a entropia só pode ser usada diretamente em problemas de VOI quando a função utilidade é logarítmica, pois *se o VOI é independente das remunerações, então a função utilidade tem de ser logarítmica* (prova: Arrow, 1972, p.134-135).

No caso de utilidade logarítmica, Arrow (1972, p.136-137) que o VOI é precisamente a informação mútua (ou incerteza removida) definida anteriormente. Isso é mais um indício da ligação direta e estreita do VOI com o conceito de redução esperada de incerteza. Mas Arrow (1972, p.138-139) aponta que a simplicidade da solução do caso logarítmico não se generaliza e assim o VOI não irá depender *apenas* da informação mútua/remoção de incerteza.

Lawrence (1999, p.6) faz uma crítica mais aguda à aplicação da teoria da informação de Shannon no contexto econômico dizendo que ela é mais apropriada para o estudo de armazenagem e transmissão de *dados* e não de *informação*. Muitos matemáticos discordarão dele. Mas apesar das inegáveis limitações da teoria da informação no contexto econômico, a sua simplicidade permite fazer úteis e interessantes analogias como a que será feita comparando o conceito de informação mútua com a variância da distribuição de revelações (item 3.2).

3.1.4.4. Análise de Sensibilidade Global

Uma literatura que pode ser relacionada com medidas de aprendizagem (de interesse em aplicações de VOI) recentemente descoberta pelo autor é com área de modelagem científica chamada de *análise de sensibilidade* (Saltelli et al., 2004). Essa literatura é proveniente da área de *física computacional* (exs.: Hofer, 1999; e Jansen, 1999) e de *engenharia de confiabilidade* (ex.: Saltelli, 2002).

Quando se pensa em análise de sensibilidade se imagina a *derivada parcial* da variável de interesse (X) em relação a uma variável de entrada (S_j), o que teria pouco ou nada a ver com incerteza e com os problemas dessa tese. Mas a derivada parcial é uma medida de sensibilidade *local*, enquanto que Saltelli et al. (2004)

está preocupado com medidas e técnicas *globais* de sensibilidade e envolvendo incerteza nos dados de entrada e no valor de saída[144].

De acordo com Saltelli et al. (2004, preface), a literatura de análise de sensibilidade global (ASG) em modelagem científica está preocupada com problemas tais como: escolha de um modelo versus outro; seleção de tamanho de malha; seleção de diferentes conceituações sobre um sistema, etc. Técnicas de ASG são usadas para acessar a importância relativa dos fatores de entrada do modelo. Por isso esses autores chamam as medidas de ASG de *medidas de importância*. A literatura sobre ASG procura responder perguntas tais como: "*qual dos fatores de entrada (inputs) é o mais importante na incerteza da variável de interesse (output)?*"; e "*se pudermos eliminar a incerteza em um dos fatores de entrada, qual fator deveremos escolher para reduzir ao máximo a variância do resultado?*". Essa última pergunta tem uma clara conexão com a questão de medida de aprendizagem que é um dos focos dessa tese.

3.2. Expectativas Condicionais e Distribuição de Revelações

3.2.1. Expectativas Condicionais

Expectativa condicional E[X | S] é uma variável aleatória que assume o valor E[X | S = s] com probabilidade Pr(S = s)[145]. Ela pode ser vista também como uma função, i. é, E[X | S] é uma função de S[146]. Será mostrada a definição rigorosa de E[X | S] para o caso geral de variáveis aleatórias arbitrárias usando a integral de Lebesgue-Stieltjes e alguns outros conceitos da teoria da medida. Mas antes são mostradas abaixo as equações de E[X | S = s], respectivamente para os casos de variáveis aleatórias ambas discretas e ambas contínuas.

$$\mathbf{E[X \mid S = s\,]} = \sum_{x} \mathbf{x\ p(x \mid s)} \qquad \mathbf{(78)}$$

[144] Infelizmente a literatura de análise de sensibilidade global (ASG), em especial o primeiro livro texto de Saltelli et al. (2004), só chegou ao conhecimento do autor em novembro de 2004, com a tese praticamente pronta. Assim, a sugestão é que no futuro seja explorado melhor a conexão e aplicabilidade de métodos de ASG em problemas de valor da informação.

[145] Ver o livro de Sheldon Ross (1998) para uma boa introdução ao conceito de expectativa condicional sem usar teoria da medida e o livro de Williams (1991) para o caso mais geral com a teoria da medida.

[146] O item 3.2 é parcialmente baseado em Dias (2002).

$$\mathbf{E[X \mid S = s\,]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x\ p(x \mid s)\ ds} \qquad \mathbf{(79)}$$

Conforme foi visto antes (rever a discussão sobre a Figura 28), uma revelação parcial de informação através de um sinal S trazendo informação imperfeita sobre o verdadeiro estado da natureza da variável de interesse X, gera um conjunto (infinito no caso de sinais com distribuição contínua) de distribuições posteriores p(x | s). A média de cada distribuição posterior (revelada no cenário S = s) é uma expectativa condicional E[X | S = s], que ex-ante é uma variável aleatória (v.a.) que depende do sinal revelado s. Foi visto que é muito mais simples trabalhar com a (única) distribuição de expectativas condicionais do que com as (infinitas) distribuições posteriores. Além disso, após receber a informação S, o decisor não sabe qual cenário da distribuição posterior é o verdadeiro, conhece apenas a distribuição posterior. Assim, tudo que ele pode fazer é usar alguns momentos dessa distribuição para tomar decisões econômicas (ainda sob incerteza) adaptadas a essa informação. O principal momento de uma distribuição posterior é exatamente a expectativa condicional E[X | S]. Nas aplicações de VOI, além de E[X | S], pode-se usar a distribuição de Var[E[X | S]]. Mas como é um efeito de segunda ordem na otimização, será *muito* mais simples usar a variância *esperada* das distribuições posteriores E[Var[E[X | S]]] em conjunção com a distribuição de E[X | S].

A alternativa com métodos Bayesianos tradicionais para modelar a incerteza técnica em problemas de VOI usando a *função verossimilhança* para determinar as possíveis distribuições posteriores, é bem mais complexa para ser inserida em modelos dinâmicos de opções reais e/ou apresenta computação muito mais intensiva, além de outras desvantagens que serão mostradas. Mas mesmo nessa literatura tradicional, é comum trabalhar com a expectativa condicional dentro da equação de maximização de valor, ver, por ex., McCardle (1985, eqs.3 e 4)[147].

Em economia é muito usada a expectativa condicional em várias aplicações, especialmente em econometria. Goldberger (1991, preface) adota a função expectativa condicional "*as the key feature of a multivariate population for*

[147] Entretanto McCardle não desenvolveu ou usou as propriedades da distribuição de expectativas condicionais, como é feito aqui.

economists who are interested in relations among economic variables… – a very simple concept"[148].

Em finanças esse conceito é fundamental, de forma que livros texto de cálculo estocástico aplicado a finanças dedicam espaço significativo para discutir o conceito de expectativa condicional (exs.: Mikosch, 1998; Shreve, 2004). Conforme Tavella (2002, p. vii, viii, 4), esse conceito tem um lugar natural em engenharia financeira computacional onde joga um papel chave. Isso porque o preço de um derivativo é simplesmente um valor presente esperado de um valor futuro condicional a um conjunto de informação.

O uso de expectativa condicional como base para decisões tem também uma forte base teórica. Imagine uma variável X com incerteza técnica e seja a nova informação ou sinal S uma v.a. definida no mesmo espaço de probabilidades (Ω, Σ, P). O objetivo é obter a melhor estimativa de X observando S, através do uso de uma função g(S). A medida mais usada para a qualidade de um previsor g(S) é o seu *erro quadrático médio* ("mean square error") definido por $MSE(g) = E[X - g(S)]^2$. A escolha da função g* que minimiza MSE(g) é exatamente a função expectativa condicional $E[X \mid S]$. Essa é uma propriedade muito conhecida em econometria (ver, por ex., Gallant, 1997, p.64-65). Em adição, o erro $\varepsilon = X - E[X \mid S]$ tem covariância zero com toda *função* de S (ver Goldberger, 1991, p. 53).

A expectativa condicional $E[Y \mid X = x]$ é também o (melhor) valor da *regressão* de Y versus X para X = x. A melhor regressão pode ser *linear* mas em geral é *não-linear* (ver Whittle, 2000, p.89)[149]. Ex.: uma regressão *quadrática* Y versus X minimizará o $MSE(a, b, c) = E[Y - a - bX - cX^2]^2$ escolhendo os parâmetros a*, b*, c*. Se essa função quadrática for a melhor função no sentido de minimizar o MSE, então para X = x tem-se $g(x; a^*, b^*, c^*) = E[Y \mid X = x]$. Gallant (1997) provou que o melhor *polinômio* previsor (*regressão polinomial*) de ordem N é a expectativa condicional quando N tende ao infinito.

Em adição, conforme apontam DeGroot & Schervish (2002, p.348), a expectativa condicional é o (melhor) estimador de Bayes quando é usado o critério do erro quadrático como função perda ("loss function") na avaliação dos

[148] Além disso, os estatísticos sabem que em certos problemas estatísticos uma regressão linear é equivalente, mas bem mais simples que os métodos Bayesianos tradicionais e os que usam a máxima verossimilhança. Será vista a ligação direta entre regressões e expectativas condicionais.

[149] Ver também Gallant (1997, p.109-112) para o caso não-linear.

estimadores. Esses autores lembram que essa função perda é de longe a mais usada em problemas de estimação. Além disso, se S é estatística suficiente para X, então o estimador E[X | S] domina *qualquer* outro estimador de X (DeGroot & Schervish, 2002, p.385) e, assim, qualquer outro estimador é chamado de *inadmissível* (DeGroot & Schervish, 2002, p.386).

Já que a informação S = s *revela* E[X | S = s] e dado o grande uso da palavra "revelation" e "information revelation" na literatura de economia de informação (exs.: Wilson, 1975, p.186; Drazen & Sakellaris, 1995; Dutta & Morris, 1997; Chamley & Gale, 1994) e na literatura de opções reais (exs.: Grenadier, 1999; Childs & Ott & Riddiough, 2001, 2002a, 2002b), se adotará a notação "revelação" $R_X(S)$ para denotar a função expectativa condicional E[X | S], de forma que a distribuição de revelações será usada para caracterizar a distribuição da v.a. R_X. Assim o termo "revelação" enfatiza a mudança de expectativas com o novo cenário revelado pela informação, i. é, ressalta o *processo de aprendizagem* ou *processo de descoberta* em direção ao verdadeiro valor da variável[150]. Assim, será usada a seguinte equação para definir a função $R_X(S)$:

$$\mathbf{R_X(S) = E[\,X \mid S]} \qquad \mathbf{(80)}$$

O conceito de "revelação" aqui usado tem similaridades e diferenças com o famoso *princípio da revelação* ("revelation principle") da literatura de *assimetria de informação*, mais especificamente da *teoria de desenho de mecanismos*[151] (ex., Salanié, 1994) e de *jogos Bayesianos* (ex.: a vasta literatura de *jogos de sinalização*). Nessa tese, a revelação é do verdadeiro valor de um parâmetro técnico X (verdadeiro estado da natureza de X), enquanto que o conceito usado em desenho de mecanismos é relacionado ao verdadeiro tipo de um agente.

É oportuno formalizar matematicamente o conceito de expectativa condicional de uma variável X dado o sinal S. Para efeito de generalidade, essa formalização usará um pouco de *teoria da medida* e da visão axiomática da probabilidade de Kolmogorov, mas será dada também a interpretação intuitiva e informal. Kolmogorov (1933) *primeiro* definiu expectativa condicional e *depois*

---

[150] O autor usa esse termo desde Dias (1997) e foi incentivado por uma conversa com o Prof. Dixit em Princeton (em março de 1997) sobre "revelation". O autor tem usado esse termo na Petrobras desde 1998 com o sentido que apareceu em Dias (2001b). Entretanto, somente em Dias (2002) é que foi apresentado esse conceito de forma mais formal, com proposições sobre as propriedades da distribuição de revelações no contexto de OR e VOI.

[151] Usa-se o princípio de revelação para desenhar um mecanismo direto (exs.: contratos, regras de um leilão) de forma a ser ótimo para um jogador revelar toda a verdade sobre o seu tipo.

(usando essa definição) definiu probabilidade condicional como caso particular. A abordagem axiomática permite trabalhar com eventos condicionantes com probabilidade muito pequena ou zero (ver Rao, 1993, p.25-26), o que não é possível com a definição tradicional de probabilidade condicional (teria divisão por zero). O livro clássico de Kolmogorov (1933), trazendo os axiomas fundamentais da teoria da probabilidade, causou uma revolução nessa teoria e é hoje a abordagem padrão de textos avançados de probabilidade[152].

Sejam as variáveis aleatórias X e S definidas no mesmo *espaço de probabilidades* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, onde Ω é o *espaço amostral* (conjunto de todas as possíveis realizações ω), Σ é uma *sigma-álgebra*[153] e $\mathbb{P}$ é uma *medida de probabilidade* definida[154] no intervalo [0, 1]. Na teoria da medida, uma v.a. é vista como uma função de um espaço amostral $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Condicionando uma probabilidade a um conjunto A, significa uma *contração* do espaço amostral. Em vez de tomar o valor esperado sobre todo o espaço Ω, o valor esperado é tomado apenas sobre um subconjunto $A \subseteq \Omega$. Algumas definições são possíveis dependendo se o condicionante é um evento (conjunto) sobre uma v.a. discreta, ou uma v.a. contínua, ou mesmo uma v.a. arbitrária (discreta + contínua, ex.: distribuição do valor da opção mostrada na Figura 4). Será apresentado abaixo o caso mais geral. Seja X uma v.a. *integrável*[155] mapeando o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ em um espaço mensurável. Seja Ψ uma <u>*sub*-*sigma-álgebra*</u> de Σ (i. é, $\Psi \subseteq \Sigma$)[156]. A expectativa condicional de X dado Ψ, $\mathbf{E[X \mid \Psi]}$ é <u>uma função Ψ-mensurável</u>[157] que satisfaz a equação abaixo (chamada de "partial averaging" por autores como Shreve, 2004, p.68) para todo conjunto $Y \in \Psi$:

---

[152] Confome Spanos (1999, p.412), a abordagem de Kolmogorov se tornou um sucesso instantâneo por clarear toda a "bagunça" criada com o estudo do movimento Browniano.

[153] Sigma-álgebra Σ em Ω é uma família de eventos E (sub-conjuntos de Ω que são eventos), compreendendo o conjunto vazio $\varnothing$, complementos de conjuntos que pertencem a Σ e uniões contáveis de seqüências de conjuntos $E_n \in \Sigma$.

[154] Mais precisamente, P é uma função mapeando Σ em [0, 1].

[155] Se X é integrável, então X tem valor esperado <u>finito</u>, ou X é integrável $\Leftrightarrow E[|X|] < \infty$ (James, 1996, p.110). Uma função f que é μ-integrável no sentido de Lebesgue, é muitas vezes escrita como $f \in \boldsymbol{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e assim $X \in \boldsymbol{L}^1$, onde $\boldsymbol{L}^1$ é simplesmente um vetor sobre $\mathbb{R}$ (reais).

[156] Ver Shyraiev (1996, p.212) ou Williams (1991, p.84). Uma <u>sub</u>-sigma-álgebra representa simplesmente "*menos (ou igual) informação*" ou um sub-conjunto de informação.

[157] Se X é Ψ-mensurável, então a informação em Ψ determina totalmente o valor de X. (Shreve, 2004, p.66). Ver, Williams (1991, p.29-30) para a definição mais formal de funções Ψ-mensuráveis em um espaço mensurável (Ω, Ψ).

$$\int_Y \mathbf{E[X \mid \Psi](\omega)}\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_Y \mathbf{X(\omega)}\, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \mathbf{(81)}$$

Onde as integrais acima são as de Lebesgue-Stieltjes. Em finanças, primeiro se estabelece o espaço amostral Ω, que é o conjunto de possíveis cenários futuros, sobre os quais se impõe uma medida ("real") de probabilidade $\mathbb{P}$. No entanto, no cálculo de opções se usa muito uma medida de probabilidade equivalente chamada de medida *neutra ao risco* $\tilde{\mathbb{P}}$. Duas medidas de probabilidade são ditas equivalentes no espaço mensurável (Ω, Σ) se elas concordam em quais conjuntos em Σ que têm probabilidade zero (Shreve, 2004, p.34-35). Nos conjuntos de probabilidade positiva, essas medidas irão discordar apenas nos valores de quão prováveis são cada cenário. No caso de incerteza técnica, as probabilidades já são naturalmente neutras ao risco (ver item 3.1.1) e assim essas duas medidas se confundem. Shreve (2004, p.35) não gosta das denominações "mundo real" e "mundo neutro ao risco", muito mencionadas na literatura de finanças, já que o "mundo" é o mesmo e representado por Ω.

Denota-se por σ(S) a menor sigma-álgebra gerada pela v.a. S com respeito ao qual S é mensurável (Karlin & Taylor, 1975, p.300). Nesse caso tem-se E[X | S] = E[X | σ(S)] (Mikosch, 1998, p.69). A sigma-álgebra σ(S) gerada por S contém toda a informação essencial sobre a estrutura da variável (ou vetor) aleatória S como função de $\omega \in \Omega$. Nas aplicações se trabalhará apenas com valores pertencentes ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, i. é, com a sigma-álgebra Ψ com todos os conjuntos $\{S \in \mathcal{B}\}$, onde $\mathcal{B}$ é a sigma-álgebra de Borel[158].

A expectativa condicional R_X pode ser vista de forma *alternativa* como a projeção de X no *espaço L^2 de Hilbert*[159] sobre o subespaço linear fechado $\boldsymbol{L}^2(\Omega, \Psi, \mathbb{P})$ do espaço $\boldsymbol{L}^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ e assim a expectativa condicional existe (ver

[158] A sigma-álgebra de Borel contém sub-conjuntos gerais da reta $\mathbb{R}$, i. é, se $\Omega = \mathbb{R}$, então $\mathcal{B}$ é gerada pelos sub-conjuntos $C^1 = \{(a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$. Já se **S** for um vetor e $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, usa-se os sub-conjuntos chamados de retângulos (**a**, **b**], onde **a** e **b** são vetores. Qualquer sub-conjunto *razoável* de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ (bolas, esferas, curvas suaves, superfícies, conjuntos abertos, fechados, etc.) é um *conjunto de Borel* (Mikosch, 1998, p.64-65) e pertence a $\mathcal{B}$.

[159] Espaço de Hilbert $\boldsymbol{L}^2$ é o espaço de variáveis aleatórias com finitos segundos momentos, o qual é gerado por combinações *lineares* de funções integráveis ao quadrado de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Uma variável aleatória X é dita pertencer a $\boldsymbol{L}^2$ se $E[X^2] < \infty$ (ver, por ex., Williams, 2001, p.65).

Jacod & Protter, 2000, p.196). A Figura 33 ilustra essa visão de E[X | Ψ], como a projeção ortogonal de X no espaço $\boldsymbol{L}^2(\Omega, \Psi, \mathbb{P})$ de Hilbert[160].

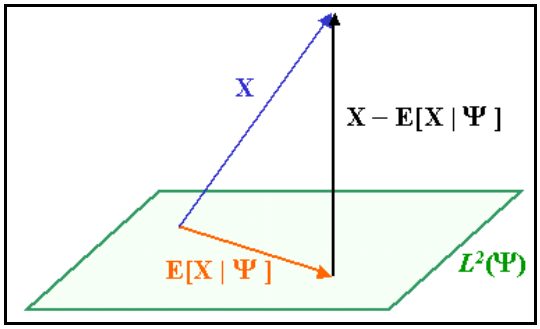

Figura 33 - E[X | Ψ] como Projeção no Espaço L^2 de Hilbert

Existem outras maneiras de definir a expectativa condicional, por ex., através da *função indicador*[161] $\mathbb{I}_S$ (ver Mikosch, 1998, p.58; ou Shiryaev, 1996, p.79). O lema a seguir (baseado em Mikosch, 1998, p.194) seguirá a ótica de Kolmogorov (1933, p.53) no sentido que a existência de E[X] é também suficiente para a existência de R_X.

Lema 1 (existência da expectativa condicional R_X): Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ onde X e S são definidos e Ψ uma sub-sigma-álgebra de Σ. Se $E[|X|] < \infty$, então existe uma v.a. R_X definida pela eq. 80 tal que a sigma-álgebra gerada por R_X está contida em Ψ e, para todo $S \in \Psi$, essa variável atende a definição de expectativa condicional dada pela eq. 81. Além disso, essa expectativa condicional é *quase certamente*[162] finita e é única a menos de *versões* de R_X que diferem de R_X apenas em conjuntos de medida igual a zero.

Prova: Conforme Glivenko (ver Kolmogorov, 1933, p.40), $E[\,|X|\,] < \infty$ é uma condição necessária e suficiente para a existência de E[X]. A prova da existência da expectativa condicional, i. é, $E[\,|X|\,] < \infty \Rightarrow E[\,|R_X|\,] < \infty$, é baseada no famoso teorema de Radon-Nikodým[163], e é mostrada em Kolmogorov (1933, p. 53). Se a eq. 81 vale tanto para R_X como para R'_X e ambas geram sigma-álgebras

[160] Ver figura similar em Mikosch (1998, p.75) e mais detalhada em Saporta (1990, p.78).

[161] Função indicador $\mathbb{I}_S(\omega)$ é igual a 1 se $\omega \in S$ e igual a zero se $\omega \notin S$.

[162] Uma assertiva é válida quase certamente (q.c.) se ela é sempre válida exceto num conjunto de medida igual a zero. Ex.: é *possível* sortear o número exato 1 do conjunto de números reais, mas como existem infinitos números reais, Pr(X = 1 exato) = 0.

[163] Esse teorema (na época recente, de 1930) permite a *diferenciação de funções-conjuntos* ("set functions"). Esse teorema não será demonstrado já que mesmo em livros avançados de finanças, como em Shreve (2004, p.39), a prova é considerada "além do escopo desse texto".

contidas em Ψ então, pelo teorema de Radon-Nikodým, R_X é única no sentido que a probabilidade de $R_X \neq R'_X$ é zero (ver também Shreve, 2004, p.69). □

Serão listadas sem provas[164] no Lema 2, as 5 propriedades fundamentais das expectativas condicionais (Shreve, 2004), todas válidas quase certamente.

Lema 2 (propriedades fundamentais das expectativas condicionais): Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ e seja Ψ uma sub-sigma-álgebra de Σ.

(a) Se X e Y são variáveis aleatórias integráveis e c_1 e c_2 são constantes, então é válida a propriedade de linearidade das expectativas condicionais:

$$\mathbf{E[c_1 X + c_2 Y \mid \Psi] = c_1 E[X \mid \Psi] + c_2 E[Y \mid \Psi] = c_1 R_X + c_2 R_Y} \quad \mathbf{(82)}$$

(b) Se X e Y são variáveis aleatórias integráveis, e Y é Ψ-mensurável, então é válida a propriedade "tirando para fora o que é conhecido":

$$\mathbf{E[Y X \mid \Psi] = Y\ E[X \mid \Psi]} \quad \mathbf{(83)}$$

(c) Se X é uma variável aleatória integrável e $\mathcal{H}$ é uma sub-sigma-álgebra da sub-sigma-álgebra Ψ, então é válida a propriedade de condicionamento iterado:

$$\mathbf{E[E[X \mid \Psi] \mid \mathcal{H}] = E[X \mid \mathcal{H}]} \quad \mathbf{(84)}$$

Essa propriedade será demonstrada no item 3.2.2 por ser fundamental para a teoria dessa tese. Ela pode ser escrita com a seguinte notação mais compacta:

$$\mathbf{E[R_X(\Psi) \mid \mathcal{H}] = R_X(\mathcal{H})} \quad \mathbf{(85)}$$

(d) Se X é uma variável aleatória integrável e independente de Ψ, então é válida a propriedade de independência:

$$\mathbf{E[X \mid \Psi] = E[X]} \quad \mathbf{(86)}$$

(e) Se X é uma variável aleatória integrável e φ(x) é uma função *convexa* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E[|\varphi(x)|] < \infty$ e $x \in X$ (x é uma variável "dummy"), então vale a propriedade da desigualdade condicional de Jensen:

$$\mathbf{E[\varphi(X) \mid \Psi] \geq \varphi(E[X \mid \Psi])} \quad \mathbf{(87)}$$

Em adição a essas propriedades fundamentais, outras serão vistas no item 3.2.2. Mas é útil mencionar antes mais duas propriedades e uma definição. A primeira propriedade (ver Lawrence, 1999, p.63) diz que a ordem de integração não importa quando se toma o valor esperado de uma função real φ(x, s):

$$\mathbf{E_{x,s}[\varphi(x,s)] = E_x[E_{s|x}[\varphi(x,s)]] = E_s[E_{x|s}[\varphi(x,s)]]} \quad \mathbf{(88)}$$

---

[164] Para as provas, ver Shreve, (2004, pp.69-72) e/ou Williams (1991, pp.88-90).

Onde os subscritos de E denotam as densidades de probabilidade de onde os valores esperados são tomados (distribuições conjuntas ou distribuições condicionais ou distribuições marginais, dependendo dos subscritos).

A segunda propriedade diz como a densidade marginal de S, p(s), e a densidade condicional de X dado S, p(x | s), determinam a densidade conjunta de X e S, p(x, s), conforme James (1996, p.185):

$$\mathbf{p(x, s) = p(s)\ p(x \mid s)} \qquad \mathbf{(89)}$$

A qual é bem similar à eq. 65, que dizia como calcular a distribuição condicional dada as distribuições conjunta e marginal. Aqui se diz que, se p(s) é zero, também será zero a distribuição conjunta p(x, s).

Definição. **Variância condicional a uma sub-sigma-álgebra Ψ de Σ**: Seja a v.a. X, definida no espaço (Ω, Σ, P) com expectativa condicional E[X | Ψ] em relação à sub-sigma-álgebra Ψ dos subconjuntos de Ω. A variância condicional de X é uma v.a. definida por[165]:

$$\mathbf{Var(X \mid \Psi) = E[(\ X - E[X \mid \Psi]\ )^2 \mid \Psi\ ]} \qquad \mathbf{(90)}$$

3.2.2. Processo de Revelação e Distribuição de Revelações

Após a introdução e fórmulas sobre expectativas condicionais do item 3.2.1 (que em parte serão aqui usadas), nesse item será estabelecido um teorema fundamental para o tratamento da incerteza técnica em problemas dinâmicos de opções reais, de forma que esse item será de grande importância prática, embora ainda com algumas formalizações e teoria. No item 3.2.3 será visto um exemplo simples para ilustrar o teorema, além de figuras para reforçar a intuição. Esse teorema será usado nas aplicações do cap. 5, assim como no estabelecimento tanto da medida de aprendizagem proposta (detalhada no item 3.3) como nos processos de revelação de Bernoulli que são aplicados em exemplos exploratórios (item 3.4).

De forma consistente com a estrutura de informação flexível definida no item 3.1.4.2 (ver eq. 63), no Teorema 1 abaixo a distribuição de revelações será definida exceto por um grau de liberdade (o que dá flexibilidade ao usuário do teorema). O Teorema 1 ajudará a usar a estrutura de informação flexível (eq. 63),

[165] Ver, por ex., Shyraiev (1996, p.214).

orientando na escolha do critério aberto •. Além disso, η^2, a medida de aprendizagem proposta, será diretamente relacionada com esse teorema.

Definição. **Processo de revelação**: é uma *seqüência* de variáveis aleatórias $\{R_{X,1}, R_{X,2}, R_{X,3}, \ldots\}$[166] geradas por uma seqüência de informações ou sinais S_1, S_2, S_3, … sobre uma variável de interesse X, que tem como principal característica a redução esperada de incerteza advinda da chegada de nova informação. Processo de revelação é um *processo de aprendizagem* probabilístico. Na literatura matemática, é às vezes chamado de "*acumulando dados sobre uma variável aleatória*" (Williams, 1991, p.96).

Processos de revelação podem ser vistos como processos estocásticos, mas geralmente os processos de revelação devem ser indexados por eventos e não pelo *tempo* como ocorre com a maioria dos processos estocásticos estudados. Essa tese está interessada especialmente nos processos com eventos sendo exercícios de opções de aprendizagem, a fim de modelar a evolução (redução esperada) da incerteza técnica com o processo de investimento em informação. Um exemplo de processo de revelação indexado por eventos é a perfuração seqüencial de poços de delimitação em uma reserva de petróleo com volume B incerto. Nesse caso, cada poço corresponde a um evento no processo de revelação de B e entre esses eventos podem decorrer meses ou até ano(s). No intervalo entre esses eventos não há porque alterar as expectativas sobre B, i. é, não há porque rever R_B.

Esses eventos geralmente são *endógenos* no modelo, são ativados pelo decisor (ou decisores em caso de interação estratégica), i. é, eventos são exercícios de opções. Na literatura tradicional de VOI, não foi dada atenção ou não foi considerada importante a distinção entre os processos indexados por eventos e indexados pelo tempo. Por ex., Lawrence (1999, p.156) argumenta que uma seqüência de eventos pode ser vista como um "*time-driven process with different chronological length*" porque os eventos são sucessivos ao longo do tempo. Mas no contexto de opções reais isso não funciona porque, nos modelos mais importantes e realistas, os eventos são opcionais, ativados pela firma e em paralelo com outro processo (incerteza de mercado representada pelos preços do

[166] Poderia se definir esse processo como uma seqüência de momentos das distribuições posteriores, com a distribuição de expectativas condicionais sendo um deles. Ou até pensar numa seqüência de distribuições de distribuições posteriores. Mas dificilmente essa teoria teria a utilidade prática e simplicidade que será obtida trabalhando focado em expectativas condicionais.

petróleo) no qual a informação chega continuamente ao longo do tempo e que não é opcional. A complexidade desses dois processos superpostos (processo de revelação e processo de mercado) requer uma metodologia específica. Uma questão de importância prática na superposição desses processos é o tempo de aprendizagem. É uma necessidade prática que o modelo permita comparar alternativas de investimento em informação com diferentes tempos de aprendizagem. O modelo proposto fará isso de uma forma simples (ver cap.5).

Em alguns outros casos os eventos podem ser modelados como processos exógenos, por ex., um processo de Poisson com freqüência λ. Numa bacia petrolífera com muitas companhias atuando, pode ser mais simples modelar a revelação de informação exploratória (perfuração de poços pioneiros) com um processo exógeno de Poisson do que um modelo endógeno de equilíbrio entre as firmas petrolíferas. O primeiro problema é que essa informação é mais relevante e *geral*[167] justamente no caso de bacias pouco exploradas, onde geralmente o número de firmas é pequeno. O segundo problema é que em bacias mais conhecidas (ex.: Golfo do México), a revelação de informação tem mais relevância *localmente* e assim novamente os decisores relevantes são duas ou poucas firmas. Com poucas firmas, é melhor usar o modelo endógeno para considerar a interação estratégica entre as firmas, ou seja, deve-se usar a *teoria dos jogos de opções* (que será vista no cap.4) para analisar o exercício estratégico de opções que gera um processo de revelação de informações.

Um exemplo de processo de revelação indexado pelo tempo é o que ocorre geralmente com o retorno de ações de *novas* empresas que são lançadas no mercado (IPO, *Initial Public Offering*). A volatilidade dessas ações é geralmente alta (causando muitas falências prematuras, vide o estouro da "bolha das ações da internet" nos anos 2000/2001). Com o tempo as empresas que sobreviverem se tornam mais conhecidas e assim sua volatilidade tende a cair até se estabilizar dinamicamente, indicando um certo *equilíbrio* numa situação próxima de um mercado com informação completa sobre o retorno dessa ação. Nesse caso se tem um *processo de revelação apenas num transiente temporal* em que houve uma

[167] A incerteza sobre a existência de *rochas geradoras* de petróleo numa bacia tem um caráter *geral* no sentido de ser relevante para blocos distantes de vários quilômetros em uma bacia. Numa bacia mais conhecida essa incerteza pode inexistir e assim a informação revelada por um poço pioneiro tem mais relevância *local*, i. é, revela mais sobre a *migração do petróleo* gerado e assim é importante para prospectos localizados em blocos vizinhos.

difusão de informação sobre a capacidade de essa ação gerar retorno e sobre o seu valor justo (ou de equilíbrio dinâmico no mercado). Após esse transiente, o processo de revelação deixa de existir e o mercado tem informação completa.

Exemplos de processo que não são de revelação são o de preços de ações seguindo um MGB (novas informações não reduzem a incerteza esperada) e o modelo de "ruído acumulativo" descrito em Childs & Ott & Riddiough (2001). Não há redução esperada de incerteza (volatilidade) nesses casos.

Antes de definir processo de revelação *convergente*, é oportuno definir o caso limite mais importante que é o de revelação total ou *aprendizagem total* sobre a variável com incerteza técnica X. Esse é o máximo benefício que se pode obter com um investimento em informação. Um exemplo de revelação total com um *único* investimento em informação é quando a variável de interesse X é a existência ou não de petróleo (v.a. de Bernoulli, dada pelo fator de chance) e o investimento em informação é a perfuração do poço pioneiro, que tirará toda a dúvida a respeito da existência de petróleo (mas existirá ainda incerteza sobre o volume B da reserva e sua qualidade). Mas na prática, em geral, se precisa de uma seqüência (muito grande) de investimento em informação para se atingir valores próximos desse limite de revelação total da variável com incerteza técnica X.

Definição. **Revelação total da variável X**: significa a revelação de um cenário c tal que $Pr(X = c) = 1$, onde c é uma constante pertencente ao suporte de p(x). Em termos gerais, se a informação disponível é dada pela sub-sigma-álgebra Ψ, revelação total de X significa que X é Ψ–mensurável e, logo, é válido escrever $E[X \mid \Psi] = X$ quase certamente[168]. Intuitivamente, significa que existe informação perfeita sobre o verdadeiro estado da natureza da variável X. Em termos matemáticos, "*uma variável aleatória é Ψ–mensurável se e somente se ela assume valores constantes sobre os átomos de Ψ*" (Shiryaev, 1996, p.80).

Será visto que todo processo de revelação converge[169] para uma variável aleatória integrável denotada por X_∞ quando $n \to \infty$. Mas nem sempre converge para uma revelação total de X, i. é, nem sempre $X_\infty = X$. Intuitivamente (serão vistos exemplos) pode ocorrer que a seqüência de informações $S_1, S_2, \ldots, S_n$

[168] Além disso, operações algébricas ordinárias tais como soma, multiplicação e divisão, não destroem a mensurabilidade (Gallant, 1997, p.47).

[169] Converge quase certamente (com probabilidade 1), o que implica que converge em probabilidade, o que também implica convergência em distribuição (Karlin & Taylor, 1974, p.18).

reduza a incerteza esperada cada vez mais com o progresso de n, mas essa redução pode ser cada vez menor de forma que a redução esperada de variância no limite seja, por ex., de 50%, i. é, a cada informação S_n, a redução esperada de variância se aproxima cada vez mais de uma redução de 50%, mas não de 100%. Serão vistos exemplos práticos em exploração de petróleo para ambos os casos (revelação parcial no limite e revelação total no limite $n \to \infty$) de forma mais detalhada no item 3.4. Matematicamente um processo de revelação é igual ao chamado *processo de Doob* (Karlin & Taylor, 1975, p.246 e 295).

Nem toda seqüência de v.a. converge no limite para uma variável integrável X_∞. Todo processo de revelação converge porque o processo $\{R_{X,1}, R_{X,2}, \ldots R_{X,n}\}$ é *uniformemente integrável* (definido a seguir). Será visto na Proposição 5 abaixo que, como o processo de revelação é uniformemente integrável, então ele converge para X_∞ (que sob certas condições pode ser X) quando $n \to \infty$. Como esse processo sempre converge para algum X_∞, seria redundante o qualificativo "convergente" para esse processo, de forma que se usará o adjetivo "convergente" apenas no caso limite de revelação total, i. é, quando $X_\infty = X$.

A explanação da definição abaixo e da Proposição 5 seguirá Brzezniak & Zastawniak (1999, cap. 4) e Karlin & Taylor (1975, p.295-297 e 309-312), mas de forma menos detalhada pode ser vista em Williams (1991, p.96 ["accumulating data about a random variable"] e o caso particular das p.166-167 ["noisy observation of a single random variable"]), ou em Ross (1996, p.297 e 318-319).

Definição. **Seqüência uniformemente integrável**: Uma seqüência de variáveis aleatórias $R_{X,1}, R_{X,2}, \ldots R_{X,n}$ é chamada de uniformemente integrável se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $M > 0$ tal que para todo $n = 1, 2, \ldots$:

$$\int_{\{|R_{X,n}| > M\}} |\, \mathbf{R_{X,n}} \,|\; \mathbf{dP} < \varepsilon \qquad \textbf{(91)}$$

Integração uniforme é uma condição necessária para uma seqüência de variáveis aleatórias $\{R_{X,n}\}$ integráveis convergir em $\boldsymbol{L}^1$, i. é, convergir em média para uma v.a. integrável, que aqui seria $\lim_{n \to \infty} E[|R_{X,n} - X_\infty|\,] = 0$. Na eq. (91) a integral é a de Lebesgue-Stieltjes, ou seja, **P** é a medida de probabilidade ou mais simplesmente a função distribuição acumulada $\mathbf{P}(R_{X,n})$.

Proposição 5: Seja $\{R_{X,1}, R_{X,2}, \ldots R_{X,n}\}$ um processo de revelação, i. é, $R_{X,k} = E[X \mid \Im_k]$ são definidos no mesmo espaço de probabilidade (Ω, Σ, P),

sendo X integrável e onde $\Im_k$ é uma *filtração*[170] $\{\Im_k: k \geq 0\}$, com $\Im_k$ sendo gerada pela seqüência de sinais $\{S_k\}$. Então o processo de revelação é uniformemente integrável e assim quando $n \to \infty$, existe q.c. um limite de $R_{X,n}$ em $\boldsymbol{L}^1$ que é uma v.a. integrável, denotada por X_∞, que é também uma expectativa condicional, i. é:

$$\mathbf{lim_{n \to \infty} R_{X,n} = X_\infty = E[X \mid S_1, S_2, \ldots] = E[X \mid \Im_\infty]} \qquad \mathbf{(92)}$$

Prova: Primeiro tem de ser provado que *qualquer* processo de revelação é um martingale. Isso será mostrado no Teorema 1(d) abaixo. A prova de que integrabilidade uniforme é *suficiente* para a convergência de um martingale em $\boldsymbol{L}^1$ é dada pelo famoso *Teorema da Convergência de Martingale de Doob*[171] (ver, por ex., Brzezniak & Zastawniak, 1999, theorem 4.2, p.71-73). A prova de que o processo de revelação (um "martingale de Doob") é uniformemente integrável é dada por ex. em Ross (1996, p.319) ou Karlin & Taylor (1975, p.295-296) e então existe um limite dado por uma v.a. integrável X_∞. A prova que esse limite é uma expectativa condicional $E[X \mid \Im_\infty]$ é dada por Karlin & Taylor (1975, p.310)[172]. □

Na verdade essa proposição poderia ser ainda mais forte. Pode ser provado que *todo* martingale uniformemente integrável pode ser escrito como um processo de revelação (i. é, um processo de Doob), ver Karlin & Taylor (1975, p.311-312, em especial o Lemma 7.3) ou Brzezniak & Zastawniak (1999, theorem 4.4, p.77) ou até mesmo em Doob (1953, cap.VII). Conforme Karlin & Taylor (1975, p.247-248), os dois principais resultados da teoria dos martingales são o teorema da convergência de martingales e o *teorema da amostragem opcional* (ou *parada ótima*)[173]. Mas enquanto esse último encontra freqüentes aplicações em problemas de decisão opcional (inclusive problemas de OR), o teorema de convergência é usado mais de forma teórica[174] para determinar a distribuição assintótica de

---

[170] Pode-se interpretar a filtração $\Im_n$ gerada pela informação seqüencial $\{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ como um conjunto contendo toda a informação disponível no estágio n. Em termos técnicos, é uma crescente família de sub-sigma-álgebras gerada pelas informações. Ex.: $R_{X,2} = E[X \mid S_1, S_2]$.

[171] Esse teorema tem sido mais usado para provar teoremas tais como a lei 0-1 de Komolgorov e do filtro de Kalman. A aplicação no contexto da tese não tem sido explorada.

[172] Uma prova simples é ver que $R_{X,n}$ é uma função de $S_1, S_2, \ldots S_n$, de forma que o limite X_∞ é uma função mensurável dessa seqüência de sinais e portanto mensurável com respeito a $\Im_\infty$.

[173] Esse teorema diz que, sob condições bem gerais, se $\{R_{X,n}\}$ é um martingale, então também será uma seqüência indexada por T_n em vez de n, onde $\{T_n\}$ é uma seqüência de *tempos de Markov* ou tempos de parada. Tempo de Markov tem a propriedade que o evento $T = n$ é determinado apenas pela história $S_1, S_2, \ldots, S_n$ até o estágio n (Karlin & Taylor, 1975, p.247).

[174] Whittle (2000, p.299) afirma que o teorema da convergência de martingales não trás resultados muito interessantes em processos que são *absorvidos* (ex., exercício de uma opção) em algum estado e por isso o teorema de parada ótima (ou opcional) é mais significativo.

funções de processos estocásticos gerais. Aplicações do teorema de convergência em OR como a dessa tese (por ex., no item 3.4), não têm sido vistas na literatura.

Definição. **Processo de revelação convergente**: é um *processo de aprendizagem* que no limite converge ao verdadeiro valor da variável (ou parâmetro). Formalmente, se $n \to \infty$ então $Var[X \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] \to 0$. Em termos da Proposição 5, é quando $X_\infty = X$. A Proposição 5 diz que isso é possível, mas não diz sob que condições irá ocorrer $X_\infty = X$ (será visto depois).

Um exemplo de processo de revelação convergente é o da perfuração de poços de delimitação para reduzir a incerteza do volume da reserva B. É convergente, pois se perfurar um número n muito grande (infinito) de poços, se conhecerá totalmente o volume de reservas B, i. é, se $n \to \infty$ então $Var[B_n] \to 0$. Já o mencionado caso do IPO, o processo de revelação é não convergente pois mesmo que se passe um período muito grande de tempo, a volatilidade do retorno não converge a zero. Outro exemplo de processo de revelação não convergente é a venda de um novo produto no mercado, em que existe incerteza sobre a aceitação do produto, i. é, sobre a função demanda. Com testes de mercado e ao longo da produção e venda do produto, a incerteza diminui mas nunca vai a zero pois existe a incerteza sobre o nível de crescimento da economia de um país, região, etc., que influi na demanda de produtos em geral da economia.

No Teorema 1 será mostrada a propriedade fundamental de martingale dos processos de revelação relacionada à distribuição de revelações. Além disso, será rediscutida a questão de processos de revelação no item 3.4, especificamente para o caso de fator de chance exploratório modelado com o processo de revelação de Bernoulli. O fator de chance exploratório pode ser modelado tanto com processos de revelação (totalmente) convergentes como não (totalmente) convergentes.

O Teorema 1 a seguir descreve as 4 principais propriedades da distribuição de revelações (distribuição da variável R_X). As 4 propriedades são: a média de R_X, a variância de R_X, R_X no caso limite de revelação total e a propriedade de martingale dos processos de revelação (seqüências de R_X). Ele será formulado, provado e depois será discutida a intuição por trás e suas conseqüências.

Teorema 1 (Distribuição de Revelações): Sejam as variáveis aleatórias X e S com média e variância finitas[175] definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. X é a variável de interesse e tem probabilidade a priori p(x). S é chamado de sinal ou nova informação e gera a sigma-álgebra Ψ, onde Ψ é uma sub-sigma-álgebra de Σ, i.é, $\Psi \subseteq \Sigma$. Seja $p(R_X)$ a distribuição[176] de probabilidades da variável $R_X = E[X \mid S]$, denominada *distribuição de revelações* de X. Então, a distribuição de revelações tem as seguintes propriedades que *quase*[177] a definem:

(a) No caso limite de revelação total da variável X, a variância de qualquer distribuição posterior é zero e a distribuição de revelações $p(R_X)$ é igual à distribuição a priori p(x).

(b) A média da distribuição de revelações é igual à média de X, i. é:

$$\mathbf{E[R_X] = E[X]} \qquad \mathbf{(93)}$$

(c) A variância da distribuição de revelações é dada simplesmente pela redução esperada da variância de X induzida pelo sinal S, i. é:

$$\mathbf{Var[R_X] = Var[X] - E[\,Var[X \mid S\,]\,]} \qquad \mathbf{(94)}$$

(d) Seja um processo seqüencial de informação $S_1, S_2, S_3, \ldots$ e as variáveis aleatórias $R_{X,n} = E[X \mid S_1, S_2, \ldots S_n]$, n = 1, 2, … Então, o *processo de revelação* $\{R_{X,1}, R_{X,2}, R_{X,3}, \ldots\}$ é um martingale.

Prova:

(a) A Proposição 5 acima garante que *um* limite *sempre* existe com probabilidade 1. Além disso, sabe-se que **Prob(X = c) = 1 ⇔ Var[X] = 0** (prova: DeGroot & Schervish, 2002, theorem 4.3.1, p.198). Então, para cada possível cenário c do suporte da distribuição a priori que possa ser revelado, estará associada uma distribuição posterior com variância zero. O restante da prova decorre diretamente da definição de distribuição a priori. Para ver isso, como a distribuição de revelações é a distribuição das médias das distribuições posteriores

---

[175] Um matemático poderia preferir dizer apenas que X e S são duplamente integráveis, i. é, $E[\,|\,X^2\,|\,] < \infty$ e $E[\,|\,S^2\,|\,] < \infty$, ou de forma equivalente que X e S $\in \boldsymbol{L}^2$, pois isso automaticamente implica que X e S $\in \boldsymbol{L}^1$ (Williams, 2001, p.65). Mas aqui isso não é restritivo pois as aplicações práticas do teorema são focadas apenas em problemas em que as médias e variâncias são finitas.

[176] Quando se menciona apenas "distribuição" e/ou se usa letra minúscula, significa a função densidade de probabilidades (caso contínuo), etc. Para a função distribuição acumulada, se usará letra maiúscula e em geral o texto será mais explícito.

[177] Definição: distribuição quase-definida é aquela em que se conhece pelo menos a *média*, a *variância* e que pertence a um processo seqüencial de distribuições com *origem* definida e *convergente* para uma distribuição totalmente definida. Então o Teorema 1 quase-define $R_X(S)$. Uma distribuição *totalmente* definida é simulável e tem função distribuição acumulada conhecida.

e essas médias colapsam para os cenários c (pois E[c | S] = c, se c é constante) do suporte da distribuição a priori, então o suporte da distribuição de revelações é simplesmente o mesmo suporte da distribuição a priori. Que as probabilidades de ocorrência (massa ou densidade) desses cenários são iguais às descritas pela distribuição a priori decorre diretamente da definição de distribuição a priori (ver item 3.1.2). Assim, em caso de revelação total, a distribuição de revelações é igual à distribuição a priori. □

(b) Essa propriedade é conhecida na literatura por *lei das expectativas iteradas*. Esse item pode ser formulado de forma mais geral, com a sub-sigma-álgebra Ψ (em vez da v.a. S) e da seguinte forma: se R_X é qualquer *versão*[178] de E[X | Ψ] então $E[R_X] = E[X]$. Para efeito intuitivo, serão mostradas as provas sem conceitos de teoria da medida para os casos particulares de v.a. discretas e contínuas. A prova mais geral é dada, por ex., em Williams (1991, p.89). Primeiro o caso em que ambas, X e S, são variáveis aleatórias discretas (a prova segue Ross, 1998, p.338). Quer-se provar que:

$$\sum_s R_X(s)\ \Pr(S = s) = E[X]$$

Pois o lado esquerdo é $E[R_X]$ por definição. Pela definição de R_X o lado esquerdo pode ser escrito como:

$$E[R_X] = \sum_s R_X(s)\ \Pr(S = s) = \sum_s \sum_x x\ \Pr(X = x \mid S = s)\ \Pr(S = s) =$$

$$E[R_X] = \sum_s \sum_x x\ \frac{\Pr(X = x,\ S = s)}{\Pr(S = s)}\ \Pr(S = s) = \sum_s \sum_x x\ \Pr(X = x,\ S = s)$$

$$\Rightarrow E[R_X] = \sum_x x \sum_s \Pr(X = x, S = s) = \sum_x x\ \Pr(X = x) = E[X] \qquad \square$$

Agora a prova para o caso de X e S como variáveis aleatórias contínuas (segue James, 1996, p.176), com densidade de probabilidade conjunta p(x, s), densidade condicional p(x | s) = p(x, s)/f(s), e densidade de S igual a p(s) > 0.

$$R_X(s) = \int x\, dF_X(x \mid S = s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ p(x \mid s)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \frac{p(x, s)}{p(s)}\, dx$$, como X é integrável:

[178] Se R^*_X é uma versão de R_X, então $R^*_X = R_X$ quase certamente (Williams, 1991, p.84).

$$E[R_X] = \int R_X(s)\, dF_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \, \frac{p(x, s)}{p(s)} \, dx \right) f(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x, s)\, dx\, ds$$

$$E[R_X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, s)\, ds \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx = E[X] \qquad \square$$

(c) Considere a definição de variância condicional dada pela eq. (90) mas para o caso mais intuitivo de S no lugar da sub-sigma-álgebra Ψ como condicionante[179]. Uma propriedade bastante conhecida da variância é:

$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$. Logo, como X é duplamente integrável, tem-se:

$Var[R_X] = Var[E[X \mid S]] = E[(E[X \mid S])^2] - (E[E[X \mid S]])^2 \Rightarrow$

$$\mathbf{Var[R_X] = E[(E[X \mid S])^2] - (E[X])^2} \qquad \mathbf{(95)}$$

Usando a mesma equação bastante conhecida para $Var[X \mid S]$, se obtém:

$Var[X \mid S] = E[X^2 \mid S] - (E[X \mid S])^2$. Tomando o valor esperado, tem-se:

$E[Var[X \mid S]] = E[E[X^2 \mid S]] - E[(E[X \mid S])^2] \Rightarrow$

$$\mathbf{E[Var[X \mid S]] = E[X^2] - E[(E[X \mid S])^2]} \qquad \mathbf{(96)}$$

Somando as eqs. (95) e (96) e rearranjando, se completa a prova:

$Var[E[X \mid S]] = Var[R_X] = Var[X] - E[Var[X \mid S]]$ $\square$

(d) De forma simples, martingale[180] significa preservar a mesma média e assim se pode mostrar o item (d) simplesmente aplicando de forma reiterada o resultado do item (b) para a seqüência $\{R_{X,1}, R_{X,2}, R_{X,3}, \ldots\}$. Essa seqüência é conhecida como sendo um processo ou martingale de Doob. A aplicação reiterada da eq. (93) é conhecida por *propriedade de torre* que em termos simples pode ser vista como:

$$\mathbf{E[X \mid informação] = E[\, E[X \mid \textit{mais} \text{ informação}] \mid informação]} \qquad \mathbf{(97)}$$

Mas uma prova mais rigorosa com a teoria da medida é útil no item (d). Conforme Williams (1991, p.94) um martingale tem de preencher <u>três condições</u>. A primeira condição, $R_X \in \boldsymbol{L}^1$, é uma conseqüência da <u>premissa</u> que o parâmetro com incerteza técnica X é integrável e assim, como foi visto, pelo teorema de

---

[179] A idéia de usar essa propriedade chave ocorreu ao resolver o problema 2 de Shyraiev (1996, p.83). A prova é similar à apresentada em Ross (1998, p.348). Para uma prova com condicionante sendo uma sub-sigma-álgebra, ver, por ex., Fristedt & Gray (1997, p.454).

[180] Pode-se interpretar martingale como um jogo "justo". Seja K_n o capital dum jogador após a aposta n e se todas as apostas são justas no sentido que o ganho esperado é zero, então para $n \geq 0$, K_n são martingales. Já aqui, K_n seria uma expectativa condicional de um parâmetro técnico X depois de n investimentos seqüenciais em informação.

Radon-Nikodým isso implica que $E[\,|R_X|\,] < \infty$ quase certamente (existência do valor esperado da distribuição de revelações mencionada antes)[181].

A segunda condição é que o processo de revelação seja *adaptado* à filtração $\{\Im_n: n \geq 0\}$, i. é, $R_{X,n}$ deve ser $\Im_n$–mensurável a uma crescente família de sub-sigma-álgebras de Ψ: $(\Im_0 \subseteq \Im_1 \subseteq \Im_2 \subseteq \ldots \subseteq \Im_n = \Psi)$. A expressão[182] $\Im_{n-1} \subseteq \Im_n$ significa um aumento de informações com o progresso de n (ex.: uma seqüência de n investimentos em informação, a perfuração seqüencial de n poços de delimitação, etc.). Isso decorre da definição de expectativa condicional, pois conforme a eq. (80), $R_{X,n} = E[X \mid \Im_n]$ que é $\Im_n$-mensurável por definição (ou seja, é conhecido ao observador no estágio n, Williams, 2001, p.406), para todo n.

A terceira condição (a mais importante e específica), diz que para $\{R_{X,n}\}$ ser martingale deve-se ter $E[R_{X,n} \mid \Im_{n-1}] = R_{X,n-1}$ quase certamente (q.c). Ou seja, as médias dessas seqüências $R_{X,n}$ devem ser iguais. Para provar isso, seja a versão mais geral da eq. 91 que foi apresentada antes com as eqs. 84 e 85, chamada (ver Williams, 1991, p.88; ou Williams, 2001, p.405) *propriedade geral de torre* ("general tower property"). Se Υ é uma sub-sigma-álgebra de Ψ, então q.c. se tem:

$$E[R_X \mid \Upsilon\,] \,(= E[E[X \mid \Psi] \mid \Upsilon\,]) = E[X \mid \Upsilon\,]$$

Essa propriedade é imediata da definição de expectativa condicional (Williams, 1991, p.90)[183] ou uma aplicação do item (b) desse teorema para o caso dos condicionantes serem sub-sigma-álgebras. Para ver isso de forma mais clara, seja o exemplo de martingale chamado "acumulando dados sobre uma variável aleatória" (Williams, 1991, p.96), seja a variável $\xi \in L^1(\Omega, \Psi, P)$ e defina $R_n = E[\xi \mid \Im_n]$. Então, pela propriedade de torre, se tem, q.c.:

$$E[R_n \mid \Im_{n-1}] = E[E[\xi \mid \Im_n] \mid \Im_{n-1}] = E[\xi \mid \Im_{n-1}] = R_{n-1}$$

E assim $R_{X,n}$ são martingales. □

---

[181] Uma prova simples: $R_{X,n} = E[X \mid S_0, S_1, \ldots S_n] \Rightarrow E[\,|R_{X,n}|\,] = E[\,|E[X \mid S_0, S_1, \ldots S_n]|\,] \leq E[\,E[\,|X|\,] \mid S_0, S_1, \ldots S_n]\,] = E[\,|X|\,] < \infty$. A primeira desigualdade é conseqüência de $|E[X]| \leq E[|X|]$ (ver Williams, 2001, p.61 para a prova), i. é, o módulo de uma integral ≤ integral do módulo.

[182] Em muitos textos se usa $\subset$ em vez de $\subseteq$. Aqui segue a notação $\subseteq$ de Shiryaev (1996). A sigma-álgebra trivial $\Im_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ é o caso limite de não carregar nenhuma informação.

[183] Brzezniak & Zastawniak (1999, p.30) apresenta esse resultado "imediato" em 4 linhas.

3.2.3.
Discussão do Teorema e Exemplo Ilustrativo em Petróleo

Agora é conveniente uma discussão dos 4 itens do Teorema 1 sob um ponto de vista mais prático. Em muitos problemas de OR, a importância da distribuição de revelações é que através de uma simulação de Monte Carlo ela pode ser facilmente combinada com distribuições neutras ao risco de variáveis com incerteza de mercado, geradas por *processos estocásticos neutros ao risco* dessas variáveis ou em qualquer metodologia de finanças quantitativas que trabalhe com martingales. Os valores resultantes da combinação desses cenários podem ser descontados pela taxa livre de risco e assim pode ser calculado o valor da OR, etc. Por isso é da maior relevância prática saber as propriedades básicas da distribuição de revelações.

O item (a) do Teorema 1 é relacionado a um caso limite fundamental. O conceito de *revelação total* ("full revelation") tem um papel chave tanto na teoria – como limite de um processo de aprendizagem, como na prática – é muito mais simples otimizar quando não existe incerteza. Nesse caso limite, a distribuição de revelações está totalmente definida – é igual à distribuição a priori.

É oportuno fazer uma conexão entre o conceito de *revelação total* e (não) *arbitragem*: em ambos os casos há uma *eliminação de incerteza* quando uma v.a. é relacionada com outra v.a. (no caso, X e S). Mas no caso de arbitragem se monta um portfólio livre de risco $\mathbf{\Pi = a\,X + b\,S}$ (a e b são constantes reais)[184] – ou seja uma *relação aritmética* de variáveis aleatórias, enquanto que no conceito de revelação total, a eliminação de incerteza é feita através de uma *relação de condicionamento* de variáveis aleatórias, na qual se obtém o valor verdadeiro (determinístico) de X. O conceito de revelação total no entanto é *estável* no tempo enquanto que a arbitragem é *instável*, pois as constantes a e/ou b da equação $\mathbf{\Pi = a\,X + b\,S}$ variam com o tempo para o portfólio permanecer livre de risco (o "hedge" é dinâmico).

O item (b) do Teorema 1 pode ser interpretado intuitivamente como: a média ponderada do valor esperado condicional de X dado $S = s_i$ sendo cada termo $R_X(i) = E[X \mid S = s_i]$ (calculado pelas eqs. 78 e 79, para os casos de v.a.

[184] O portfólio livre de risco deve ter retorno igual à taxa livre de risco, caso contrário dá oportunidades de ganhos por arbitragem. Ver, por ex., Dixit & Pindyck (1994).

discretas e contínuas, respectivamente) ponderado pela probabilidade de ocorrência de cada evento s_i sobre o qual X é condicionado, é simplesmente igual ao valor esperado original (incondicional) de X, i. é, o valor esperado da distribuição a priori. Ou seja, a média das médias é igual à média original. Essa lei das expectativas iteradas foi usada num exemplo do cap. 1.

O item (c) do Teorema 1, que dá a variância da distribuição de revelações, é um resultado que não é óbvio, mas é uma propriedade extraordinária que faz a distribuição de revelações muito útil para propósitos práticos, como será visto a seguir. Note que o lado direito da eq. (94) é simplesmente a redução esperada de variância devido ao investimento em informação, i. é, é a diferença entre a variância a priori (incondicional ou antes da informação) e a variância residual *esperada* depois da informação. Em outras palavras, é a variância da distribuição a priori menos a variância média do conjunto de possíveis distribuições posteriores[185].

Note na eq. (94) que, se $Var[R_X]$ for normalizada (dividida) por Var[X], então o lado direito da eq. (94) é uma redução esperada <u>percentual</u> de variância, que é a medida de aprendizagem η^2 mencionada antes, que pode ser chamada também de <u>poder de revelação</u> de uma (alternativa de investimento em) informação. Isso significa que, conhecendo apenas a variância a priori (incerteza original, Var[X]) e essa medida de aprendizagem, se obtém a variância da distribuição de revelações simplesmente multiplicando Var[X] por η^2. Como a média da distribuição de revelações é obtida ainda mais facilmente (pelo item (b) do teorema diz que é igual a E[X]), então para obter a média e a variância da distribuição de revelações só precisa conhecer a (média e variância da) distribuição a priori e a medida de aprendizagem η^2. Como o item (a) dá o tipo de distribuição (igual à distribuição a priori) no limite de revelação total (informação perfeita), então o problema de VOI é totalmente definido para o caso de informação perfeita e *quase* definido para o caso de informação imperfeita.

No caso de informação imperfeita será necessário mais um dado de entrada (ex.: tipo de distribuição), representado por • na estrutura de informação flexível, eq. (63). Isso será discutido ainda nesse item.

---

[185] Como discutido antes, em geral "*existe uma infinidade de tais distribuições condicionais*" Goldberger (1991, p.40), uma distribuição posterior para cada possível resultado do investimento em informação (ou seja, para cada cenário $S = s_i$).

O Teorema 1 permite uma maneira prática de perguntar ao especialista técnico as informações necessárias para modelar a incerteza técnica com o modelo proposto. Bastam dois dados de entrada a serem perguntados (além de assumir algum critério • no caso geral de informação imperfeita):

- *Incerteza inicial* (distribuição a priori): Qual a incerteza total de um parâmetro particular de interesse (ex., o volume da reserva B)? O especialista precisa especificar essa distribuição a priori, i. é, a média, variância e a classe (ou tipo) de distribuição (Triangular, LogNormal, Beta, etc.).
- *Poder de revelação* (η^2): Qual a percentagem esperada de redução de incerteza técnica (leia-se *redução de variância*) com uma *alternativa específica* de investimento em informação adicional?

Com essas duas respostas dos especialistas, se especificam a média e a variância da distribuição de revelações, sendo que a variância será diferente para cada alternativa de investimento em informação. Quanto maior o poder de revelação de uma alternativa, maior a variância da distribuição de revelações. Essas distribuições serão usadas no modelo integrado de VOI dinâmico a ser mostrado com mais detalhe no cap. 5.

Note também a consistência dos itens (a) e (c) do Teorema 1. Na eq. (94), em caso de revelação total, a variância de todas as distribuições posteriores vai a zero e logo E[Var[X | S]] = 0. Assim, Var[R_X] = Var[X] em caso de revelação total, o que é consistente com o item (a).

É oportuno notar a semelhança conceitual da variância da distribuição de revelações, eq. (94), com o conceito de *informação mútua* ou *incerteza removida*, eq. (71), da teoria da informação de Shannon. Ambas equações expressam uma redução esperada de incerteza, sendo a incerteza medida pela entropia (eq. 68 ou 69) no caso da eq. (71) e medida pela variância no caso da eq. (94). Comparando o lado direito de cada uma dessas equações, a variância da distribuição a priori Var[X] é análoga à entropia incondicional de X, i. é, H(X). Já a variância esperada das distribuições posteriores (ou *condicionais*) E[Var[X | S]], é análoga ao conceito de *entropia condicional* H(X | S), já que essa também é uma entropia posterior (à informação S) *média* em relação aos possíveis sinais S. Para ver isso, rever a eq. 70 (entropia condicional), onde aparece um somatório a mais (comparada com a eq. 68) exatamente para a variável S. Assim, existe uma forte

analogia entre as eqs. (71) e (94), i. é, entre os conceitos de variância da distribuição de revelações e a informação mútua (ou incerteza removida) da teoria da informação.

O curioso é que essa analogia nunca foi notada antes (ao melhor do conhecimento do autor da tese). A explicação é que a eq. (94) é usada mas num contexto e num *formato* diferente (exs.: Williams, 2001, p.392; Ross, 1996, p.51), e é chamada de "fórmula da variância condicional" ou "lei da variância total" (Bertsekas & Tsitsiklis, 2002, p.229), mostrada a seguir:

$$\mathbf{Var[X] = Var[E[X \mid S]] + E[\, Var[X \mid S\,]\,]} \qquad \mathbf{(98)}$$

Em livros-texto, quando essa fórmula é mencionada, ela é usada para calcular a variância de X de forma mais fácil que outros métodos, em alguns tipos de problemas, por ex., quando se quer computar a variância de X sem conhecer a distribuição de X (ver, por ex., Wackerly & Mendenhall III & Scheaffer, 2002, p.273; e Gut, 1995, p.39). Não é esse o caso dessa tese. Com o formato da eq. (98), ela também pode ser interpretada num contexto de *análise de variância*, como caracterizado por Goldberger (1991, p.48). A eq. (98) nesse caso pode ser vista como uma *decomposição da variância* de X em duas partes, uma variância do (melhor) estimador dado S, i. é, E[X | S] e uma variância residual de X após observar S. Mesmo assim é difícil haver menção dessa equação na grande maioria dos livros de estatística. Um motivo é que a ANOVA parte de um modelo paramétrico, mais especificamente linear, e depois se analisa a variância através de várias "somas de quadrados". Note que nessa tese não está sendo imposto modelos paramétricos para a incerteza técnica. O Teorema 1 é válido para praticamente todas as distribuições[186] e é válido para qualquer relação, não-linear ou linear, entre as variáveis aleatórias de interesse X e a informação S.

O formato da eq. (94) é muito similar ao de uma equação de DeGroot (1970, p.432) para o que ele chamou de "*quantidade de informação que pode ser obtido de um experimento*", usando o conceito de *função incerteza* (rever o item 3.1.4.2 sobre *comparação de experimentos*), denotada por U(.). Essa quantidade de informação $\mathfrak{I}(S, U, p(x))$ de DeGroot é dada por (na notação da tese):

$$\mathbf{\mathfrak{I}(S, U, p(x)) = U(p(x)) - E[U(p(x \mid s))]} \qquad \mathbf{(99)}$$

[186] Existem distribuições com média infinita, onde não seria válido o Teorema 1. Mas não se usa esse tipo de distribuição em qualquer das possíveis aplicações imaginadas em petróleo.

A idéia é escolher um experimento que maximiza essa quantidade de informação. Isso é obtido escolhendo um sinal S que tenha o *menor* E[U(p(x | s))] e dessa forma, se S é estatística suficiente para S', então (DeGroot, 1970, p.436):

$$\mathbf{E[U(p(x \mid s))] \leq E[U(p(x \mid s'))]} \qquad \mathbf{(100)}$$

Note que se a função incerteza U(.) for a variância, a eq. (99) é exatamente igual à eq. (94) e no formato usado nessa tese. Nesse caso, $\Im(S, U, p(x))$ seria exatamente a variância da distribuição de revelações. Infelizmente DeGroot menciona apenas os casos de U(.) ser a função entropia (eqs. 68 e 69) e a informação de Fisher (ver item 3.1.4.2), não mencionando o caso da variância e nem fazendo a conexão que aqui é feita com a eq. 94. Em DeGroot (1970, p.431 e 122-123) a função incerteza é um *risco de Bayes* que está ligada à *função perda*, a qual é vista como o *negativo* da função *utilidade*. Como foi visto antes (item 3.2.1), a função perda mais usada é a *perda de erro quadrático*, e nesse caso a função perda está associada à variância (idéia é minimizar a variância posterior), conforme assinala Trottini (2001, ex. 1, p.11; 2003, ex.6, p.144). Nesse contexto, pode-se inferir que a idéia seria escolher a informação S que maximiza a variância da distribuição de revelações ou, de forma equivalente, a de maior medida η^2.

A propriedade de martingale do item (d) do Teorema 1 é útil para avaliar planos alternativos de investimento seqüencial em informação, inclusive se beneficiando da vasta literatura existente sobre martingales. Por ex., na análise de quando parar otimamente uma seqüência de investimentos em informação, existe uma teoria bem desenvolvida sobre o (mencionado antes) teorema de parada ótima ou teorema de amostragem opcional de martingales.

Com o Teorema 1 pode-se reforçar as críticas, mas também reconhecer uma concordância com o artigo de Cortazar & Schwartz & Casassus (2001) sobre a modelagem da incerteza técnica em OR. Deve-se reconhecer que o artigo acerta ao modelar o processo de incerteza técnica como um martingale, consistente com o item (d) do Teorema 1 dessa tese. Mas eles justificam isso apenas de forma intuitiva ("(end)notes 2") e sem o rigor matemático dessa tese. Uma outra concordância, mas relacionada à Proposição 4, é que a incerteza técnica não demanda prêmio de risco e se pode integrá-la num processo neutro ao risco de mercado. Mas as críticas são agora reforçadas, já que a variância só muda com a

chegada de uma nova informação dada por S (item c) e não pela simples passagem de tempo como nesse artigo. Além disso, os itens (a) e (c)[187] mostram que a variância do processo é limitada (pela variância da distribuição a priori) e não ilimitada como no modelo que eles propõe (eles usam um MGB com $\alpha = 0$).

O teorema da distribuição de revelações deixa de propósito um grau de liberdade para a determinação da seqüência de distribuições de forma a dar *flexibilidade ao modelador*. Exceto para os casos extremos (inicial e revelação total), tem-se a média e a variância da distribuição de revelações, mas não o *tipo* de distribuição (se normal, triangular, etc.). Qual a classe (ou tipo) da distribuição de revelações para o caso de revelação parcial (informação imperfeita)? A resposta geral é que ela depende da *função densidade de probabilidade conjunta* de X e S, i. é, de p(x, s). Ver, por ex., Goldberger, (1991, p.49). Ou seja, no caso geral o item • na estrutura de informação flexível, eq. (63), será p(x, s). Para obter essa distribuição, o método geral usa a simulação de Monte Carlo.

Embora os textos com capítulos sobre expectativa condicional sejam muito comuns, o estudo da *distribuição* de expectativas condicionais (distribuição de revelações), mesmo quando o condicionante é v.a. discreta, é muito difícil de achar (Steckley & Henderson, 2003, p.383). Algumas exceções são: Lee & Glynn (1999), que estimam a distribuição *acumulada*; e Steckley & Henderson (2003), que estimam a função *densidade* dessa distribuição.

Claro que é possível usar uma abordagem mais precisa para determinar a classe dessa distribuição, mas existem os custos adicionais de complexidade e tempo computacional. A abordagem usada nas aplicações dessa tese é mais simplificada, mas é bem mais prática e flexível, como será visto.

A abordagem mais prática usa uma premissa adicional razoável para •, convenientemente escolhida pelo modelador, que definirá totalmente a distribuição de revelações e solucionará o problema. É conveniente, pois essa premissa adicional irá depender do problema. Por ex., no caso exploratório (item 3.4), será assumido que as variáveis de Bernoulli são *intercambiáveis*. Em muitos outros casos pode-se, numa aproximação prática, considerar que *o tipo da distribuição de revelação é do mesmo tipo da distribuição a priori*. Isso será

[187] Como o valor esperado de uma variável que assume apenas valores não-negativos (caso da variância) é sempre não negativo, pelo item (c) a máxima variância de R_X é Var[X].

assumido num exemplo de investimento em informação (Cap.5), mas a rigor só é verdade no limite de revelação total, em que as duas distribuições não apenas são do mesmo tipo como são iguais. Note que distribuição de revelações começa com um ponto[188] (a média da distribuição a priori) e depois evolui com distribuições intermediárias até virar distribuição à priori. A Figura 34 a seguir ilustra isso e também resolve o aparente paradoxo apontado em Martzoukos & Trigeorgis (2001): Se o valor de uma OR aumenta com a volatilidade e se investir em informação reduz a incerteza, então por que aprender? Com o conceito de distribuição de revelações essa questão é facilmente respondida.

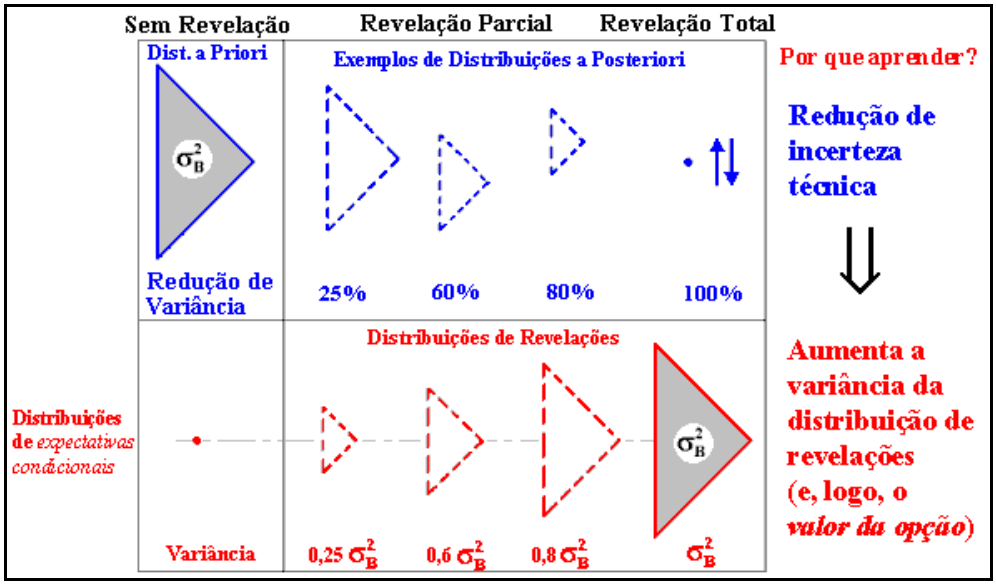

Figura 34 - Exemplo Ilustrando o Teorema 1 sobre Distribuição de Revelações

Na Figura 34, suponha que existe incerteza técnica sobre o volume de reserva B, sendo que os especialistas indicaram uma distribuição a priori triangular para B, com variância σ_B^2. Análises de geologia e reservatórios indicam que as perfurações seqüenciais de três poços de delimitação podem reduzir essa variância inicial em 25%, 60% e 80%. Essas percentagens são as medidas de aprendizagem, i. é, $\eta^2(B \mid S_1)$, $\eta^2(B \mid S_1, S_2)$ e $\eta^2(B \mid S_1, S_2, S_3)$, respectivamente. Essas perfurações reduzem a variância esperada das distribuições posteriores (a parte de cima da Figura 34 mostra exemplos delas, já que existe uma infinidade de distribuições posteriores a cada S_n), mas aumenta a variância da distribuição dos momentos das distribuições posteriores, particularmente da distribuição de

[188] Na eq.(94), em caso de não haver redução de variância, E[Var[X | S]] = Var[X] e assim Var[R_X] = 0. Logo, a distribuição de revelações é um ponto nesse caso trivial sem informação.

expectativas condicionais (ou de revelações), mostrada na parte de baixo da Figura 34. Note que, para cada nova informação ou sinal (S_n), a distribuição de revelações é única (ao contrário das distribuições posteriores). Os 4 itens do Teorema 1 estão ilustrados na Figura 34: se fosse perfurado um número infinito de poços (revelação total), o item (a) do teorema indica que as (inúmeras) distribuições posteriores colapsam para pontos (variância zero) enquanto que a (única) distribuição de revelações se transforma na distribuição a priori (consistência ex-ante). O item (b) do teorema indica que (cada) distribuição de revelações terá valor esperado igual ao valor esperado original de X (da distribuição a priori), ver parte de baixo da Figura 34. O item (c) do teorema diz que as variâncias das distribuições de revelações são dadas pelas reduções esperadas de variâncias que, conforme discutido acima, é obtido simplesmente pela multiplicação da medida de aprendizagem pela variância a priori σ_B^2. Isso está mostrado na parte de baixo da Figura 34. Finalmente, o item (d) do teorema diz que a seqüência das distribuições de revelações é um processo martingale, o que também pode ser visto na parte de baixo da Figura 34: as distribuições de revelações (ex-ante sempre) têm a mesma média e assim visualmente estão centralizadas num mesmo "eixo" mostrada na Figura 34.

O paradoxo de Martzoukos & Trigeorgis (2001) é facilmente respondido com a Figura 34, pois nos modelos de OR se irá trabalhar com a distribuição de revelações e não com uma particular distribuição posterior. Dessa forma, quanto maior a redução esperada de incerteza, maior a variância da distribuição de revelações e maior o valor da opção. Dessa forma, a variância (ou a sua raiz quadrada, o desvio-padrão) da distribuição de revelações joga um papel parecido com a volatilidade nos modelos de OR tradicionais. Ou seja, a volatilidade está para a incerteza de mercado como a (raiz) da variância da distribuição de revelações está para a incerteza técnica no modelo proposto nessa tese. De forma consistente com a teoria tradicional de VOI, o maior valor de informação (antes de computar os custos de adquiri-la) é obtido para o caso de informação perfeita (revelação total), que é justamente o caso em que a distribuição de revelações tem máxima variância.

Na Figura 34 é mostrado que, nos casos de revelação parcial, o tipo de distribuição de revelação é igual ao da distribuição a priori (todas são triangular), mas isso só é absoluta verdade no caso de revelação total. Por isso foram usadas

linhas tracejadas para caracterizar essas distribuições de revelação intermediárias. Essa aproximação é tão melhor quanto mais próximo o problema estiver do caso *limite* de revelação total. Além disso, no caso de S ser v.a. contínua, essa aproximação é melhor do que se S for discreta. Um exemplo numérico tornará isso mais claro.

O exemplo numérico estilizado a seguir[189] sobre a delimitação de um campo de petróleo permitirá "enxergar" melhor os 4 itens do Teorema 1 e dará também uma intuição maior da medida de aprendizagem proposta. Considere um campo de petróleo da Figura 35 a seguir, em que um poço descobriu e provou a existência e um volume de petróleo de 100 milhões de barris (bbl) na área a, mas existe incerteza sobre esse volume B nas demais áreas desse campo (áreas b, c, d).

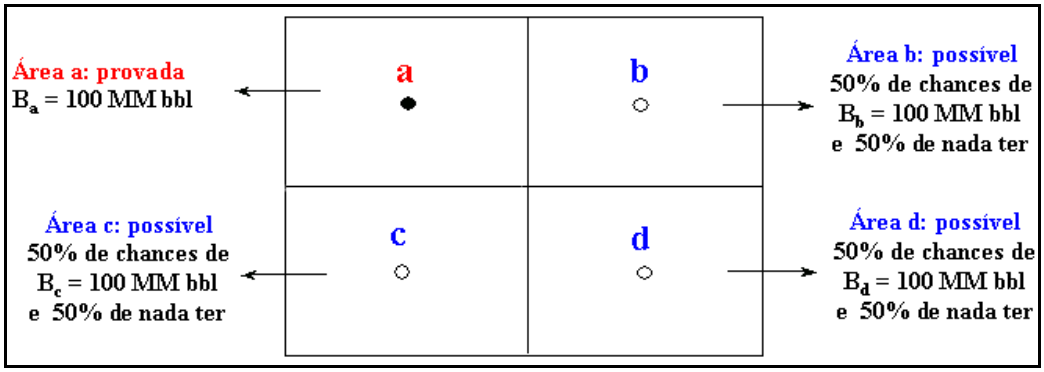

Figura 35 – Exemplo Estilizado de Delimitação de um Campo (Teorema 1)

Cada um dos três poços de delimitação (áreas b, c, d) revelam toda a verdade sobre esse volume na sua área específica. Por ex., na área b existem 50% de chances de ter 100 MM bbl e 50% de nada ter, e essa incerteza (na área b) será totalmente resolvida perfurando o poço no centro dessa área. Por simplicidade, todas as outras áreas com incerteza têm as mesmas características numéricas. Além disso, S_1, S_2, S_3 são independentes, ou seja, só revelam informação relevante nas suas áreas específicas e nada sobre as outras áreas.

Nesse exemplo se pode tanto imaginar um processo seqüencial de investimento em informação (perfuração seqüencial dos três poços – a ordem é irrelevante devido à simetria) ou três planos mutuamente exclusivos de delimitação do campo: alternativa 1 consiste em perfurar um poço; alternativa 2 consiste em perfurar dois poços; e a alternativa 3 consiste em perfurar três poços.

[189] Na verdade foi analisando esse exemplo conceitual e algumas "coincidências" numéricas obtidas, que fez o autor investigar a generalidade das suas conclusões, resultando nos 4 itens do Teorema 1.

Sempre existe também a alternativa trivial (ou base) que é a alternativa zero de não investir em informação, que sempre deve ser considerada já que a informação em geral não é grátis. Note que, por construção do exemplo, a alternativa 3 é a de revelação total, pois perfurando os três poços se revela toda a verdade sobre B.

Note que a distribuição a priori (ou incondicional ou incerteza inicial) é representada pelos seguintes cenários discretos:

- 100 MM bbl com 12,5 % chances;
- 200 MM bbl com 37,5 % chances;
- 300 MM bbl com 37,5 % chances; e
- 400 MM bbl com 12,5 % chances.

Logo, o valor esperado da distribuição a priori é E[B] = 250 milhões bbl e a variância é Var[B] = 7500 $(\text{MM bbl})^2$.

Agora será visto o que ocorre com as distribuições posteriores e com as distribuições de revelações em decorrência das diferentes alternativas de investimento em informação. A distribuição de revelações gerada por uma alternativa tem como cenários as médias das distribuições posteriores. Essas são distribuições condicionais à informação S_n gerada pela alternativa A_n.

No caso da alternativa A_1, a perfuração de um poço (ex.: área b) gera que distribuição de revelações? A alternativa 1 revela um de dois cenários, cada um com 50% de chances: o poço b pode resultar em sucesso (S_1 = boas notícias), provando mais 100 MM bbl ou num poço seco (S_1 = más notícias), provando zero barril (inexistência de petróleo nessa área). Esses dois cenários geram os seguintes cenários de médias da incerteza remanescente em B, i. é, cenários da distribuição de revelações (aqui uma distribuição discreta, de dois cenários) dados abaixo:

- E(B | S_1 = boas notícias) = 100 + 100 + (0,5 x 100) + (0,5 x 100) = 300 MM bbl com 50% chances;
- E(B | S_1 = más notícias) = 100 + 0 + (0,5 x 100) + (0,5 x 100) = 200 MM bbl com 50% chances.

Note que, com a alternativa 1 (apenas um poço) é impossível alcançar cenários mais extremos tais como o de 100 milhões de bbl ou 400 milhões de bbl. Isso ocorre porque o *poder de revelação* da alternativa 1 não é suficiente para

mudar de forma tão radical a expectativa do volume de toda a reserva. Os limites também podem ser caracterizados de maneira mais formal[190].

A alternativa 1 alcança apenas uma revelação parcial sobre a v.a. B e assim existe incerteza residual dado pelas variâncias estritamente positivas das distribuições posteriores p(x | s). Qual é a variância *esperada* das distribuições posteriores no caso da alternativa 1? No caso de revelação positiva, a distribuição posterior é {200 MM bbl com 25 % chances; 300 MM bbl com 50 % chances; e 400 MM bbl com 25 % chances}. No caso de revelação negativa, a outra distribuição posterior é {100 MM bbl com 25% chances; 200 MM bbl com 50% chances; e 300 MM bbl com 25% chances}. É fácil calcular e concluir que as variâncias das distribuições posteriores ambos os cenários são 5000 $(\text{MM bbl})^2$, e assim a variância *esperada* das distribuições posteriores também é 5000 $(\text{MM bbl})^2$. Logo, em média a alternativa 1 reduz a incerteza (variância) em 33% (de 7500 para 5000), ou seja, $\eta^2(B \mid S_1) = 33\%$. Isso dá uma intuição para η^2 nesse exemplo simples (simétrico), já que a relação entre o volume revelado e o volume total também é igual a 1/3.

Agora, com a distribuição de revelações da alternativa 1 e as suas correspondentes distribuições posteriores, se poderá checar os itens (b) e (c) do Teorema 1. O valor esperado da distribuição de revelações com a alternativa 1 é:

$\mathbf{E[R_B(S_1)]}$ = 50% x E(B | S_1 = boas notícias) + 50% x E(B | S_1 = más notícias) **= 250 MM bbl**

Igual à média a priori de B, como esperado pelo item (b) do Teorema 1!

A variância da distribuição de revelações com a alternativa 1 é:

$\mathbf{Var[R_B(S_1)]} = 50\% \times (300 - 250)^2 + 50\% \times (200 - 250)^2 =$ **2500 (MM bbl)^2**

Como esperado pelo item (c) do Teorema 1! A variância da distribuição de revelações é igual à redução esperada de variância (= 7500 – 5000) causada pelo investimento em informação na alternativa 1.

De forma similar pode-se checar os itens (b) e (c) do Teorema 1 para os casos das alternativas 2 e 3, assim como checar o item (a) do Teorema 1 para o caso da alternativa 3 (revelação total). Pode-se verificar também que a redução

---

[190] Por ex., pela *desigualdade de Markov* (ver, por ex., James, 1996, p.125) para o caso de uma v.a. qualquer ou pela versão análoga para o caso de um *processo martingale*, a *desigualdade de Komolgorov-Doob* (ver, por ex., Motwani & Raghavan, 1995, p.92).

esperada de variância da alternativa 2 é 66% (de 7500 para 2500), enquanto que a redução esperada de variância da alternativa 3 é 100% (de 7500 para zero).

A Figura 36 mostra as distribuições de revelações para as três alternativas (ou se preferir, para a seqüência de três investimento em informação).

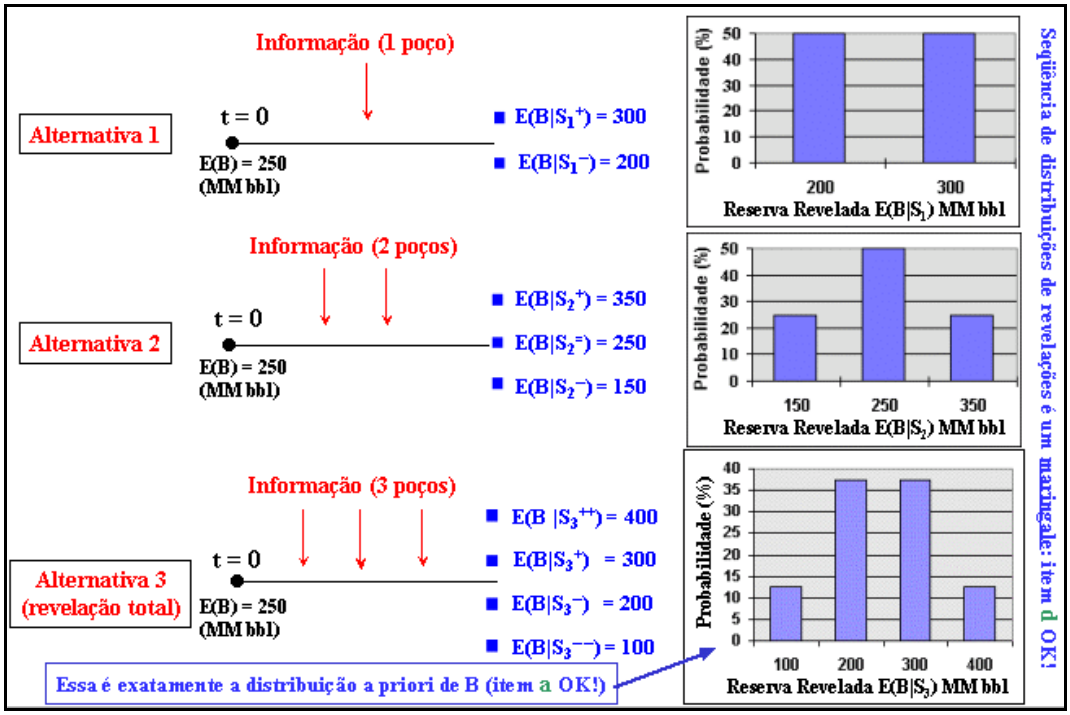

Figura 36 – Distribuições de Revelações para o Exemplo do Teorema 1

Note na Figura 36 que quanto maior o poder de revelação (aqui número de poços), maior a variância da distribuição de revelações. Note também que a distribuição de revelações para a alternativa 3 (revelação total) é exatamente a distribuição a priori, como esperado pelo item (a) do Teorema 1. Em adição, a seqüência vertical de distribuições de revelações tem a mesma média e assim são martingales, como esperado pelo item (d) do Teorema 1. Essas médias são todas iguais à média original da distribuição a priori (250 MM bbl), como esperado pelo item (a) do Teorema 1. Todas as distribuições de revelações são do tipo discreto, embora o número de cenários seja diferente: o intervalo do suporte da distribuição de revelações vai se alargando quanto mais se aproxima do caso de revelação total. Compare também a evolução das distribuições de revelações da Figura 36 com a da Figura 35.

A seqüência de investimentos em informações, com suas distribuições posteriores e de revelações, também podem ser vistas em *diagramas de árvore*. Para efeito de visualização, serão mostrados na árvore apenas dois investimentos

seqüenciais em informação (dois poços do exemplo estilizado anterior). Para ficar mais compacto, se suprimirá os nós de decisão que têm numa árvore de decisão tradicional, assumindo que serão feitos os dois investimentos em informações. A Figura 37 ilustra esse diagrama de árvore com os cenários das distribuições posteriores e de revelação, após a perfuração de dois poços.

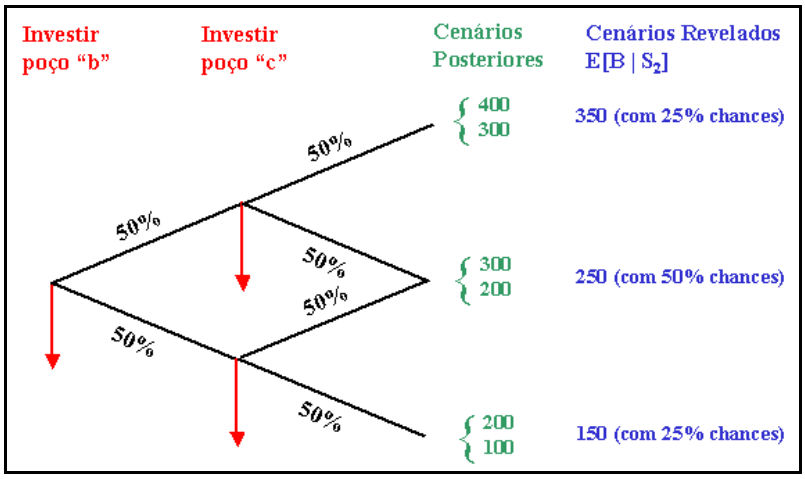

Figura 37 – Diagrama de Árvore para o Exemplo do Teorema 1

Essas distribuições de revelações irão ser aplicadas em problemas mais complexos, mas sua utilidade em OR pode ser vista de forma intuitiva, através da *equação visual de opções reais* (rever a Figura 4), pois ao ser combinado com distribuições neutras ao risco (provenientes de processos estocásticos neutros ao risco), ele aumenta a variância dos possíveis valores do ativo básico (projeto) no futuro e assim aumenta o valor da OR. Como foi discutido antes, quanto maior a variância da distribuição de revelações, maior deve ser o VOI (antes de considerar o custo da informação). Apesar das excelentes propriedades teóricas, o modelo de distribuição de revelações será ainda mais importante na prática de OR.

O mérito do Teorema 1 não é relacionado às demonstrações, já que individualmente cada um dos 4 itens desse teorema já existia na literatura de teoria da probabilidade. O mérito (ou inovação) principal foi selecioná-los e reuni-los para dar suporte ao modelo proposto, assim como o tipo de aplicação (VOI e OR) em que os mesmos foram usados. Ao melhor do conhecimento do autor da tese, isso nunca foi feito antes.

A abordagem proposta poderia ser chamada de *opções reais bayesianas*, já que a distribuição a priori joga um papel fundamental no modelo (daí se tira a média das distribuições de revelações, o limite, etc.). No entanto, não é uma

combinação automática, já que algumas ferramentas são diferentes: na tese não se usará a função verossimilhança, muito usada na abordagem bayesiana tradicional. O item 3.3 a seguir reforçará esses argumentos com a defesa da medida de aprendizagem proposta nessa tese.

3.3. Medidas de Dependência e Medidas de Aprendizagem

3.3.1. Medidas de Dependência de Variáveis Aleatórias

3.3.1.1. Introdução e Limites de Hoeffding-Fréchet para Dependência

Como foi visto no item 3.1, no caso geral é necessário conhecer a distribuição conjunta para definir a *estrutura de informação* do problema de decisão. Além disso, o estudo desse item 3.3 irá reforçar bastante a importância da medida de aprendizagem η^2 proposta, já comentada anteriormente e diretamente ligada ao item (c) do Teorema 1. As excelentes propriedades dessa medida para problemas de investimento em informação serão bastante analisadas aqui.

Sejam duas variáveis aleatórias X e S. A estrutura de dependência entre essas variáveis é definida pela distribuição conjunta bivariada J(X, S). Esse conceito pode ser estendido para o caso de múltiplas variáveis aleatórias, com a estrutura de dependência sendo definida pela distribuição conjunta multivariada.

Na prática, geralmente são dadas as distribuições marginais univariadas e se deseja um parâmetro (ou medida) para estabelecer o grau de dependência entre essas variáveis. No entanto, como será visto, a medida de dependência "ideal" irá depender do tipo de aplicação. Por exemplo, em algumas aplicações medidas simétricas são mais úteis, enquanto que em outras aplicações (como em aplicações de valor da informação) serão mais úteis as medidas assimétricas.

Estudos de dependência usando o popular *coeficiente de correlação* ρ datam de 1885, com F. Galton, medida essa que dominou a estatística praticamente sozinha durante os primeiros 70 anos do século XX (Mari & Kotz, 2001, preface). O primeiro livro texto sobre conceitos de dependência só foi aparecer na segunda metade dos anos 90 (Joe, em 1997). Devido às contribuições de Pearson, no início do século XX, ρ é conhecido por coeficiente de correlação de Pearson. Mas será visto que ρ só tem significado como medida de dependência em *relações lineares*

e/ou *distribuições normais*[191]. Por isso, um erro comum em análise de risco e outras aplicações é o uso desse coeficiente em situações em que ele não se aplica.

A teoria de medidas de dependência é estudada na teoria da probabilidade principalmente no ramo chamado de *distribuições conjuntas dada as marginais* ("distributions with given marginals"), ramo também conhecido como *classes de Fréchet* (Kotz, 1991). Tem raízes nos trabalhos do matemático alemão Hoeffding (1940, 1941) e do matemático francês Fréchet no início dos anos 50. Na década de 50 ocorreram as principais inovações dessa teoria, com o estabelecimento dos *limites de Fréchet-Hoeffding* para distribuições bivariadas dada as marginais (que será visto a seguir) por Fréchet em 1950/51 e Hoeffding (1940, 1941, que só se tornou conhecido nos anos 50)[192]; a teoria dos *espaços métricos probabilísticos* por Schweizer & Sklar em 1957/58, e a *teoria das cópulas* em 1959 por Sklar (respondendo uma questão colocada por Fréchet, ver Schweizer, 1991, ou Nelsen, 1999, p.2). Esse desenvolvimento despertou grande interesse na comunidade acadêmica, já que combinava desenvolvimentos da matemática pura (espaços métricos) com a teoria aplicada de probabilidade.

A função cópula será vista no próximo subitem como uma medida de dependência, sendo que seu sucesso é em parte devido à propriedade de ser uma função de variáveis aleatórias *invariante sob transformações monotônicas*. Por isso Nelsen (1999, p.2) considera os artigos de Hoeffding (1940 e 1941) como precursores da teoria de cópulas de Sklar.

Espaço métrico consiste de um conjunto C e de uma métrica d que mede distâncias entre pontos do conjunto C (ex.: entre a e b). No caso do espaço métrico probabilístico, a distância d(a, b) é substituída por uma função distribuição G_{ab} cujo valor $G_{ab}(x)$ para qualquer número real x é a probabilidade que a distância entre a e b seja menor que x (Nelsen, 1999, p.3). Note que quando se usa o termo "distância" se tem uma métrica necessariamente simétrica, i.é, d(a, b) = d(b, a). Será visto que a métrica copula é simétrica, o que é uma vantagem em algumas

[191] De forma mais geral para *distribuições elípticas* (a distribuição normal multivariada é um caso particular). Outras distribuições elípticas conhecidas são a de Student t, a logística e a de Laplace. Um fato pouco conhecido é que o CAPM e a análise de média-variância em geral são válidos não só para retornos normais como para outros retornos elípticos (Ingersoll, 1987, p.104).

[192] Muitos livros, no entanto, usam apenas o qualificativo "Fréchet". A tese seguirá Nelsen (1999, p.3), que prefere os termos "limites de Fréchet-Hoeffding" e "classes de Fréchet-Hoeffding", já que ambos desenvolveram esses conceitos de forma independente do outro. Hoeffding (1940, 1941) publicou artigos durante a guerra em revistas alemãs pouco conhecidas.

aplicações – por ex. para *distâncias entre distribuições* [193] de probabilidade para variáveis dependentes, mas é uma desvantagem em aplicações dessa tese em que as variáveis aleatórias têm uma relação de condicionamento.

A fórmula que estabelece os chamados limites de Fréchet-Hoeffding para o caso bivariado é dada abaixo. Seja a distribuição (acumulada) conjunta bivariada G com duas distribuições marginais (acumuladas) G_1 e G_2. Fréchet e Hoeffding provaram que:

$$\mathbf{L(x, y) \leq G(x, y) \leq U(x, y)} \qquad \mathbf{(101)}$$

Sendo L(x, y) denominado limite inferior de Fréchet-Hoeffding e U(x, y) chamado de limite superior de Fréchet-Hoeffding, os quais (a prova é simples, ver por ex., Mari & Kotz, 2001, p.68-69) são dados por:

$$\mathbf{L(x, y) = Max\{0, G_1(x) + G_2(y) - 1\}} \qquad \mathbf{(102)}$$

$$\mathbf{U(x, y) = Min\{ G_1(x), G_2(y) \}} \qquad \mathbf{(103)}$$

Uma utilidade desses limites é que se pode construir uma família de distribuições bivariadas dada as distribuições marginais (ou, de forma equivalente, dado os limites L e U) através da combinação convexa ($w_1, w_2 \geq 0$; $w_1 + w_2 = 1$):

$$G(x, y) = w_1 L(x, y) + w_2 U(x, y)$$

Para o caso geral de distribuição multivariada com n variáveis aleatórias de distribuições marginais $G_1(x_1)$, $G_2(x_2)$, … $G_n(x_n)$, os limites de Fréchet-Hoeffding inferior e superior são, respectivamente (Müller & Stoyan, 2002, p.86):

$$\mathbf{L(x_1, x_2, ... , x_n) = Max\{0, G_1(x_1) + G_2(x_2) + ... + G_n(x_n) - (n - 1)\}} \qquad \mathbf{(104)}$$

$$\mathbf{U(x_1, x_2, ...x_n) = Min\{ G_1(x_1), G_2(x_2), \dots , G_n(x_n) \}} \qquad \mathbf{(105)}$$

Essas equações são bem gerais e impõe limites na estrutura de dependência, *qualquer* que seja a maneira que a mesma seja medida. Com essas equações, ou seja, dados os limites de Fréchet-Hoeffding, e com as distribuições marginais, podem-se calcular os limites para cada medida de dependência nesse contexto. Uma aplicação desses limites será vista na discussão de processos de Bernoulli.

[193] A idéia é que a medida de dependência meça a distância em relação à independência, ou seja, dada uma distribuição conjunta com dependência entre as marginais, qual é a distância em relação à outra distribuição conjunta com as mesmas marginais mas expressando independência?

3.3.1.2.
Principais Medidas de Dependência

Existem dezenas (talvez centenas) de medidas de dependência entre v.a. analisadas na literatura. Aqui serão mostradas apenas algumas mais importantes. É de se notar que os livros textos de dependência probabilística mal mencionam (se tanto) a medida defendida nessa tese (η^2)[194], mas dá grande espaço para funções cópulas e algumas medidas de correlação de ordem ("rank correlation"), tais como Spearman-ρ e Kendall-τ. No entanto, grandes matemáticos do passado deram atenção a η^2, como Pearson, Kolmogorov, Fréchet e Rényi. Essa medida é útil em muitas aplicações, especialmente as dessa tese. Algumas medidas de dependência são úteis em outras aplicações específicas, por ex., medidas de *dependência de caudas* ("tail-dependence") de distribuições, são úteis em aplicações da área de seguros (onde se está interessado em eventos extremos), mas não no contexto dessa tese.

A seguir serão definidas algumas medidas de dependência, iniciando pela medida defendida nessa tese, a redução (percentual) esperada de variância η^2 em uma variável de interesse X causada pelo conhecimento do sinal (informação) S.

Definição: Sejam duas variáveis aleatórias X e S com médias e variâncias finitas, definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Define-se a *redução percentual esperada de variância de X dado S* como:

$$\eta^2(X \mid S) = \frac{Var[X] - E[\, Var[\, X \mid S \,]\,]}{Var[X]} \qquad (106)$$

A notação η^2 é adotada por duas razões: (a) para facilitar a conexão com sua interpretação estatística, a *razão de correlação* ("correlation ratio"), também chamada de razão de *correlações* e também conhecida por "*eta-squared*" em alguns livros de estatística; e (b) em algumas situações (ex.: processos de Bernoulli) é mais intuitivo (para efeito da interpretação) usar a raiz positiva de η^2, ou seja, simplesmente η. Isso será discutido em detalhes ainda no tópico 3.3. Muitos autores denotam η "correlation ratio", em vez de η^2 adotado nessa tese. Aqui se segue a nomenclatura adotada por Kolmogorov (1933, p.60) e Stuart &

[194] Joe (1997) e Nelsen, (1999) nem mencionam; Mari & Kotz (2001) dedicam menos de meia página. O principal motivo parece ser a indesejável (para esses autores) falta de simetria de η^2. Mas aqui assimetria será uma vantagem e uma qualidade duma boa medida de aprendizagem.

Ord & Arnold (1999, p.501). A razão de correlação η^2 foi introduzida por Pearson em 1903, conforme reporta Sampson (1984).

Aplicando o item (c) do Teorema 1 sobre a variância da distribuição de revelações na equação que define $\eta^2(X \mid S)$, se obtém:

$$\eta^2(X \mid S) = \frac{Var[\, E[\, X \mid S]\,]}{Var[X]} = \frac{Var[R_X]}{Var[X]} \quad (107)$$

Ou seja, a medida de aprendizagem proposta é a variância normalizada da distribuição de revelações, sendo normalizada pela variância inicial, i. é, pela variância da distribuição a priori.

De maneira análoga, pode-se definir a *redução percentual esperada de variância de S dado X* como:

$$\eta^2(S \mid X) = \frac{Var[S] - E[\, Var[\, S \mid X\,]\,]}{Var[S]} \quad (108)$$

No caso geral, $\eta^2(X \mid S) \neq \eta^2(S \mid X)$ Logo essa é uma *medida assimétrica de dependência* entre variáveis aleatórias. Assim, em geral a medida η^2 não exibe a propriedade de *mutualidade de informação* que ocorre com a métrica da entropia. Isso é uma desvantagem? Não! No contexto da tese de aplicações de valor da informação, aprendizagem, etc., isso é uma vantagem! Isso será mostrado no próximo subitem sobre as propriedades desejadas para medidas de aprendizagem. Em outros contextos, no entanto, a assimetria de uma medida é considerada uma desvantagem: para alguns autores (ex.: Rényi, 1959), a propriedade de simetria é desejável para medidas de dependência. Essa tese irá discordar da generalização desses autores, dizendo que isso depende da classe de aplicação.

Uma medida relacionada que é sempre simétrica é a média aritmética entre $\eta^2(X \mid S)$ e $\eta^2(S \mid X)$. Essa medida simétrica será aqui chamada de *redução média percentual esperada mútua de variância* das variáveis X e S, definida como:

$$\bar{\eta}^2(X, S) = \frac{\eta^2(X \mid S) + \eta^2(S \mid X)}{2} \quad (109)$$

Já a média *geométrica* não é tão interessante pois se apenas um dos dois valores de $\eta^2(. \mid .)$ for zero, a média geométrica também será igual a zero (i. é, poderia ser igual a zero em casos de clara relação de dependência). Lembrar que a média geométrica é sempre menor ou igual que a média aritmética.

No próximo sub-item serão vistas várias propriedades para η^2. Mas é oportuno mencionar que as propriedades de $\eta^2(X|S)$ para o caso que S é um vetor de variáveis aleatórias (em vez de uma variável) são basicamente as mesmas do caso mais simples (ver Hall, 1970, ou Sampson, 1984). No entanto, quando *ambos* X e S são *vetores* de v.a. é necessário trabalhar com uma extensão do conceito de η^2 chamada de *razão de correlação multivariada* (um indicador agregado do impacto da informação num conjunto de variáveis de interesse). Essas extensões são discutidas em Sampson (1984), em Kabe & Gupta (1990) e em Shaffer & Gillo (1974). Mas aqui se trabalhará com um η^2 para *cada* variável de interesse (com o condicionante S podendo ou não ser um vetor). Dessa forma, se terá simulações e distribuições de revelações separadas para cada variável de interesse, não necessitando trabalhar com a versão multivariada de η^2.

Agora será definido o clássico coeficiente de correlação de Pearson. Para isso, é necessário primeiro escrever a equação da covariância entre X e S:

$$\mathbf{Cov[X, S] = E[(X - E[X]) (S - E[S])]} \qquad \mathbf{(110)}$$

Note que Var[X] é simplesmente Cov[X, X]. Desenvolvendo o produto interno da eq. (110), chega-se facilmente à conhecida equação para a covariância:

$$\mathbf{Cov[X, S] = E[X S] - E[X] E[S]} \qquad \mathbf{(111)}$$

O popular coeficiente de correlação de Pearson é a *covariância normalizada* pela média geométrica das variâncias de X e S, i. é, o coeficiente de correlação é uma covariância *adimensional* dada por:

$$\mathbf{\rho(X, S) = \frac{Cov[X, S]}{\sqrt{Var[X]\ Var[S]}}} \qquad \mathbf{(112)}$$

O coeficiente de correlação não depende das origens e das unidades de medida (Feller, 1968, p.236), i. é, é invariante em relação a transformações lineares monotônicas. Ou seja, dadas as constantes a, b, c, d, com a > 0 e c > 0:

$$\mathbf{\rho(aX + b, cS + d) = \rho(X, S)} \qquad \mathbf{(113)}$$

Será visto que o coeficiente de correlação não é uma boa medida geral de dependência, mas é uma boa medida de dependência linear entre X e S.

Lema 3: Sejam X e S v.a. definidas no mesmo espaço de probabilidades. O coeficiente de correlação exibe quase certamente as propriedades:

(a) $\mathbf{-1 \le \rho(X, S) \le +1}$ **(114)**

(b) $\mathbf{\rho(X, S) = +1 \Leftrightarrow X = a S + b\ ,\ a > 0}$ **(115)**

(c) $\rho(X, S) = -1 \Leftrightarrow X = a S + b , a < 0$ **(116)**

Prova: Feller (1968, p.236-237)

Para *relações lineares* entre as variáveis aleatórias ou se as mesmas tiverem *distribuição normal* (ou de forma mais geral, distribuição elíptica), o popular coeficiente de correlação de Pearson ρ pode ser aplicado/interpretado como uma medida de dependência de variáveis aleatórias. A métrica η tem a vantagem prática de ser interpretada como sendo igual ao módulo de ρ *apenas* quando ρ tem realmente significado enquanto medida de dependência e pode ser corretamente aplicado/interpretado. Esse conhecido resultado é resumido no seguinte lema que reforça a métrica defendida nessa tese.

Lema 4: Sejam duas v.a. X e S definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, sendo que X tem média e variância finitas. Então,

(a) $\eta^2(X|S)$ pode ser visto como o supremo do coeficiente de correlação ao quadrado, sendo o supremo tomado em relação a todas as possíveis funções reais g(S), i. é:

$$\eta^2(X \mid S) = \sup_{g} \rho^2(g(S), X) \quad \textbf{(117)}$$

(b) Em particular, se a função entre X e S for linear, X = a + b E[X | S], com $b \neq 0$, *e/ou* se X e S tem distribuição conjunta p(x, s) bivariada normal (logo as marginais têm distribuições normais)[195], então η(X | S) é igual ao módulo do coeficiente de correlação:

$$\eta(X|S) = |\rho(X, S)| \quad \textbf{(118)}$$

(c) $\eta^2(X | S)$ é igual ao quadrado do coeficiente de correlação entre X e o valor esperado condicional $E[X | S] = R_X(S)$:

$$\eta^2(X|S) = \rho^2(X, R_X(S)) \quad \textbf{(119)}$$

Prova: (a) A prova da eq.(117) pode ser vista em Rényi (1970, p.278-279), que usa a desigualdade de Cauchy-Schwarz, $(E[X S])^2 \leq E[X^2] E[S^2]$.

(b) Hall (1970, p.364) demonstra a eq. (118).

(c) Pode ser visto como um caso particular da eq. (117). Segundo Kruskal (1958, p.817), foi provado por Fréchet na década de 30. A prova não aparece nos

[195] Mas o inverso não é verdade, por isso se especifica p(x, s). Kowalski (1973) mostra que é possível ter as distribuições marginais X e S normais, mas a bivariada não-normal. Por ex., a soma de duas *bivariadas* normais escritas nas mesmas variáveis normais X e S, mas cada bivariada com *diferentes* coeficientes de correlação, é uma nova distribuição bivariada não-normal de X e S.

textos talvez por ser muito simples. Como será usada numa proposição, ela será aqui demonstrada. Por definição de variância e usando o Teorema 1 (b), tem-se:

$$\text{Var}[R_X(S)] = \text{Var}[E[X \mid S]] = E[(E[X \mid S] - E[X])^2]$$

Elevando ao quadrado e dividindo por $\text{Var}[R_X(S)]$ .Var[X], vem:

$$\frac{\text{Var}[R_X(S)]}{\text{Var}[X]} = \frac{(\text{Cov}[R_X(S), X])^2}{\text{Var}[R_X(S)]\ \text{Var}[X]}$$

Mas o lado esquerdo da equação acima é $\eta^2(X \mid S)$, enquanto que o lado direito é $\rho^2(X, R_X(S))$, provando a eq. (119). □

A eq. (118) permite uma ligação prática importante entre a medida proposta η^2 e o popular coeficiente de correlação ρ. Isso é uma vantagem prática, pois existem diversos modelos lineares que são populares em diversas aplicações.

Mas o mundo é muitas vezes não-linear. Um mundo não-linear significa que uma variação *infinitesimal* num dado de entrada S ("*input*") pode produzir um efeito *macroscópico* na variável de saída X ("*output*"). Ou vice-versa. A métrica defendida nessa tese tem as vantagens de não ser igual a ρ no mundo não-linear, quando se sabe que ρ não se aplica como medida de dependência, e de ser igual a essa métrica popular, quando ela se aplica como medida de dependência.

Segundo Kruskal (1958, p.817), também foi provado por Fréchet na década de 30 que:

$$\mathbf{\rho^2(X, S) = \eta^2(X|S)\ \rho^2(S, E[X \mid S]) = \eta^2(S|X)\ \rho^2(X, E[S \mid X])} \qquad \mathbf{(120)}$$

Uma generalização teórica importante da razão de correlação η^2 é apresentada por Hall (1970) se as variáveis X e S forem complexas (reais como caso particular). Várias propriedades de η^2 para variáveis reais valem para variáveis complexas, em particular a média e a variância de $R_X(S)$ se X e S são v.a. complexas são as dadas nos itens (b) e (c) do Teorema 1. Hall (1970) define o índice de dependência característica $\eta^2(t)$ como a razão de correlação de uma *função complexa* f(X, t) = exp(i t X) dado S, onde i é o número imaginário (raiz de – 1) e t é um número real positivo. Essa função complexa tende para X (e logo $\eta^2(t)$ tende para o η^2 tradicional) quando t tende a zero, de forma que $\eta^2(0+)$ é uma generalização de η^2 que sempre existe (mesmo com variâncias *infinitas*) e tem outras propriedades favoráveis.

Existe uma família de medidas de dependência advindas da *teoria da informação* e do conceito de *entropia* (ver item 3.1.4.3). Aqui não serão repetidas

as definições/equações, mas serão destacadas as duas principais medidas de dependência derivadas da entropia: a informação mútua (ou *incerteza removida*) dada pela eq. (71) (ver também as eqs. 72, 73 e 74), que como foi visto acima é muito similar à medida proposta η^2, e a distância de Kullback-Leibler entre duas distribuições (eqs. 75 e 76) e sua variante chamada divergência (eq. 77).

Duas medidas de dependência bivariadas e não-paramétricas muito conhecidas são o Kendall-τ e o Spearman-ρ (conhecida como "rank correlation" de Spearman). Elas são classificadas como medidas de *correlação de ordem* (Kendall, 1962) e medem uma forma de dependência chamada de *concordância* (Nelsen, 1999, p.125). Intuitivamente, um par de v.a. (X, S) é concordante se os valores elevados de uma v.a. tende a serem associados com os valores elevados da outra v.a. (e vice-versa, baixos com baixos). No caso oposto (elevados com baixos), o par é denominado *discordante*. Enquanto o Kendall-τ usa apenas a ordem relativa, o Spearman-ρ usa a diferença numérica entre as ordens ("ranks").

A medida Kendall-τ ("Kendall's tau") das v.a. X e S, denotada por $\tau_{X,S}$, é definida como a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância dessas duas v.a. Sejam (X_1, S_1) e (X_2, S_2) dois vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, então a medida Kendall-τ é dada por:

$$\tau_{X,S} = \Pr[(X_1 - X_2)(S_1 - S_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(S_1 - S_2) < 0]$$

Na prática da estimativa estatística, em vez da definição acima (versão de "população"), usa-se a definição chamada de versão de amostra do Kendall-τ:

$$\hat{\tau}_{X,S} = \frac{\textbf{número de pares concordantes} - \textbf{número de pares discordantes}}{\textbf{número total de pares}} \quad \textbf{(121)}$$

Note na eq. (121) que a medida $\tau_{X,S}$ é não-paramétrica (independe da distribuição), simétrica e o intervalo é $[-1, +1]$[196].

A medida Spearman-ρ ("rank correlation"), denotada por $\rho_S(X, S)$, proposta pelo psicólogo inglês Spearman em 1904 (Kruskal, 1958, p.854), tem características similares ao $\tau_{X,S}$, i. é, é não-paramétrica, simétrica, o intervalo é $[-1, +1]$ e é uma medida de concordância. O procedimento de cálculo é dado a seguir. Sejam duas amostras de dados X e S, cada uma com N dados. Em cada

[196] No caso de distribuições conjuntas *descontínuas*, a presença de *empates* ("ties") no ordenamento demanda uma adaptação nas equações de τ. Kendall criou o "tau-b" em 1945 para esses casos. O leitor interessado nesses detalhes pode consultar, por ex., Liebetrau (1983, p.68-72).

vetor, atribua o número 1 ao menor valor e continue atribuindo o número de ordem para cada valor até atribuir N ao maior valor. Para cada par de dados (x_i, s_i) desses vetores, calcule as diferenças quadradas $d_i^2 = (x_i - s_i)^2$. Calcule a soma dessas diferenças e use a fórmula abaixo (caso sem "empates", ver Press et al, 2002, p.645-646 para todos os casos):

$$\rho_S(X,S) = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N (N^2 - 1)} \qquad (122)$$

Pela eq. (122), dá para ver que ρ_S só é igual a 1 se todos os pares tiverem o mesmo ordenamento (todos os d_i iguais a zero).

Muitas medidas acima *não* valem para as v.a. categóricas[197], i. é, variáveis *ordinais* (ex.: v.a. pode assumir os valores excelente, bom, regular, ruim, péssimo) e variáveis *nominais* (exs.: sexo: masculino ou feminino; doença X: tem ou não tem, etc.). Essa última é a mais restrita em termos de medidas de dependência já que, além de não ser numérica, não pode ser ordenada. No entanto, se verá que a medida de dependência proposta nessa tese *pode e é* usada para v.a. nominais.

No caso de variáveis ordinais se pode comparar se um valor é maior ou menor que outro, mas não tem muito significado se falar em distâncias entre v.a. Algumas medidas de concordância podem ser usadas para v.a. ordinais, já que o conceito de monotonicidade faz sentido (medir se uma variável tende a aumentar quando uma outra variável aumenta, etc.). Várias medidas de dependência entre v.a. ordinais, inclusive o clássico (data de 1900) coeficiente Q de Yule, são mostradas em Spanos (1999, p.284-286).

No caso de variáveis nominais o conceito de monotonicidade não faz sentido. Mas se quer uma medida de dependência para responder perguntas do tipo: "como o conhecimento da classificação da v.a. S pode ajudar na conjectura da classificação da v.a. X?". A distribuição de probabilidades de v.a. nominais é feita normalmente através de tabelas de contingência, que contém as probabilidades de ocorrência conjunta de v.a. nominais. No caso bivariado (X, S), a tabela de contingência é uma matriz m x n contendo as probabilidades conjuntas π_{ij} dos pares (x_i, s_j) para i = 1, 2, … m e j = 1, 2, … n. Uma conhecida medida de

[197] As v.a. discretas podem ser divididas em três sub-classes (escalar, ordinal e nominal, ver Liebetrau, 1983, p.7) ou em duas sub-classes, escalar e categórica (ver Spanos, 1999, p.25).

dependência para v.a. nominais é devido a Theil que em 1950 usou o conceito de entropia para calcular o coeficiente de incerteza U (ver Spanos, 1999, p.287-288).

Uma classe importante de medidas de dependência para v.a. nominais foi desenvolvida em uma série de artigos por Goodman & Kruskal, especialmente o primeiro artigo (Goodman & Kruskal, 1954). Um dos índices que eles propuseram foi o chamado coeficiente de concentração ou "tau de Goodman & Kruskal", denotado por τ_{GK}. Margolin & Light (1974, p.757) aponta que essa medida tem boas propriedades, em particular ela é invariante a permutações de linhas ou colunas na tabela de contingência, e assim τ_{GK} "*tem sido amplamente adotado na literatura de ciências sociais*". Spanos (1999, p.287) mostra que se pode calcular as variâncias (marginais, condicionais, etc.) numa tabela de contingência através de somatórios de π $(1 - \pi)$. Curiosamente, levou cerca de 20 anos[198] para se reconhecer que o coeficiente de concentração τ_{GK} de Goodman & Kruskal em termos computacionais é exatamente a redução percentual esperada de variância[199] η^2! Isso é mais um indicador da força e da abrangência da medida de dependência η^2 que, infelizmente, não tem sido notado nos livros textos de medidas de dependência dos últimos 10 anos (Joe, Nelsen, Mari & Kotz). Apontando essas conexões (além de ótimas propriedades e outras vantagens), essa tese procura corrigir essa injustificável e grave omissão da literatura recente de medidas de dependência probabilística.

Cópula é uma função que descreve a dependência entre variáveis aleatórias e que vem se tornando muito popular na literatura de finanças. Ver, por ex., o recente livro-texto de Cherubini & Luciano & Vecchiato (2004), dedicado a aplicações de cópulas em finanças. Uma função cópula C é uma função distribuição de probabilidade conjunta de N variáveis aleatórias (multivariada), definida no hipercubo unitário $[0, 1]^N$, isto é, C: $[0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$. Ela é obtida da transformação das distribuições marginais através de suas funções distribuições. Isso significa que *todas* as distribuições marginais unidimensionais de C são distribuições uniforme [0, 1]. No caso bivariado, a distribuição conjunta J das v.a.

---

[198] Margolin & Light (1974) mostra que τ_{GK} é computacionalmente equivalente ao R^2, coeficiente de ajuste duma regressão, que será visto é também equivalente a η^2.

[199] Spanos (1999, p.287) mostra que τ_{GK} é a redução esperada percentual de variância, mas não faz nenhuma conexão com espectativa condicional ou que τ_{GK} é a razão de correlação η^2.

com distribuições (acumuladas) marginais G e H, pode ser representada por uma função distribuição chamada cópula C (marginais uniformes), através da equação:

$$\mathbf{J = C(G, H)} \qquad \mathbf{(123)}$$

O teorema principal para aplicabilidade de cópulas, chamado teorema de Sklar, estabelece que *qualquer* função distribuição conjunta que tem distribuições marginais (G_1, G_2, … G_N) de qualquer tipo, pode ser obtida por uma escolha adequada da função cópula C. Isso significa que, dadas as distribuições marginais, pode-se obter qualquer estrutura de dependência através das cópulas. No entanto, o mesmo teorema estabelece que a função cópula é única apenas se a distribuição conjunta for contínua. Isso porque a função copula trabalha com a função inversa G^{-1} da função distribuição G. Para v.a. discretas, a função G teria degraus e não poderia ser invertida. Como se sabe, para v.a. contínuas essa função inversa G^{-1} é uma distribuição uniforme sobre o intervalo [0, 1], mas o mesmo não ocorre para v.a. discretas. Isso limita a aplicabilidade desse conceito em casos importantes onde se precisa trabalhar com distribuições discretas. Assim, para o caso de distribuições discretas, o conceito de cópula é *insuficiente* para definir dependência entre variáveis aleatórias. O uso de cópulas para distribuições discretas necessita de um critério complementar (tal como a *interpolação bilinear*, ver Nelsen, 1999, p.16-18) e por isso é usado quase exclusivamente em aplicações com distribuições contínuas.

Mais precisamente, se ao menos *uma* distribuição marginal for descontínua, então a cópula não é única. Conforme mostra o artigo crítico de Marshall (1996), isso significa que a *mesma* medida de cópula pode indicar casos opostos de dependência, i. é, indicar o caso extremo de limite inferior de Fréchet-Hoeffding (eq.102) para um par de marginais G_1, H_1 e indicar o limite superior de Fréchet-Hoeffding (eq.103) para outro par de marginais G_2, H_2. Assim, é muito difícil se interpretar essa medida. Marshall (1996) comenta ainda que, embora Nelsen tenha conseguido expressar as medidas de Spearman-ρ e Kendall-τ em termos só de cópulas, em caso de descontinuidade de um dos marginais, não se pode obter essas medidas através da cópula. Em geral, não existe medida de dependência de v.a. que dependa só da cópula. Isso inclui o popular coeficiente de correlação, que também não pode ser obtido através da cópula. Marshall (1996, p.217-218) mostra que dado uma cópula C, o coeficiente de correlação em geral não é único, é todo

um intervalo: se $\rho > 0$, então a cópula determina o intervalo $(0, \rho]$; e se $\rho < 0$, então a cópula determina o intervalo $[\rho, 0)$. Ou seja, a cópula não diz muita coisa sobre o coeficiente de correlação, o que é uma limitação prática importante. Marshall (1996) ainda mostra outros problemas, inclusive problemas de não-convergência de seqüências de cópulas de seqüências de marginais, mesmo quando as distribuições conjuntas convergem e todas as suas marginais são contínuas. Ou seja, apesar da popularidade, as cópulas têm muitos problemas.

O fato do conceito de cópula ser insuficiente no caso de v.a. discretas (e, é óbvio, se aplica menos ainda a v.a. ordinais ou nominais) é uma limitação prática *muito* importante para aplicações de VOI e assim, apesar de toda a popularidade que vem adquirindo nos últimos 10 anos, o conceito de cópula não é adequado para as aplicações dessa tese. Por ex., nas avaliações de projetos de exploração de petróleo, a variável mais básica é uma v.a. discreta de Bernoulli: o fator de chance FC, que fornece a probabilidade de existência de petróleo.

Uma tentativa de usar o conceito de cópula para variáveis de Bernoulli associado a um critério adicional de definição (já que a cópula não é única para v.a. discretas), foi feita por Tajar & Denuit & Lambert (2001). Como não dá para trabalhar com a distribuição uniforme contínua no intervalo [0, 1], foi usada uma distribuição uniforme *discreta* com dois cenários (zero e um), cada cenário com probabilidade ½ (uniforme pois todos os cenários têm mesma probabilidade), i. é, uma distribuição de Bernoulli de parâmetro $p = ½$, que também pode ser vista como distribuição uniforme discreta, servindo como referência da cópula. No entanto, isso gerou uma medida de dependência bem questionável, por ex., a medida não é zero para o caso de independência e sim igual a ¼ o que faz a medida não ser intuitiva e nem prática.

Medidas baseadas em conceitos de dependência positiva, tais como PQD ("positive quadrant dependence"), são muito analisadas em livros texto (ex.: Mari & Kotz, 2001, p.33-36), mas em geral não tem interesse para essa tese pois não tem significado em termos de medida de aprendizagem. Mari & Kotz (2001, p.171) mostram um exemplo em que $\rho = + 0{,}53$, mas que não é PQD. O mesmo exemplo pode ser usado para mostrar que se aprende muito conhecendo uma das variáveis para prever a outra, *apesar* de não ser PQD.

Medidas como a informação de Fisher (ver item 3.1.4.2), apesar da grande popularidade em estatística, não tem sido considerada como medida de dependência. Ela é paramétrica (depende da distribuição), não é normalizada, etc. Mas no limite ela pode ser vista como a medida de Kullback-Leibler, item 3.1.4.3.

3.3.2. Propriedades Desejadas para Medidas de Aprendizagem

Para motivar e ilustrar o estudo das propriedades desejadas (axiomas) para medidas de aprendizagem, considere o seguinte exemplo numérico simples. Esse exemplo foi usado num livro-texto de *teoria da informação* (McEliece, 2002, p.23-24 e 45) para mostrar a superioridade da medida de *informação mútua* (ver eqs. 71 a 74) sobre o popular coeficiente de correlação ρ (eq. 112). Aqui nessa tese o mesmo exemplo é usado mas para mostrar a superioridade da medida aqui defendida (η^2) sobre a medida de informação mútua! Em geral, esse exemplo ilustrará a superioridade de medidas assimétricas sobre medidas simétricas (informação mútua é simétrica), quando o foco de aplicação é valor da informação ou processos de aprendizagem.

Sejam duas variáveis aleatórias A e B, sendo que A pode assumir os valores – 1, +1, – 2, + 2, cada cenário com probabilidade de ¼, enquanto que $B = A^2$. A Figura 38 ilustra esse exemplo[200].

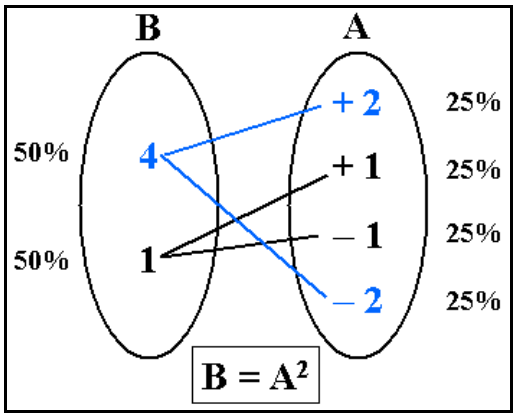

Figura 38 – Exemplo Sobre Medidas de Dependência

Embora claramente as v.a. A e B não sejam independentes – ao contrário, são bastante dependentes pois existe uma dependência funcional – pode-se verificar que A e B tem correlação ρ = zero. McEliece (2002) aponta então a

[200] Ver a planilha dependência_VoI.xls com esse exemplo no CD-Rom.

superioridade da métrica baseada em entropia, já que a informação mútua I(A, B) é diferente de zero, no caso I(A, B) = 1 bit.

Pode-se ver também que embora $\eta^2(A|B) = 0$, tem-se que $\eta^2(B|A) = 100$ %, ou seja, revelação total de B dado A: se for informado o valor de A (por exemplo, A = – 2) a incerteza (variância) em B colapsa para zero (B = 4, com certeza). Esse exemplo mostra a importância da medida de aprendizagem poder ser assimétrica: claramente o conhecimento de A para prever B é muito maior (pois é o limite superior do conhecimento, já que revela toda a verdade sobre A) do que o conhecimento de B para prever A (cuja redução esperada de variância é zero, apesar de reduzir o número de cenários). Assim, métricas simétricas não servem como medidas de aprendizagem para casos gerais, embora muito simples, como no exemplo acima.

Assim, essa tese descarta como medida de aprendizagem todas as medidas simétricas tais como a informação mútua, o coeficiente de correlação, medidas baseadas em cópulas, correlações de ordem (Spearman-ρ e Kendall-τ), etc. No caso de medidas baseadas em entropia, a medida assimétrica chamada *entropia condicional* (ver eq. 70), poderia ser usada como medida de aprendizagem. No exemplo acima, pode-se verificar que as entropias condicionais são H(B | A) = 0 e H(A | B) = 1. Ou seja, distingue a assimetria da relação de A e B, mas de forma oposta à medida η^2, (quando um é zero o outro é 1 e vice-versa). Poderia se pensar então em usar 1 – H(X | S) como medida de aprendizagem, mas enquanto a medida η^2 é sempre normalizada entre 0 e 1, a entropia condicional em geral não é (embora dependa da base do logaritmo). O livro de Cover & Thomas (1991, p.17) mostra um exemplo que tanto H(X|Y) como H(Y|X) são maiores que 1 (logaritmo na base 2). Assim, fica difícil também trabalhar com a entropia condicional como medida de aprendizagem.

E a função verossimilhança[201], que tanto sucesso faz na teoria estatística, tanto clássica como Bayesiana, seria uma boa medida de aprendizagem? Ela é assimétrica, já que é derivado de probabilidades condicionais inversas. Como foi visto, a verossimilhança dá a confiabilidade da informação S para prever X, enquanto a função verossimilhança mapeia essa confiabilidade, i. é, fixando $S = s_i$ e vendo p(s | x) como uma função de X. Para ver que a confiabilidade não é uma

[201] Sobre a função verossimilhança, rever itens 3.1.2 e 3.1.4 e a discussão da eq. (66).

boa base para medidas de aprendizagem, considere dois "expert infalíveis" que podem ser consultados para saber se a ação da companhia X subirá ou não no pregão do dia seguinte da Bolsa de Valores de São Paulo. Suponha que um dos "expert infalíveis" sempre diz a verdade e o outro sempre diz uma mentira, i. é, as confiabilidades são $p_1(s \mid x) = 100\%$ e $p_2(s \mid x) = 0\%$. Do ponto de vista do aprendizado de X, os conselhos são equivalentes pois se aprenderá tudo sobre X (se o "expert infalível 2" dizer que a ação não vai subir, então se saberá que a ação vai subir com probabilidade 1) em ambos os casos. Assim essa medida atribuiria dois valores diferentes para uma mesma aprendizagem (no caso, a aprendizagem máxima), e o que é pior, usando até o valor zero para o caso de aprendizagem máxima. Ou seja, a confiabilidade da informação (verossimilhança) igual a zero pode significar revelação total, que é a máxima aprendizagem possível! Assim, medidas baseadas na confiabilidade da informação (verossimilhança) $p(s \mid x)$ não poderão atender aos axiomas mais elementares sobre medidas de aprendizagem, que serão vistas ainda nesse sub-item.

Voltando ao exemplo da Figura 38, no caso da informação ser A e se querer prever B, a confiabilidade de A é 50% ou zero a depender do valor de B, por ex., se A = 2, então $p(A = 2 \mid B = 4) = 50\%$, $p(2 \mid 1) = 0$. De forma similar, se obteria os valores de 0 e 50% para A = 1, – 1 e – 2. Um valor médio dessa função verossimilhança para A como sinal seria 25%, contrastando com $\eta^2(B \mid A)$ que é de 100%. Já no caso do sinal ser B e a variável de interesse ser A, as probabilidades inversas são 100% ou zero, por ex., se B = 1, então $p(B = 1 \mid A = 2) = 0$, $p(1 \mid 1) = 100\%$, $p(1 \mid -1) = 100\%$ e $p(1 \mid -2) = 0$. O caso de B = 4 seria similar (100% ou 0) e o valor médio dessa função seria de 50%, contrastando com a medida $\eta^2(A \mid B)$ que é de 0%. Assim a verossimilhança não serve como escala de aprendizagem, já que esse exemplo mostrou que ela atribuiu um valor menor para um sinal claramente mais informativo que um outro menos informativo.

Uma crítica baseada na teoria da informação para a medida η^2 seria que ela foi igual a zero no exemplo anterior, $\eta^2(A \mid B) = 0$, apesar do conhecimento de B, tanto no caso de B = 1 como B = 4, reduzir o número de cenários de 4 para 2. Ou seja, para $\eta^2(A \mid B)$, não é relevante a informação dada pelo conhecimento do conjunto B. A resposta a essa crítica é que esse conhecimento é irrelevante no sentido de que não reduz a incerteza (medida pela variância) esperada. Na teoria

da informação a incerteza é medida pela entropia, que se reduz com a redução do número de cenários: H(A) = 2 e reduz para H(A | B) = 1 com o conhecimento de B, enquanto que H(B) = 1 e reduz para H(B | A) = 0 com o conhecimento de A. Em ambos os casos essa redução (que é igual à informação mútua) é igual a 1 (o que não é surpresa, já que a informação mútua é simétrica). Um exemplo de VOI irá indicar que a crítica da teoria da informação não é pertinente.

Seja um problema simples de VOI, em que o valor de um prospecto é baseado no valor esperado do benefício $E[V_k]$ e no investimento I_k. O valor da informação a priori (VDP, ver eq. 52) é dado por:

$$\mathbf{VDP = Max[0, E[V_k] - I_k]} \quad \mathbf{(124)}$$

O benefício é incerto mas o investimento é conhecido. Se k = A, então os possíveis benefícios são dados pelos cenários do conjunto A da Figura 38, e assim $E[V_A] = 0$. Se k = B, então os possíveis benefícios são dados pelos cenários do conjunto B da Figura 38, e assim $E[V_B] = 2,5$. Para efeito de clareza, considere os problemas simétricos em que, sem a informação, o valor da informação a priori é zero em ambos os casos. Para tal, considere $I_A = 0$ e $I_B = 2,5$. Também considere que em ambos os casos o custo de aquisição da informação é zero (já que o interesse é comparar a informatividade dos sinais). Qual seria o VOI nos dois casos (conhecendo A para k = B e conhecendo B para k = A)? Como o VDP nos dois casos é zero, pela eq. (54) o VOI é o próprio VDI (valor da decisão informada, eq. 53). Esses são dados pelas equações:

$$\mathbf{VDI(B \mid A) = E[Max[0, E[V_B] - I_B] \mid A]} \quad \mathbf{(125)}$$

$$\mathbf{VDI(A \mid B) = E[Max[0, E[V_A] - I_A] \mid B]} \quad \mathbf{(126)}$$

Calculando as expectativas condicionais, vem:

VDI(B | A) = 0,25 (4 – 2,5) + 0,25 (0) + 0,25 (0) + 0,25 (4 – 2,5) = 0,75

VDI(A | B) = 0,5 [Max[0, 0 – 0]] + 0,5 [Max[0, 0 – 0]] = 0

Assim, de forma consistente com a medida η^2, mas não com medidas simétricas tais como as derivadas da entropia e outras, a informação proporcionada por A para aprender sobre B é relevante, VOI > 0, enquanto que a informação proporcionada por B para aprender sobre A é irrelevante, VOI = 0. Medidas simétricas não notariam a diferença entre esses dois problemas. Note que nesse exemplo simples não foi nem necessário penalizar a decisão baseada em B,

pelo fato de estar calculando um VOI ainda com incerteza residual[202] (enquanto que a decisão baseada na informação A não tem incerteza residual, é informação perfeita). Assim, esse exemplo mostrou que a simetria é indesejável como propriedade de medidas de informatividade em problemas de VOI.

Embora vários autores de livros texto (Joe, Nelsen, e de forma mais comedida em Mari & Kotz) coloquem a simetria como uma propriedade desejável de uma medida de dependência, além dessa tese, existem alguns autores que discordam. Como ressalta Liebetrau (1983, p.18-19), "*se o objetivo é usar uma variável para aumentar a previsibilidade de outra, então medidas assimétricas ... são melhores*". Ele ainda reforça essa conclusão na p. 87. Duas das medidas propostas por Goodman & Kruskal (1954) são assimétricas, propriedade desejável para eles (p.736). Uma delas, o coeficiente de concentração, foi comentada no item 3.3.1.2. Somers (1962) propôs uma medida assimétrica para associação de v.a. ordinais, destacando a "*virtude da assimetria*" (p.803), que distingue a variável "independente" da "dependente" (linguagem usada em regressão).

Lancaster (1963) também defende medidas assimétricas de dependência, mas vai mais longe. Ele destaca que o conceito de *dependência* é assimétrico por natureza (semântica)[203]. Isso significa que não só a medida de aprendizagem, mas também uma medida de *dependência*, deveria ser assimétrica como pré-requisito, contrariando várias listas de "propriedades desejadas para medidas de *dependência*". Ele mostra, dentre outros, o seguinte exemplo em que uma variável Y é *completamente* dependente duma variável X, mas não vice-versa: seja $Y = -1$ quando $X \leq ½$ e $Y = +1$ quando $X > ½$. Assim, conhecer X determina completamente Y, mas o oposto não vale. O conceito *completamente dependente* de Lancaster é similar ao conceito de *revelação total* obtido quando $\eta^2 = 1$.

Outra questão é saber se é desejável para medidas de aprendizagem o sinal (ou a direção) da dependência entre as variáveis aleatórias A e B, se positiva ou negativa (se *concordante* ou *discordante*). Por exemplo, para a teoria de portfólio, introduzir um ativo que tem correlação negativa com o resto da carteira é preferível do que um ativo de correlação positiva (com o mesmo retorno) para efeito de *diversificação*. Assim, para aplicações de portfólio é necessário

[202] Lembrar do fator gama da eq. (61), usado na Tabela 8, que penalisa o VPL e/ou o VDI, em caso de se tomar decisões baseados no valor esperado quando ainda existe incerteza residual.

[203] Exemplo: uma filha pode ser dependente financeiramente do pai, mas não o contrário.

distinguir o sinal da correlação para a correta tomada de decisão de gestão da carteira, pois o efeito da diversificação é bem diferente. Quando essa propriedade é fundamental, se busca um tipo especial de medida de dependência chamada de *medida de concordância* entre variáveis aleatórias[204]. Conforme Kruskal (1958, p.818), enquanto ρ é uma medida de concordância, η é uma *medida de conexão*.

Seria a distinção do sinal da dependência importante também para medidas de aprendizagem? Não! Para ver isso considere um exemplo estilizado simples do mercado financeiro. Sejam dois consultores infalíveis, que sempre acertam o percentual de variação da bolsa de valores para o dia seguinte (a informação que revela toda a verdade). Um investidor compra o conselho do consultor A e um outro investidor compra o conselho do consultor B. O primeiro diz que a bolsa irá subir 2 %, pois a taxa de juros caiu 0,25% e as demais notícias se anulam. O segundo consultor também diz que a bolsa irá subir 2 %, mas porque o índice de satisfação do consumidor subiu 3% e as demais notícias se anulam. Do ponto de vista do investidor, os dois conselhos são equivalentes (eles aprendem que a bolsa vai subir 2%) embora os sinais das correlações da performance da bolsa com indicadores econômicos usados pelos consultores para inferir isso sejam opostos.

Ou seja, para efeito de aprendizagem não importa o sinal de dependência e sim o quanto se pode aprender a respeito da variável de interesse X observando o sinal S. Ou seja, o que interessa é a redução de incerteza (ou quão próximo se está da verdade) e não o sinal da dependência. O caso de portfólio, onde se detém os ativos de risco A e B (*diversificação*), é uma situação bastante diferente do caso de valor da informação, onde se usa uma v.a. B para aprender e tomar decisões ótimas a respeito de outra variável A (*inferência* e *alavancagem*). No caso portfólio tem-se uma *relação aritmética* entre variáveis aleatórias, por ex., $\boldsymbol{\Pi = w_A \,.\, A + w_B \,.\, B}$, enquanto que em aprendizagem tem-se uma *relação de condicionamento* entre variáveis aleatórias, por ex., se quer conhecer sobre A, dado o conhecimento de B, obtendo-se o valor esperado E[A | B].

Apesar do estudo das medidas de relacionamento entre variáveis aleatórias expressa em distribuições conjuntas se chamar estudo de medidas de dependência, essa tese irá preferir introduzir o nome mais geral de *medida de relacionamento*

[204] Ver item anterior na discussão de correlação de ordem. Para uma definição mais rigorosa de medidas de concordância, ver Scarsini (1984) ou Cherubini et al (2004, p. 95-96).

entre variáveis aleatórias para caracterizar essa classe mais geral. Isso porque, apesar dos argumentos de Lancaster (1963), o nome medida de dependência tem sido usado para um tipo particular de relacionamento entre essas variáveis, relativo a uma referência de v.a. independentes. Ou seja, se deseja medir distância da independência ou distância entre distribuições, no sentido da distância entre uma distribuição conjunta qualquer e a distribuição conjunta que denota *independência* entre as mesmas variáveis. Nesse caso, o valor zero é atribuído *apenas* ao caso extremo de independência e o valor 1 é atribuído apenas ao caso extremo de dependência total, i.é, relação funcional. Dentro dessa visão, muitas vezes essas medidas são usadas para testes estatísticos de independência e assim se deseja que a hipótese nula (medida de dependência igual a zero) use uma medida de dependência que seja zero se e somente se as v.a. forem independentes. Ver, por ex., Tjøsthein (1996). No entanto, como ressalta Goodman & Kruskal (1954, p.740), o fato de uma medida permitir fazer um excelente teste estatístico de independência, não quer dizer que seja uma medida adequada de grau de associação entre v.a.

Para medir aprendizagem, em vez da usar como referência a independência, é em geral preferível que o valor zero seja atribuído ao caso de *nenhuma aprendizagem*, o que pode ocorrer mesmo se as variáveis não sejam independentes. O exemplo anterior (Figura 38, eqs. 125 e 126) mostrou isso claramente: o VOI pode ser zero mesmo com as v.a. não sendo independentes. Goodman & Kruskal (1954, p.742) também ressalta esse ponto, discordando que a medida de associação seja zero apenas no caso de independência. Kruskal (1958) analisou as principais medidas de associação e todas elas podem ser zero mesmo se as v.a. não forem independentes (p.856).

Revendo a literatura das áreas de finanças, economia, e de diversos ramos das teorias de probabilidade e estatística, do ponto de vista de classe de aplicação podem ser identificados pelo menos os seguintes tipos de medidas de relacionamento (ou medidas de dependência) entre variáveis aleatórias:

- Medidas de distâncias entre distribuições;
- Medidas de concordância; e
- Medidas de aprendizagem.

Por isso é muito difícil se fazer uma lista suficientemente geral de propriedades desejadas de medidas de relacionamento entre variáveis aleatórias se essas variáveis se relacionam de forma tão distintas (ex.: aritmético versus condicionamento), ou em aplicações tão distintas como testes de independência (onde a medida tem de ser simétrica, i. é, uma medida de distância entre distribuições) e problemas de predição ou de VOI (medida tem de ser em geral assimétrica, i. é, medida de condicionamento entre distribuições).

Olhando de forma *crítica* para as listas de propriedades desejadas de medidas de dependência, pode-se ter uma idéia do que seriam as propriedades desejadas para medidas de aprendizagem entre variáveis aleatórias. As listas conhecidas são fortemente influenciadas por certos tipos de aplicação. Os exemplos simples acima serão usados para mostrar que as listas encontradas na literatura sobre as propriedades desejáveis de medidas de dependência entre variáveis aleatórias (ex., simetria), são aplicáveis mais para o caso de distâncias entre distribuições e aplicações relacionadas, não para os casos de aprendizagem probabilística. Para que a lista seja geral (válida para vários tipos de aplicações) o número de propriedades desejadas listadas teria de ser o menor possível. Hoeffding (1942) propôs uma lista bem curta para que uma quantidade α sirva como medida do grau da relação entre duas variáveis aleatórias X e Y. Claramente tendo em mente as aplicações de distância entre distribuições, ele considerou apenas as três propriedades listadas a seguir:

1. α deve estar entre dois limites finitos e fixos (ex.: 0 e 1);
2. α deve ser igual ao limite inferior se e somente se X e Y são independentes.
3. α deve ser igual ao limite superior se e somente se X e Y são funcionalmente dependentes.

A primeira propriedade tem grande importância prática especialmente com $\alpha \in [0, 1]$, quando essa medida pode ser interpretada em termos percentuais. As duas outras propriedades parecem também muito atrativas, mas do jeito que estão formuladas implica que o autor imaginava uma medida simétrica para α. Independência é um conceito simétrico (X é independente de Y $\Leftrightarrow$ Y é independente de X). Já a terceira propriedade, para ser válida no contexto de medida simétrica, terá de existir tanto a função Y = f(X), quanto a função inversa

$f^{-1}(X) = X = g(Y)$, ou seja, tem de ser uma função que admita inversa (função 1-1), tal como uma função estritamente crescente (ou uma estritamente decrescente). Isso é mais uma restrição prática gerada pelo "desejo de simetria".

Hoeffding (1942) ainda fez a exigência adicional que as medidas de dependência fossem suavemente em direção dos dois limites, por ex., se o valor de α for só um pouco diferente do limite inferior isso deve implicar que a distribuição de (X, Y) deve diferir só ligeiramente do caso de independência.

Hoeffding (1942) foi modesto ao não colocar na sua lista a principal propriedade da medida de dependência que ele propôs em 1940: ser invariante em relação à mudança de escala. Em geral a invariância é uma propriedade desejável mesmo se o efeito econômico de escala for importante, desde que se use de forma consistente um fator de escala separadamente da medida invariante de dependência em problemas de valor da informação.

Agora será apresentada a lista clássica de sete axiomas de Rényi (1959) para medidas de dependência de v.a., que é similar a outras listas encontradas na literatura, como Nelsen (1999, p.170), Schweizer & Wolff (1981) e Bell (1962). Bell (1962) analisou a informação mútua (eqs. 71-74) à luz dos axiomas de Rényi. Em seguida serão apresentadas algumas alternativas desses axiomas que foram propostas por Hall (1970) e pelo interessante, embora irregular, livro-texto de Mari & Kotz (2001). Todas essas referências mencionam a lista clássica de Rényi (1959). Rényi mostra que apenas o chamado *máximo coeficiente de correlação* $\overline{\rho}$ atende os sete axiomas da sua lista. Hall (1970, p.340-341, 360, 363-364) critica a medida de dependência $\overline{\rho}$ indicando que ela só é aplicável sob certas condições de regularidade e mostra exemplos em que ela não pode ser calculada, além de outros exemplos em que ela é igual a 1 com muita facilidade, inclusive quando X e S são *condicionalmente* independentes[205].

Lista de axiomas de Rényi (1959) e alternativas para uma medida de dependência entre as v.a. X e S, denotada por m(X, S):

A) m(X, S) é definida para qualquer par de v.a. não triviais (i. é, com variâncias estritamente positivas);

B) m(X, S) = m(S, X);

---

[205] X e S são *condicionalmente* independentes dado Z, se Pr(X | S, Z) = Pr(X | Z). Ou seja, caso se conheça Z, então S não provê informação adicional para X (pois S se torna irrelevante).

C) $m(X, S) \in [0, 1]$;

D) $m(X, S) = 0 \Leftrightarrow$ X e S são independentes;

E) $m(X, S) = 1 \Rightarrow$ existe uma dependência estrita entre X e S, i. é, ou X = f(S) ou S = f(X), onde f(.) e g(.) são funções reais (Borel) mensuráveis;

F) Se as funções do axioma anterior são 1-1 (admitem inversas) $\Rightarrow$ a medida é invariante, i. é, $m(X, S) = m(f(S), g(X))$; e

G) Se a distribuição conjunta de X e S for bivariada normal $\Rightarrow$ $m(X, S) = |\rho(X, S)|$.

Conforme apontado por Rényi (1959, p.444) é bem conhecido o fato de que η^2 atende o axioma G. Mas ele aponta também que η^2 não atende os axiomas A (por causa dos casos de variância infinita); B (η^2 é assimétrica); D (só vale a volta para η^2, i. é, X e S são independentes $\Rightarrow \eta^2(X \mid S) = 0$ e $\eta^2(S \mid X) = 0$; e F (mas será visto que η^2 é invariante num sentido mais interessante, inclusive no caso mais geral de função que não é 1-1). A medida η^2 atende aos axiomas C, E e G.

As alterações dessa lista em Nelsen (1999, p.170) e em Schweizer & Wolff (1981), por defenderem medidas baseadas em cópulas, restringem para v.a. contínuas. No contexto dessa tese, essa é uma restrição inaceitável.

Já o livro de Mari & Kotz (2001, p.150-151) apresenta sua lista de axiomas para medidas de dependência, que parece bem mais razoável que a de Rényi. Eles não mencionam o axioma A; no axioma B eles indicam a como desejável a propriedade de simetria, mas apenas para variáveis intercambiáveis (ver item 3.4 para a definição e discussão); concordam com a normalização do axioma C; relaxam o axioma D ao dizer que, em caso de independência $\Rightarrow$ medida deve ser zero (e não $\Leftrightarrow$, como em Rényi); concordam com o axioma E; relaxam o axioma F ao desejar invariância apenas em relação a transformações lineares (e não para funções 1-1 em geral); e não consideram o axioma G. Ou seja, as modificações de Mari & Kotz melhoram a classificação de η^2 como medida de dependência.

Além disso, Mari & Kotz acrescentam os axiomas: H) medida tem de ter a propriedade de aumentar com o aumento da dependência; I) relação com v.a. ordinais (se a medida é definida tanto para v.a. contínuas como ordinais, as medidas devem ter uma forte relação entre si); e J) as medidas devem ser interpretáveis, i. é, o valor numérico da medida deve ter um significado qualitativo. Claramente medidas baseadas em cópulas não possuem as

propriedades dos axiomas "extras" I e J de Mari & Kotz, enquanto que a medida η^2 atende aos mesmos, assim como ao axioma H.

Hall (1970) propôs algumas modificações nos axiomas de Rényi, a maioria mais favorável para η^2. No axioma A, no entanto, ele é mais rigoroso que Rényi propondo que seja válido também para X e S determinísticos (a tese não concorda, pois não teria interesse prático uma medida de dependência probabilística num caso determinístico). No axioma E, Hall propõe uma versão mais forte, a medida é 1 se X = f(S), enquanto que em Rényi pode ser também S = g(X). Será visto que η^2 atende a uma condição mais forte que em Hall e Rényi (vale o "se e somente se"). No caso do axioma F, Hall propõe uma condição em parte mais forte do que a de Rényi. Esse axioma alternativo é atendido por η^2 e corresponde aos itens (f) e (g) da Proposição 6 abaixo. Hall também substitui o axioma G de Rényi por um outro axioma que também faz (mas de forma bem indireta) uma relação com o coeficiente de correlação. Assim como o axioma original, esse axioma alternativo também é atendido por η^2. Ele corresponde ao item (h) da Proposição 6 abaixo.

A Proposição 6 a seguir terá os seus itens seguindo a seqüência (e as letras, mas minúsculas) dos axiomas de Rényi, para facilitar a comparação, exceto o axioma F, aqui dividido nos itens (f) e (g); e o axioma G, que corresponde ao (h).

Proposição 6: Sejam duas variáveis aleatórias não triviais[206] X e S com médias e variâncias finitas, definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Seja a medida de aprendizagem $\eta^2(X \mid S)$ definida pela equação (106). Então, essa medida de aprendizagem tem seguintes propriedades:

(a) A medida $\eta^2(X \mid S)$ existe sempre que a variância de X for estritamente positiva (i. é, o problema for não-trivial) e finita;

(b) A medida η^2 é em geral assimétrica, i. é, $\eta^2(X \mid S) \neq \eta^2(S \mid X)$

(c) A medida η^2 é normalizada no intervalo unitário, ou seja[207],

$$\mathbf{0 \leq \eta^2 \leq 1} \qquad \textbf{(127)}$$

(d) Se X e S são v.a. independentes, então a medida η^2 é zero:

$$\textbf{X e S independentes } \Rightarrow \eta^2(X \mid S) = \eta^2(S \mid X) = 0 \qquad \textbf{(128)}$$

---

[206] Por "v.a. não-triviais", se assume que as variâncias são estritamente positivas. O caso trivial só interessa na análise de limites de processos. Assim, quando se refere a v.a. em geral elas são não-triviais. Como sempre, a proposição é válida com probabilidade 1 (i. é, quase certamente).

[207] Poderia se acrescentar que η^2 é *realmente* uma medida, pois $\eta^2 \geq 0$.

Além disso, η^2 é zero se e somente se a variância da distribuição de revelações for zero também:

$$\eta^2(X \mid S) = 0 \Leftrightarrow Var[R_X(S)] = 0 \quad (129)$$

(e) Se $\eta^2(X \mid S) = 1 \Leftrightarrow$ existe uma função real, a v.a. g(S), em que X = g(S);

(f) A medida $\eta^2(X \mid S)$ é invariante sob transformações lineares de X, i. é, para quaisquer números reais a e b, com $a \neq 0$, tem-se:

$$\eta^2(a\,X + b \mid S) = \eta^2(X \mid S) \quad (130)$$

(g) A medida $\eta^2(X \mid S)$ é invariante sob transformações lineares e não-lineares de S se a transformação g(S) for uma função 1-1 (injetiva ou com função inversa). Em geral, se g(S) é uma função mensurável pela sigma-álgebra gerada por S, então vale a desigualdade:

$$\eta^2(X \mid g(S)) \leq \eta^2(X \mid S)\text{, com igualdade se g(s) for uma função 1-1} \quad (131)$$

(h) Se as v.a. $Z_1, Z_2, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas (iid) e se $S = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j$ e $X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{j+k}$ para quaisquer inteiros não-negativos j e k, com $j + k > 0$, a medida $\eta^2(X \mid S)$ proposta é dada diretamente por:

$$\eta^2(X \mid S) = \frac{j}{j + k} \quad (132)$$

Prova:

(a) Essa propriedade é trivial, considerando a premissa de Var[X] > 0 mas finita e a premissa de Var[S] finita. □

(b) A medida η^2 é *em geral* assimétrica se pelo menos um exemplo mostrar assimetria. Isso foi mostrado em um exemplo nesse sub-item (Figura 38). □

(c) As eqs. (106) e (107) mostram isso: pela eq. (107) η^2 é uma razão de variâncias e assim não pode ser menor que zero devido a definição de variância. A eq. (106) mostra que o valor máximo é igual a 1, pois η^2 é maximizado minimizando E[Var[X | S]], cujo mínimo ocorre para Var[X | S] = 0 para todo $s \in S$, i. é, para $E[Var[X \mid S]] = 0 \Rightarrow \eta^2(X \mid S) = 1$. □

(d) Se X e S são v.a. independentes, então E[X | S] = E[X] e E[S | X] = E[S] (Lema 2(d), eq. (86), propriedade elementar da independência, ver, por ex.,

Williams, 1991, p.88)[208]. Além disso, a variância duma variável Y qualquer é *definida* por $Var[Y] = E[(Y - E[Y])^2]$. Logo, as variâncias das distribuições de revelações $R_X(S)$ e $R_S(X)$ são ambas iguais a zero, pois:

$$Var[R_X(S)] = E[(E[X \mid S] - E[E[X \mid S]])^2] = E[(E[X \mid S] - E[X])^2] = 0$$

$$Var[R_S(X)] = E[(E[S \mid X] - E[E[S \mid X]])^2] = E[(E[S \mid X] - E[S])^2] = 0$$

Onde foram usados o item (b) do Teorema 1 e a propriedade elementar da independência mencionada acima. Se as variâncias das distribuições de revelações são iguais a zero, então também o serão as medidas $\eta^2(X \mid S)$ e $\eta^2(S \mid X)$, pois essas medidas de aprendizagem são variâncias normalizadas das distribuições de revelações (ver eq. 107). Assim fica provado a eq. (128) e a volta ($\Leftarrow$) da eq. (129). Para provar a ida ($\Rightarrow$) da eq. (129), note na eq. (107) que $\eta^2(X \mid S) = 0 \Rightarrow Var[R_X(S)] = \eta^2(X \mid S)\, Var[X] = 0$ se $Var[X] > 0$. □

(e) Se $\eta^2(X|S) = 1$, a eq.(106) $\Rightarrow E[Var[X|S]] = 0 \Rightarrow E[(X - E[X|S])^2] = 0$ e assim com probabilidade 1 $\Rightarrow X = E[X \mid S] \Rightarrow$ X é mensurável pela sigma-álgebra de S e portanto pode ser escrito X = g(S).

Em Hall (1970, p.342), usa-se o axioma que se uma medida de dependência é igual a 1 $\Rightarrow$ X = g(S), mas sem a volta ($\Leftarrow$). Em Hall, a volta X = g(S) $\Rightarrow$ medida de dependência igual a 1, não é considerada necessária. A explicação é que nesses estudos mais teóricos se quer incluir o caso de variância de X igual a infinito (o que não é o caso dessa tese). Aqui, assumindo que Var[X] é finito, então vale a volta para a medida η^2. A prova da volta ($\Leftarrow$) é ainda mais simples: se S é revelado então, pela definição de função, X = f(S) é *unicamente* determinado. Assim $E[Var[X \mid S]] = 0$ e logo $\eta^2(X \mid S) = 1$ pela eq. (106). Conforme Hall (1970, p.342), no caso de variância <u>infinita</u> de X, quando o conhecimento de S *reduz a variância de infinito para um valor finito*, isso poderia ser considerado um *completo* estado de dependência de maneira análoga ao caso de variância de X finita, em que S reduz a variância de X de um valor finito para um valor igual a zero. Nas aplicações da tese em que Var[X] é sempre finito, escrever a propriedade mais forte ($\Leftrightarrow$) é muito mais conveniente. □

(f) A prova é simples. Aplicando a eq. (106) para a variável Y = aX + b:

---

[208] Mas se $E[X \mid S] = E[X]$ e $E[S \mid X] = E[S]$ <u>não</u> implica que X e S são independentes (embora sejam na grande maioria dos casos). Por ex., se X e Y tem distribuição uniforme sobre um círculo centrado na origem, claramente são dependentes, mas $E[X \mid Y] = E[X]$ e $E[Y \mid X] = E[Y]$.

$$\eta^2(a\,X + b \mid S) = \frac{\mathrm{Var}[a\,X + b] \;-\; \mathrm{E}[\mathrm{Var}[a\,X + b \mid S]}{\mathrm{Var}[a\,X + b]} \Rightarrow$$

$$\eta^2(a\,X + b \mid S) = \frac{a^2\;\mathrm{Var}[X] \;-\; a^2\;\mathrm{E}[\mathrm{Var}[X \mid S]]}{a^2\;\mathrm{Var}[X]}$$

Como $a \neq 0$, pode-se simplificar (cortar a^2) e obter $\eta^2(X \mid S)$. □

(g) O caso de igualdade se a função $Y = g(S)$ for 1-1 é porque a inversa $S = g^{-1}(S)$ existe, ou seja, g^{-1} é uma *função* que por definição determina S de forma única se for conhecido $Y = g(S)$. Assim, conhecer g(S) equivale a conhecer S.

Se g(S) não fosse 1-1, o conhecimento de g(S) seria menor do que o conhecimento de S, por ex., se $Y = S^2$ então o valor $Y = 1$ poderia ser tanto devido a $S = 1$ como a $S = -1$. Por isso, a intuição diz que $\eta^2(X \mid g(S))$ deve ser menor que $\eta^2(X \mid S)$. Para provar formalmente essa desigualdade, considere a eq. (117) do Lema 4, onde $\eta^2(X \mid S)$ é o supremo de $\rho^2(X, f(S))$ para *qualquer* função real f(S). Isso implica que $\eta^2(X \mid S) \geq \rho^2(X, f(S))$ para *qualquer* função real f(S). Se essa função é qualquer, então isso inclui a função $f(S) = \mathrm{E}[X \mid g(S)]$. Logo:

$$\eta^2(X \mid S) \geq \rho^2(X, \mathrm{E}[X \mid g(S)])$$

Mas o Lema 4(c), eq. (119), diz que $\eta^2(X \mid Y) = \rho^2(X, \mathrm{E}[X \mid Y])$. Fazendo $Y = g(S)$ obtém-se $\eta^2(X \mid g(S)) = \rho^2(X, \mathrm{E}[X \mid g(S)])$. Substituindo na desigualdade anterior, vem:

$$\eta^2(X \mid S) \geq \eta^2(X, g(S)) \qquad \square$$

Essa propriedade vale também para o caso de X e S serem v.a. complexas, conforme mostrou Hall (1970, p.353-354 e 349), numa demonstração similar[209].

(h) Essa propriedade foi sugerida por Hall (1970) como um dos axiomas que uma medida de dependência deveria ter para se relacionar com o coeficiente de correlação, indicando que a razão de correlação η^2 atende esse axioma[210], mas sem apresentar a prova. Assim, é conveniente apresentar uma demonstração, a qual é bem simples se usar a eq. (107), i. é, η^2 como a variância normalizada da distribuição de revelações. Como Z_1, Z_2, … tem as mesmas distribuições, suas médias e variâncias são iguais e conhecidas com a informação corrente, ou seja:

---

[209] Existe uma propriedade para v.a. complexas que é parecida com a mostrada no Lema 4.

[210] Na verdade tem uma pequena imprecisão em Hall (1970) que menciona que η (e não η^2) atende a esse axioma. Como é mostrado aqui, η^2 é que atende ao seu axioma. O curioso é que Kruskal (1958, p.818) comete a mesma imprecisão para ρ (o correto é que a eq. 132 vale para ρ^2).

$E[Z_1] = E[Z_2] = \ldots = E[Z]$

$Var[Z_1] = Var[Z_2] = \ldots = Var[Z]$

Como as v.a. Z_i são independentes, a variância da soma é igual à soma das variâncias. Assim, a variância de X (soma de j + k v.a. Z_i) é:

$$\mathbf{Var[X]} = Var[Z_1] + Var[Z_2] + \ldots + Var[Z_{j+k}] = \mathbf{(j + k)\ Var[Z]} \qquad \mathbf{(133)}$$

Além disso, o Lema 2(a) (eq. 82) permite decompor E[X | S] como:

$$E[X \mid S] = E[Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j \mid S] + E[Z_{j+1} + \ldots + Z_{j+k} \mid S]$$

Como as v.a. $Z_{j+1}, \ldots Z_{j+k}$ são independentes das v.a. $Z_{i<j+1}$, então pelo Lema 2(d) (eq. 86), pode-se escrever:

$$E[X \mid S] = E[Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j \mid S] + E[Z_{j+1} + \ldots + Z_{j+k}]$$

Além disso, $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j$ é S-mensurável (pois $S = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j$) e assim pelo Lema 2(b) (eq. 83), pode-se tirar para fora do operador E[. | S], i. é:

$$\mathbf{E[X \mid S] = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j + k\ E[Z]} \qquad \mathbf{(134)}$$

Logo, a variância da distribuição de revelações é dada por:

$$Var[E[X \mid S]] = Var[Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_j] + k^2\ Var[E[Z]]$$

Mas como as v.a. Z_i são independentes e E[Z] é uma constante (variância igual a zero), pode-se escrever a variância da distribuição de revelações como:

$$\mathbf{Var[E[X \mid S]] = j\ Var[Z]} \qquad \mathbf{(135)}$$

Dividindo a eq. (135) pela eq.(133) se obtém a medida de aprendizagem η^2:

$$\eta^2(X \mid S) = \frac{j\ Var[Z]}{(j+k)\ Var[Z]} = \frac{j}{j+k} \qquad \square$$

Agora serão apresentados os axiomas ou propriedades desejáveis em uma medida de aprendizagem probabilística. Elas são adequadas em especial para problemas de análise econômica, mas possivelmente não apenas (medicina?).

Axiomas para Medidas de Aprendizagem Probabilística: As seguintes propriedades são desejáveis para uma medida de aprendizagem M(X | S):

A) M(X | S) existe pelo menos para todas as v.a. X e S com incerteza não-trivial (estritamente positiva) e todas as v.a. com incerteza finita;

B) M(X | S) deve em geral ser assimétrica para poder medir os casos em que se aprende mais sobre X conhecendo S, do que se aprende sobre S conhecendo X, e vice versa;

C) M(X | S) deve ser normalizada no intervalo unitário para facilitar a interpretação, i. é,

$$\mathbf{0 \leq M(X \mid S) \leq 1} \qquad \mathbf{(136)}$$

D) Se X e S forem <u>independentes</u> $\Rightarrow$ M(X | S) = M(S | X) = 0, pois não há aprendizagem probabilística. Além disso,

$$\mathbf{M(X \mid S) = 0 \Rightarrow \underline{\text{não haver aprendizagem}}} \qquad \mathbf{(137)}$$

Onde não aprender pode ocorrer não apenas por casos de independência. O conceito *aprender* é definido na medida, mas o seu sentido tem de ser <u>invariável</u> (ex.: medida de incerteza igual a zero para todas as aplicações);

E) Em caso de <u>dependência funcional</u> a medida é máxima, i. é, para toda função real f(.):

$$\mathbf{X = f(S) \Rightarrow M(X \mid S) = 1} \qquad \mathbf{(138)}$$

Além disso, se a medida é máxima, M(X | S) = 1, então:

$$\mathbf{M(X \mid S) = 1 \Rightarrow \underline{\text{aprendizagem é máxima}}} \qquad \mathbf{(139)}$$

Onde aprendizagem máxima significa não ser possível aprender mais sobre X e *aprender* é definido na medida, desde que o seu sentido seja <u>invariável</u>;

F) M(X | S) deve ser invariante a transformações lineares (mudança de escala) da v.a. X ou da v.a. S, i. é, para a e b constantes reais, $a \neq 0$:

$$\mathbf{M(a\,X + b \mid S) = M(X \mid S)} \qquad \mathbf{(140)}$$

$$\mathbf{M(X \mid S) = M(X \mid a\,S + b)} \qquad \mathbf{(141)}$$

G) M(X | S) deve ser <u>prática</u> no sentido de ser de *fácil interpretação* (intuitivo) e *fácil de ser quantificada e estimada*.

H) M(X | S) deve ser <u>aditiva</u> no sentido de, caso a informação S possa ser decomposta numa soma de n fatores <u>independentes</u> $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, de forma que o conhecimento de todos esses fatores proporcione uma <u>aprendizagem máxima</u> (aprender definida na medida, mas invariável), então a soma das medidas de aprendizagem deve ser unitária, i. é:

$$\mathbf{M(X \mid S_1) + M(X \mid S_2) + \ldots + M(X \mid S_n) = 1} \qquad \mathbf{(142)}$$

<u>Teorema 2</u> (<u>Medida de Aprendizagem η^2</u>): A medida η^2 atende a todos os axiomas de medidas de aprendizagem acima.

<u>Prova</u>: Note que η^2 tem a variância como medida de incerteza. Assim, *aprender* significa que é esperada uma redução de incerteza medida pela variância. *Aprendizagem máxima* significa reduzir para zero a variância posterior (revelação total) e *não aprender* é não se esperar uma redução de variância. A Proposição 6 prova todos os itens do Teorema 2, sendo que em alguns casos a

medida η^2 atende condições até mais fortes do que os axiomas acima. Os axiomas A, B e C são provados pela Proposição 6 (a), (b) e (c). O Axioma D é provado pela Proposição 6 (d) e pelo fato da eq. (129) implicar em E[Var[X | S]] = Var[X], logo provando a eq. (137) pela definição de "não aprender" dessa medida. O Axioma E é provado pela Proposição 6 (e) e pela definição de "aprendizagem máxima", que implica em E[Var[X | S]] = 0, que implica em $\eta^2(X \mid S) = 1$. O Axioma F é provado pela Proposição 6 (f) e (g), sendo que η^2 atende condições mais restritas: g(S) pode ser uma função 1-1 qualquer (não apenas linear). O Axioma G é o mais subjetivo, mas a medida η^2 atende amplamente no sentido que tem uma interpretação intuitiva de redução de incerteza, e será visto no item 3.3.4 que ele é facilmente estimado com métodos estatísticos populares tais como a regressão e ANOVA. O Axioma H será provado numa versão mais forte (mais geral) no Teorema 3 (ver item 3.3.3 a seguir), em que não apenas a soma de sinais independentes, mas a soma de *qualquer função* (não necessariamente 1-1) real de variáveis independentes, tem a propriedade de aditividade igual a 1 em caso de aprendizagem máxima. □

3.3.3. Outras Aplicações de η^2 e Decomposição do Aprendizado

A medida de aprendizagem η^2 será usada como elemento da *estrutura de informação* nas aplicações de opções reais híbridas ainda nesse capítulo e também no capítulo 5. Nessas aplicações sempre haverá a presença de $\eta^2(X \mid S)$ e da distribuição a priori da variável de interesse X, já que a variância da distribuição de revelações é o produto de η^2 pela variância a priori. A presença constante e particularmente importante da *distribuição a priori*, sugere caracterizar o método como sendo de *opções reais Bayesianas*. Mas os elementos adicionais da modelagem da incerteza técnica dependerão do problema. Em alguns casos, não será necessário conhecer a distribuição ou os momentos do sinal S, mas assumir que as distribuições são do mesmo tipo da distribuição limite (ver parte de baixo da Figura 34 e discussão). Já nos problemas com v.a. discretas como o fator de chance (Bernoulli), isso não é assumido, mas se conhece a distribuição do sinal S (outra v.a. de Bernoulli) e mais uma premissa, por ex., que as v.a. X e S são intercambiáveis, de forma a definir totalmente o problema.

Mas nesse item serão citadas algumas aplicações fora do contexto de opções reais para a medida de aprendizagem η^2, assim como será apresentado um teorema de decomposição do aprendizagem que usa a medida proposta na tese. Isso servirá para reforçar o caráter prático e intuitivo da medida.

A Tabela 9 mostra os principais nomes da medida de aprendizagem η^2 encontrados em diversas literaturas, assim como o seu uso.

Tabela 9 – Nomes e Usos da Medida de Aprendizagem Proposta

Nome de η^2	Principal Uso	Principal Literatura
Redução esperada percentual de variância	Decisão econômica: VOI, OR	Econômica (essa tese)
Razão de correlação	Predição, teste de hipótese	Estatística
Eta-squared	Associação, poder estatístico de explicação de fator ou modelo	Ciências sociais e comportamentais

O que Tabela 9 resume é que em alguns contextos η^2 é usada para predição (regressão) ou teste de hipótese de linearidade (ANOVA). Na literatura de ciências comportamentais (principalmente psicologia) e sociais, ela é denominada "eta-squared" (o nome "correlation ratio" não é usado) e serve como indicador de medida de associação para mostrar os fatores mais importantes para explicar um comportamento ou um indicador social. É usado também para verificar o poder explicativo de um modelo (exs.: uma regressão simples ou múltipla). No caso dessa tese, ela é usada como indicador de poder de revelação de um sinal em problemas de decisão econômica de VOI. Mas as aplicações de η^2 são mais amplas do que a Tabela 9 sugere, conforme será visto a seguir.

É interessante observar que essa métrica (η^2) é aplicada de forma intuitiva na literatura econômica sem mencionar nenhum dos nomes conhecidos, o que mostra o seu apelo prático e intuitivo. Por ex., no contexto econômico da teoria dos jogos, Medin & Rodriguez & Rodriguez (2003, p.195-196) analisam um duopólio de Cournot com informação incompleta a respeito da demanda, em que se estuda a atratividade dos duopolistas trocarem informações privadas sobre a demanda. Eles usam um "índice G" para medir a fração da variância do erro de previsão da demanda que pode ser eliminada através da informação que o seu competidor pode fornecer. Esse índice G nada mais é do que o η^2, mas os autores não mencionaram nenhum dos nomes mais conhecidos desse índice, que foi visto apenas como uma medida *natural* para "*mostrar quando as firmas poderiam ter*

incentivos para compartilhar suas informações". Esse tipo de aplicação, modelagem do valor da informação para decisões estratégicas no contexto da teoria dos jogos, será desenvolvida no cap. 5 dessa tese, usando as equações proposições e teoremas desse cap. 3, proporcionando uma abordagem mais detalhada sobre o VOI do que geralmente se vê na literatura de jogos.

A idéia intuitiva de redução de variância encontra aplicações em ciências do gerenciamento, especialmente na área de gerenciamento da qualidade de produtos, serviços e processos. Em 1951, Deming provocou uma revolução nessa área ao introduzir métodos para melhorar a qualidade do produto através justamente da redução da variância do processo. Os métodos de Deming têm sido usados amplamente pelas indústrias e assim parece interessante usar a medida η^2 para planejamento ou para analisar investimentos na melhoria da qualidade.

A medida η^2 tem sido usada nas mais diferentes áreas de conhecimento. O mais antigo uso é na estatística (onde nasceu), por ex., para testar a linearidade dos dados num modelo de regressão, pois se a diferença entre η^2 e ρ^2 for significativa em termos estatísticos, se rejeitaria a hipótese nula da linearidade (ver Lema 4 (a) e (b), para entender o motivo). A discussão e as referências dessa visão estatística serão analisadas no próximo sub-item (3.3.4).

Na área biomédica, tem sido recentemente usada na análise de imagens 3D de ultra-som, que são ferramentas de cirurgias assistidas por computador, ver Pennec et al (2005). Nessa aplicação, se busca uma transformação espacial T, sendo dada a imagem J, chamada de imagem gabarito ("template image", que corresponde ao sinal S), através da imagem transformada J o T que deve ser a mais similar possível da imagem "verdadeira" I. A medida η^2 serve para quantificar a similaridade de imagens, explorando suas características intuitivas e também pelo fato de ser válido no mundo não-linear e ser não-paramétrica. Aplicações biomédicas similares usando η^2 pode ser vista em Roche et al (2001).

Além disso, já foram mencionadas (e serão dadas mais referências dessas literaturas no item 3.3.4) que η^2 tem sido muito usado como medida de associação em psicologia e sociologia, assim como tem sido usado recentemente em física computacional no ramo denominado análise de sensibilidade global (item 3.1.4.4).

Existe potencial para outras aplicações, que aparentemente ainda não foi usada. Por ex., η^2 poderia ser usada como indicador de *causação*, se valendo da

assimetria para ver qual variável é mais provável causar a outra. Mas devem-se ter alguns cuidados. Embora seja clara a ligação entre correlação e causação, a primeira não implica na segunda, embora possa aumentar as chances de haver alguma causação. Por ex., lama e chuva tem uma forte correlação, mas lama não causa chuva e sim a chuva é que causa a lama. No entanto, a freqüência em que ocorrem juntas (lama e chuva) sugere que existe uma boa chance de haver alguma causação entre essas variáveis. Mas a inferência em estudos de causação deve ter alguns cuidados. Como aponta Pearl (2000, p. 342), "*correlações podem ser estimadas diretamente em um estudo simples sem controle, enquanto que conclusões sobre causação requerem experimentos controlados*". Embora η^2 não possa provar uma direção causal, ela pode medir o nível de causação *dada uma premissa* do analista de existir uma certa direção causal.

A seguir será apresentada uma propriedade surpreendente e prática quando a variável de interesse pode ser escrita como uma soma de funções reais de n variáveis aleatórias independentes. Se essas n variáveis explicam totalmente a variável de interesse X, então a aprendizagem pode ser decomposta como a soma das medidas $\eta^2(X \mid S_i)$, i = 1, 2, … n, soma essa que será sempre igual a 1. Essa propriedade será válida para a medida η^2, mas não para medidas concorrentes tais como medidas de cópulas, correlação, informação mútua, etc. A surpresa é que, após uma pesquisa exaustiva na literatura de probabilidade e estatística, essa propriedade não foi reportada anteriormente[211].

O conceito chave a ser usado aqui é a *independência*. Seguindo Breiman (1969, cap. 4), independência de variáveis aleatórias é uma condição forte e tem a propriedade de *família* ou propriedade *hereditária*. Isso é ilustrado com o seguinte resultado conhecido (ver, por ex., Breiman, 1969, p.91), o qual será usado para demonstrar o teorema da decomposição do aprendizado para sinais independentes.

Lema 5 (<u>independência é uma família</u>): Sejam os sinais $S_1, S_2, \ldots, S_n$, variáveis aleatórias *independentes*. Então:

(a) Qualquer grupo menor dessas variáveis também é independente;

[211] Apesar do título, o livro de Vind (2002) não trata desse tipo de assunto e sim de uma visão teórica da incerteza usando topologia – espaços de funções com relações de pré-ordem, onde as medidas de probabilidades são substituídas por um conceito de incerteza na forma de conjuntos convexos.

(b) Para *quaisquer funções* reais f, g, … , h, as variáveis $f(S_1)$, $g(S_2)$, . . . , $h(S_n)$, são independentes; e

(c) Funções de grupos *disjuntos* dessas variáveis são independentes (ex., $f(S_1)$ e $g(S_2, S_3)$ são independentes).

O teorema da decomposição do aprendizado para sinais independentes é apresentado a seguir. Ele mostra diretamente a participação de cada variável no processo de revelação total da variável de interesse X, desde que seja usada como medida de aprendizagem a redução esperada de variância η^2. Será visto com um exemplo simples que outras métricas não exibem essa propriedade.

Teorema 3 (Decomposição do Aprendizado): Sejam os sinais S_1, S_2, … , S_n, variáveis aleatórias *independentes*. Seja X a v.a. de interesse para a aprendizagem, com Var[X] > 0 (não-trivial) e finita[212], assim como todas as variâncias dos sinais. Seja X igual a uma soma de funções desses sinais, isto é:

$$\mathbf{X = f(S_1) + g(S_2) + \ldots + h(S_n)} \qquad \mathbf{(143)}$$

Onde f, g, . . . , h, são *quaisquer* funções reais de v.a., constituindo novas v.a. com variâncias finitas. Então:

$$\mathbf{\eta^2(X \mid S_1, \ldots, S_n) = \eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) + \ldots + \eta^2(X \mid S_n) = 1} \qquad \mathbf{(144)}$$

Prova: Por definição, $\eta^2(X \mid S_i) = Var[E(X \mid S_i)] / Var[X]$, i = 1, 2, … n. Então, a soma dos $\eta^2(X \mid S_i)$ da eq. (144) pode ser escrita como:

$$\mathbf{\eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) + \ldots + \eta^2(X \mid S_n) =}$$

$$\frac{Var[\,E(X \mid S_1)]}{Var[X]} + \frac{Var[\,E(X \mid S_2)]}{Var[X]} + \ldots + \frac{Var[\,E(X \mid S_n)]}{Var[X]} =$$

$$\frac{Var[\,E[f(S_1) + g(S_2) + \ldots + h(S_n) \mid S_1]] + \ldots + Var[\,E[f(S_1) + g(S_2) + \ldots + h(S_n) \mid S_n]]}{Var[f(S_1) + g(S_2) + \ldots + h(S_n)]}$$

Mas $E[f(S_i) \mid S_i] = f(S_i)$. Além disso, devido à independência entre S_i e S_j, tem-se $E[f(S_i) \mid S_j] = E[f(S_i)]$ e $Var[f(S_i) + g(S_j)] = Var[f(S_i)] + Var[g(S_j)]$, pois funções de v.a. independentes também são independentes (Lema 5). Logo, a expressão anterior pode ser escrita como:

---

[212] Com a premissa razoável de que a variância da distribuição a priori Var[X] é finita, a variância da distribuição de revelação é também finita e limitada por Var[X], mesmo se $n \to \infty$. Logo, não é necessário trabalhar com variância infinita no limite $n \to \infty$. Isso contrasta com o movimento geométrico Browniano, cuja variância é ilimitada: ela tende a infinito quando $t \to \infty$.

$$\frac{\mathrm{Var}[\, f(S_1) + \mathrm{E}[g(S_2)] + \ldots + \mathrm{E}[h(S_n)]] \; + \ldots + \; \mathrm{Var}[\, h(S_n) + \; \mathrm{E}[f(S_1)] + \; \mathrm{E}[g(S_2)] + \ldots + \; \mathrm{E}[k(S_{n-1})]]}{\mathrm{Var}[f(S_1)] \; + \; \mathrm{Var}[g(S_2)] \; + \; \ldots \; + \; \mathrm{Var}[h(S_n)]}$$

Entretanto, embora a função $f(S_i)$ seja uma variável aleatória, o seu valor esperado é conhecido (e finito) no momento inicial. Logo o valor esperado *não-condicional* $\mathrm{E}[f(S_i)]$ não é uma variável aleatória, é um número conhecido (i. é, ele é S_i-mensurável). Logo, $\mathrm{Var}[\mathrm{E}[f(S_i)]] = 0$. Com isso, vários termos da equação anterior desaparecem:

$$\eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) + \ldots + \eta^2(X \mid S_n) \; =$$

$$\frac{\mathrm{Var}[\, f(S_1)] + \mathrm{Var}[\, g(S_2)] + \ldots \; + \mathrm{Var}[\, h(S_n)]}{\mathrm{Var}[f(S_1)] + \mathrm{Var}[g(S_2)] + \ldots + \mathrm{Var}[h(S_n)]}$$

$$\Rightarrow \quad \eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) + \ldots + \eta^2(X \mid S_n) \quad = \mathbf{1} \qquad \square$$

Essa propriedade dá uma interpretação intuitiva em termos de decomposição do aprendizado, mostrando a importância relativa de cada variável no processo de aprendizagem. Uma aplicação prática imediata é a indicação de vantagens de algumas alternativas de investimento em informação sobre outras, por reduzirem a incerteza em variáveis mais importantes na decomposição do aprendizado.

A demonstração acima serve também para complementar a prova do Teorema 2 em relação ao último axioma para medidas de aprendizagem (ver eq. 142). Note que a eq. (144) é bem mais forte que o exigido pelo axioma. No axioma H (aditividade da medida de aprendizagem), se requer a aditividade igual a 1 apenas se X for a soma de sinais independentes. Isso é um caso particular do Teorema 3, já que para η^2 vale para a soma de funções de sinais e não apenas quando $f(S_i) = S_i$. Essas funções não precisam nem mesmo ser 1-1 (ter inversas). O Teorema 3 pode ter outras conseqüências particulares em outros contextos, como a decomposição da variância em modelos teóricos "exatos" (sem erro residual) de ANOVA para v.a. independentes. No entanto, a literatura de ANOVA não especifica nada similar (talvez por ter predominantemente a visão "amostra" e não a de "população", ver item 3.3.4).

Comentário: Métodos que usam probabilidades inversas $p(s \mid x)$, como os de verossimilhança, não podem ter propriedades similares às da eq. (144), já que nem todas as funções admitem a inversa (a menos que se restrinja a funções 1-1).

Corolário do Teorema 3: O Teorema 3 vale também para o caso de X ser a soma de funções de grupos disjuntos dessas variáveis independentes. Um exemplo seria: $X = f(S_1, S_2) + g(S_3) + h(S_4, S_5, S_6)$.

Prova: similar ao do Teorema 3, mas usando também o item (c) do Lema 5.

A seguir, é mostrado um exemplo simples que ilustra o Teorema 3 e mostra que outras medidas/métricas de dependência não exibem essa propriedade. Considere um campo de petróleo já descoberto, mas com incerteza no verdadeiro volume de reserva, conforme a esquemática Figura 39 abaixo.

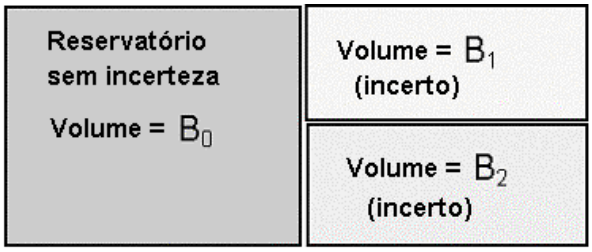

Figura 39 - Exemplo do Teorema da Decomposição do Aprendizado

Denote B o número de barris (ou volume) dessa reserva, onde B é uma v.a.. Nesse campo existe um reservatório com B_0 milhões de barris de reservas provadas, sem incerteza, e dois reservatórios independentes (diferentes idades geológicas) com incertezas, tendo reservas B_1 e B_2 se esses reservatórios estiverem preenchidos com petróleo e zero caso contrário. Embora não existam dúvidas do tamanho dos reservatórios, existem dúvidas se eles estão preenchidos com água ou com óleo. O primeiro reservatório tem probabilidades q de ter petróleo e (1 – q) de ter água, enquanto que o segundo reservatório tem probabilidades p e (1 – p) para petróleo e água, respectivamente. Perfurando um poço em cada área com incerteza se pode revelar toda a verdade a respeito da variável de interesse B. Ou seja, o volume total da reserva B é uma função de apenas duas variáveis aleatórias independentes S_1 e S_2:

$$\mathbf{B(S_1, S_2) = B_0 + (B_1 \times S_1) + (B_2 \times S_2)} \qquad \mathbf{(145)}$$

Onde os sinais S_i são v.a. independentes[213] de Bernoulli de parâmetros q e p, i.é, $S_1 \sim Be(q)$ e $S_2 \sim Be(p)$. Aqui se está interessado em $\eta^2(B \mid S_1)$ e $\eta^2(B \mid S_2)$, ou seja, na relevância dos sinais S_1 e S_2 para prever a variável de interesse B.

[213] Independência significa (para variáveis de Bernoulli vale até "se e somente se") que ambas $\eta^2(S_2 \mid S_1)$ e $\eta^2(S_1 \mid S_2)$ são iguais a zero.

Para facilitar a intuição, considere os valores numéricos: $B_0 = 100$; $B_1 = 50$; $B_2 = 50$; $q = p = 50\%$. O valor esperado de B antes de qualquer nova informação é: $E[B] = B_0 + (B_1 \times q) + (B_2 \times p) = 150$. A variância incondicional é $Var[B] = 1250$. Também é fácil ver/calcular que a revelação do sinal S_1 (perfurando o primeiro poço) reduz Var[B] pela metade, i.e., $\eta^2(B \mid S_1) = 50\%$. Analogamente, $\eta^2(B \mid S_2) = 50\%$. Pode-se verificar que o processo obedece ao Teorema 3, i. é, $\eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) = \eta^2(f(S_1, S_2) \mid S_1) + \eta^2(f(S_1, S_2) \mid S_2) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

Pode-se com esse exemplo verificar que essa propriedade da medida η^2 não se verifica para métricas "competidoras" tais como o coeficiente de correlação $(0{,}71 + 0{,}71 > 1)$[214] e a mútua informação $(1 + 1 > 1)$[215]. Adicionalmente, devido à insensibilidade do valor do cenário, mútua informação não muda se o volume B_1 for o dobro de B_2, quando claramente o sinal S_1 tornar-se-ia mais relevante que o sinal S_2 em termos de redução de incerteza do volume B para aplicações de valor da informação. Ou seja, se $B_1 = 100$ (permanecendo $B_2 = 50$, etc.), a propriedade de η^2 (teorema acima) mostra que o sinal S_1 tem maior peso, i.e., $\eta^2(X \mid S_1) + \eta^2(X \mid S_2) = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$.

Esse exemplo simples pode ser estendido para aplicações mais complexas devido à flexibilidade da variável de Bernoulli gerar outras distribuições (Binomial, Normal, etc.) e/ou descrever a incerteza em situações complexas.

Esse tipo de propriedade pode ser útil também quando a variável de interesse é uma função de um *produto* ou de um *quociente* de (funções de) variáveis aleatórias independentes, pois através de uma transformação logarítmica é possível usar o teorema anterior. Por exemplo, nas companhias de petróleo e na literatura profissional o volume da reserva B é estimado considerando B como uma função de várias variáveis independentes. A função mais usada para estimar o volume de reservas é a função $B = f(FR, GV, NTG, \phi, Sw, Bo)$ dada por:

$$\mathbf{B = FR \times [GV \times NTG \times \phi \times (1 - Sw)] / Bo} \qquad \mathbf{(146)}$$

Onde FR = fator de recuperação (% do volume total que é recuperável economicamente); GV = volume de rocha reservatório ("gross volume"); NTG = % da espessura do reservatório com óleo ("net to gross thickness"); ϕ =

---

[214] Nesse exemplo simples, devido a função $B(S_1, S_2)$ ser *linear*, o quadrado da correlação (*coeficiente de determinação*) é igual ao η^2 (Lema 4). Isso é uma vantagem prática de η^2.

[215] Considerando a base 2 nos logaritmos da equação entropia. Outras bases não terão melhor performance no caso geral.

porosidade da rocha reservatório; Sw = saturação de água; e Bo = fator volume da formação para o óleo[216]. Uma outra função usada na literatura para volume de reservas é B(FR, A, h, ϕ, Sw, Bo) dada por:

$$\mathbf{B = FR \times (A \times h \times \phi \times (1 - Sw)] / Bo} \qquad \mathbf{(147)}$$

Onde A = área; h = espessura com óleo ("net pay") e as outras variáveis são como antes. Com a transformação logarítmica X = ln(B), pode-se escrever X como a soma de funções de variáveis independentes e logo irá obedecer o teorema da decomposição do aprendizado se for usado η^2 como medida de aprendizagem.

3.3.4. Métodos Estatísticos Populares: Outra Vantagem de η^2

Uma das várias vantagens da medida de aprendizagem proposta é que ela pode ser estimada com os métodos estatísticos mais populares. Em particular, η^2 pode ser obtida através dos métodos paramétricos de estimação mais populares: regressões (lineares ou não-lineares) – já que ela pode ser interpretada como o fator de ajuste R^2 da regressão, e a análise de variância (ANOVA), pois é diretamente relacionada com duas *somas de quadrados* usadas nesse método. Esse item irá discutir sucintamente essas estimativas de η^2.

Nenhuma outra medida de dependência é tão fácil de ser obtida através de métodos estatísticos populares. Além disso, como o conceito de η^2 é *não-paramétrico*, pode-se estimar η^2 sem assumir uma distribuição para X ou S, e também sem assumir uma função específica (ou modelo) para X = f(S). Com isso, pode-se estimar η^2 também com métodos não-paramétricos.

Os estatísticos costumam separar os conceitos de *população* e *amostra* na definição das estimativas de parâmetros. Uma população pode ser vista como uma amostra de tamanho infinito. Como em Kruskal (1958), a ênfase aqui é visão de população (visão mais probabilística, que permite interpretação), mas será mostrada sucintamente a visão de amostra (visão mais estatística), sendo dadas referências para trabalhos empíricos (que não é o foco da tese).

A discussão de estimadores (visão amostra) para η^2 é bem antiga, por ex., Pearson (1911) aponta que a estimativa comum de η^2 é tendenciosa para cima[217]

---

[216] Devido à menor pressão na superfície, o volume de óleo do reservatório se expande.

(maior que o verdadeiro η^2), em geral quanto menor for o tamanho da amostra. Assim, Pearson introduz um fator de correção que assintoticamente tende para zero tanto quando o tamanho da amostra tende a infinito, como quando η^2 tende para 1. Outra discussão estatística clássica, ainda mais detalhada, é de Wishart (1932). Também Kelley (1935) propôs uma fórmula para estimar η^2 usando uma amostra, a fim de corrigir o seu erro sistemático.

A eq. (107) de η^2 pode ser interpretada no contexto estatístico de uma regressão (linear ou não-linear) como o coeficiente R^2, que dá o ajuste do modelo em relação aos dados. O modelo de regressão é uma função X = f(S), onde f(S) é chamado de preditor de X baseado em S. Assim, a eq. (107) é interpretada como a razão entre a variação explicada pelo modelo e a variação total de X. Na versão "população", isso significa que (ver, por ex., Pedhazur, 1997, p.355):

$$\eta^2(X \mid S) = R^2(X = f(S)) = \frac{\text{variância explicada}}{\text{variância total}} \qquad (148)$$

No caso da regressão linear ser o modelo que dá a melhor previsão de X baseada em S, como foi visto, η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ. Dada a regressão linear que *explica* X, i. é, X = a S + b, dada a regressão total que inclui o erro ε, i. é, X = a S + b + ε, e se realmente o modelo linear é o melhor modelo, então pode-se escrever a eq. (148) como (ex.: Kruskal, 1958, p.817):

$$\eta^2(X|S) = \rho^2(X, S) = \frac{\text{Var}[a\,S + b]}{\text{Var}[a\,S + b + \varepsilon]} = \frac{a^2\ \text{Var}[S]}{a^2\ \text{Var}[S] + \text{Var}[\varepsilon]} \qquad (149)$$

Caso a amostra mostre uma divergência significativa entre η^2 e ρ^2, então é uma indicação que a regressão linear não é um bom modelo para explicar X. Esse teste de linearidade usando η^2 e ρ^2 é discutido em Stuart & Ord & Arnold (1999, p.501-502). Serão mostradas as equações para estimar η^2 a partir de amostras de dados S. O valor de amostra de R^2 duma regressão é mostrada rotineiramente em software populares (ex.: Excel), dada a regressão que, se for linear, então $\rho^2 = R^2$.

No caso da versão amostra, será usado um *acento circunflexo* em η^2 para caracterizar que é uma medida baseada numa amostra. Nessa versão, devem ser

---

[217] Uma maneira intuitiva de ver isso é que η^2 é uma razão de variâncias, sendo que a variância maior fica no denominador. Como se sabe, na estimativa de variância de uma amostra de tamanho N, se divide a soma $(x_i - E[x])^2$ por N – 1 (em vez de N) para corrigir a tendenciosidade (ao custo de erro esperado maior). Se dividisse por N, o estimador seria tendencioso *para baixo*.

analisados alguns detalhes típicos da literatura estatística tais como a questão dos *graus de liberdade* a serem usados para estimar as variâncias da eq. (148).

Uma regressão também pode ser interpretada num contexto mais geral de análise de variância (ANOVA), desenvolvida pelo estatístico inglês R.A. Fisher na década de 20 do século XX. No entanto, Fisher atacou o uso estatístico de η^2 e assim teve divergências famosas com Pearson. Conforme reporta Levine & Hullet (2002, p.620 e n.5), a implicância de Fisher era devido à estimativa de η^2 ser tendenciosa para cima especialmente para pequenas amostras e devido a ele não conhecer a distribuição de η^2 (Fisher só sabia que tinha a desvantagem de não ser uma distribuição normal) e assim não poder calcular o *intervalo de confiança* da estimativa. Mas existem métodos para corrigir a tendenciosidade (como visto, o próprio Pearson apresentou um)[218] e hoje em dia se sabe que a distribuição empírica de η^2 é uma distribuição beta (isso foi mostrado por Hotelling em 1931, ver Keeping, 1962, p.345-346), tornando datadas as críticas de Fisher.

Maxwell & Camp & Arvey (1981, p. 526) aponta que a ANOVA pode ser conceituada como um caso especial de análise de regressão. Miles & Shevlin (2001, p.33) ressalta que, embora a ANOVA seja mais usada para examinar as diferenças entre *médias de grupos* (grupos de fatores expressando diferentes modelos para explicar a variável X), a ANOVA examina variabilidade e assim pode ser aplicada para ver quanto da variância total de X é explicada pelos fatores S_i (por cada um ou por grupos de fatores). Em geral, a resposta (dos dados) de qualquer modelo pode ser escrita como a predição do modelo mais um erro, i. é:

$$\textbf{Resposta} = \textbf{Modelo} + \textbf{Erro} \qquad \textbf{(150)}$$

Dessa forma, a variação total da resposta dos dados pode ser decomposta em termos de variação devido ao modelo mais a variação não explicada pelo modelo. Nessas análises estatísticas, a variação é dada pela *soma de quadrados* ("sum of squares", SS). Essas somas de quadrados estão diretamente relacionadas às respectivas variâncias (já que a variância é uma média de soma de quadrados, por definição). No contexto de regressão, a variação da equação anterior é dada por:

$$\mathbf{SS_{total}} = \mathbf{SS_{regressão}} + \mathbf{SS_{erro}} \qquad \textbf{(151)}$$

[218] Além disso, como reporta Levine & Hullet (2002, p.620), as pesquisas geralmente usam um tamanho suficientemente grande de amostra, de forma que o problema de tendenciosidade "é de pequena importância na prática".

Onde SS_{total} é a soma dos quadrados dos desvios de cada resposta observada (cada dado) x_i em relação à (grande) média das respostas $\bar{x}$. De forma similar, $SS_{regressão}$ é a soma dos quadrados dos desvios de cada resposta prevista (pelo modelo de regressão) $\hat{x}_i$ em relação à média das respostas $\bar{x}$. Finalmente, SS_{erro}, também chamada de soma dos quadrados dos resíduos[219], é a soma dos quadrados dos desvios de cada resposta observada (cada dado) x_i em relação à sua respectiva resposta prevista (ou explicada) pelo modelo de regressão $\hat{x}_i$.

No contexto mais comum em que a ANOVA é usada para comparar médias entre grupos, a soma total dos quadrados é decomposta na soma dos quadrados *entre os grupos* (modelo) mais a soma dos quadrados *dentro dos grupos* (erro):

$$\mathbf{SS_{total} = SS_{entre} + SS_{dentro}} \qquad \mathbf{(152)}$$

As três últimas equações são equações estatísticas análogas à *lei da variância total* (ou fórmula da variância condicional), eq. (98), onde a variância a priori é a média do SS_{total}, a variância de E[X | S] pode ser vista como uma média do $SS_{regressão}$ (se o modelo é uma regressão) e E[Var[X | S]] pode ser vista como uma média do SS_{erro}. No caso de grupos de dados, do ponto de vista de população, a medida η^2 pode ser vista como:

$$\mathbf{\eta^2(X \mid S) = \frac{Var[total] - Var[dentro]}{Var[total]} = \frac{Var[entre]}{Var[total]}} \qquad \mathbf{(153)}$$

No caso do modelo ser uma regressão, na eq. (153) a razão seria a variância da regressão em relação à variância total (regressão + erro), comparar a eq. (153) com a eq. (148). No caso de uma regressão, com uma amostra de N dados i.i.d., as somas dos quadrados são dadas por:

$$\mathbf{SS_{total} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \mathbf{(154)}$$

$$\mathbf{SS_{regressão} = \sum_{i=1}^{N} (\hat{x}_i - \bar{x})^2} \qquad \mathbf{(155)}$$

$$\mathbf{SS_{erro} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x}_i)^2} \qquad \mathbf{(156)}$$

[219] Em ANOVA, esse erro quadrático é também chamado de variação "dentro dos grupos".

Uma tabela de (um-fator) ANOVA tipicamente mostra[220] essas somas de quadrados e o teste estatístico baseado na distribuição-F, dado pela estatística f_{stat}, definido por uma razão de *médias quadradas* (que são variâncias). No caso de uma regressão:

$$\mathbf{f_{stat} = \frac{SS_{regressão} / df_{regressão}}{SS_{erro} / df_{erro}}} \quad \textbf{(157)}$$

Onde df ("degree of freedom") significa os *graus de liberdade*, os quais são funções do tamanho da amostra e do número de fatores[221]. Ex., numa regressão linear, os fatores ou parâmetros a estimar são dois, o coeficiente angular e o coeficiente de interseção. Nesse caso, $df_{regressão} = 2 - 1 = 1$ e $df_{erro} = N - 2$. No caso mais comum de comparação de médias entre grupos, a razão f_{stat} é similar, bastando trocar os subscritos "regressão" por "entre" (os grupos) e "erro" por "dentro" (dos grupos). Note que variância entre as médias dos grupos é uma média dos quadrados $(\hat{x}_k - \overline{x})^2$, análoga à variância das médias condicionais (i. é, variância da distribuição de revelações).

A estatística f_{stat} é diretamente relacionada com a razão de correlação η^2. Essa termos de *população*, a relação entre η^2 e a razão f é dada por (ver, por ex., Cohen, 1988, p.281):

$$\boldsymbol{\eta^2 = \frac{f^2}{1 + f^2}} \quad \textbf{(158)}$$

O valor de amostra de $\hat{\eta}^2$ pode ser estimado de uma tabela típica de ANOVA usando diretamente a razão das somas quadradas entre os grupos (ou da regressão) e a total, ou seja, o estimador é dado por (Pedhazur, 1997, p.355):

$$\boldsymbol{\hat{\eta}^2 = \frac{SS_{entre}}{SS_{total}}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\hat{\eta}^2 = \frac{SS_{regressão}}{SS_{total}}} \quad \textbf{(159)}$$

O valor R^2 (eq. 148, geralmente reportado na tabela de ANOVA) é outro estimador de η^2 equivalente ao da eq. (159), ver, por ex., Maxwell & Camp & Arvey (1981, p. 529). Nas análises tradicionais de ANOVA, apesar da facilidade

---

[220] Mostra outros indicadores também, por ex., o *p-valor*: se o p-valor for menor que um certo nível de significância, então a hipótese nula (ex.: de não ter relação linear) pode ser rejeitada.

[221] O número de graus de liberdade total é N – 1, o do modelo (ou "entre grupos") é k – 1 e o do erro (ou "dentro do grupo") é N – k, de forma que se tem N – 1 = (k – 1) + (N – k). Ver qualquer texto popular de estatística, por ex., Levine & Berenson & Stephan (1999, p.604-610).

de calcular $\hat{\eta}^2$, esse valor geralmente não é reportado[222], uma vez que o interesse é fazer um teste de hipótese para rejeitar ou não um determinado modelo. Nesse contexto, basta calcular f_{stat}, com isso determinar o p-valor[223], e em seguida comparar o p-valor com o nível de significância desejado no teste de hipótese. Em alguns textos, em vez do p-valor se compara a estatística obtida f_{stat} com um $f_{crítico}$ (também tirado de tabela). Nesses testes de hipótese, o cálculo de η^2 não é necessário.

No entanto, não apenas as aplicações dessa tese podem se beneficiar da estimativa $\hat{\eta}^2$, como também existem aplicações tradicionais em estatística que se beneficiam desse indicador. É o caso da literatura de "poder estatístico" que usa η^2 como um *índice de efeito de tamanho* ("effect size index"), ver, por ex., Cohen (1988) ou Pedhazur (1997). Essas análises são usadas especialmente em ciências humanas comportamentais (como psicologia) e ciências sociais. A idéia é determinar se um fator (ou grupo de fatores) é importante para prever a realidade. Exemplos: (a) pode-se querer saber a importância dos fatores "renda" e "idade" na demanda de um produto a fim de desenhar uma campanha de marketing; (b) pode-se querer saber a relevância dos fatores "classe social" e "educação" nos índices de criminalidade, para desenhar políticas sociais.

Aqui é oportuno apontar as diferenças de estimativa de η^2 quando existe apenas um sinal S (um fator A na linguagem de ANOVA) e quando existe um vetor de sinais $S = (S_1, S_2, \ldots S_n)^T$, por ex., os fatores A, B, C influenciando a variável dependente X, na linguagem de ANOVA. No caso de vetor, existem duas estimativas de η^2 na literatura, o η^2 como aqui apresentado e o parcial-η^2 ("partial eta squared"). É importante fazer essa distinção já que existem software que fazem confusão e usam o parcial-η^2 como se fosse o η^2, por ex., o pacote estatístico SPSS, conforme reportado por Levine & Hullet (2002, abstract). Dentro do contexto de ANOVA para três fatores A, B, C, a estimativa de η^2 e parcial-η^2 para um dos fatores (por ex., A) para uma amostra grande, são respectivamente dados em Cohen (1973, eq.1 = eq.6 e eq. 3) por:

---

[222] Ex., na ferramenta de análise de dados do Excel, a tabela ANOVA mostra também o valor de R^2 e R^2-ajustado (ambos são estimadores de η^2), mas não menciona diretamente o η^2.

[223] O p-valor é obtido em tabelas de ANOVA que usa a distribuição F (F de Fisher).

$$\hat{\eta}^2(X \mid A) = \frac{SS_A}{SS_{total}} = \frac{SS_A}{SS_A + SS_B + SS_C + SS_{erro}} \quad (160)$$

$$\text{parcial-}\hat{\eta}^2(X \mid A) = \frac{SS_A}{SS_A + SS_{erro}} \quad (161)$$

Como ressalta Cohen (1973), o parcial-η^2 é maior que o η^2 (a não ser para o caso de apenas um fator, em que as duas medidas são iguais), o que pode levar a uma posição muito otimista do efeito do fator A para predizer X. Tanto Kennedy (1970) quanto Levine & Hullet (2002, p.620) criticam[224] o uso do parcial-η^2 por não ter a interpretação intuitiva de ser a percentagem da soma total dos quadrados, não ser aditivo e não ser equivalente aos conceitos familiares de R^2 (regressão geral, ver a seguir) e ρ^2 (regressão linear), como ocorre com o (não-parcial) η^2. Por isso, essa tese recomenda trabalhar com η^2 e ter cuidado com software que pode estar reportando parcial-η^2 em vez de η^2.

A ligação de $\hat{\eta}^2$ com o coeficiente R^2 de uma regressão é reportada em vários textos e artigos (por ex., em Levine & Hullet, 2002, p.619; Pedhazur, 1997, etc.). O coeficiente $R^2(X = f(S))$ no caso da *regressão linear* é o quadrado do coeficiente de correlação de Pearson, ou seja, a versão amostra da eq. (149) é:

$$\hat{\eta}^2(X \mid S) = R^2(X = f(S) \text{ linear}) = \rho^2(X, S) = \frac{SS_{regressão}}{SS_{total}} = 1 - \frac{SS_{erro}}{SS_{total}} \quad (162)$$

No caso de regressão não-linear, $\hat{\eta}^2$ também pode ser visto como o coeficiente R^2 da amostra, que no caso não-linear é diferente de ρ^2. A versão amostra da eq. (148) é dada por:

$$\hat{\eta}^2(X \mid S) = R^2(X = f(S) \text{ não-linear}) = \frac{SS_{regressão}}{SS_{total}} \quad (163)$$

No caso de regressões múltiplas (vários S_k), a interação entre os fatores faz com que o valor de R^2 seja tendencioso para cima (como esperado, já que η^2 é tendencioso para cima, como foi visto). Essa tendenciosidade é maior, quanto menor for o tamanho da amostra N e maior for o número k de fatores interagindo. Nesse caso, se usa o R^2-ajustado, denotado por R^2-adj, que é dado pela equação (exs.: Miles & Shevlin, 2001, p.33; ou Maxwell & Camp & Arvey, 1981, p. 528):

---

[224] No entanto, como mostra Cohen (1973) e citado por Levine & Hullet (2002, p.620-621) como "notável exceção", o parcial-η^2 pode ser mais interessante que o η^2 sob certas condições.

$$\mathbf{R^2\text{-}adj = 1 - (1 - R^2)\ \frac{N - 1}{N - k - 1}} \qquad \mathbf{(164)}$$

É fácil ver que (dado k finito) quando $N \to \infty \Rightarrow R^2\text{-adj} \to R^2$. Quando η^2 é estimado dessa forma, essa estimativa é chamada muitas vezes de "epsilon-squared", $\hat{\varepsilon}^2$. Por ex., Maxwell & Camp & Arvey (1981, p. 527-528) e outros na literatura de psicologia, associam "epsilon-squared" ao R^2-adj (eq. 164) e "eta-squared" ao R^2 da eq. (163). Outros, como o artigo clássico de Kelley (1935), associam o uso da eq. (164) combinado com a eq. (163) à estimativa "não tendenciosa da razão de correlação". Maxwell & Camp & Arvey (1981, p. 532) concluem que "eta-squared" (como medido pela eq. 163) é um bom índice descritivo de grau de associação entre a v.a. "dependente" (X) e a v.a. "independente" (S) em uma amostra, enquanto que "epsilon-squared" (e uma outra chamada "omega-squared") são melhores em termos de inferência desse grau de associação. Mas eles mesmos indicam (p.526) que não existe consenso entre os autores sobre o melhor estimador para medida de associação, por ex., Friedman recomenda o uso do "eta-squared", Cohen recomenda ambos "eta-squared" e "epsilon-squared", dependendo da situação, etc[225].

Esses estudos de ANOVA ou de múltipla regressão consideram que o vetor de sinais são variáveis estatisticamente independentes[226]. E para o caso do vetor de sinais com variáveis dependentes entre si? McKay & Morrison & Upton (1999) analisam esse caso no contexto de *análise de sensibilidade global* (item 3.1.4.4), ou seja, o vetor de sinais são as variáveis de "input" e a variável de interesse é a variável de "output". Eles usam uma fórmula de variância total para variáveis dependentes conhecida como fórmula de Panjer (ver Panjer, 1973) para justificar o método de estimativa de η^2. Em seguida eles usam métodos computacionais iterativos para estimar o valor de η^2 da amostra com sinais dependentes, incluindo a conhecida amostragem "Latin hypercubic", muito usada em simulação de Monte Carlo (co-desenvolvida pelo próprio McKay no final da década de 70). O livro de

[225] Até na simples estimativa de uma variância não há consenso. Embora a maioria divida a soma de quadrados por N – 1, para o estimador ser *não tendencioso*, há quem prefira dividir pelo tamanho da amostra N, pois dessa forma o estimador terá *menor variância* (menor erro). São dois critérios razoáveis que levam a diferentes estimadores. Se N for grande, a discussão é irrelevante.

[226] Em estimativa Bayesiana, se assume que as v.a. são *condicionalmente* independentes ou *intercambiáveis*, relaxando um pouco a hipótese de independência.

Saltelli et al (2004), também discute métodos para estimar η^2 com sinais ("inputs") dependentes.

O objetivo desse item foi principalmente mostrar a facilidade de obter estimativas de η^2 com métodos populares como regressão e ANOVA. Mas foram apresentadas também algumas equações de estimativa assim como os conceitos (populacionais) por trás dessas equações. Diversas referências foram mostradas para o leitor interessado em trabalho empírico nessa área. Agora será apresentado um tema mais aplicado, de fundamental importância em exploração de petróleo.

3.4. Processo de Revelação de Bernoulli

3.4.1. Distribuição de Bernoulli e Fator de Chance Exploratório

A incerteza técnica mais elementar e básica em exploração de petróleo é a incerteza na existência de petróleo num prospecto exploratório. Essa incerteza é expressa pela variável denominada fator de chance (FC), que dá a probabilidade de existir petróleo em um prospecto[227]. O fator de chance exploratório é uma v.a. discreta definida por uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p (onde p é chamado de probabilidade de sucesso), ou seja, em termos de notação:

$$\mathbf{FC \sim Be(p)} \qquad \mathbf{(165)}$$

Pela sua importância prática no contexto de exploração de petróleo, inclusive na aplicação do cap. 5 de jogo de opções reais, a distribuição de Bernoulli será estudada em detalhes, assim como a distribuição bivariada de Bernoulli, em que a v.a. fator de chance FC interage com a v.a. sinal S, que também é uma distribuição de Bernoulli. Ainda no item 3.4 serão estudados os processos de revelação de Bernoulli, que pertencem a uma categoria específica de processos dependentes de Bernoulli que ainda não foi estudada na literatura[228].

A distribuição de Bernoulli é a distribuição mais simples que existe: é uma distribuição discreta com apenas um parâmetro e apenas dois cenários. Um dos

[227] Essa parte é baseada parcialmente em notas de aulas de cursos ministrados pelo autor na Petrobras e em Dias (2003).

[228] Ao melhor do conhecimento do autor da tese. O processo dependente de Bernoulli dado pela distribuição hipergeométrica (sorteios sem reposição) é totalmente diferente do tipo de dependência que será aqui analisado. Para outros detalhes, ver item 3.4.3.

cenários tem valor[229] 1 (com probabilidade p), chamado "sucesso", e o outro tem valor zero (com probabilidade 1 – p), chamado "falha" (ou insucesso). Nas aplicações essas duas possíveis realizações de FC são *fatores multiplicativos* do VPL na equação do valor monetário esperado (VME), eq. (3). A Figura 40 mostra a distribuição de Bernoulli, sendo que o lado esquerdo mostra a função probabilidade (massa) com parâmetro p = 30% e o lado direito mostra a função distribuição acumulada G(x) com parâmetro genérico p.

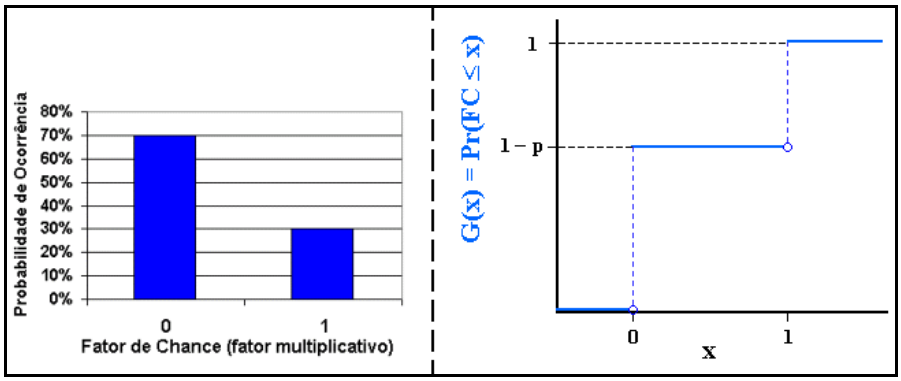

Figura 40 – Distribuição de Bernoulli: Massa (esquerda) e Acumulada (direita)

Formalmente, a função probabilidade (massa) de Bernoulli pode ser escrita como uma das duas equações abaixo:

$$\mathbf{Be(x)} = \begin{cases} \mathbf{1 - p} & \mathbf{para \quad x = 0} \\ \mathbf{p} & \mathbf{para \quad x = 1} \end{cases} \tag{166}$$

$$\mathbf{Be(x)} = \mathbf{p^x (1-p)^{1-x}} \quad \text{, sendo } x = 0 \text{ ou } 1 \tag{167}$$

A distribuição acumulada G(x) da Figura 40 é formalmente escrita como:

$$\mathbf{G(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{para} \quad \mathbf{x < 0} \\ \mathbf{1 - p} & \mathbf{para} \quad \mathbf{0 \le x < 1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{para} \quad \mathbf{x \ge 1} \end{cases} \tag{168}$$

A distribuição de Bernoulli é também de grande importância teórica, tanto por razões históricas[230] como por poder gerar outras distribuições conhecidas tais como as distribuições binomial, hipergeométrica, Pascal, geométrica, e no limite até distribuições contínuas como a normal (através da binomial). Discussões sobre a distribuição de Bernoulli, assim como as suas propriedades podem ser

[229] Existem distribuições de Bernoulli com pequenas variações: (a) cenários nominais, ex: sucesso é x = sim e falha é x = não; (b) cenários numéricos mas não 0-1, ex: – 1 e + 1.

[230] Foi uma das primeiras distribuições estudadas. Além disso, a primeira versão da *lei dos grandes números*, o clássico teorema Bayesiano sobre seqüências de v.a. intercambiáveis de De Finetti, dentre outros, usaram a distribuição de Bernoulli, tomando vantagem de sua simplicidade.

encontradas especialmente em Balakrishnan & Nevzorov (2003, cap. 4) e alguma discussão também em Evans & Hastings & Peacock (2000, cap.4). Aqui serão mostradas algumas das propriedades da distribuição de Bernoulli. As propriedades mais importantes são o valor esperado e variância de FC ~ Be(p):

$$\mathbf{E[FC] = p} \tag{169}$$

$$\mathbf{Var[FC] = p\,(1 - p)} \tag{170}$$

A Tabela 10 resume as principais propriedades da distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

Tabela 10 – Propriedades da Distribuição de Bernoulli (Univariada)

Propriedade/ Função	Equação
Média	$E[Be(p)] = p$
Variância	$Var[Be(p)] = p\,(1 - p)$
Assimetria	$\gamma_3[Be(p)] = \frac{1 - 2p}{\sqrt{p\,(1 - p)}}$
Curtose	$\gamma_4[Be(p)] = \frac{1}{p\,(1 - p)} - 3$
Função Característica	$\phi(t) = 1 + p\,(e^{i\,t} - 1)$
Função Geradora de Momentos	$M(t) = (1 - p) + p\,e^{t}$
Estimador de p (n sucessos na amostra N)	$\hat{p} = \frac{n}{N}$

Quando a medida de incerteza é a entropia H (eq. 68), então a entropia da distribuição de Bernoulli é dada por:

$$\mathbf{H[Be(p)] = - p \log(p) - (1 - p) \log(1 - p)} \tag{171}$$

Note que tanto a variância (eq. 170) como a entropia (eq. 171) são máximas quando p = ½ e mínimas (iguais a zero) para os casos de p = 0 e p = 1. Ou seja, em certos aspectos a variância e a entropia têm comportamentos similares no caso da distribuição de Bernoulli, o que pode levar a soluções similares.

Assim como ocorre com a distribuição Normal, a informação de Fisher I(p) para a distribuição de Bernoulli é simplesmente o inverso da variância (prova: ver DeGroot & Schervish, 2002, p.437). Ou seja, a informação de Fisher é:

$$\mathbf{I(p) = 1 / [p\,(1 - p)]} \tag{172}$$

Assim a informação de Fisher é mínima para p = 50% (mas não é zero, é inclusive maior que 1) e vai a infinito nos casos de revelação total, i. é, $I(p) = +\infty$ para os casos de p = 0% e p = 100%. Assim, claramente a informação de Fisher não serve como medida de aprendizagem, pois não atende ao axiomas mais elementares das medidas de aprendizagem, ver item 3.3.2.

Para outras propriedades, ver Balakrishnan & Nevzorov (2003, cap. 4). Por ex., todos os momentos não centrais são iguais a p, i. é, $E[X^n] = p$, n = 1, 2, … A variância é igual a $E[X^1] - (E[X^2])^2$, etc.

No caso de p = 0 ou de p = 1, a distribuição de Bernoulli é dita *degenerada*. Nesse caso se tem a *revelação total* do verdadeiro cenário da distribuição de Bernoulli, pois se p = 0 então a variável de Bernoulli FC = 0 com probabilidade 1 e se p = 1 então FC = 1 com probabilidade 1. Como esse também é o caso limite de uma distribuição de revelações de uma v.a. de Bernoulli, ver Teorema 1(a), será a seguir discutido esse caso no contexto de exploração de petróleo.

O que significa *revelação total* para o fator de chance exploratório? Existe algum investimento em informação que revele toda a verdade sobre uma locação específica? Sim, a própria perfuração do poço pioneiro! Essa perfuração revelaria ou o cenário $FC^+ = 1$ ou o cenário $FC^- = 0$. Por consistência, ex-ante esses cenários revelados teriam probabilidade de ocorrência iguais a p e (1 – p), respectivamente. Ou seja, a distribuição de revelações no caso de revelação total é exatamente igual à distribuição a priori de FC. Isso é exatamente o Teorema 1 (a), que diz que a distribuição de revelações é igual a distribuição a priori, no caso limite de revelação total!

Outra maneira de ver é através de um sinal S que proporcione uma *aprendizagem máxima*. O caso limite de revelação total através de um sinal poderia ser idealizado através de um "expert infalível" (ou "profeta") que saberia *toda a verdade* sobre uma bacia. Isso significaria que toda vez que alguém apresentasse um prospecto de um bloco exploratório, esse "expert infalível" diria que ou a locação tem FC = 100% ou a locação tem FC = 0%. Se um geólogo estima que um certo prospecto tem uma probabilidade de sucesso p então, por consistência, ele espera que se o "expert infalível" for convocado a se pronunciar em relação a esse prospecto, ex-ante a probabilidade de ele(a) revelar que FC = 1 é igual a p e a probabilidade de ele(a) revelar que FC = 0 é (1 – p). Ou seja, a distribuição de revelações é exatamente a distribuição a priori, consistente com o

Teorema 1 (a). Se o geólogo achar que o "expert infalível" dirá FC = 1 com uma probabilidade diferente (ex.: q), então ele deve revisar sua distribuição a priori de FC e usar q como probabilidade de sucesso.

Note que a má notícia é também muito valiosa para uma companhia de petróleo, pois evita um gasto inútil em um poço "seco" (petróleo inexistente) com probabilidade 1, i. é, evita o exercício sub-ótimo da opção de perfurar um poço pioneiro naquela locação. Lembrar do exemplo simples do cap. 2 (Figura 3).

Bacias muito conhecidas (ex.: águas rasas do Golfo do México) tem locações ou com FC muito alto (> 40%) ou muito baixo. Embora a própria perfuração do poço pioneiro seja a única maneira conhecida de revelar toda a verdade sobre a existência de petróleo em um prospecto (pois infelizmente não existe o "expert infalível"), isso não seria vantagem já que se deseja obter uma informação mais barata sobre a chance de sucesso, antes de gastar algumas dezenas de milhões de dólares na perfuração do poço pioneiro. Pesquisa sísmica e os resultados das perfurações de poços vizinhos (inclusive de outras firmas – agindo como "*free rider*") proporcionam *revelação parcial* sobre FC que permite revisar as expectativas em relação ao FC de um prospecto específico. Isso será estudado no item 3.4.2 sobre distribuição bivariada de Bernoulli, pois é necessário descrever a distribuição conjunta do FC do prospecto de interesse com o sinal S, geralmente também uma v.a. de Bernoulli.

É oportuno estabelecer a seguinte definição sobre "play geológico", muito útil tanto para desenho da seqüência ótima de perfuração de prospectos, como para análise de interação estratégica entre companhias de petróleo atuando numa mesma bacia. Essa definição é baseada em Rose (2001, p. 3 e 57) e é similar, mas mais detalhada do que a usada em McCray (1975, p.222).

Definição. **Play geológico**: é uma família de campos, descobertas, prospectos e caminhos/regiões ("leads") que tem similaridade geológica, i. é, compartilham a mesma origem geológica. A similaridade se dá principalmente em termos de tipo de rocha reservatório, geometria da trapa (para *aprisionar* o petróleo no reservatório) e rocha geradora de petróleo.

A análise de play geológico (chamada de "play analysis") utiliza estudos de *geologia regional* (que estuda uma determinada área de uma bacia), de *geoquímica* (que dá indicações principalmente sobre migração de petróleo) e *geofísica* (especialmente a sísmica, que dá indicações sobre a existência e o

tamanho de rochas e falhas geológicas). Prospectos no mesmo play geológico são correlacionados, i. é, por compartilharem as mesmas características geológicas a informação resultante da perfuração de um prospecto afeta (para cima ou para baixo) os fatores de chance de todos os prospectos situados no mesmo play geológico. Por isso esse conceito é fundamental para a análise da interação estratégica entre companhias de petróleo em aplicações de jogos de opções reais.

Para aprofundar a questão de correlação entre prospectos é necessário detalhar o significado do fator de chance de existência de petróleo, decompondo-o em outros fatores. Desde o ponto de vista da exploração de petróleo[231], o fator de chance de existência de uma reserva de petróleo em um prospecto pode ser visto como uma função de 6 fatores de chance (que individualmente também são v.a. de Bernoulli). O FC total é o produto dos seis fatores abaixo, já que esses fatores geralmente são considerados independentes ou condicionalmente independentes:

1) Probabilidade de existência da *rocha geradora* ("source rock") de petróleo;
2) Probabilidade de existência de *migração*, i. é, uma falha geológica ou outro caminho ligando a rocha geradora com a rocha reservatório;
3) Probabilidade de existência de *rocha reservatório*;
4) Probabilidade de existência da *trapa geométrica*[232] ("closure chance") que dá a geometria da relação entre rocha reservatório e rocha selante;
5) Probabilidade de *retenção*, i. é, uma *rocha selante* cercando o reservatório e *preservação* do petróleo retido ("containment chance"); e
6) Probabilidade de existência do *sincronismo geológico* ("timing"), *condicional* à ocorrência dos fatores anteriores. Ou seja, coincidência temporal da seqüência geológica: geração, migração, enchimento do reservatório, aprisionamento e preservação do petróleo.

Se qualquer desses fatores não ocorrer, não haverá reserva de petróleo. Ou seja, a existência de petróleo é uma grande coincidência. A lista acima pode variar um pouco, a depender do autor. Uma das referências mais citadas por geólogos-economista é Rose (2001, p.34-36), que recomenda os 5 primeiros fatores de

---

[231] Agradeço ao Consultor Sênior da Petrobras, Geofísico Paulo Johann, pelas discussões sobre a decomposição do fator de chance e sobre a comparação entre as revelações de informações obtidas com um sinal sísmico e com o resultado da perfuração de um poço exploratório vizinho.

[232] Existem diversos tipos de trapas geológicas: estruturais, estratigráfica, diagenéticas, hidrodinâmicas e em centro de bacias. Ver Rose (2001, p.35).

chance da lista acima[233]. Em Rose (2001) a probabilidade de sincronismo é considerada dentro do fator de chance de migração principalmente. Mas aqui será interessante destacar o fator de sincronismo geológico, pois pode haver um caminho claro de migração (indicado pela sísmica, ex.: técnica de "ray tracing"), mas não ter havido sincronismo para alguns objetivos geológicos numa bacia e ter havido sincronismo em outras (o sexto fator pode facilitar a análise desses casos, para separar o que a sísmica não vê). Além disso, esse fator é importante para análise estratégica de prospectos vizinhos correlacionados (ver discussão abaixo).

Aliás, o próprio Rose (2001, p.80-82) destaca que na análise de play geológico é conveniente distinguir entre os fatores de chance que são compartilhados ("shared") por todos os prospectos do mesmo play, dos fatores de chance específicos do prospecto (fatores de chance locais ou independentes). Os fatores de chance compartilhados aqui serão referidos como fatores de chance globais ou regionais. Rose mostra como exemplos de fatores "shared", os fatores relativos à rocha geradora, migração em direção à área do play geológico e o sincronismo (!), fator esse que antes ele não tinha destacado da migração. Isso reforça a decisão dessa tese de adicionar o fator sincronismo à lista de Rose.

Agora serão discutidos os cinco primeiros fatores da lista acima. Conforme destaca Rose (2001, p.35), a probabilidade na geração de petróleo é muito alta em bacias produtivas (bacias relativamente conhecidas), mas pode ser baixa em bacias de fronteira (bacias pouco exploradas). Assim, esse é um fator global, pois afeta praticamente todos os prospectos de uma bacia. Em bacias de fronteira, mesmo um sucesso num poço distante afeta bastante o prospecto, pois confirma a existência de rochas geradoras na bacia. Mas se tiver muito distante dessas rochas geradoras, o petróleo pode não ter chegado até a área do prospecto.

O segundo fator, a migração, é um fator regional, pois pode afetar diversos prospectos, mas menos globalmente que o caso da rocha geradora. Por ex., pode ter havido migração em direção a plays geológicos da área norte de uma bacia, mas não na área sul da mesma. No caso de uma bacia bem explorada, com poços relativamente pertos (vizinhos) confirmando a existência de petróleo, esse índice pode ser bastante alto. Caso contrário, ele pode ser muito baixo. Esse fator é de grande relevância em prospectos vizinhos e assim pode levar a interação

[233] Mas, conforme reporta o Geólogo Luciano Costa, a Petrobras usa 6 fatores desde 1984.

estratégica de firmas diferente que possuem prospectos correlacionados (no mesmo play geológico) em áreas (blocos) vizinhos. Ou seja, a revelação de informação do resultado do poço vizinho afeta bastante esse fator de migração.

Os outros fatores 3, 4 e 5 são mais locais, mas um sucesso num poço vizinho correlacionado também pode melhorar um pouco a chance de ocorrência desses fatores. Ou seja, tem alguma dependência para prospectos do mesmo play, mas menos do que os fatores anteriores. Para esses fatores, os registros de sísmica dão uma boa indicação de sua ocorrência. Os registros sísmicos (especialmente a sísmica 3D) dão boas indicações sobre a existência de rochas e aspectos estruturais em geral, mas virtualmente nenhuma (ou muito fraca) indicação sobre os fluidos na rocha reservatório (especialmente se óleo ou água) ou sincronismo.

Em geral, a sísmica pode dar razoáveis ou boas indicações para os 5 primeiros fatores listados acima, mas não dá quase nenhuma indicação sobre o sexto fator (sincronismo). Já o resultado da perfuração de poços vizinhos correlacionados revela principalmente (e fortemente) o sexto fator. Visto dessa forma, o resultado de poços adjacentes complementa bem a sísmica. Entretanto, mesmo com ambas as fontes de informação alguma incerteza permanece no prospecto de interesse (apenas a sua própria perfuração revelaria toda a verdade sobre esse prospecto). A análise matemática de sinais imperfeitos (revelação parcial) será desenvolvida no item 3.4.2.

Embora tenham casos em que se reporta alguma dependência entre esses fatores (por ex., entre reservatório e geometria de trapa e entre rocha selante e geometria de trapa), a grande maioria dos analistas concorda em assumir a premissa da independência entre esses 5 fatores num mesmo prospecto (Rose, 2001, p.41). Mas pode ser mais preciso considerar como Delfiner (2000, p.2), que alguns fatores são *condicionalmente* independentes e aí sim eles podem ser multiplicados. Ele dá como exemplo que só há migração se houver geração e assim o fator migração deve ser estimado como Pr(migração | existe a rocha geradora), para poder multiplicar pelos outros fatores. Delfiner (2000) considera migração e sincronismo no mesmo fator, como Rose. Mas a dependência mais forte é com o sincronismo: só tem sentido falar em sincronismo de eventos caso esses eventos tenham ocorrido (sincronizados ou não). Por isso esse fator foi listado como condicional à ocorrência das rochas, geometrias, etc. A diferença em relação a Delfiner é que em alguns casos a sísmica pode indicar um *caminho/falha*

da possível migração (com o fator refletindo a chance dessa existência), mesmo que não exista a rocha geradora.

Mas em muitos casos, considerar os fatores condicionais pode ser mais interessante quando se decompõe os mesmos em *outros* fatores, onde alguns sub-fatores são comuns e outros são independentes (Delfiner, 2000). Dessa forma, quais os fatores destacar como principais e quais os sub-fatores que compõem cada fator principal, *depende da aplicação*. Aqui (análise econômica) vale a pena destacar o sincronismo, já que o poder de revelação da perfuração de poços correlacionados é bem maior que a da sísmica 3D para esse fator específico.

Assim, em geral se calcula o fator de chance total FC simplesmente multiplicando esses fatores de chance específicos. Aqui está sendo assumido que existe apenas um objetivo num prospecto. Em caso de múltiplos objetivos (múltiplas zonas de interesse sendo atravessadas pelo mesmo poço pioneiro), então deve ser considerada a dependência no sentido que a revelação de informação do resultado da perfuração no objetivo mais raso irá mudar a probabilidade de sucesso nos objetivos mais profundos do poço. Isso *pode* sugerir a interrupção da perfuração (exercício da opção de abandono), caso os objetivos mais rasos revelem notícias negativas.

Para determinar o fator de chance FC, cada um dos seis fatores deve ser determinado por estudos de especialistas[234]. Rose (2001, p.34-36) recomenda decompor cada um desses fatores principais em sub-fatores de chance, i. é, elementos mais básicos dentro de cada tópico, aprofundando a análise de cada item com estudos qualitativos e/ou quantitativos. No item 3.4.4 será mostrada a metodologia de *inferência Bayesiana* (assim como as suas limitações) para estimar a probabilidade de sucesso de uma distribuição de Bernoulli que, em tese, poderia ser aplicada para sub-fatores de um mesmo play geológico desde que existam dados. Pode-se usar a seguinte escala subjetiva de probabilidade, seja para fatores principais, seja para sub-fatores, que associa frases a cada uma das diversas faixas de valores de probabilidade de sucesso. A idéia é os especialistas se guiarem por essa escala para atribuir probabilidades para cada fator que irá

[234] Em alguns casos são usadas estimativas baseadas na taxa de sucesso média de uma bacia ou área. Mas elas são indicadores pobres do fator de chance específico de um prospecto. Assim, na maioria dos casos, é preferível fazer uma análise específica dos vários fatores (Rose, 2001, p.46).

compor o fator de chance total FC. Essa escala subjetiva de probabilidade é mostrada na Figura 41 (baseada em Rose, 2001, p.37).

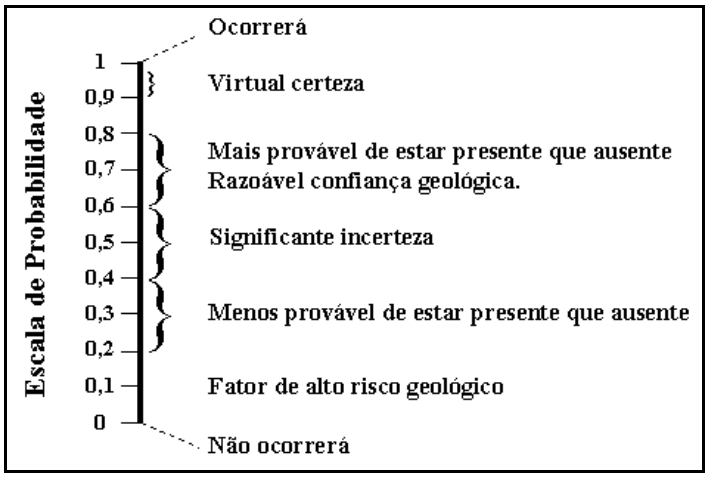

Figura 41 – Escala de Probabilidade Subjetiva para Fator de Chance

Na estimativa dessas probabilidades, o caso mais complicado (ou mais tendencioso) é a análise de prospectos de alto risco, i. é, quando FC ≤ 10%. Conforme Rose (2001, p.47), um resultado "perturbador" tem sido reportado por grandes companhias tais como a Shell, Amoco e Mobil nos anos 80, onde os prospectos com FC ≤ 10% (ex-ante) resultaram em sucessos ex-post em menos de 1% dos casos. Essa tendenciosidade (para cima) de avaliação de prospectos de alto risco é explicada de várias maneiras por Rose, duas delas são: (a) gerentes têm a tendência de querer "desesperadamente" achar grandes campos que esses prospectos podem conter[235], confundindo a necessidade de *adicionar valor* com a necessidade (?) de *perfurar poços*; e (b) em geral os geólogos (e as pessoas) são melhores em julgar a diferença entre FC de 50% e FC de 25% do que entre FCs de 5% e 10%. Essa última razão é consistente com a chamada *teoria dos prospectos* (ver item 6.3.4), que explica porque as pessoas investem em jogos de loterias que têm baixíssimas chances de sucesso e VME claramente negativo desde um ponto de vista "racional" (i. é, VME < 0 para os *verdadeiros* FCs desses jogos, que podem ser calculados com precisão no caso de jogos lotéricos).

Porém, parte dos prospectos de alto risco *pode* ter valores de opções reais elevados devido ao poder de revelação maior de um prospecto que tem como objetivo um novo play geológico e/ou usa um modelo geológico totalmente diferente do que vem sendo usado. A revelação de um novo play geológico

[235] Se o FC é baixo, o VME só será maior que zero se o volume B esperado for grande.

produtivo numa bacia tem efeito global ou regional, pois afeta positivamente inúmeros prospectos em diferentes graus. Assim, uma ou mais companhias de petróleo com prospectos naquela região tem o valor do seu portfólio alavancado. Um exemplo simples disso é apresentado em Smith & Thompson (2004, p.2-3 e 6n), de um portfólio com três prospectos dependentes (eles usaram 8 probabilidades condicionais, além das 3 probabilidades marginais)[236] e mesmos prêmios. O de menor chance de sucesso foi escolhido ser perfurado primeiro por ter maior grau de dependência com os outros (maior poder de revelação).

Prospectos de alto risco podem gerar um valor *agregado* de OR maior, mas a *distribuição* de valor dessa externalidade positiva (em caso de sucesso) pode ser desigual. Nesse caso, pode ser necessária a *análise estratégica* dos "jogadores" com maior benefício de uma revelação positiva num certo play ou bacia, a fim de estimar que firma deve perfurar primeiro os prospectos de alto risco.

E o comportamento dos FCs de uma bacia ao longo do tempo? Rose (2001, p.46) mostra um gráfico típico de uma área dos EUA (norte de Michigan) onde o FC realizado (ex-post) tem um grande crescimento durante um período de três anos e depois uma clara tendência de declínio (entremeados com breves períodos de crescimento). Jones & Smith (1983, Fig. 4) mostram um gráfico similar em outra área dos EUA (sul de Louisiana), onde o FC ex-post cresce durante três anos atingindo um valor de 80% de sucesso, seguindo-se um longo período de declínio. O período de grande crescimento em geral está associado à revelação de um novo play geológico produtivo numa bacia, fazendo revisar para cima não só os FCs *previstos* (ex-ante), como sendo confirmado *ex-post* com um aumento da taxa de descoberta nesse play. Esse é o grande foco de análises como as que serão efetuadas nessa tese, devido ao potencial de alavancagem com opções reais exploratórias. A fase de declínio ocorre depois que as estruturas maiores e mais evidentes nesse play já foram encontradas e assim os prospectos remanescentes têm tanto ex-ante como ex-post FCs menores, pois são menores e/ou mais difíceis de serem encontrados (Rose, 2001, p.47). Isso é razoavelmente consistente com o método chamado de *modelagem de processo de descoberta* (ver o item 3.4.3 e White, 1992, p.88, para referências e discussão), que assume que a existência de pequenos campos é mais freqüente do que a de grandes campos, sendo que estes

[236] Embora a distribuição Bernoulli trivariada só precise de 8 parâmetros para ser definida.

são geralmente descobertos antes do que os pequenos campos. Esse método também assume que as descobertas posteriores (menores) tendem a preencher os vazios da distribuição de volumes descobertos de uma distribuição de probabilidades conhecida (geralmente lognormal).

Um aspecto prático sobre o FC. Geralmente se considera como descoberta (FC = 1 ex-post) apenas se o volume da acumulação (ou da reserva B) for maior que um certo valor mínimo. Isso pode ser conveniente para se trabalhar com distribuições conhecidas (ex.: triangular) para o volume de reservas B, pois se incluir volumes muito pequenos a distribuição poderia ser bi-modal (Delfiner, 2000, Fig.7), dificultando a análise. O importante é a consistência entre o FC e a distribuição a ser usada para o volume. Mas colocar um volume mínimo *muito alto* (apenas os que são hoje econômicos) é inconveniente, pois esquece a natureza dinâmica dos preços do petróleo e da evolução da tecnologia (que pode viabilizar pequenas descobertas inicialmente taxadas de inviáveis). A indústria de petróleo está cheia de exemplos de campos considerados inviáveis que se tornaram atrativos[237]. Por isso é preferível considerar no FC apenas o sucesso geológico (de um volume não desprezível, por ex., a partir de 5 milhões de barris) e não o sucesso comercial (que poderia demandar volumes mínimos de algumas *centenas* de milhões de barris, no caso de campos marítimos).

Mas quem usa estatísticas de sucessos para estimar o FC de uma bacia ou para outros estudos, deve considerar que geralmente é reportado o sucesso comercial (na época) e não o sucesso geológico[238]. Assim, a taxa de sucesso exploratório *comercial*, ao contrário da *geológica*, deve ser correlacionada com o preço do petróleo. Isso é exatamente o que demonstra o conhecido artigo de Forbes & Zampelli (2000), que usa testes econométricos (regressão logística) para mostrar a correlação entre os FC reportados e o preço do petróleo, com dados de

[237] Um exemplo é o campo de Mars em águas profundas do Golfo do México, reportado em Chen & Conover & Kensinger (2001). O bloco foi ganho em leilão pela Shell em 1985, mas com a queda do preço do óleo e a falta de tecnologia a baixo custo só foi perfurado e descoberto em janeiro de 1989. Mas foi considerado inviável economicamente devido ao alto custo. Com o passar do tempo voltou a ser viável e os investimentos iniciaram no segundo semestre de 1993. Outro exemplo ocorreu no campo de Jubarte na Bacia do Espírito Santo, que no ano 2000 era considerado inviável economicamente. Investimentos em VOI e a melhora no preço do petróleo o tornaram viável e estimulou a exploração naquela área. Hoje, as reservas descobertas nesse play geológico (conjunto de campos chamado de "parque das baleias") superam os 2 billhões de barris.

[238] Para o American Petroleum Institute, um poço pioneiro é classificado como sucesso se houver a completação de um poço para produção nesse campo (Forbes & Zampelli, 2000, p.115).

1978 a 1995. Eles mostram que a tecnologia só teve impacto (positivo) nos FCs reportados no período após 1986 (particularmente nos anos 90 com o uso de sísmica 3D, como será visto), sendo que antes o aumento no sucesso reportado foi devido principalmente ao aumento do preço do petróleo[239].

3.4.2. Distribuição Bivariada de Bernoulli: Fator de Chance e Sinal

Esse tópico irá analisar matematicamente o modelo probabilístico para um importante caso prático: como um sinal S altera o fator de chance FC de um prospecto de interesse? O sinal S aqui é especialmente a informação gerada pela perfuração de um poço pioneiro vizinho ou de um registro sísmico. O exemplo discutido no cap. 2 (ver Fig. 3) dá uma idéia da utilidade prática de se aprofundar nessa análise. Lá foram assumidos valores revisados (com o sinal) do fator de chance de um prospecto, sem discuti-los. Isso será feito nesse item.

A abordagem aqui será baseada no uso da medida de aprendizagem η^2 (ou a sua raiz positiva η), que tornará esse cálculo mais simples e intuitivo do que o método tradicional Bayesiano, que usa probabilidades inversas (verossimilhança). A discussão dessas probabilidades inversas na árvore de decisão da Fig. 30 deu uma idéia do método Bayesiano e mostrou que é muito trabalhoso calcular e verificar a consistência dessas probabilidades inversas, além de não ser muito intuitivo. Além disso, a estimativa de probabilidades condicionais não permite comparar diferentes sinais em termos de aprendizagem ou *poder de revelação*. Isso é importante até para a gerência da exploração ter uma métrica que possa comparar o efeito de uma sísmica 3D sobre diferentes prospectos de uma mesma área. Intuitivamente, o poder de revelação da sísmica 3D sobre esses prospectos deve ser mais ou menos o mesmo, mesmo que os FC sejam diferentes. Ou seja, a informatividade deve independer da distribuição a priori da v.a. de interesse, ver discussão sobre a comparação de experimentos (Blackwell). Uma medida de aprendizagem como η^2 resolve o problema de comparação, já as diferentes probabilidades inversas são difíceis de comparar. As métricas de verossimilhança não resolvem, pois foi visto que uma confiabilidade igual a zero, $p(s \mid x) = 0$, pode significar um aprendizado máximo igual ao obtido com $p(s \mid x) = 100\%$.

---

[239] Com o colapso ("jump-down") do preço do petróleo em 1986, o percentual de campos com menos de 2 milhões de barris caiu de 30% para 11% (Forbes & Zampelli, 2000, p.112 n2).

Há muito tempo que a literatura de exploração de petróleo reconhece o fato probabilístico que a revelação de um sinal positivo (ex.: descoberta feita em um bloco vizinho) aumenta a chance de sucesso de encontrar petróleo em prospectos correlacionados e vice-versa (sinal negativo diminui o FC). Isso motivou estudos de comportamento estratégico de firmas numa bacia (exs.: Hendricks & Kovenock, 1989; Hendricks & Porter, 1996), problema a ser analisado no cap.5.

A análise da relação entre as v.a. de Bernoulli FC e S é importante não só em aplicações de jogos de opções reais, como também no caso *sem* interação estratégica da análise de portfólio de exploração de uma companhia de petróleo, a fim de *priorizar* e determinar a *seqüência ótima* de investimentos em informação, i. é, em sísmica 3D e perfuração de poços pioneiros. Dentro da visão da tese, deve-se fazer uma análise integrada por grupos de prospectos correlacionados.

Para revisar o valor do fator de chance, em vez de usar diretamente uma medida de aprendizagem como nessa tese, geralmente são usados os métodos tradicionais Bayesianos (nem mesmo é usado o popular coeficiente de correlação ρ) que em geral demandam uma posterior verificação de *consistência* e/ou cálculo preliminar de probabilidades inversas, além de ter de estimar valores para algumas probabilidades condicionais. Isso é ilustrado no livro texto de Lerche & MacKay (1999, p.287-291) através de um exemplo para calcular o FC após um ou mais sinais, que é bem mais trabalhoso do que o método aqui proposto. Aqui só será necessário estimar a medida de aprendizagem e as probabilidades a priori do FC e do sinal (que ainda poderá ser simplificado se assumir v.a. intercambiáveis). Além disso, se for fácil estimar apenas *uma* dessas probabilidades condicionais, por ex., o valor de $FC^+ = Pr(FC = 1 \mid Sinal = 1)$, então poderá ser diretamente obtida (uma fórmula simples) a medida de aprendizagem η^2. Isso tudo será visto nesse tópico.

O artigo de Wang et al (2000) usa métodos de consistência, mais simples do que o Bayesiano tradicional, para estimar os FC revisados com a revelação do sinal. Além disso, eles também se preocuparam em introduzir uma medida de dependência para estabelecer um processo de revelação (não foi usado esse nome) para um fator de chance. Por isso, será dada uma atenção especial a esse artigo.

Wang et al (2000) estabelecem o valor do fator de chance condicional a um sinal positivo, FC^+, e o valor de FC condicional a um sinal negativo, FC^-, e depois verificam se esses valores são consistentes com o valor inicial. Nesse teste de

consistência, é usado o que eles chamam de "conservação de risco" (nome pouco adequado), que nada mais é do que a *lei das expectativas iteradas* aqui mostrada no Teorema 1 (b) (ou eq. 93). Eles não mencionam o nome mais conhecido, mas a aplicam corretamente. Wang et al (2000, p.3) também assumem outra premissa, embora de forma implícita, i. é, sem mencioná-la: que o fator de chance e o sinal têm a mesma probabilidade de sucesso, i. é, são v.a. intercambiáveis. Isso é um indicador que a premissa de v.a. intercambiáveis é considerada intuitiva pela indústria. Aqui será estudado tanto esse caso (intercambiável) como casos em que isso não é assumido. Enquanto a lei das expectativas iteradas é *necessária* para a consistência probabilística, a premissa de v.a. intercambiáveis é razoável mas *não* é necessária, a não ser em casos extremos que serão vistos[240]. No exemplo de Wang et al (2000, p.3) um o fator de chance inicial (incondicional) $FC_0 = 60\%$ e um sinal pode fazer ele subir para $FC^+ = 76\%$ ou $FC^- = 36\%$. Será visto que isso implica que o sinal também é uma v.a. Be(60%). Se o sinal fosse Be(50%), então se $FC^+ = 76\%$ seria consistente ter $FC^- = 44\%$ (pois 0,6 = 0,5 x 0,76 + 0,5 x 0,44).

Mas Wang et al (2000, p.4) sentem a necessidade de estabelecer alguma medida de dependência para determinar ou o cenário FC^+, ou o cenário FC^-. No caso eles escolhem esse último e criam uma medida de dependência que varia de 0 (independência) a 5 (total dependência) para calcular FC^-. Essa medida entra numa equação simples para o caso de n sinais:

$$\mathbf{(FC^-)^n = FC_0\,(1 - dep/5)^n} \qquad \mathbf{(173)}$$

Ou seja, em caso de n sinais negativos, o fator de chance inicial decai do fator $(1 - dep/5)^n$. Ele não se altera em caso de independência e vai a zero se um sinal negativo for totalmente dependente em relação ao FC. Essa é uma tentativa interessante que vai ser analisado no item 3.4.3, onde será visto que essa equação induz um processo de revelação convergente, recombinante, além de intercambiável, mas com algum problema de consistência do modelo de sinais.

Outra tentativa de modelar a revelação de informação por meio de sinal correlacionado com o FC foi Delfiner (2000). Ele modela a dependência através de uma decomposição de cada fator que compõe o FC total. Essa decomposição é tal que os sub-fatores ou são independentes ou são comuns (totalmente dependentes) e dessa forma se estabelece a estrutura de dependência. A crítica é

[240] Um sinal S só consegue reduzir 100% da variância do FC se for intercambiável com FC.

que nem sempre se pode decompor em fatores extremos como ele faz. Muitas vezes o fator é correlacionado, mas não totalmente dependente. Outra crítica ao artigo de Delfiner foi feita por Smith & Thompson (2004, p. 6), pois ele ao invés de enxergar a oportunidade (valor da flexibilidade de alterar as decisões subseqüentes), conclui apenas que a "*dependência aumenta o risco exploratório*".

Para avaliar o efeito de um *sinal* binário[241] S correlacionado (informação relevante) no fator de chance exploratório FC, é necessário estudar a relação de dependência entre duas distribuições de Bernoulli: o sinal binário S e o FC do prospecto de interesse. A maneira geral de estudar essa dependência é através da especificação da *distribuição de probabilidade conjunta* entre sinal e fator de chance. No caso, a distribuição bivariada de Bernoulli, será estudada a seguir. Essa seção será importante para entender a construção de processos de revelação de Bernoulli, uma classe *especial* de experimentos *dependentes* de Bernoulli.

Uma distribuição multivariada de Bernoulli com k distribuições marginais de Bernoulli, tem $2^k - 1$ parâmetros (Marshall & Olkin, 1985). No caso de interesse da tese, k = 2, e assim a distribuição bivariada de Bernoulli é totalmente definida com três parâmetros, que serão discutidos a seguir. Distribuições trivariadas de Bernoulli ou com k > 2 em geral, não são do interesse da tese, pois a evolução do fator de chance (processo de revelação de Bernoulli) se dará com seqüências de distribuições bivariadas de Bernoulli.

Os três parâmetros usados para definir a distribuição bivariada de Bernoulli são os dois parâmetros das distribuições marginais ou incondicionais (probabilidades de sucesso p e q) e um terceiro parâmetro, que estabelecerá a correlação entre as distribuições marginais. Esse último pode ser, por ex., a probabilidade de sucesso conjunto $p_{11} = Pr(X = 1 \textbf{ e } S = 1)$. Posteriormente, p_{11} será substituído por η. A Tabela 11 apresenta a distribuição bivariada de Bernoulli, assim como as suas distribuições univariadas marginais.

[241] Exs.: poço vizinho pode revelar sucesso (encontrou petróleo) ou insucesso; sísmica 3D pode indicar sucesso (indicação de presença de rocha selante) ou insucesso.

Tabela 11 – Distribuição Bivariada de Bernoulli e Distribuições Marginais

		Sinal S (ex.: sísmica)		Distribuição Marginal de X (FC)
		S = 1	S = 0	
Variável X (ex.: fator de chance)	X = 1	p_{11}	p_{10}	p
	X = 0	p_{01}	p_{00}	1 – p
Distribuição Marginal de S		q	1 – q	

Conforme Spanos (1999, p.288), a densidade (massa) de probabilidade bivariada de Bernoulli pode ser escrita analiticamente como:

$$\mathbf{p(x\,,\,s) \;=\; (p_{00})^{(1-s)\,(1-x)}\,(p_{01})^{(1-s)\;x}\,(p_{10})^{s\,(1-x)}\,(p_{11})^{s\;x}}\text{, x e s = 0, 1} \quad \mathbf{(174)}$$

Por conveniência de notação, especialmente no item sobre processos de revelação de Bernoulli, em vez de trabalhar com p será adotada a notação FC_0 para a probabilidade de sucesso do FC inicial (antes da informação), i. é:

$$\mathbf{FC_0 = p} \quad \mathbf{(175)}$$

A distribuição de revelações (distribuição de expectativas condicionais) nesse caso tem dois cenários, por conveniência chamados de FC^+ e FC^-:

$$\mathbf{FC^+ = \Pr[FC = 1 \mid S = 1] \;=\; E[FC \mid S = 1]} \quad \mathbf{(176)}$$

$$\mathbf{FC^- = \Pr[FC = 1 \mid S = 0] \;=\; E[FC \mid S = 0]} \quad \mathbf{(177)}$$

Assim, FC_0 *evolui* para FC^+ ou FC^-, a depender do sinal S. Esses cenários da distribuição de revelações têm probabilidades de ocorrência de q e (1 – q), respectivamente. A Figura 42 mostra a distribuição de revelações para um sinal, sendo à esquerda como um processo de evolução dependente de um sinal e à direita a função probabilidade (massa) da distribuição de revelações de Bernoulli.

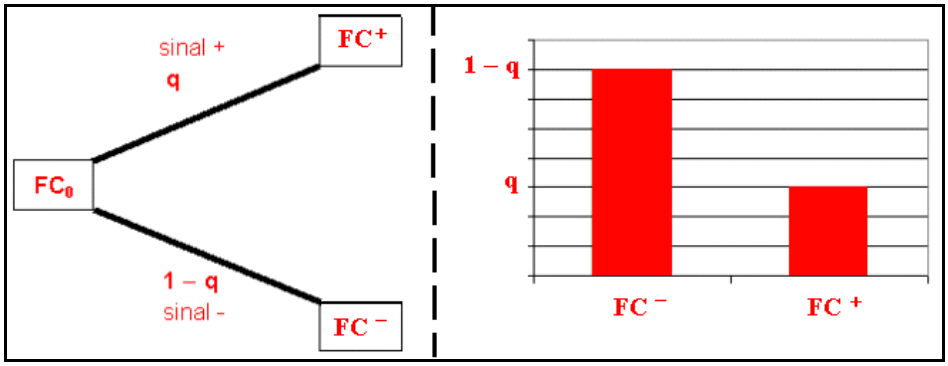

Figura 42 – Distribuição de Revelações de Bernoulli com Um Sinal

A variância da distribuição de revelações $Var[R_{FC}(S)]$ é, por definição de variância, igual a:

$$\mathbf{Var[R_{FC}(S)] = q\,(FC^{+} - FC_0)^2 + (1 - q)\,(FC^{-} - FC_0)^2} \quad \mathbf{(178)}$$

A variância da distribuição de revelações também pode ser escrita em função da medida de aprendizagem η^2 usando a eq. (107), lembrando que variância da distribuição a priori é $Var[FC] = FC_0\,(1 - FC_0)$. Logo,

$$\mathbf{Var[R_{FC}(S)] = \eta^2(FC \mid S)\;\; FC_0\,(1 - FC_0)} \quad \mathbf{(179)}$$

A teoria elementar de probabilidade sobre distribuição marginais e conjuntas, permite escrever as seguintes equações para as probabilidades de sucesso marginais (ver Tabela 11), as quais serão usadas em demonstrações:

$$\mathbf{FC_0 = p = p_{11} + p_{10}} \quad \mathbf{(180)}$$

$$\mathbf{q = p_{11} + p_{01}} \quad \mathbf{(181)}$$

Para a distribuição conjunta p(x, s) ser uma distribuição de probabilidade, os seus quatro cenários tem de ter probabilidades somando 1, ou seja:

$$\mathbf{p_{11} + p_{10} + p_{01} + p_{00} = 1} \quad \mathbf{(182)}$$

Os valores dos cenários da distribuição de revelações (eqs. 176 e 177) podem ser escritos em termos das variáveis mais básicas FC_0, q e p_{11}. Para isso, basta usar a definição de probabilidade condicional, $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$:

$$\mathbf{FC^{+} = \frac{p_{11}}{q}} \quad \mathbf{(183)}$$

$$\mathbf{FC^{-} = \frac{p_{10}}{1 - q} = \frac{FC_0 - p_{11}}{1 - q}} \quad \mathbf{(184)}$$

Onde foi usada a eq. (180) na eq. (184). Combinando as eqs. (180) e (181) na eq. (182), pode-se tirar o valor da probabilidade p_{00} em termos das variáveis mais básicas FC_0, q e p_{11}, o que será útil em seguida:

$$\mathbf{p_{00} = 1 + p_{11} - FC_0 - q} \quad \mathbf{(185)}$$

Agora serão apresentadas as equações de confiabilidade (verossimilhança) da informação S, chamadas de L(S = 1) e L(S = 0). Como antes, serão usadas ambas, a definição de probabilidade condicional e a Tabela 11:

$$\mathbf{L(S = 1) = Pr(S = 1 \mid FC = 1) = \frac{p_{11}}{FC_0}} \quad \mathbf{(186)}$$

$$\mathbf{L(S = 0) = Pr(S = 0 \mid FC = 0) = \frac{p_{00}}{1 - FC_0} = \frac{1 + p_{11} - FC_0 - q}{1 - FC_0}} \quad \mathbf{(187)}$$

Onde foi usada a eq. (185) na eq. (187), a fim de expressá-la em termos das variáveis mais básicas FC_0, q e p_{11}.

Agora será estabelecida a condição de independência entre as v.a. de Bernoulli FC e S. Da literatura elementar de probabilidade (ex. DeGroot & Schervish, 2002, p.56), sabe-se que FC e S são independentes se e somente se ocorrer P(A | B) = P(A) e P(B | A) = P(B). Como P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B), é fácil provar (ou ver Kocherlakota & Kocherlakota, 1992, p.57) que FC e S são v.a. independentes de Bernoulli se e somente se a probabilidade conjunta de sucesso Pr(FC∩S) = p_{11} for igual ao produto das probabilidades marginais de sucesso, i.é:

$$\textbf{FC e S independentes} \Leftrightarrow p_{11} = FC_0\, q \qquad (188)$$

A covariância entre FC e S (ver eq. 111) pode ser facilmente deduzida (ou ver Kocherlakota & Kocherlakota, 1992, p.57) para essas v.a. de Bernoulli como:

$$\textbf{Cov(FC, S)} = p_{11} - FC_0\, q \qquad (189)$$

Como Cov(FC, S) = 0 se e somente se $p_{11} = FC_0\, q$, então no caso de distribuição bivariada de Bernoulli, covariância igual a zero implica em independência, o que não ocorre em casos mais gerais de outras distribuições.

O coeficiente de correlação ρ(FC, S), que é a covariância normalizada, para o caso de v.a. de Bernoulli, é dada por (usar eq. 112 ou ver Kocherlakota & Kocherlakota, 1992, p.57):

$$\rho(FC, S) = \frac{p_{11} - FC_0\, q}{\sqrt{FC_0\,(1 - FC_0)\, q\,(1 - q)}} \qquad (190)$$

De forma análoga à covariância, para a distribuição bivariada de Bernoulli, ao contrário da regra geral, v.a. não-correlacionadas implicam em v.a. independentes (prova: eqs. 188 e 190):

$$\rho(FC, S) = 0 \Leftrightarrow \textbf{FC e S independentes} \qquad (191)$$

Assim, dependência implica em |ρ(X, S)| > 0 e os termos "correlação" e "dependência" se equivalem no caso de distribuição bivariada de Bernoulli. Por isso é correto dizer "prospectos correlacionados" para expressar dependência.

Lema 6 (sinal da correlação na distribuição bivariada de Bernoulli): Sejam as v.a. não-triviais FC ~ Be(FC_0) e S ~ Be(q). Então os casos não-correlacionados, com correlação positiva e com correlação negativa são, respectivamente:

$$\rho(FC, S) = 0 \Leftrightarrow p_{11} = FC_0\, q \qquad (192)$$

$$\rho(FC, S) > 0 \Leftrightarrow p_{11} > FC_0\, q \qquad (193)$$

$$\rho(FC, S) < 0 \Leftrightarrow p_{11} < FC_0\, q \qquad (194)$$

Prova: Direto da eq. (190).

Em adição, a menos que seja especificado em contrário, o interesse das aplicações dessa tese é para o caso de correlação positiva entre FC e S, de forma que FC^+ não será menor que FC_0 e FC^- não será maior que FC_0. Ou seja:

$$\mathbf{FC^+ \geq FC_0 \quad e \quad FC^- \leq FC_0} \tag{195}$$

O caso da correlação negativa é um problema análogo ao caso aqui analisado, com a notação trocada, já que FC^+ passaria a ser menor do que FC_0, etc. As raízes da medida de aprendizagem η^2 são flexíveis para indicar correlação positiva (+ η) ou negativa (– η). Mas em geral o que importa é o poder de revelação do sinal para revisar os valores de FC, e não o sentido (positivo ou negativo) da correlação, já que ambos os sentidos geram ganhos de aprendizagem.

Os limites de Fréchet-Hoeffding (ver item 3.3.1.1 e eqs. 101 a 103) para a probabilidade de duplo sucesso p_{11} e para o coeficiente de correlação são dadas pelas equações abaixo (prova: Joe, 1997, p.210):

$$\mathbf{Max\{0, FC_0 + q - 1\} \leq p_{11} \leq Min\{ FC_0, q\}} \tag{196}$$

$$\mathbf{Max}\left\{-\sqrt{\frac{FC_0\ q}{(1-FC_0)\ (1-q)}}\ ,\ -\sqrt{\frac{(1-FC_0)\ (1-q)}{FC_0\ q}}\right\} \leq \rho \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{Min\{FC_0\ ,\ q\}\ (1-Max\{FC_0\ ,\ q\})}{Max\{FC_0\ ,\ q\}\ (1-Min\{FC_0\ ,\ q\})}} \tag{197}$$

A prova da eq. (196) é simples tanto pelas eqs. (101) a (103) como observando a Tabela 11 e notando que as probabilidades tem de ser não-negativas (ex.: $p_{00} \geq 0$ na eq. 185). Note que seria válida a eq. (196) também para p_{00} no lugar de p_{11}. Já a prova da eq. (197) precisa de colocar p_{11} em função de ρ e substituir na eq. (196), além de álgebra cuidadosa.

Note na eq. (197) que é sempre possível o caso de $\rho = 0$, que aqui significa independência, pois ρ fica entre um número positivo e outro negativo. Agora será apresentado o Teorema 4 para a medida de aprendizagem η^2.

Teorema 4 (medida de aprendizagem η^2 para distribuição bivariada de Bernoulli): Sejam as distribuições marginais FC ~ Be(FC_0) e S ~ Be(q) não-triviais de uma distribuição bivariada de Bernoulli e seja a medida de aprendizagem η^2 definida pela eq. (106) ou pela eq.(107), então:

(a) As probabilidades de sucesso reveladas por S, i. é, FC^+ e FC^-, em caso de correlação *não*-negativa, são:

$$\mathbf{FC^+ = FC_0 + \sqrt{\frac{1-q}{q}}\ \sqrt{FC_0\ (1-FC_0)}\ \sqrt{\eta^2(FC\mid S)}} \qquad \mathbf{(198)}$$

$$\mathbf{FC^- = FC_0 - \sqrt{\frac{q}{1-q}}\ \sqrt{FC_0\ (1-FC_0)}\ \sqrt{\eta^2(FC\mid S)}} \qquad \mathbf{(199)}$$

Em caso de correlação não-positiva, vale as eqs. (198) e (199), mas com o sinal após FC_0 invertido.

(b) A medida de aprendizagem η^2 é igual ao quadrado do coeficiente de correlação ρ:

$$\mathbf{\eta^2(FC\mid S) = \rho^2(FC, S) = \frac{(p_{11} - FC_0\ q)^2}{FC_0\ (1-FC_0)\ q\ (1-q)}} \qquad \mathbf{(200)}$$

(c) A medida de aprendizagem η^2 é simétrica:

$$\mathbf{X \text{ e } S \sim \text{Bernoulli} \Rightarrow \eta^2(FC\mid S) = \eta^2(S\mid FC)} \qquad \mathbf{(201)}$$

(d) A medida η^2 é igual a zero se e somente se FC e S são independentes:

$$\mathbf{\eta^2(FC\mid S) = 0 \Leftrightarrow FC \text{ e } S \text{ independentes}} \qquad \mathbf{(202)}$$

(e) Os limites de Fréchet-Hoeffding, expressos em termos de η^2, para existência da distribuição bivariada de Bernoulli, sendo possíveis aprendizados tanto com correlação positiva como com negativa, são:

$$\mathbf{0 \le \eta^2 \le Max\left\{ Max\left\{ \frac{FC_0\ q}{(1-FC_0)\ (1-q)}\ ,\ \frac{(1-FC_0)\ (1-q)}{FC_0\ q} \right\},\ \frac{Min\{FC_0\ , q\}\ (1-Max\{FC_0\ , q\})}{Max\{FC_0\ , q\}\ (1-Min\{FC_0\ , q\})} \right\}} \qquad \mathbf{(203)}$$

Prova: (a) Pelo Teorema 1 (b), a média da distribuição de revelações é igual à média da distribuição a priori, que no caso é FC_0. Logo:

$FC_0 = q\ FC^+ + (1-q)\ FC^- \Rightarrow$

$$\mathbf{FC^- = \frac{FC_0 - q\ FC^+}{1-q}} \qquad \mathbf{(204)}$$

Substituindo na eq. (178) que dá a variância da distribuição de revelações:

$$\text{Var}[R_{FC}(S)] = q\ (FC^+ - FC_0)^2 + (1-q)\left(\frac{FC_0 - q\ FC^+}{1-q} - FC_0\right)^2$$

Após alguma álgebra, a equação acima se reduz para:

$$\mathbf{Var[R_{FC}(S)]} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-q}} \mathbf{(FC^{+} - FC_0)^2} \tag{205}$$

Mas a variância da distribuição de revelações, baseada no Teorema 1 (c), também pode ser escrita como na eq. (179). Combinando as eqs. (179) e (205):

$$\eta^2(FC \mid S) \;\; FC_0 (1 - FC_0) \;\; = \frac{q}{1-q} (FC^{+} - FC_0)^2$$

Tirando o valor de FC^{+}, existem duas possibilidades (a depender do sinal ±):

$$\mathbf{FC^{+} = FC_0 \pm \sqrt{\frac{1-q}{q}} \sqrt{FC_0 \; (1 - FC_0)} \sqrt{\eta^2 (FC \mid S)}} \tag{206}$$

Como o segundo termo da eq. (206) é sempre positivo ou zero, a condição de correlação positiva (ou melhor, não-negativa) é dada pela eq. (195) e assim o sinal da eq. (206) é positivo em caso de correlação positiva, e é negativo em caso de correlação negativa. A prova da eq. (199) é análoga a essa prova. □

(b) Substituindo a eq. (206) na eq. (183) e elevando ao quadrado para explicitar η^2 (note que tanto faz usar o sinal positivo ou negativo da eq. 206), se obtém a eq. (200). □

(c) Pode-se provar através dos mesmos passos usados para obter a eq. (200) mas partindo de $\eta^2(S \mid FC)$ em vez de $\eta^2(FC \mid S)$. Mas bem mais simples é notar que se permutar as v.a. q e FC_0 na eq. (200), a eq.(200) permanece exatamente a mesma. Outra maneira é, já que foi provado que para v.a. de Bernoulli η^2 é igual a ρ^2, e esse último é simétrico, então também será simétrico η^2. □

(d) Basta usar a eq.(200) na eq. (191). Ou seja, o que vale para ρ^2, vale para η^2 no caso de distribuição bivariada de Bernoulli. □

(e) Primeiro note que o limite inferior de η^2 foi dado pela Proposição 6 (c), eq. (127). Ele é sempre viável pois no comentário à eq. (127) foi visto que o caso de independência é sempre viável (é sempre possível construir a distribuição bivariada de Bernoulli). Assim, apenas o limite superior é que *pode* não ser igual ao seu máximo, i. é, 1. Para deduzi-lo, um caminho é tirar a probabilidade p_{11} em função de η^2, usando a eq. (206) e substituindo na eq. (183):

$$\mathbf{p_{11} = FC_0 \, q \pm \sqrt{FC_0 \; (1 - FC_0)} \sqrt{q \, (1-q)} \sqrt{\eta^2 (FC \mid S)}} \tag{207}$$

A seguir, substituir a eq. (207) na eq. (196) e após uma álgebra cuidadosa se obtém o lado direito da eq. (203). Note que a eq. (207) tem de ser substituída para os dois casos de sinais. Como são possíveis aprendizados tanto com correlação positiva como com negativa, vale o máximo dos dois casos. Se fosse permitido aprendizado apenas com correlação positiva, na eq. (203), em vez do máximo externo, teria de verificar qual das suas duas parcelas tem correlação positiva, que passaria a ser o limite *restrito* de Fréchet-Hoeffding para η^2.

Outra maneira é usar diretamente a eq. (197), notando que foi provado pela eq. (200) que η^2 é o quadrado de ρ para v.a. de Bernoulli[242]. □

A eq. (207) serve também para substituir a variável básica p_{11} por η^2, que tem um significado mais intuitivo de redução de incerteza, além das outras vantagens já discutidas. O limite superior de Fréchet-Hoeffding para η^2 da eq. (203) muitas vezes é igual a 1, o seu limite natural. Isso será visto em breve.

As eqs. (198) e (199) são não-lineares em η^2, mas <u>são lineares em η</u>, a raiz positiva. As eqs. (198) e (199) também podem ser vistas do ponto de vista da variância da distribuição de revelações, eq. (179), ou seja:

$$\mathbf{FC^{+} = FC_0 + \sqrt{\frac{1-q}{q}}\ \sqrt{Var[R_{FC}(S)]}} \qquad \mathbf{(208)}$$

$$\mathbf{FC^{-} = FC_0 - \sqrt{\frac{q}{1-q}}\ \sqrt{Var[R_{FC}(S)]}} \qquad \mathbf{(209)}$$

As eqs. (198) e (199) serão usadas em aplicações, mas com uma premissa a ser vista, elas ficarão ainda mais simples. Isso é discutido a seguir.

Um caso particular importante é quando as v.a. de Bernoulli FC e S são intercambiáveis. Nesse tipo de problema (fator de chance exploratório), a intercambialidade é considerada intuitiva, como por exemplo foi assumido de forma implícita em Wang et al (2000), comentado no item 3.4.1.

<u>Definição</u>. **Variáveis aleatórias intercambiáveis**: Duas ou mais v.a. são ditas intercambiáveis ("*exchangeable*" ou "*interchangeable*" em inglês) se sua distribuição conjunta é a mesma não importa a ordem em que as variáveis são observadas (Ross, 1998, p.288). Ou seja, as v.a. discretas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são

[242] A planilha joint-dist_Bernoulli.xls do CD-Rom permite verificar experimentalmente a eq. (203), i. é, os limites de Fréchet-Hoeffding, e também as condições de correlações positivas.

intercambiáveis se para toda permutação $i_1, \ldots, i_n$ dos inteiros 1, …, n, a igualdade abaixo permanece válida:

$$\mathbf{Pr\{Xi_1 = x_1, Xi_2 = x_2, \ldots, Xi_n = x_n\} = Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}} \quad \mathbf{(210)}$$

Variáveis intercambiáveis, também chamadas de v.a. *simetricamente dependentes* (Rotar, 1997, p.231), ocorrem naturalmente em muitas situações práticas de interesse e por isso tem sido focado na literatura de distribuição multivariada e principalmente na estatística Bayesiana. Alguns exemplos: Fréchet (1943, p.107-121), O'Hagan (1994, p. 112-118, 156 e 290), Joe (1997, p. 211, 216-217, 222, 227-229), Jaynes (2003, p. 62, 620), Rotar (1997, p.231-232). O conhecido *modelo de urna de Pólya* é outro exemplo de modelo com variáveis intercambiáveis (Ross, 1998, p.289-290). O sorteio sem reposição de bolas de uma urna finita faz os sorteios seqüenciais não serem independentes, mas os sorteios são condicionalmente independentes, i. é, são intercambiáveis (nesse caso sem reposição, o número de sucessos é dado pela distribuição hipergeométrica).

O conceito de *intercambialidade* é atribuído a De Finetti, com um famoso teorema publicado em 1937 justamente para seqüências de Bernoulli. Na visão Bayesiana, esse é um dos mais importantes conceitos para modelos probabilísticos pois "*evita conceitos fortes de independência ... justifica a adoção de modelos paramétricos com base em condições fracas de simetria*" (French & Insua, 2000, p.70). Além disso, "*...provê uma ligação entre as idéias frequentistas e Bayesiana ...sugere que os limites de freqüências são probabilidades condicionais, dada a informação ainda não disponível*" (French & Insua, 2000, p.71).

No caso da distribuição bivariada de Bernoulli, as variáveis "sinal" e "fator de chance" são intercambiáveis se e somente se as suas probabilidades de sucesso incondicionais (marginais) são iguais. Isso é expresso na proposição abaixo.

Proposição 7: Sejam FC e S v.a. não triviais de Bernoulli intercambiáveis e a distribuição bivariada de Bernoulli definida por suas probabilidades de sucesso FC_0 e q e pela medida de aprendizagem η^2. Então:

(a) As distribuições marginais são iguais. Também, se as distribuições marginais são iguais, então as v.a. são intercambiáveis, i. é:

$$\mathbf{FC \text{ e } S \text{ intercambiáveis} \Leftrightarrow FC_0 = q} \quad \mathbf{(211)}$$

(b) É possível a revelação total, $\eta^2 = 1$, para qualquer valor não trivial de FC_0 e q. Ou seja, os limites de Fréchet-Hoeffding não restringem o uso de η^2:

$$\textbf{Limites de Fréchet-Hoeffding:} \quad 0 \leq \eta^2 \leq 1 \qquad (212)$$

(c) As probabilidades de sucesso reveladas por S, i. é, FC^+ e FC^-, em caso de correlação *não*-negativa, são:

$$FC^+ = FC_0 + (1 - FC_0)\ \eta \qquad (213)$$

$$FC^- = FC_0 - FC_0\ \eta \qquad (214)$$

Em caso de correlação não-positiva, vale as eqs. (213) e (214), mas com o sinal após FC_0 invertido.

Prova: (a) Se S e FC são variáveis intercambiáveis então $p_{0,1} = p_{1,0}$ por definição. Logo, é possível igualar as eqs. (180) e (181) e obter o sentido $\Rightarrow$ da eq. (211). A volta é similar, se $FC_0 = q$ então pode-se igualar as eqs. (180) e (181) e concluir que $p_{0,1} = p_{1,0}$. Nesse caso, as v.a. são intercambiáveis por definição. □

(b) Como o limite superior de η^2 é 1, dado pela Proposição 6 (c), eq. (127), se uma das parcelas do lado direito da desigualdade da eq. (203) for igual a 1 ele será também o máximo. Como $FC_0 = q$, basta substituir isso na segunda parcela do máximo externo (parcela da linha de baixo) da eq. (207), que se obtém o valor de 1. O limite inferior já tinha sido provado no Teorema 4. □

(c) Basta substituir $FC_0 = q$ nas eqs. (198) e (199), que se obtém as eqs. (213) e (214). □

Note nas eqs. (213) e (214) que se está usando a raiz positiva da medida η^2. Assim se obtém equações lineares bem simples em η. Essas duas equações serão as mais usadas em aplicações. Além disso, note que a diferença de probabilidades de sucessos reveladas FC^+ e FC^- é exatamente η:

$$FC^+ - FC^- = \eta \qquad (215)$$

Assim, no caso de v.a. de Bernoulli, a raiz positiva η parece ser mais intuitiva que η^2. Isso não foi verdade por exemplo quando se analisou exemplo do item 3.2.3 (Figuras 35 e 36), onde η^2 teve mais apelo intuitivo (cada um dos três poços com incerteza reduziam 1/3 da incerteza). Já aqui, a raiz positiva η é mais intuitiva pois dá o "spread" percentual entre os cenários FC^+ e FC^-. Na literatura

de psicologia também existem aplicações em que se reporta que o "eta" é mais intuitivo ou melhor, e outras em que o "eta squared" é melhor.

Para ilustrar as eqs. (213) e (214), seja o caso de um sinal de um poço vizinho intercambiável com o fator de chance do prospecto de interesse. Seja a probabilidade de sucesso (para ambas as v.a.) $FC_0 = 30\%$. Então, a depender do poder de revelação do sinal do poço vizinho, podem ser reveladas as seguintes probabilidades de sucesso FC^+ e FC^-, mostradas na Figura 43.

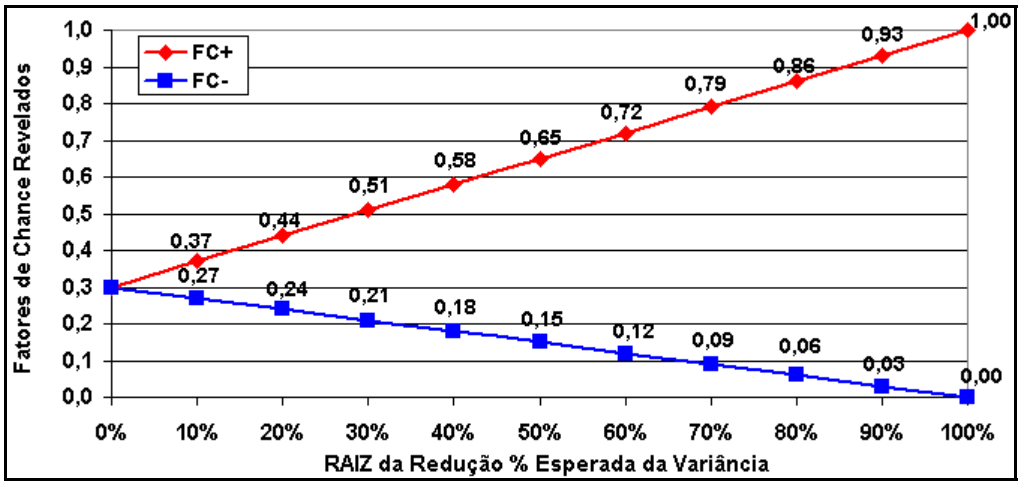

Figura 43 - Fatores de Chance Revelados x Raiz da Redução Esperada da Variância

Note que qualquer valor de η é possível, conforme a Proposição 7 (b). Em caso de revelação total, então se saberá com certeza se existe ou não petróleo na jazida, i. é, se o FC revelado é igual a 1 ou a zero. Note também a equação do "spread" (eq. 215) na diferença entre as linhas da Figura 43. Esse gráfico é representativo da simplicidade do método e seu apelo intuitivo.

Lema 7 (condição necessária para haver revelação total): Sejam FC e S v.a. não triviais de Bernoulli e seja a distribuição bivariada de Bernoulli definida por suas probabilidades de sucesso FC_0 e q e pela medida de aprendizagem η^2. A condição necessária para haver revelação total de uma variável de interesse FC é que o sinal S seja intercambiável com FC, i. é:

$$\eta^2(FC \mid S) = 1 \;\Rightarrow\; \textbf{FC e S v.a. intercambiáveis} \qquad (216)$$

Prova: Se $\eta^2(FC \mid S) = 1$ então as variâncias posteriores são iguais a zero, i. é, $FC^+ = 1$ e $FC^- = 0$ se a correlação é positiva ou $FC^+ = 0$ e $FC^- = 1$ se a correlação é negativa. Suponha o primeiro caso. Substituindo $FC^+ = 1$, $FC^- = 0$ e $\eta^2 = 1$ nas eqs. (198) e (199) e depois fazendo a diferença entre essas duas equações, i. é, eq. (198) – eq. (199), se obtém que FC0 = q. A suposição de

correlação negativa leva à mesma conclusão com os mesmos passos. Logo, FC e S são v.a. intercambiáveis. □

Assim, apenas um sinal intercambiável é forte o suficiente para poder ser *candidato* a um sinal que revele toda a verdade sobre FC. Ou seja, se ele for intercambiável é viável que $\eta^2(FC \mid S) = 1$, caso contrário é inviável. Isso pode ser visto como uma conseqüência dos limites de Fréchet-Hoeffding.

Um exemplo clássico de VOI em que se pode aplicar a teoria acima é o de Marschak (1959, p. 90). Marschak usa o critério de confiabilidade (verossimilhança) para determinar as probabilidades de sucesso após o sinal. Esse sinal é o parecer de um consultor que tem uma confiabilidade igual a p^c válida para os dois cenários revelados FC^+ e FC^-. Por ex., se a confiabilidade do consultor é de 70 % e ele diz que vai haver sucesso, então o comprador do conselho revisa a sua probabilidade de sucesso para $FC^+ = 70\%$, e se ele diz que vai haver insucesso, então o comprador do conselho revisa a sua probabilidade de sucesso no cenário revelado (más notícias) para $FC^- = 30\%$ (pois existe 70% de chances do consultor estar certo e a chance de fracasso ser $70\% = 1 - FC^-$). Sem o conselho do consultor, ele usa a sua probabilidade de sucesso a priori igual a FC_0. O comprador decide se vai investir usando uma probabilidade de sucesso e quer saber se o valor do conselho desse consultor, i. é, o VOI.

Nesse esquema de Marschak que usa a confiabilidade para estipular as probabilidades reveladas de sucesso, para existir a distribuição conjunta FC e S de Bernoulli, ou seja, ser consistente em termos de probabilidade (atender aos limites de Fréchet-Hoeffding), é necessário ajustar a probabilidade de revelação dos sinais q (boas notícias do consultor) e 1 – q (más notícias). Apesar do atrativo da simplicidade, pode-se mostrar facilmente que o intervalo válido para p^c, i. é, que permite uma probabilidade válida $q \in [0, 1]$ é muito mais restrito do que o caso em que se usa uma medida de aprendizagem (η^2 ou η) para estabelecer essas probabilidades de sucesso reveladas. Isso porque a *lei das expectativas iteradas* (ou o Teorema 1 b) diz que para haver consistência a equação abaixo deve ser obedecida (o lado esquerdo usa o esquema de confiabilidade de Marschak):

$$\mathbf{FC_0 = q\,FC^+ + (1-q)\,FC^- = q\,p^c + (1-q)(1-p^c)} \qquad \mathbf{(217)}$$

Tirando o valor de q, vem:

$$q = \frac{FC_0 + p^c - 1}{2\,p^c - 1} \qquad (218)$$

Por ex., se $FC_0 = 40\%$ e $p^c = 70\%$, então a eq. (218) indica que q tem de ser igual a 25% para existir consistência. Mas se $p^c = 60\%$, então q = 0, indicando que com certeza ele dará uma má notícia nesse modelo. Já se $p^c = 55\%$, então q dá um valor negativo (– 50%), i. é, uma inconsistência. Ou seja, é muito mais fácil trabalhar com uma medida de aprendizado η^2 do que com a confiabilidade. Para ilustrar, em cima desse exemplo de Marschak (1959, p.90), foi *adaptado* um problema de VOI para fator de chance exploratório, usando o VME (eq. 3), considerando o VOI como a diferença do VME com a informação e sem a informação[243]. A Figura 44 mostra o VOI para o esquema de confiabilidade de Marschak, considerando apenas consultores não mentirosos (i. é, apenas confiabilidades iguais ou superiores a 50%), para diversos probabilidades de sucesso a priori FC_0. Como antes, esse VOI é bruto (sem o custo do conselho).

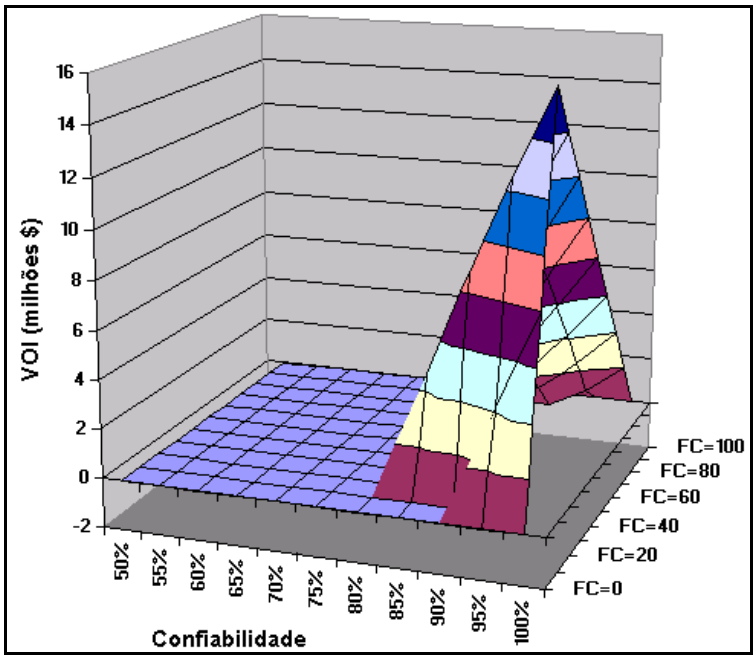

Figura 44 – VOI versus Confiabilidade para Diversos FC_0

Para o mesmo problema, a Figura 45 mostra o VOI usando a medida de aprendizagem η^2 em vez da confiabilidade, para diversos.

[243] Ver planilhas do CD-Rom Marschak_inf_Bernoulli.xls e Marschak_inf_Bernoulli-controle_eta.xls, com os detalhes numéricos e demais fórmulas.

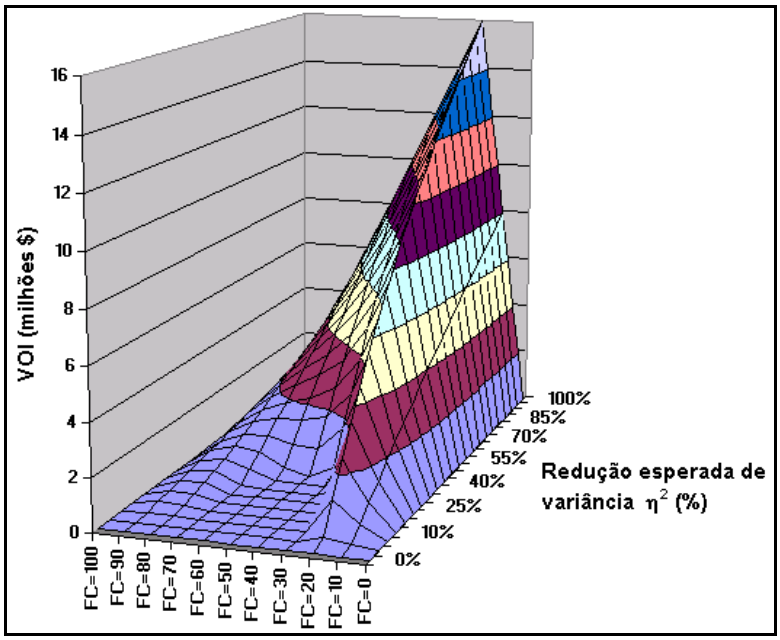

Figura 45 - VOI versus Medida η^2 para Diversos FC_0

Note que o intervalo de aplicabilidade da medida η^2 é bem maior do que a confiabilidade. Mesmo assim, se a aprendizagem for muito pequena, o VOI pode ser zero, por ex., um prospecto com VME ex-ante negativo, pode continuar a ser negativo após a informação e assim o prospecto continuaria a não ser perfurado em nenhum dos dois possíveis cenários revelados. Uma figura parecida é apresentada em Lawrence (1999, p.218) para um certo índice de informatividade θ. Em Lawrence (1999, ver p.209) esse índice pode ser o quadrado do coeficiente de correlação, para o caso de distribuição bivariada normal (devido a ρ^2 ser suficiente no sentido de Blackwell no caso de distribuição normal). Nesse caso específico, a abordagem recomendada pela tese coincide com a de Lawrence[244].

3.4.3. Alguns Processos de Revelação de Bernoulli

3.4.3.1. Processos de Descoberta e Processos de Revelação de Bernoulli

Em termos de análise econômica de projetos de valor da informação, e em particular de projetos de exploração de petróleo, pode-se caracterizar pelo menos dois tipos de processos interligados:

[244] Pena que Lawrence não tenha desenvolvido mais esse ponto, entrando nas complicações de matrizes de verossimilhança para os outros casos. Lawrence também não discutiu a questão de consistência da distribuição conjunta do ponto de vista dos limites de Fréchet-Hoeffding.

1) *processo de descoberta*, que consiste numa seqüência de exercícios de opções de aprendizagem até ocorrer uma descoberta; e
2) *processo de revelação* que modela o efeito probabilístico na variável de interesse de um processo de descoberta (exercícios de opções).

A seguinte definição *detalhada* de processo de descoberta é aplicada ao caso de exploração de petróleo e é baseada no artigo clássico dos professores do MIT e Harvard, Kaufman & Balcer & Kruyt (1975). Aqui a definição é adaptada para o contexto de opções reais e de valor dinâmico da informação na exploração.

Definição. **Processo de Descoberta Exploratória**: é uma seqüência de exercícios de opções reais de aprendizagem com diferentes custos e tempos de aprendizagem e diferentes poderes de revelação que culminam na descoberta de depósitos de petróleo. Essa seqüência de atividades pode ser: reconhecimento de superfície (afloramento geológico, etc.), pesquisas magnéticas, graviométricas, sísmicas e perfuração de um ou mais poços pioneiros.

Para operacionalizar o seu modelo, Kaufman & Balcer & Kruyt (1975) dividem o processo de descoberta em quatro módulos ou principais componentes: (a) submodelo de *volumes* descobertos por ordem de descoberta; (b) submodelo de *sucessos e falhas* (realizações da v.a. fator de chance); (c) submodelo *econômico* de um simples prospecto; e (d) submodelo de *mercado*. Assim, o modelo desses autores resulta em volumes de reservas em função de preços e características técnicas das reservas.

Nessa tese o processo de descoberta será modelado nas aplicações (ver cap.5) considerando o exercício ótimo de opções de aprendizagem, cujas conseqüências são modeladas com processos de revelação. Além disso, no processo de descoberta será considerada a natureza dinâmica dos preços do petróleo e outros fatores, inclusive a interação estratégica entre firmas de petróleo.

Como o conceito de processo de revelação foi estabelecido no item 3.2.2, o objetivo principal desse tópico é mais específico. O objetivo é descrever um processo de revelação em termos do impacto de uma seqüência de sinais em um fator de chance específico de um prospecto. Essa análise pode ser estendida para se estimar o número de descobertas esperadas num intervalo de tempo ou para um dado esforço (investimento) exploratório acumulado.

Nesse aspecto, McCray (1975, p.223-224) aponta quatro métodos para estimar a quantidade de descobertas: (1) *volume de sedimentos*, calcula-se esse

volume em uma bacia ou região e multiplica-se por um fator de chance *unitário* (por m^3 de sedimentos); (2) *binomial* (FC Constant), onde se assume um fator de chance médio e usa-se a distribuição binomial, i. é, considera n experimentos *independentes* de Bernoulli com a *mesma* probabilidade de sucesso; (3) *quantidade fixa de campos* numa região, com o número de descobertas sendo modelada com uma distribuição hipergeométrica (experimentos de Bernoulli *sem* reposição), i. é, assumindo uma forma *fraca de dependência*; e (4) *predições de tendências* ("trend predictions"), através da identificação de fatores os quais as descobertas estão correlacionadas, de forma a gerar tendências baseadas na extrapolação do passado de outras bacias para a bacia em estudo[245].

O método sugerido nessa tese apresenta uma alternativa aos quatro métodos descritos por McCray (1975, p.223-224), embora possa ser integrado com o quarto método. O método proposto foi testado em um projeto PUC-Petrobras[246], usando a simulação de Monte Carlo e a teoria de processos de revelação para modelar e avaliar o exercício ótimo de opções reais numa bacia ao longo de um período de 20 anos. Em alguns caminhos simulados ocorrem boas notícias (descobertas) que produzem revelações positivas de informações, elevando os fatores de chance de outros prospectos de um bloco ou região que estejam no mesmo play geológico. Nos casos de insucesso, os fatores de chance de prospectos do mesmo play geológico são reduzidos, o que por sua vez reduz a probabilidade de novos exercícios ótimos de opções nesse play. Ou seja, é assumida uma dependência bem mais forte e realista do que a mencionada por McCray com a distribuição hipergeométrica.

O processo de revelação é em geral dependente do caminho ("path-dependent") e por isso é geralmente necessário usar a simulação de Monte Carlo. Isso significa que, em geral, um processo de revelação não é Markoviano. Por isso, em geral não podem ser usados métodos tais como as *cadeias de Markov*. Em casos específicos, nem sempre convenientes, um processo de revelação de um fator de chance pode ser Markoviano.

---

[245] Ex.: assume que o número de campos descobertos é proporcional ao número de poços perfurados vezes a área alvo (McCray, 1975, p.227). Calibra-se o modelo com dados passados.

[246] Do Pravap-14, usado para avaliar uma região petrolífera marítima na África num horizonte de 20 a 30 anos de exercícios de opções reais de aprendizagem (sísmica e perfuração principalmente) e de desenvolvimento. Os detalhes são omitidos por razões de confidencialidade.

Embora o uso de simulação seja mais trabalhoso do que os métodos analíticos que usam fórmulas das distribuições binomiais e hipergeométricos, essa tese considera que as simplificações que permitem usar essas distribuições são em geral inaceitáveis por não ter a menor representatividade de fatos estilizados de exploração de petróleo[247] e com a teoria probabilística de fatores de chance correlacionados desenvolvidas no item 3.4.2. No entanto, pode-se pensar em combinar o método desenvolvido nessa tese com o método de *predições de tendências*, usado por McCray (1975, p.224-239), a fim de calibrar melhor as condições de contorno dos processos de descoberta e conseqüentemente os processos de revelação, com correlações baseadas em dados de outras bacias. Isso é deixado como sugestão de pesquisa futura.

Uma outra abordagem de interesse, mas para o processo de revelação, foi mencionado no item 3.4.2 e agora será analisado. O artigo de Wang et al (2000) analisou o processo de dependência entre um fator de chance e sinal e apresentou um processo de revelação do fator de chance com dois sinais seqüenciais. A eq. (173) de Wang et al sugeriu que, em caso de n sinais negativos, o fator de chance inicial decai do fator $(1 - dep/5)^n$. No exemplo, foi usado dep = 2. É curioso notar que, no caso particular de v.a. intercambiáveis, a raiz positiva η da medida de dependência proposta na tese é exatamente igual ao dep/5 de Wang et al, basta comparar as eqs. (173) e (214). No caso, para dep = 2 tem-se $\eta = 40\%$.

Os valores do processo de revelação construído por Wang et al (2000, Fig.4) são mostrados na Figura 46, incluindo algumas informações adicionais tais como as probabilidades assumidas de forma implícita para os sinais e as probabilidades de ocorrência dos cenários finais da distribuição de revelações.

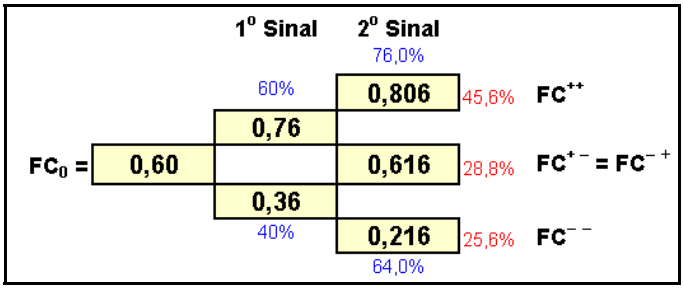

Figura 46 – Processo de Revelação em Wang et al

[247] Lembrar a discussão no item 3.4.1 sobre a evolução do fator de chance ao longo do tempo, comentando os gráficos típicos de Rose (2001, p.46) e de Jones & Smith (1983, Fig. 4), com períodos cerca de três anos de grande aumento do FC e depois um longo período de declínio.

Dentro das células da Figura 46 estão os fatores de chance inicial (FC_0 = 0,6) e os FC revelados. As probabilidades azuis mostram as probabilidades *condicionais* de ocorrência dos cenários (probabilidades do sinal ser positivo ou negativo) assumindo implicitamente v.a. intercambiáveis. As probabilidades terminais (vermelhas) são as probabilidades de ocorrência dos cenários, após dois sinais (essas têm de somar 1, pois *não* são condicionais). Note na Figura 46 que após dois sinais, a distribuição de revelações tem três cenários discretos, cada cenário pode ocorrer segundo as probabilidades terminais mencionadas.

Aproveitando o exemplo, são introduzidas as notações para os FC revelados após dois sinais: FC^{++}, FC^{+-} (que é igual ao FC^{-+} no caso recombinante) e FC^{--}. Pode-se verificar que o processo de revelação sugerido pela eq. (173) tende a ser convergente para o caso de revelação total, pois em caso de dependência (dep > 0) então se $n \to \infty \Rightarrow (FC^{-})^n \to 0$. Já o cálculo dos outros cenários $(FC^{+})^n$ e os FC's para as combinações de sinais positivos e negativos é feita com a equação de consistência mencionada no item 3.4.2 (que é nada mais é do que a lei das expectativas iteradas, também usada na tese).

No exemplo de Wang et al (Fig. 4 deles), além da intercambialidade, pode ser visto que eles assumiram uma outra premissa, mas novamente sem explicitá-la: o processo de revelação é recombinante, i. é, se houver um sinal positivo e outro negativo, o novo FC é igual ao caso do primeiro sinal ser negativo e o segundo sinal positivo. Uma vantagem prática do processo recombinante é que reduz de forma significativa o número de cenários da distribuição de revelações: após k sinais o número de cenários no caso da árvore recombinate é de k + 1, enquanto que no caso da árvore não-recombinate esse número de cenários é de 2^k, e é fácil ver que $2^k > k + 1$ se $k > 1$. Embora tenha sua lógica (e aqui serão estudados os processos recombinantes), em geral *não* é necessário ser recombinante para ser consistente e pode ser não realista. Isso porque os sinais intercambiáveis terão diferentes probabilidades em cada cenário. Nesse exemplo, caso tenha ocorrido FC^{+} = 76% com o primeiro sinal, o segundo sinal terá 76% de chances de ser uma nova boa notícia (devido a intercambialidade), enquanto que caso tenha ocorrido FC^{-} = 36%, a chance do segundo sinal ser uma nova má notícia é de 64%.

Em Wang et al (2000), para que ao *mesmo tempo* possam haver intercambialidade entre FC e sinal S, recombinação de cenários e convergência do processo de revelação para a revelação total (indicada pela eq. 173), eles implicitamente assumiram que o impacto em termos de aprendizagem (redução esperada de variância) do segundo sinal é variável com FC. No exemplo deles, esse impacto é $\eta^2 = 3{,}6\%$ (ou $\eta = 18{,}9\%$) se for sobre o cenário $FC^{+} = 76\%$ e de $\eta^2 = 16\%$ (ou $\eta = 40\%$) se for sobre o cenário $FC^{-} = 36\%$. Ou seja, o *mesmo sinal* S_2 provocaria um impacto (redução de variância) no *mesmo prospecto*, após ter sido revelado *o mesmo* sinal S_1, de forma muito diferente (mais de 4 vezes) a depender da correção feita com o primeiro sinal (a depender do caminho). Isso não parece ser muito consistente, apesar de todos os atrativos da conjugação de premissas simplificadoras (intercambialidade, recombinação e convergência).

O relaxamento de uma das premissas implícitas (ex.: recombinação), poderia ter levado a um resultado mais consistente em Wang et al (2000). Um processo de revelação não-recombinante intercambiável é mostrado na Figura 47 a seguir, em que foram usadas as premissas de Wang et al (2000) para o cenário FC^{--}, mas considerando que o poder de revelação do segundo sinal é o mesmo, quer o primeiro sinal tenha sido positivo ou negativo.

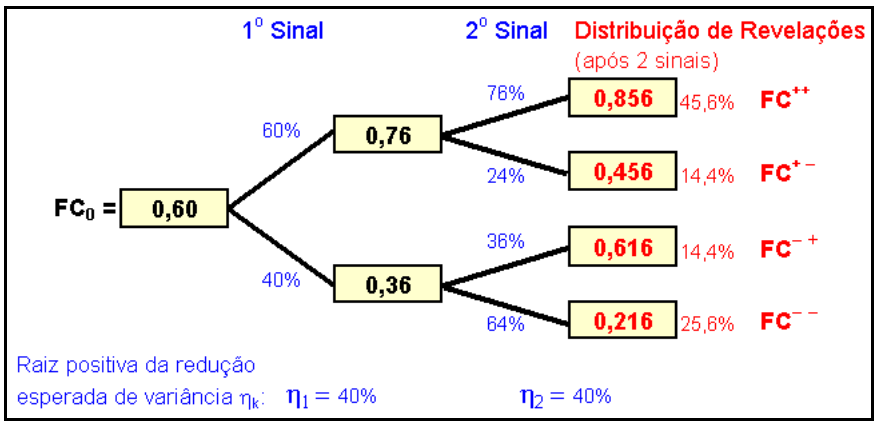

Figura 47 – Processo de Revelação Não-Recombinante

Algumas questões importantes podem ser discutidas observando a Figura 47. Primeiro, seguindo a premissa de Wang et al para determinar FC^{--}, o sinal S_1 tem o mesmo poder de revelação do sinal S_2 ($\eta_1 = \eta_2 = 40\%$), o que nem sempre é realista (em muitos casos pode ocorrer uma redução do poder de revelação ou mesmo um aumento). Segundo, o FC em caso do *caminho* sinal positivo + sinal negativo (FC = 0,456) é menor que em caso do *caminho* sinal negativo + sinal positivo (FC = 0,616), i. é, não-recombina. Essas duas questões estão ligadas. Para

recombinar é necessário que $\eta_2 < \eta_1$ em pelo menos um cenário após o 1º sinal. Na maioria dos casos existe correlação (positiva) entre os sinais S_1 e S_2, e assim, *parte da informação* que S_2 iria revelar para o FC do prospecto já foi revelada por S_1. É mais fácil ver isso com um caso limite: se $\eta^2(S_2 \mid S_1) = 100\%$, então a informação proveniente de S_1 tornaria S_2 determinístico e dessa forma o segundo sinal não traria nenhuma informação adicional para o FC do prospecto de interesse após a revelação de S_1. Mas se o sinal S_2 fosse revelado primeiro ele seria relevante para FC e S_1 é que passaria a ser irrelevante. Esse raciocínio pode sugerir uma seqüência η_k com valores decrescentes. No entanto, a medida η_2 é sobre um FC com uma variância esperada menor devido à ação do 1º sinal e assim pode ocorrer que η_2 seja até maior que η_1. Por ex., se a correlação entre S_1 e S_2 não for perfeita e o conhecimento de ambos S_1 e S_2 prover a *revelação total* sobre FC, então pode ocorrer, por ex., $\eta^2(FC \mid S_1) = 66{,}6\%$ e $\eta^2(FC \mid S_1 \mid S_2) = 100\%$, apesar de, ex-ante, S_1 poder ser mais forte do que S_2[248], ver exemplo da Figura 35. Assim, a especificação mais adequada do poder de revelação de sucessivos sinais depende do tipo de problema e várias alternativas são possíveis.

Será estudado em especial o caso de sinais com η_k decrescentes, i. é, uma queda no poder de revelação dos sucessivos sinais, pois apenas nesse caso pode haver uma seqüência infinita de sinais que não converge para o limite de revelação total (a ser visto). Além disso, no caso de se querer a recombinação na árvore de cenários, é necessário especificar η_k decrescentes. O valor dessa queda em η_k depende do tipo de sinal. Por ex., foi comentado que o sinal de uma sísmica é complementar em muitos aspectos ao sinal da perfuração de um poço vizinho[249]. Dessa forma, se a sísmica for o primeiro sinal, o poder de revelação de um poço vizinho não deve diminuir muito comparado ao caso do poço vizinho ser o primeiro sinal. Já no caso de dois poços vizinhos (no mesmo play geológico do prospecto), esses sinais são em certo grau sinais substitutos, ou seja, a revelação do primeiro sinal diminui a relevância *absoluta* do segundo sinal.

Para ilustrar esse ponto, no caso do exemplo modificado (não-recombinante) de Wang et al, suponha que $\eta_2 = 20\% < \eta_1 = 40\%$. O processo de revelação da

---

[248] $\eta^2(FC \mid S_1) > \eta^2(FC \mid S_2)$, mas, uma vez conhecido S_1, o sinal S_2 passa a ter $\eta^2 = 100\%$.

[249] Ver item 3.4.1: a sísmica revela muito da estrutura, geometria, rochas, mas quase nada de sincronismo, enquanto que um poço vizinho revela o sincronismo e pouco da geometria local.

Figura 47, mas com esse valor menor para a segunda revelação é mostrada na Figura 48 a seguir.

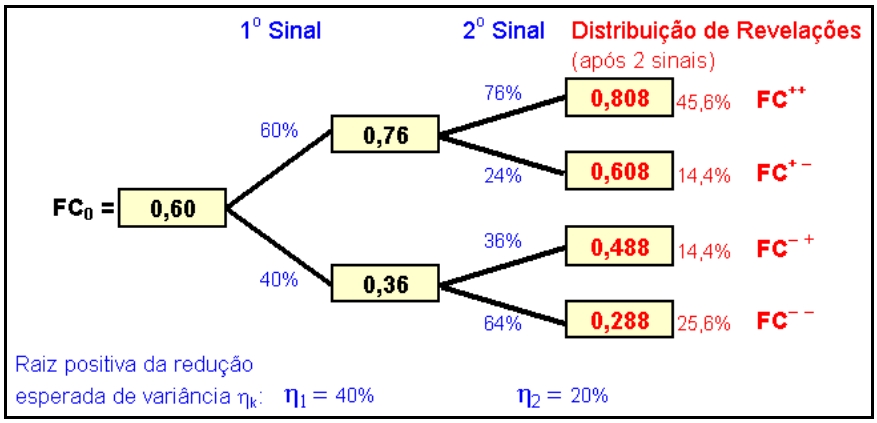

Figura 48 – Processo de Revelação Decrescente Não-Recombinante

Note que, comparado com a Figura 47, a Figura 48 mostra uma inversão: o FC em caso do caminho sinal positivo + sinal negativo (FC = 0,608) passa a ser *maior* que em caso do caminho sinal negativo + sinal positivo (FC = 0,488). Isso reflete o fato do segundo sinal ter sido *bem* menos informativo que o primeiro. Esse raciocínio e o exemplo também sugerem que é possível um processo intercambiável ser também recombinante, sem ter de variar o poder de revelação com o caminho (como implicitamente fizeram Wang et al)[250]: basta variar η_k (reduzir) ao longo da seqüência, de forma adequada, assumindo a lógica que esses sinais compartilham uma parte da informação relevante para o prospecto de interesse. Essa forma mais adequada/consistente de recombinação será analisada no sub-item 3.4.3.2, onde será visto que no limite implicará em uma convergência parcial (que não será a revelação total). A convergência apenas parcial pode ser não ser inconveniente na prática: mesmo em bacias muito exploradas, não se sabe toda a verdade sobre um novo prospecto, mesmo num play geológico conhecido.

Um outro processo de revelação de fator de chance foi estudado por Jaynes (2003, p. 75-82), mas num contexto de crítica à teoria da amostragem, em especial ao esquema de urnas (binomial, hipergeométrico) para estimativa de um parâmetro. A pergunta dele é: o que ocorre se, ao retirar e repor uma bola vermelha numa urna, a sua probabilidade para o próximo sorteio aumentar de um valor $\varepsilon > 0$? Ele assume também que, caso no primeiro sorteio saia uma bola

[250] Note que Wang et al assumiram que S_2 permanece com o mesmo poder de revelação, apesar de já ter sido revelado S_1, desde que a primeira revelação fosse negativa. Mas o poder de revelação cairia muito se a primeira revelação fosse positiva. Parece mais lógico que haja uma queda do poder de revelação dos sinais só devido aos mesmos serem correlacionados entre si.

branca, a probabilidade de tirar uma bola vermelha no próximo sorteio diminui de um valor $\delta > 0$. Ou seja, existe um processo de revelação do fator de chance de sair bola vermelha em que os sinais são sorteios sucessivos. Assim, o processo de revelação de Jaynes (2003) pode ser visto com as equações:

$$\mathbf{FC^{+} - FC_0 = \varepsilon > 0} \tag{219}$$

$$\mathbf{FC_0 - FC^{-} = \delta > 0} \tag{220}$$

Com as eqs. (183) e (184) é fácil mostrar que esse esquema é viável se:

$$\varepsilon = \frac{p_{11} - q\,FC_0}{q} \tag{221}$$

$$\delta = \frac{p_{11} - q\,FC_0}{1 - q} \tag{222}$$

Daí pode-se concluir que $\varepsilon = \delta$ somente se q = 50% (Jaynes, p.76, chega a essa conclusão de uma forma totalmente diferente). Mas isso eliminaria a possibilidade geral de intercambialidade. Com as eqs. (221) e (222) pode-se obter a seguinte equação (Jaynes, p.81, usando outra abordagem):

$$q\,\varepsilon = (1 - q)\,\delta \tag{223}$$

Jaynes (2003, p.81), comentando a eq. (223), reconhece que "*a distribuição ainda não é intercambiável*", mas aponta outras vantagens. A idéia dele foi fazer uma aproximação Markoviana para estimar um parâmetro. Embora o processo de Jaynes seja uma alternativa, ela não parece ser a melhor ao não permitir, no caso geral, v.a. intercambiáveis (o que implica na impossibilidade de revelação total ou informação perfeita, conforme visto no item 3.4.2) e também por não trabalhar com uma medida de aprendizagem que tivesse uma interpretação mais intuitiva e permitisse comparar sinais de diferentes problemas relacionados, mas com diferentes distribuições a priori (i. é, diferentes probabilidades de sucesso FC_0).

Um caso similar à medida de dependência de Jaynes (2003), particularmente a eq. (219), foi feita por Smith (2004), justamente para o caso de exploração de petróleo. Ele, no entanto, usa uma versão percentual da eq. (219) ao dividir a diferença por FC_0. Dessa forma, após o k-ésimo poço perfurado seco, é revelado o fator FC^{-}_{k+1}, a medida de dependência (na notação da tese) é:

$$d_k = \frac{FC^{-}_{k} - FC^{-}_{k+1}}{FC^{-}_{k}} \tag{224}$$

Esse modelo tem, em geral, os mesmos problemas do modelo de Jaynes. Smith (2004) analisa um caso que ele considera realista de aumento da dependência com o número de fracassos. Conforme visto antes, isso pode não ser o mais realista, dada a correlação entre sinais e dada a premissa razoável de que a probabilidade de receber sinais positivos (q_k) deve variar com o caminho (ex.: ser intercambiável)[251]. Smith também analisa os casos limites de independência e dependência total (que equivale ao conceito de revelação total) e o impacto no valor da opção "de perfurar de novo", que é o foco do artigo dele. Assim como Wang et al (2000), Smith focaliza a seqüência de falhas (uma aplicação é quando parar). Embora seja uma aplicação relevante, parece mais interessante analisar também (e principalmente) os caminhos de revelação positiva que, mesmo com menor probabilidade, levam a uma seqüência de elevadas chances de sucesso (efeito *cascata* da dependência), onde se pode alavancar *muito* o valor de OR de uma firma se ela deter prospectos opcionais e puder se aproveitar dos sinais. Esse foi, por ex., o foco do projeto PUC-Petrobras mencionado antes. Seqüências de sucesso da história da exploração (tem vários exemplos na Bacia do Espírito Santo, Bacia de Santos e Bacia de Campos) é que permitem alavancagens de valor das OR de companhias de petróleo que tem atuação importante no E&P.

Wang et al (2000) foram quem chegaram mais perto da formulação adequada de um processo de revelação de um fator de chance exploratório, usando quase que apenas a intuição e a lógica. Para melhorar esse resultado é necessário detalhar a discussão da relação probabilística entre FC e sinais, como foi feita aqui no item 3.4.2. De qualquer modo, Wang et al, Smith e Jaynes são exceções na literatura, ao abordar o problema de *processos* dependentes de Bernoulli sem recorrer a esquemas conhecidos do tipo hipergeométrico (sorteio sem reposição), que daria apenas uma dependência muito fraca e não representativa. Como esse é um tema praticamente inexplorado, a tese ficará bem longe de esgotar esse assunto, mas tem a intenção de dar algumas contribuições relevantes.

A discussão de propriedades tais como intercambialidade, recombinação e convergência em processos de revelação de Bernoulli, será feita no próximo item

---

[251] Smith (2004) assume uma premissa de uma probabilidade condicional inversa constante. Isso leva o processo a não ser intercambiável o que *pode* levar a problemas de consistência (limite de Fréchet-Hoeffding) a depender da medida d_k usada. Smith focou num *ramo* da árvore (sucessivas falhas). Aqui se olha a toda a árvore, o que dá uma visão mais global de consistência.

(3.4.3.2), onde serão feitas mais comparações sobre as alternativas de processos de revelação para fatores de chance.

3.4.3.2. Processos Convergentes, Recombinantes e Outros

O objetivo da análise de processos de revelação é estudar seqüências de distribuições de revelações. Cada sinal gera uma distribuição de revelações. As distribuições de revelações de Bernoulli permitem resolver problemas de opções reais de uma maneira direta. O valor ex-ante do prospecto de interesse, onde se espera a revelação (positiva ou negativa) de dois sinais, como na Figura 48, deve considerar o problema de exercício ótimo da opção de perfurar o prospecto, em *cada um dos 4 cenários revelados* (4 fatores de chance diferentes) da distribuição de revelações. O fator de chance de cada cenário é usado como parâmetro de equações de valor do prospecto (ativo básico) tais como a eq. (3). O valor da OR para cada cenário, deve ser ponderado pelas probabilidades dos cenários da distribuição de revelações (percentuais em vermelho na Figura 48)

Dessa forma, a seqüência de distribuições de revelações ajuda a avaliar ex-ante problemas de sinais seqüenciais, i. é, decidir por um plano de avaliação exploratória. Exs.: investir em sísmica e depois perfurar um poço pioneiro correlacionado a um outro; ou, após a sísmica, calcular o valor da alternativa de esperar por um sinal (comportamento estratégico) em um jogo de opções reais exploratórias; ou a análise do valor de um bloco exploratório com vários prospectos correlacionados; ou o valor de entrar numa nova bacia de alto risco, mas que se espera haver perfurações que podem alavancar portfólio de prospectos na bacia, etc. Assim, processos de revelação têm grande importância prática.

No item 3.4.2 foi analisado com detalhes (Proposição 7) o caso intuitivo de intercambialidade entre FC e sinal S, que permite uma grande simplicidade de tratamento. Normalmente essa premissa será adotada por essas razões, além do que permite um tratamento mais uniforme e consistente para todo um processo de revelação. A idéia intuitiva é que se houver uma revelação positiva numa área, aumenta não só a chance de sucesso FC^+ do prospecto de interesse, como também aumenta a chance de um novo sinal positivo. Esse novo sinal pode ser a perfuração de um novo poço na área ou até a reinterpretação da sísmica e de modelos geológicos, incluindo mapas. De forma análoga, em caso de fracasso

(sinais negativos), além de reduzir a probabilidade de exercícios de novas opções exploratórias, quando isso voltar a ocorrer é de se esperar que o *novo sinal* tenha menor probabilidade de ser positivo do que tinha antes da má notícia.

A intercambialidade é a maneira natural de capturar esse processo de mudança de probabilidades de sinal positivo $q_k(c)$ no k-ésimo sinal e no caminho c. Deve-se lembrar que, em geral, o processo de revelação de Bernoulli é dependente do caminho (não-Markoviano). Além disso, a intercambialidade é uma condição necessária para se poder garantir a convergência de um processo de revelação de Bernoulli em direção do caso limite de revelação total.

No tópico anterior foram comentadas algumas outras características de processos de revelação, em especial ao se referir ao artigo de Wang et al (2000). Duas dessas características são *recombinação* de cenários e *convergência* do processo de revelação para a revelação total num critério de limite após um número muito grande de sinais.

A recombinação de cenários permite que o processo de revelação seja Markoviano, i. é, independente do caminho. Nesse caso, o valor do fator de chance revelado $FC_k(p, n)$, após k sinais, sendo p sinais positivos e n sinais negativos (logo $k = p + n$) é determinado apenas por p e n (ou p e k ou n e k), dada a condição inicial (FC_0) e dada a *estrutura de informação* do processo de revelação. A Figura 46 mostrou um exemplo do caso mais simples (dois sinais) de um processo de revelação recombinante que, em adição, era intercambiável.

Como foi comentado antes, nem sempre é adequado ou consistente usar a recombinação, pois o impacto do mesmo sinal no mesmo prospecto (poder de revelação do sinal sobre um prospecto) pode variar muito para poder forçar a recombinação. A comparação dos exemplos das Figuras 47 e 48, mostra que é possível manter uma estrutura de informação com certas características consistentes (mesmo poder de revelação do k-ésimo sinal, naqueles exemplos seria um valor de η entre 20 e 40%) mas isso irá impedir o processo de convergir, apesar da intercambialidade. A intercambialidade é condição necessária (Lema 7), mas *não suficiente* para a revelação total ser alcançada. A vantagem da recombinação em qualquer caso é a simplicidade de independer do caminho. Nesse aspecto, ele lembra o modelo binomial de Cox & Ross & Rubinstein (1979), mas suas probabilidades são diferentes (no binomial das opções financeiras, o valor *descontado* dos cenários é que se comporta como martingale).

A estrutura de informação (ver eq. 57 e a versão mais flexível, eq. 63) de um processo de revelação de Bernoulli é dada pela medida de aprendizagem (η^2 ou η) e pelas probabilidades marginais $FC_k(c)$ e $p_k(c)$, no k-ésimo sinal, caminho c. Como foi visto, com apenas três parâmetros é possível definir a distribuição bivariada, desde que ela seja viável. E essa viabilidade é dada pelo critério adicional dos limites de Fréchet-Hoeffding. Em suma, a estrutura de informação é definida por 4 elementos, as probabilidades $FC_k(c)$ e $p_k(c)$, η, e o limite superior de Fréchet-Hoeffding (já que o inferior é sempre zero).

A estrutura de informação intercambiável proposta para várias aplicações, é tremendamente simplificada, pois em vez de 4 elementos, são necessários apenas dois elementos: a probabilidade $FC_k(c)$ e a medida de aprendizagem η. Isso porque sendo v.a. intercambiáveis, pela Proposição 7 (a) e (b), $FC_k(c) = p_k(c)$ e o limite de Fréchet-Hoeffding é irrelevante pois não restringe a medida de aprendizagem η, que pode ser qualquer valor em que ela é válida (intervalo unitário). Assim, assumindo apenas dois elementos (FC_0 e η), se pode construir todo um processo de revelação, obtendo todos os valores de $FC_k(c)$ que, para vários casos tais como η constante (independente de k), será mostrado que converge para o limite teórico de revelação total.

Em relação à convergência de um processo de revelação de Bernoulli, deve ser lembrado que revelação total significa que o prospecto de interesse terá o seu FC convergindo para zero ou para um. Wang et al (2000) apresentaram um processo que converge pois tem a condição necessária de intercambialidade, e porque o cenário extremo analisado (seqüência de insucessos) converge para zero. Isso deve induzir cenários de revelação positiva a convergir para 1. No entanto, será apresentado um critério mais claro de convergência para revelação total que não olha uma probabilidade específica (k fracassos ou k sucessos) e sim na variância esperada das distribuições posteriores, que deve convergir para zero.

A Figura 46 mostrou que após 2 sinais, a distribuição de revelações tinha 3 cenários. No caso recombinante, é fácil ver após k sinais a distribuição de revelações terá k + 1 cenários. Isso parece ser inconsistente com o Teorema 1 (a) que diz que no limite a distribuição de revelações é igual à distribuição a priori (que tem só dois cenários, já que é uma distribuição de Bernoulli), se o processo for convergente. Mas essa contradição é só aparente. O que ocorre na verdade

(simulações e a discussão abaixo) é se k for um número relativamente grande, dos k + 1 cenários, se terá um grupo de cenários com valores muito perto de FC = 0 (massa de probabilidade se concentrando em cenários próximos de zero) e outro grupo de cenários com valor muito perto de FC = 1. Os cenários intermediários (ex., FC próximo de 0,5) terão cada vez menor probabilidade, até que, no limite, se terá apenas dois cenários FC = 1 e FC = 0, com a massa de probabilidade concentrada nesses dois cenários. Essas massas de probabilidade serão exatamente iguais a FC_0 e $(1 - FC_0)$, respectivamente, como prevê o Teorema 1 (a)!

Seja um processo de revelação com valor inicial FC_0 não trivial. Seja o poder de revelação (qualidade) do sinal k, $\eta^2(FC \mid S_k)$, denotado por simplicidade por η_k^2, que depende da quantidade e qualidade dos sinais anteriores, mas que independe do caminho (se foram reveladas boas ou más notícias), de forma a ser o mesmo para todos os possíveis FC revelados após o sinal k – 1 (i. é, o mesmo para todos os cenários da distribuição de revelações após o sinal k – 1). A seguinte condição geral garante a convergência de um processo de revelação de Bernoulli:

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \eta_k^2) = 0 \qquad (225)$$

É fácil ver porque o processo converge, caso a eq. (225) seja satisfeita: se o valor inicial do FC é $FC_0 \in (0, 1)$, então a sua variância a priori é não nula e igual a $FC_0 (1 - FC_0)$. A cada revelação do sinal S_k, a variância esperada do FC é reduzida em η_k^2 %, ou seja, a variância esperada decai por um fator multiplicativo $(1 - \eta_k^2) < 1$. Logo, a variância média do FC posterior a n sinais, cada um com poder de revelação η_k^2, dado que a variância inicial (a priori) é $FC_0 (1 - FC_0)$, é:

$$E[Var[FC \mid S_1, S_2, ..., S_n]] = FC_0 (1 - FC_0) \prod_{k=1}^{n} (1 - \eta_k^2) \qquad (226)$$

Assim, após n sinais, a variância inicial de FC foi reduzida pelo produtório de $(1 - \eta_k^2)$. Se esse produtório tende a zero, então o seu produto pela variância inicial (finita) também irá a zero. Se a variância esperada no limite tende a zero, então se tem a revelação total por definição.

Note que é muito *fácil* obter o limite de revelação total. Em particular, se os valores η_k^2 forem iguais (sinais do mesmo tipo ou com o mesmo poder de revelação), então é trivial ver que $(1 - \eta^2)^n$ tende a zero se n tende a infinito, pois

como $(1 - \eta^2)$ é um número positivo menor que 1, o produtório converge. Por ex., se $\eta^2 = 10\%$, após 50 sinais a variância esperada (posterior) é apenas 0,5 % do valor inicial. Com 100 sinais, a variância média das distribuições posteriores é de apenas 0,00265 % do valor inicial (ou praticamente zero).

A eq. (225) também se verifica para o caso de sinais com poderes de revelação crescentes $\eta^2_{k+1} > \eta^2_k$. De forma geral, se obtém convergência para qualquer seqüência infinita de η^2_k não decrescentes. E se a seqüência η^2_k for decrescente? Nesse caso o processo *pode* se estabilizar (ter um limite) num patamar de variância média posterior maior ou bem maior que zero, não convergindo para a revelação total. Na eq. (226), se para k grande o fator $(1 - \eta^2_k)$ convergir para 1, o produtório não converge para zero e o processo não converge para a revelação total.

Para analisar a convergência do produtório usado nas eqs. (225) e (226), pode ser conveniente lembrar que o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos, reduzindo o problema para a análise da soma infinita de uma série:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\eta_k^2) \;=\; \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\eta_k^2)\right) \qquad \textbf{(227)}$$

O produtório acima converge para zero se o somatório dentro do exponencial divergir para $-\infty$, lembrando que $\ln(1 - \eta^2_k)$ é um número negativo. Assim, para haver revelação total (produtório convergir para zero), deve-se ter:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} -\ln(1-\eta_k^2) \;=\; +\infty \qquad \textbf{(228)}$$

Se o limite dessa soma for *menor que infinito* (i. é, a eq. 228 convergir), então não haverá convergência do processo de revelação para a revelação total. Mas o processo de revelação irá se estabilizar convergindo para uma variância esperada *intermediária* entre o valor da distribuição a priori FC_0 $(1 - FC_0)$ e o valor zero (revelação total). Note que <u>não</u> existe a possibilidade do processo de revelação <u>oscilar</u> em termos de variância esperada (i. é, a média das distribuições posteriores após infinitos sinais), pois a cada sinal a variância posterior *esperada* nunca aumenta (conseqüência do Teorema 1 c). Ou seja, com infinitos sinais, um processo de revelação sempre converge ou para a revelação total (variância

posterior esperada igual a zero) ou para a revelação parcial (variância posterior esperada converge para um valor entre a variância da distribuição a priori e zero).

Principalmente para mostrar que um processo de revelação de Bernoulli *não* converge para a revelação total, é útil a seguinte desigualdade (Lima, 1996, p.84):

$$\eta_k^2 \;<\; -\ln(1-\eta_k^2) \;<\; \frac{\eta_k^2}{1-\eta_k^2} \qquad \textbf{(229)}$$

Se um somatório infinito das frações do lado direito da eq. (229) convergir para um número menor que infinito, então o somatório infinito de $-\ln(1-\eta_k^2)$, um número menor (eq. 229), também irá convergir para um número menor que infinito. Assim, como condição suficiente, o critério para um processo de revelação de Bernoulli *não* convergir para a revelação total (e sim para parcial) é:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k^2}{1-\eta_k^2} \;<\; \infty \qquad \textbf{(230)}$$

A eq. (230) pode ser usada para provar a não convergência total usando critérios de convergência de somas infinitas tais como o *teste da razão* ("ratio test") ou o *teste da integral*, ver, por ex., Sydsaeter & Strøm & Berck (2000, p.43). Para ilustrar o teste da razão para convergência, seja o seguinte esquema simples de decaimento constante (= $\gamma < 1$) dos poderes de revelação sucessivos:

$$\eta_k^2 \;=\; \gamma^{k-1}\;\eta_1^2\;,\;\; \gamma \in (0,\,1) \qquad \textbf{(231)}$$

Ou seja, η_2^2 é menor que η_1^2 por um fator γ, etc. Para provar que o processo de revelação da eq. (231) não converge, basta provar que a eq. (230) converge. Para isso, o teste da razão diz que uma soma infinita de $\{a_n\}$ converge se:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;<\; 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \qquad \textbf{(232)}$$

Substituindo os termos η_{k+1}^2 e η_k^2 dados pela eq. (231) na eq. (232), simplificando e chamando a razão obtida de R, vem:

$$R \;=\; \gamma\;\frac{1-\gamma^k\,\eta_1^2}{1-\gamma^{k+1}\,\eta_1^2} \qquad \textbf{(233)}$$

Na eq. (233) pode-se observar que a fração é sempre menor que 1 e, no limite para $k \to \infty$, a fração tende a 1. Como o valor de γ (constante que multiplica a fração da eq. 233) é menor que 1, então o limite de R quando $k \to \infty$ é menor que 1 (igual a γ) e, portanto, o limite da eq. (230) converge se usar o esquema de

decaimento de poderes de revelação da eq. (231). Ou seja, o esquema da eq. (231) converge apenas para revelação parcial, não para a revelação total. Muitos outros esquemas de decaimento podem ser sugeridos e analisados dentro dessa metodologia de análise de convergência. Isso é deixado para futuros trabalhos.

Agora serão apresentadas as equações de um processo recombinante. Para analisar a recombinação dos cenários da distribuição de revelações após um sinal S_k, o qual tem um poder de revelação η_k^2, só é necessário analisar o conjunto relevante de cenários mostrado na Figura 49 abaixo.

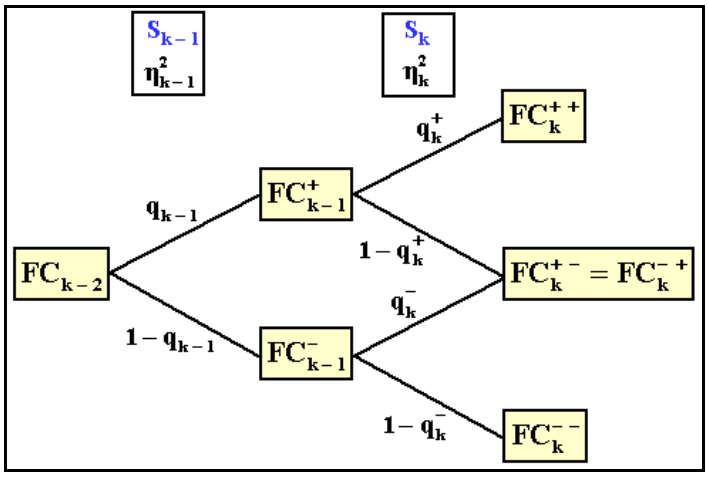

Figura 49 – Processo de Revelação Recombinante para um Sinal S_k

A Figura 49 mostra um cenário da distribuição de revelações após k – 2 sinais, dois cenários da distribuição de revelações após k – 1 sinais e três cenários da distribuição de revelações após o sinal k. A notação é similar às figuras anteriores. Para permitir a recombinação, i. é, que $FC^{+-} = FC^{-+}$, primeiro deve-se escrever as equações para esses cenários no caso geral, baseada nas eqs. (199) e (198) do Teorema 4 (a), que podem ser usadas recursivamente:

$$FC_k^{+-} = FC_{k-1}^{+} - \sqrt{\frac{q_k^+}{1-q_k^+}}\ \sqrt{FC_{k-1}^{+}\,(1-FC_{k-1}^{+})}\ \sqrt{\eta_k^2} \qquad (234)$$

$$FC_k^{-+} = FC_{k-1}^{-} + \sqrt{\frac{1-q_k^-}{q_k^-}}\ \sqrt{FC_{k-1}^{-}\,(1-FC_{k-1}^{-})}\ \sqrt{\eta_k^2} \qquad (235)$$

Essas equações são gerais, valem para processos recombinantes ou não, intercambiáveis ou não. Se forem recombinantes, então as eqs. (234) e (235) terão de ser iguais. Como discutido quando se comparou a Figura 48 com a Figura 47, se for assumida a intercambialidade entre FC e S, para recombinar os cenários terá de ser ajustado o poder de revelação do sinal S_k para um valor η_k^2 menor que o

poder de revelação do sinal anterior η^2_{k-1}. A alternativa seria relaxar a premissa de intercambialidade e escolher as probabilidades do sinal k ser positivo, q^+_k e q^-_k combinado ou não com uma escolha do poder de revelação η^2_k (que nesse caso pode ser igual ao anterior). Ou seja, existem infinitas combinações η^2_k, q^+_k e q^-_k que fariam as eqs. (231) e (232) serem iguais e o processo recombinar. A mais razoável, por tudo que foi discutido antes[252], parece ser a premissa de intercambialidade que dessa forma reduziria as equações anteriores para equações similares as eqs. (214) e (213) da Proposição 7, que nesse caso ficariam:

$$\mathbf{FC^{+\,-}_k = \ FC^+_{k-1} \ - \ FC^+_{k-1} \ \eta_k} \tag{236}$$

$$\mathbf{FC^{-\,+}_k = \ FC^-_{k-1} \ + \ (1 - FC^-_{k-1}) \ \eta_k} \tag{237}$$

Para recombinar basta igualar as eqs. (236) e (237) e lembrar que, pela eq. (215), para processos intercambiáveis vale a equação simples:

$$\mathbf{FC^+_{k-1} - FC^-_{k-1} \ = \ \eta_{k-1}} \tag{238}$$

Logo, igualando as eqs. (236) e (237) e substituindo a eq. (238), obtém-se a relação entre poderes de revelação ou condição de recombinação intercambiável:

$$\mathbf{\eta_k \ = \ \frac{\eta_{k-1}}{1 + \eta_{k-1}}} \tag{239}$$

Que é uma equação bastante simples. Para o caso não trivial, $\eta_{k-1} > 0$, pode-se ver facilmente que $\eta_k < \eta_{k-1}$. Além disso, pode-se tirar o valor de η_k em função da medida de aprendizagem inicial η_1. Para isso, basta substituir repetidamente a eq. (239), que se obtém a equação (para k = 1, 2, …):

$$\mathbf{\eta_k \ = \ \frac{\eta_1}{1 + (k-1)\,\eta_1}} \tag{240}$$

No exemplo baseado em Wang et al (2000), que foi discutido comparando a Figura 48 com a Figura 47, pode agora ser concluído usando a eq. (239) ou a eq. (240) para mostrar que a medida de aprendizagem que faz o processo recombinar é $\eta_2 = 28{,}6\%$. Assim, o processo recombinante intercambiável *modificado* (mais consistente) de Wang et at (2000) é apresentado na Figura 50.

---

[252] Pode ser interessante estudar processos que violem essa condição, mas de forma controlada (fugindo pouco da intercambialidade) e que tenham alguma vantagem. Nesse caso, sugere-se ter uma boa teoria ou importantes eventuais vantagens que justifiquem o abandono da simplicidade da intercambialidade e suas grandes vantagens matemáticas e intuitivas.

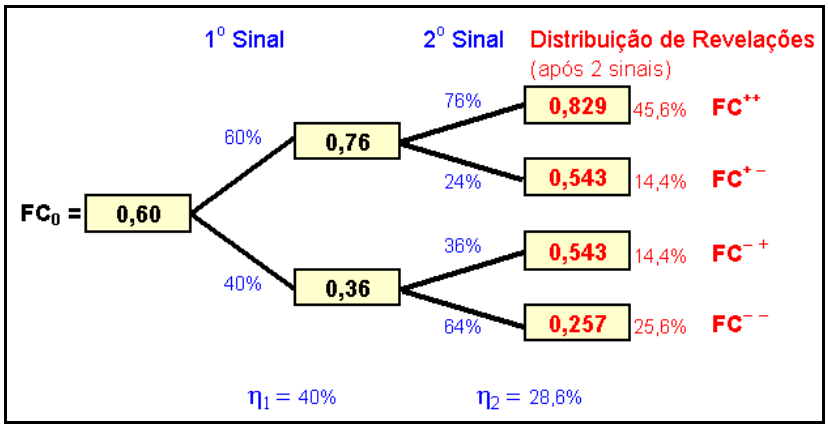

Figura 50 – Processo de Revelação Decrescente Recombinante

Note que as probabilidades dos cenários revelados e dos sinais são as mesmas nas três figuras (47, 48 e 50), apenas os valores dos cenários revelados (após o segundo sinal) é que são diferentes, a depender do poder de revelação do segundo sinal.

Com o esquema da eq. (240), os fatores de redução da variância média posterior ao sinal k (fatores do produtório da eq. 226), $(1 - \eta_k^2)$, rapidamente tendem a 1, pois esse fator é:

$$1 - \eta_k^2 = 1 - \frac{\eta_1^2}{[1 + (k-1)\,\eta_1]^2} \qquad (241)$$

Assim, o denominador da fração da eq. (241) rapidamente (ao quadrado) vai a infinito quando k vai a infinito e, portanto, a fração vai a zero e o fator vai a 1. Assim, a variância média posterior não converge a zero. Para ilustrar, a Figura 51 mostra o percentual acumulado de redução da variância média posterior (i. é, o produtório da eq. 225) após k sinais que decaem conforme a eq. (240).

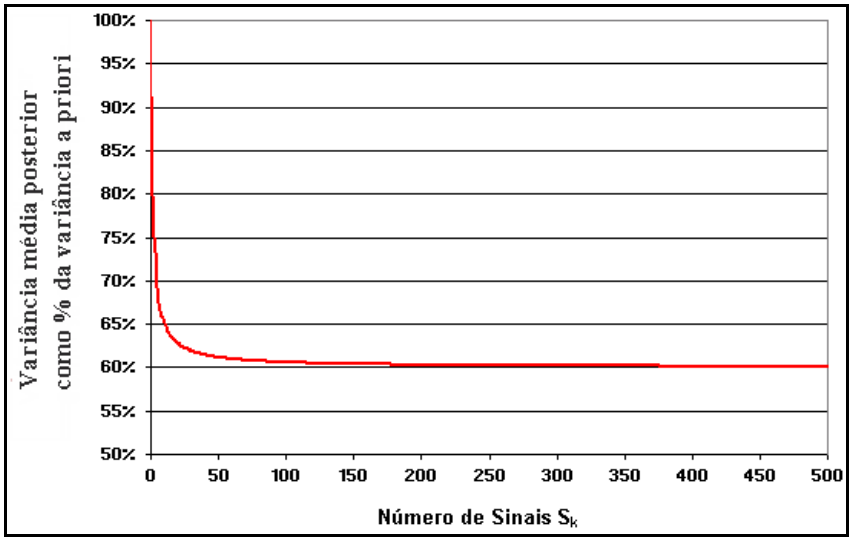

Figura 51 – Fator Redutor da Variância Esperada no Processo Recombinante

Na Figura 51 foi usada $\eta_1 = 40\%$, como em Wang et al (2000). Assim, existe uma grande redução de variância no início, mas depois de um número razoavelmente grande de sinais (~50), a redução adicional de incerteza esperada é muito pequena e converge de forma assintótica para um valor de cerca de 60% da variância inicial (variância da distribuição a priori), i. é, uma redução de 40%. Em outro ângulo, a variância da distribuição de revelações converge para 40% da variância da distribuição a priori, i. é, 40% de $FC_0\ (1 - FC_0)$.

Não foi coincidência que, para $\eta_1 = 40\%$, o limite do produtório da eq. (226) foi $1 - \eta_1 = 60\%$. Uma álgebra tediosa mostra que esse limite é simplesmente:

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\eta_1^2}{[1 + (k-1)\,\eta_1]^2} \right) = 1 - \eta_1 \qquad (242)$$

A Figura 52 ilustra o caso recombinante e intercambiável para 5 sinais seqüenciais, mostrando as 5 distribuições de revelações, tanto os valores dos cenários (FC revelados, dentro das células amarelas) como as probabilidades de ocorrência desses cenários (em azul, debaixo de cada cenário), que somam 1.

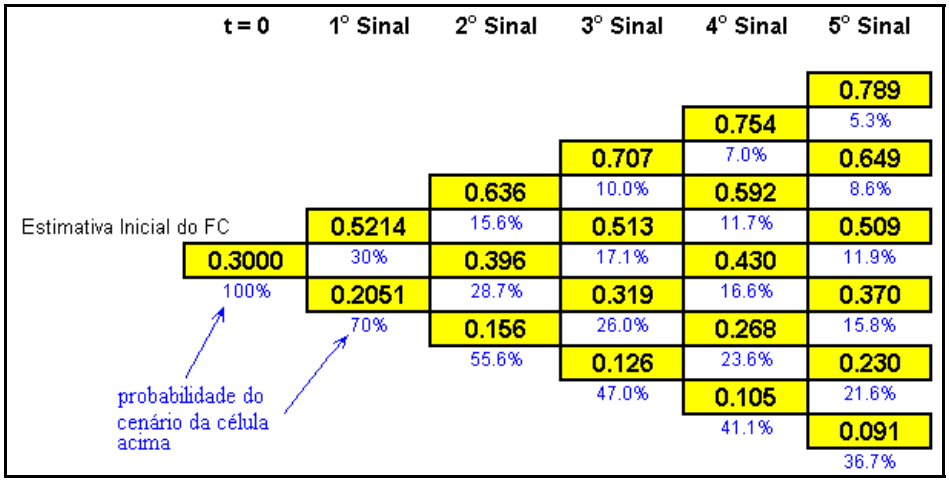

Figura 52 – Processo de Revelação de Bernoulli Recombinante com 5 Sinais

Nesse processo, a medida de aprendizagem inicial foi relativamente pequena, $\eta_1^2 = 10\%$. Um valor inicial maior para a medida de aprendizagem pode fazer o processo ficar próximo da revelação total e dessa forma pode-se observar o que ocorre com a distribuição de revelações perto desse limite. A Figura 53 ilustra isso mostrando o histograma da distribuição de revelações, após 10 sinais (logo, a distribuição de revelações tem 11 cenários), mas com um valor maior para a medida de aprendizagem inicial, no caso com $\eta_1^2 = 80\%$, mas mantendo o mesmo fator de chance inicial ($FC_0 = 30\%$).

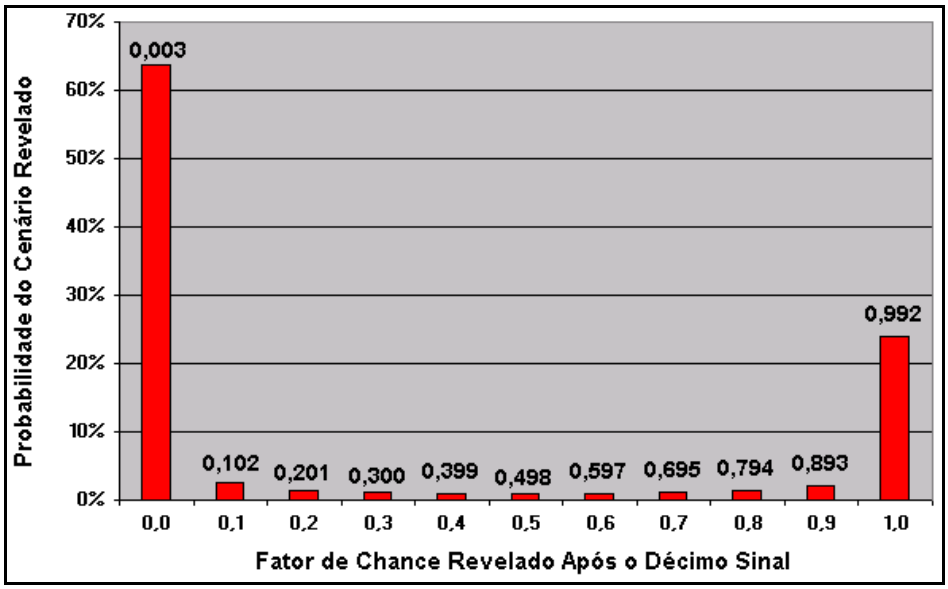

Figura 53 – Distribuição de Revelações de Bernoulli Após 10 Sinais

A Figura 53 é instrutiva no sentido de ilustrar o Teorema 1 (a), i. é, como uma distribuição de revelações converge no limite para a distribuição a priori, no caso para uma distribuição de Bernoulli (dois cenários apenas). É possível intuir isso, apesar do processo acima só ficar perto, não convergindo totalmente, e apesar de usar apenas 10 sinais. Para ver isso, note que os cenários de FC intermediários têm baixas probabilidades de ocorrência (no limite de revelação total teriam probabilidades iguais a zero), enquanto que os cenários extremos de revelação total (perto de FC = 0 e perto de FC = 1) tem elevadas probabilidades. Além disso, note que as *probabilidades* de ocorrência desses cenários extremos se aproximam, respectivamente, de $(1 - FC_0) = 70\%$ e de $FC_0 = 30\%$. Ou seja, apesar da distribuição de revelações ter k + 1 cenários, no limite haverão k – 1 cenários com probabilidade zero e apenas dois cenários (FC = 0 e FC = 1) com probabilidades positivas, que são exatamente os cenários da distribuição a priori, uma Bernoulli com parâmetro $FC_0 = 30\%$. É o que prevê o Teorema 1 (a)[253].

É oportuno apresentar as equações recursivas para obter as probabilidades dos cenários da distribuição de revelações (mostradas em azul na Figura 52). O caso de processo *não*-recombinante é muito simples, pois basta multiplicar as probabilidades dos caminhos. Por ex., na Figura 47, a probabilidade do cenário $FC^{+-} = 14{,}4\%$ (em vermelho) é obtida pela multiplicação das probabilidades dos

[253] Esses exemplos e um código VBA para gerar cenários e probabilidades da distribuição de revelações recombinante, podem ser simulados com a planilha proc_Bernoulli_recombina.xls do CD-Rom (número de sinais possíveis é limitado apenas pelo número de colunas do Excel).

caminhos (= probabilidade dos sinais) que chegam até esse cenário, i. é, as probabilidades (em azul) 60% e 24%.

O caso recombinante é que é um pouco mais complicado, pois na maioria dos cenários, existem vários caminhos que levam a um cenário específico (efeito da recombinação). Mas, tendo apenas as probabilidades dos dois cenários *imediatamente anteriores* que levam ao cenário de interesse, pode ser calculada a probabilidade desse cenário da forma simples a seguir. Seja "i" o indexador que dá a posição vertical da célula de cima para baixo, por ex., na Figura 50 o cenário FC^{++} tem i = 1, $FC^{+-} = FC^{-+}$ tem i = 2 e FC^{--} tem i = 3. Como antes, a posição horizontal é dada simplesmente pelo indexador "k" (cenários após o k-ésimo sinal). Com a ajuda da Figura 49, é fácil concluir que as probabilidades dos cenários da distribuição de revelações $p_{i,k}$ são obtidas recursivamente com a seguinte equação, sendo i – 1 o cenário mais acima, i o cenário mais abaixo e quando não existir a probabilidade é zero:

$$\mathbf{p_{i,\,k} \;=\; p_{i-1,\,k-1}\,(1 - FC_{i-1,\,k-1}) \;+\; p_{i,\,k-1}\,FC_{i,\,k-1}} \qquad \mathbf{(243)}$$

Um ponto importante em um processo de revelação de Bernoulli, pelo menos em aplicações de exploração de petróleo, é que a escala de indexação por eventos (sinais) é *muito* diferente da escala de tempo. Observando um processo de *difusão de eventos* como o da Figura 52, em caso de ocorrência de um resultado positivo proveniente de um sinal qualquer, aumenta aumenta a chance de haver *logo* um novo sinal, um efeito cascata. Isso porque a revisão proporcionada no FC de prospectos de uma bacia, aumenta a chance de exercício da opção de perfurar prospectos exploratórios na área, que serão novos sinais para os prospectos restantes correlacionados na bacia. No entanto, em caso de fracasso, além dessa aceleração de investimentos exploratórios não ocorrer, ainda reduz as chances de novos exercícios de opções naquela área e/ou bacia. Assim, o tempo corre mais rápido na parte de cima do processo de difusão da Figura 52 do que na parte de baixo. Isso é mais um motivo para classificar de grosseiros os modelos de incerteza técnica que substituem o índice de eventos por índice de tempo.

Processos de revelação de Bernoulli é um tema fascinante do ponto de vista teórico e de grande importância prática. Aqui foi apresentado apenas um pouco mais do que o necessário para as aplicações que serão vistas no cap. 5. Esse é um campo aberto para futuras pesquisas, que aqui foram apenas iniciadas.

3.4.4.
Inferência para Distribuição de Bernoulli e Suas Limitações

No item 3.4.1 foi recomendado que o fator de chance exploratório fosse estimado decompondo o mesmo em novos fatores, também v.a. de Bernoulli, e depois eventualmente em novos sub-fatores. Dessa forma, os fatores de chance podem ser ligados mais facilmente a hipóteses geológicas que contribuem para estimar a chance da descoberta. Dentro dessa abordagem, são usados programas estatísticos para estimar esses fatores usando abordagens populares tais como regressões, etc. Isso é feito rotineiramente por companhias de petróleo. Foi visto que os mesmos métodos (e dados) podem ser usados para estimar estatisticamente a medida η^2 proposta.

O propósito desse item é analisar métodos mais diretos de estimar o fator de chance exploratório FC e o poder de revelação η^2 de um sinal como sísmica 3D ou poço vizinho. No caso do FC, uma alternativa é observar dados binários, i. é, amostras da distribuição empírica do parâmetro θ, o estimador da probabilidade de sucesso p da distribuição teórica de Bernoulli Be(p). Isso é feito de uma forma *crítica* a essas abordagens. Além disso, será dado um exemplo de estimativa de η^2 com dados *reais*[254].

Nesse item será mostrado o método quantitativo de inferência Bayesiana para estimar a probabilidade de sucesso de um fator de chance (distribuição de Bernoulli), assim como será discutida a limitação dos métodos tradicionais de inferência estatística. O caso real que será analisado é uma estimativa de poder de revelação de um sinal de sísmica 3D, i. é, uma estimativa de η^2, a medida de aprendizagem proposta. Para tal, serão usados dados ex-ante e ex-post de fatores de chance de prospectos *reais*, estimados antes e depois de uma sísmica 3D.

Na inferência estatística Bayesiana é muito usado o conceito de *distribuições conjugadas* (mencionada no item 3.1.4.2), o qual simplifica bastante o trabalho de estimativa da distribuição a posteriori. Quando as distribuições a priori e a posteriori pertencem à mesma *família de distribuições*, essas distribuições são chamadas de conjugadas. No caso da distribuição de Bernoulli de parâmetro p, se a estimativa a priori desse parâmetro é θ_0 e a estimativa a

[254] Esse item é empírico e pode ser pulado se o interesse for apenas na metodologia.

posteriori é θ_1, i. é, o novo fator de chance (posterior) será também uma distribuição de Bernoulli mas com parâmetro $p = \theta_1$. No entanto, sendo o foco da inferência a estimativa do valor desse parâmetro p, considerado fixo mas incerto (ex., a probabilidade p de dar "cara" numa moeda *não-confiável*), normalmente se usa o conceito de distribuições conjugadas para relacionar a distribuição a priori desse parâmetro p com a distribuição posterior desse parâmetro após o aprendizado com a incorporação de novos dados (*atualização Bayesiana*).

No caso da distribuição de Bernoulli de parâmetro p, é usada a distribuição conjugada Beta para modelar a incerteza sobre o verdadeiro valor de p. A distribuição Beta (B) tem dois parâmetros $B(\gamma, \eta)$ e é muito flexível. Dada uma distribuição Beta que reflita a incerteza a priori do verdadeiro parâmetro p de uma distribuição de Bernoulli, após um novo dado, a distribuição posterior da incerteza desse parâmetro é também uma distribuição Beta com novos parâmetros γ_1 e η_1, isto é, $B(\gamma_1, \eta_1)$ que tem menor variância (refletindo o aprendizado sobre p com o novo dado). As distribuições de Bernoulli e Beta são ditas conjugadas pois a distribuição Beta – que tem intervalo [0, 1] e assim é apropriada para representar a incerteza do parâmetro p duma distribuição de Bernoulli, permite uma atualização Bayesiana que gera uma distribuição posterior que também é uma distribuição Beta, mas com novos parâmetros (prova: DeGroot & Schervish, 2002, p.336, teorema 6.3.1).

Note que, nesse contexto de estimação, existem duas distribuições a priori e duas posteriores: a distribuição a priori da incerteza técnica – no caso o fator de chance que é uma distribuição de Bernoulli, e a distribuição a priori que descreve a incerteza do *parâmetro* da distribuição de Bernoulli – no caso uma distribuição Beta. As distribuições posteriores dessas duas distribuições são respectivamente uma outra distribuição de Bernoulli e uma outra distribuição Beta. A Tabela 12 a seguir (adaptada de Jammernegg, 1988, p.22) resume as distribuições a priori e posteriores da incerteza técnica e da incerteza do parâmetro p, sendo que a atualização Bayesiana é feita com a informação de uma amostra com n observações, das quais y são sucesso (observações de y iguais a 1) e em conseqüência (n – y) observações são falhas (observações de y iguais a zero).

Tabela 12 – Distribuições a Priori e Posterior Conjugadas (Bernoulli e Beta)

Distribuição a Priori da Incerteza Técnica (FC)	Bernoulli: Be(p) Média = p Variância = p (1 – p)
Distribuição a Priori do Parâmetro p	Beta: B(γ, η) Média = γ / (γ + η) Variância = γ η / [(γ + η)^2 (γ + η +1)]
Distribuição Posterior do Parâmetro p	Beta: B(γ + y, η + n – y) Média = (γ + y) /(γ + η+ n) Variância = (γ + y) . (η + n – y) / [(γ + η+ n)^2 . (γ + η + n + 1)]
Distribuição Posterior da Incerteza Técnica (FC)	Bernoulli: Be(E[p]$_{post}$) = Be(E[B(γ + y, η + n – y)]) Média = (γ + y) / (γ + η+ n) Variância = (γ + y) . (η + n – y) / (γ + η+ n)^2

Na Tabela 12, pode-se mostrar que a variância da distribuição Beta posterior é sempre igual ou menor que a da distribuição Beta a priori. Isso nem sempre irá ocorrer com a variância da distribuição de Bernoulli posterior se a nova estimativa de p for um valor mais próximo de 0,5 do que o valor de p da distribuição de Bernoulli a priori[255].

No problema de inferência Bayesiana muitas vezes o objetivo é obter uma estimativa do parâmetro p tal que a variância da distribuição posterior seja menor que um certo valor. Para isso, vai se obtendo dados (observações) até que a essa variância seja menor ou igual a certo valor. Por ex., no caso do parâmetro da distribuição de Bernoulli, DeGroot & Schervish (2002, p. 337) assinalam que para reduzir a variância da distribuição Beta posterior do parâmetro p para 0,01 ou menos, não é necessário selecionar mais que n = 22 itens de amostra.

No entanto, pode-se estar interessado na melhor estimativa (um valor único) sem especificar toda a distribuição que representa a incerteza desse parâmetro. Ou seja, para o nível de informação atual, qual o melhor estimador de Bayes? O estimador Bayesiano ótimo é escolhido de forma a minimizar o erro entre a estimativa e o valor verdadeiro desse parâmetro. Para isso terá de ser usado o conceito de *função perda* (mencionada nos itens 3.2.1 e 3.2.3) que mede esse erro

[255] No entanto, foi visto que no *processo de revelação* sobre o fator de chance é resgatada a propriedade de redução de variância para a variância *média* das distribuições posteriores de Bernoulli, refletindo a *aprendizagem em direção à verdade*.

de estimativa. Conforme foi visto, a função perda mais usada é a função perda de erro quadrático[256]. Essa função é definida por $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$, onde θ é o *verdadeiro* valor do parâmetro e "a" é o *estimador* desse parâmetro.

Sendo o objetivo *minimizar o valor esperado* dessa função perda, conforme mencionado antes, prova-se (DeGroot & Schervish, 2002, p.224) que o valor de a que minimiza E[L(.)] é exatamente a *média da distribuição posterior*, i. é, cenários da distribuição de *expectativas condicionais* $E[\theta \mid S]$. Já no processo de revelação, como foi visto, para avaliar ex-ante um investimento em informação se trabalha também com uma distribuição de expectativas condicionais, mas a de revelações E[FC | S] e não a distribuição do parâmetro p da distribuição original[257]. É importante lembrar que as decisões de investimento exploratório (cálculo do VME) usam a distribuição de Bernoulli e não a Beta.

O exemplo a seguir irá ilustrar a inferência Bayesiana do parâmetro p da distribuição de Bernoulli usando distribuições conjugadas Beta para estimar esse parâmetro (baseado em DeGroot & Schervish, 2002, pp.336-337). Suponha que não haja qualquer informação a priori sobre o valor desse parâmetro p de uma distribuição de Bernoulli sobre um problema qualquer (exs.: proporção de peças defeituosas num lote, sub-fator de um FC dum prospecto exploratório, etc.). Assim, como distribuição a priori desse parâmetro foi adotada uma distribuição não-informativa, a distribuição uniforme U(0, 1), que é também uma distribuição Beta com parâmetros $\gamma = 1$ e $\eta = 1$, isto é, B(1,1), o que mostra a versatilidade da distribuição Beta. Suponha que se obteve uma amostra com n observações (n peças inspecionadas, n poços perfurados, etc.), das quais se contabilizou y "sucessos" (e logo n − y falhas). Qual é o estimador de Bayes atualizado do parâmetro p da distribuição de Bernoulli usando essas n observações? Utilizando a Tabela 12 é fácil ver que a estimativa de p dado essas n observações é a média da distribuição Beta posterior, i. é, $E[p]_{post} = (1 + y) / (2 + n)$.

---

[256] A alternativa de função perda igual ao *erro absoluto* (em vez de erro quadrático) levaria a usar um estimador Bayesiano igual a *mediana* da distribuição posterior. Além de ser bem menos usada em estimação, a mediana não é linear como o operador valor esperado E[.] e é inútil no contexto de *finanças* que trabalha com valores esperados de fluxos de caixa.

[257] Por ex., distribuição das médias de distribuições de Bernoulli posteriores e não da distribuição Beta do parâmetro p. No entanto, como as médias das possíveis distribuições posteriores Beta são usadas como estimadores para as médias das possíveis distribuições de Bernoulli, então as distribuições das médias das duas distribuições posteriores são iguais (já a variância média das distribuições a posteriori de Bernoulli e Beta são em geral diferentes).

Qual seria a estimativa estatística *clássica* (não-Bayesiana) desse exemplo? Na escola *frequentista* clássica não se usa a distribuição a priori para o parâmetro, apenas as observações da amostra. O método clássico mais usado é o *estimador de máxima verossimilhança*, isto é, o estimador que maximiza a função verossimilhança. Para a distribuição de Bernoulli o estimador de máxima verossimilhança é simplesmente a média da amostra (prova: ver DeGroot & Schervish, 2002, p.357). No caso do exemplo do parágrafo anterior, essa estimativa seria simplesmente y / n. Note que, quando o tamanho da amostra n cresce, o estimador Bayesiano tende ao estimador de máxima verossimilhança, o que é um resultado típico e geral.

Apesar da larga aplicabilidade desses métodos em diferentes problemas práticos, existem importantes aplicações em que os mesmos deixam a desejar. Em geral se assume que na amostra as observações são *independentes e identicamente distribuídas* (iid). Assim, se existe dependência entre as observações ou se as distribuições de Bernoulli da amostra tem diferentes parâmetros p, a amostra teria de ser reduzida para uma quantidade de observações realmente iid, sendo que nessa redução de amostra pode-se estar jogando fora informação relevante[258]. Outro problema é como estimar um parâmetro (ex.: fator de chance exploratório) através de uma observação *indireta*, por ex., uma sísmica 3D na área do prospecto de interesse em vez do resultado de um poço exploratório vizinho. Não se pode simplesmente somar a observação da sísmica como sendo mais uma observação de uma amostra que inclui resultados de poços exploratórios e aplicar as metodologias de inferências acima descritas. Para esses problemas será necessário considerar os diferentes poderes de revelação de cada informação (ou observação) adicional. Esse *poder de revelação* é definido como a capacidade de reduzir a variância esperada das possíveis distribuições posteriores, i. é, η^2.

[258] Ex: quer se avaliar o FC de um prospecto de idade do Eoceno numa bacia em que 25 poços foram perfurados com 5 sucessos (20% de sucesso). Se desses 5 sucessos, 2 ocorreram em prospectos do Eoceno e se 6 prospectos foram perfurados com objetivo no Eoceno, então o FC do prospecto aumenta. Se em adição um dos sucessos se deu numa área próxima (ex., a 5 km) do prospecto, e foi o único poço do Eoceno perfurado num raio de 5 km, então o FC do prospecto aumenta ainda mais. Usar apenas essa última informação poderia ser uma saída, mas se estaria jogando fora a informação de outros poços mais distantes do Eoceno que são relevantes, embora menos do que o do poço mais próximo. O *poder de revelação* de cada observação não é bem capturado nem com a metodologia clássica de inferência e nem com a metodologia tradicional Bayesiana. Com a medida η^2, pode-se modular as diferenças de relevância dos vários sinais.

O exemplo real a seguir, da *literatura profissional* de petróleo, permite fazer uma estimativa da medida de aprendizagem η^2 no caso da sísmica 3D. Esse exemplo também mostrará a insuficiência dos métodos estatísticos de inferência para avaliar o impacto econômico duma nova informação no valor de um projeto com incerteza técnica.

Aylor Jr. (1999) reporta um progresso substancial, em termos de sucesso exploratório, da firma Amoco a partir de 1994 com o uso da então nova tecnologia[259] de sísmica 3D. Ele relaciona o benefício da sísmica 3D diretamente à capacidade de separar bons prospectos de maus prospectos, reportando o efeito da sísmica 3D na probabilidade de sucesso de existência de rocha selante (ou selo, ver item 3.4.1) em 8 prospectos num bloco do Mar do Norte:

"*Uma ilustração muito boa da habilidade da pesquisa 3D em separar bons prospectos exploratórios de maus prospectos ... um bloco exploratório no Mar do Norte mostra 8 prospectos com probabilidade de falha de 'selo' geralmente entre 20% e 50% antes de adquirir dados 3D. Depois do 3D, dois dos prospectos tem sido convincentemente confirmados com 10% de probabilidade de falha (P(f)), e seis tem sido condenados com P(f) de 80-90%. ... Os prospectos condenados têm economizado caros poços secos. Os (prospectos) confirmados podem ser perfurados com baixo risco de falha.*"

Aylor Jr. reporta a probabilidade p de sucesso na existência de rocha selante avaliada por uma equipe de técnicos da exploração da Amoco antes e depois da sísmica 3D. Esses dados reais são mostrados na Tabela 13.

Tabela 13 - Probabilidades de Sucesso dos Prospectos Terem Selo

Prospecto	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilidade de Sucesso de Selo Antes da Sísmica 3D	70%	50%	50%	50%	80%	90%	50%	75%
Probabilidade de Sucesso de Selo Depois da Sísmica 3D	10%	10%	10%	20%	90%	10%	20%	90%

Note que o impacto da informação proveniente da sísmica 3D não foi ter uma melhor avaliação do parâmetro p da distribuição de Bernoulli, ou seja, não

[259] A sísmica tradicional de reflexão 2D é usada há várias décadas, mas a sísmica 3D só começou a ser usada nos anos 90.

foi reduzir a variância da distribuição Beta a priori da incerteza desse parâmetro. O impacto foi "separar o joio do trigo", isto é, fazer com que cada prospecto ficasse ou com alta chance de sucesso (p mais próximo de 100%, o que ocorreu com dois prospectos, veja tabela) ou com alta chance de falha (p mais próximo de 0%). Em outras palavras, o processo de aprendizagem caminhou no sentido da revelação total (embora tenha ficado longe disso, pois precisaria que parte dos prospectos ficasse com FC = 0 e a outra parte com FC = 1). Ou seja, o parâmetro p da distribuição de Bernoulli não é fixo e sim evolui (aumenta ou diminui) com o aprendizado trazido com a nova informação. Assim o estimador Bayesiano tradicional com o uso da distribuição Beta para estimar o parâmetro p da distribuição de Bernoulli, etc., é inútil nesse caso[260].

Ainda é possível usar a Lei de Bayes para estimar a revisão de probabilidades de sucesso dada as informações da sísmica, como fazem alguns autores. No entanto, deve-se notar um fato importante com os dados da Tabela 13 que é o *processo de redução da incerteza* (variância) com a informação proveniente da sísmica 3D. Aplicando a fórmula da variância da distribuição de Bernoulli, pode-se verificar que a variância *média* das distribuições de Bernoulli a priori (antes da sísmica 3D) era de 0,20594 $\%^2$, enquanto que a variância média das distribuições de Bernoulli posteriores (depois da sísmica 3D) caiu para 0,10750 $\%^2$, uma redução de quase 50% na variância a priori[261]. Ou seja, a estimativa da medida de aprendizagem $\eta^2 = 47{,}8\%$ ou $\eta = 69{,}1\%$. Note que esse valor não é para o fator de chance total e sim para *um dos fatores* que compõe esse FC. O impacto no FC total em termos de η^2 deve ser menor que 47,8%, a menos que os outros fatores sejam iguais a 1 (haja certeza nos outros fatores).

O exemplo real mostrou que a sísmica 3D proporciona uma revelação parcial sobre o FC nos prospectos, que está associada a um processo de redução de incerteza em direção à verdade sobre cada prospecto (p = 100% ou p = 0%). O valor obtido para a da medida de aprendizagem η^2 deve ser olhado com cuidado já que foi apenas um caso em que dados reais foram reportados (o que é raro).

---

[260] No caso do problema de exploração de petróleo o parâmetro de Bernoulli muda com a informação. É um caso diferente do problema mais simples de estimar a percentagem de produtos defeituosos num lote através de amostras aleatórias desse lote. Se a retirada de amostras for com reposição (ou se o lote for muito grande) a probabilidade de Bernoulli não muda.

[261] Lembrar que nem sempre a variância é reduzida com a informação, mas é um resultado típico, pois em *média* a variância se reduz (no mínimo nunca aumenta) com a nova informação.

Outras estimativas podem e devem ser feitas por companhias de petróleo baseadas nos seus próprios bancos de dados, não só para o fator de existência da rocha selante, como para os outros fatores discutidos no item 3.4.1.

4
Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais

4.1.
Teoria dos Jogos Tradicional

4.1.1.
Introdução e Conceitos de Equilíbrio

Esse capítulo analisa a interação estratégica entre firmas de uma forma endógena, i. é, considera dentro do modelo as possíveis ações e reações racionais das outras firmas que afetam o valor de uma firma, de um projeto ou de um conjunto de projetos. Isso é feito com a teoria dos jogos, teoria também reconhecida com o Prêmio Nobel de Economia (para Nash, Harsanyi e Selten em 1994). O foco maior é em jogos não-cooperativos, que tem maior relevância em finanças e em microeconomia, mas será visto também um importante jogo cooperativo de barganha, baseado uma lista de axiomas de Nash.

Na década de 80 e no início da década de 90, os modelos de opções reais (OR) ainda consideravam de forma *exógena* a ação de outras firmas para traçar a política de exercício ótimo das OR[262]. A partir de Smets (1993) e principalmente a sua popularização com Dixit & Pindyck (1994, cap. 9) e Trigeorgis (1996, item 9.3), a combinação híbrida OR com a teoria dos jogos – os jogos de opções reais – tornou-se crescentemente popular e em muitos casos necessária para capturar aspectos fundamentais do exercício ótimo de OR e do valor dessas OR. Para estudar os jogos de OR, é importante estudar a teoria dos jogos tradicional.

Serão abordados sucintamente os principais conceitos da teoria dos jogos – sem propor uma nova abordagem como no cap. 3 – e descritos alguns jogos de interesse para a tese e para companhias de petróleo. Em seguida serão analisados

---

[262] Exs.: Kester (1984) considerou um *tempo de expiração finito* da OR, com esse tempo sendo função da entrada estimada de competidores destruindo o valor da opção; Trigeorgis (1986, 1991), onde o efeito de preempção do competidor é modelado como *dividendos adicionais* que são perdidos pelos proprietários das (não-exercidas) OR; e de novo em Trigeorgis (1986, 1991), onde a entrada do competidor é modelada com um *processo de Poisson*, onde a chegada aleatória do competidor causa um salto para baixo ("jump-down") no valor do projeto.

jogos de opções reais, em que algumas novidades são mostradas. Por trabalhar com resultados mais conhecidos, o cap. 4 será um pouco mais informal do que o anterior. É deixada para o cap. 5, uma aplicação mais detalhada de jogos de OR na área de exploração de petróleo onde, além de combinar jogos não-cooperativos com cooperativos, é usada a teoria desenvolvida no cap. 3 como um fator muito importante para quantificação do modelo e para justificar uma *troca de jogos*.

Do ponto de vista de aplicações em finanças e economia, a teoria dos jogos moderna começa com John Nash na década de 50. O chamado "equilíbrio de Nash" ocupou praticamente todo o espaço de conceitos antigos de equilíbrio como o chamado *equilíbrio minimax*[263]. Além disso, Nash desenvolveu o mais importante modelo de jogo cooperativo, resolvendo um impasse da teoria econômica, relativo aos jogos de barganha[264].

Agora serão feitas algumas definições de maneira relativamente informal. Maiores detalhes e uma maior formalização podem ser achados em bons livros-texto de nível de pós-graduação, tais como Mas-Colell & Whinston & Green (1995, caps. 7, 8 e 9) e Fudenberg & Tirole (1991).

Defini-se estratégia de um jogador s_i como um plano contingente completo (ou regra de decisão) que descreve as ações a serem tomadas em cada possível evolução do jogo onde o jogador é chamado para jogar. Estratégias ótimas devem levar em conta as estratégias dos outros jogadores, denotadas por s_{-i}.

Um jogo é descrito especificando os jogadores, as regras, os possíveis resultados e os valores ("payoffs") desses resultados. Eles podem ser apresentados na forma normal (ou estratégica, usando matrizes), denotado por Γ_N, ou mais detalhadamente, na forma extensiva (através de uma *árvore de jogos*[265]), denotada por Γ_E. Aqui o jogo é assumido ser de memória perfeita, i. é, uma jogadora nunca esquece a informação que sabia antes de chegar até aquele estágio do jogo.

Aqui serão vistos principalmente, mas não só, jogos de informação perfeita, onde o jogador sabe a cada instante em que nó de decisão ele está numa árvore de jogo. Formalmente, cada conjunto de informação só contém um nó de decisão.

---

[263] Hoje é mais usada na matemática, por ex., como aplicação do teorema de separação do hiperplano (uma maneira de deduzir o teorema minimax). Livros textos modernos focados em economia mal mencionam o equilíbrio minimax (ex.: Fudenberg & Tirole, 1991), focando em equilíbrio de Nash e derivados (ex.: perfeito, Markoviano, Bayesiano, etc.).

[264] O problema era considerado indeterminado, dependia das "habilidades" de negociar, etc.

[265] A árvore de jogos é uma árvore de decisão generalizada para múltiplos decisores.

Também aqui se assume conhecimento comum ("common knowledge"), i. é, os jogadores conhecem a estrutura do jogo (inclusive os valores) e sabem que os outros conhecem, que sabem que os outros sabem que ele conhece, etc.

Um perfil de estratégias de um jogo com J jogadores é um vetor $s = (s_1, s_2, \ldots s_J)$ em que s_i é a estratégia escolhida pelo jogador i. Esse perfil de estratégias também pode ser escrito como (s_i , s_{-i}) para ressaltar o ponto de vista do jogador i em relação aos J – 1 outros jogadores.

Quando a estratégia é escolhida de forma determinística, ela é chamada de estratégia pura, onde o jogador i escolhe a estratégia $s_i(H)$ a cada conjunto de informação H. Quando um jogador escolhe de forma probabilística uma estratégia de seu conjunto de estratégias puras, se diz que ele escolheu uma estratégia mista. Assim, dado um conjunto de estratégias puras $\mathcal{S}_i$, uma estratégia mista para um jogador i é uma função σ_i: $\mathcal{S}_i \rightarrow [0, 1]$, que assinala a cada estratégia pura $s_i \in \mathcal{S}_i$, uma probabilidade $\sigma_i(s_i) \geq 0$. Essas probabilidades somam 1 quando se considera todas as estratégias puras desse conjunto. A estratégia pura pode ser vista como uma estratégia mista *degenerada* (probabilidade 1 para a estratégia escolhida e zero para as demais).

O valor de uma estratégia mista é um valor esperado dos valores ("payoffs") das estratégias puras ponderados pelas probabilidades relevantes. Na teoria dos jogos tradicional, que em muitos casos analisa as decisões de indivíduos como jogadores, e não firmas, é usada a função utilidade esperada. No caso de firmas, a teoria de finanças em geral recomenda que se use um valor de mercado de um ativo (de risco ou não) e não as preferências individuais de um gerente, por ex. Por isso, como essa tese foca em decisões de firmas com acionistas diversificados, como função valor será usada ou o VPL ou o próprio valor de opções reais. No caso geral, o valor para o jogador i será denotado por V_i.

Seja $V_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ o valor da estratégia mista σ_i para o jogador i quando os demais jogam as estratégias mistas σ_{-i}. A estratégia σ_i é a melhor resposta de i para o perfil σ_{-i} de J – 1 estratégias mistas dos outros jogadores se:

$$\mathbf{V_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq V_i(\sigma_i', \sigma_{-i})} \text{ , para qualquer } \sigma_i' \in \Delta(\mathcal{S}_i) \qquad \mathbf{(244)}$$

Onde $\Delta(\mathcal{S}_i)$ é o conjunto simplex do conjunto das estratégias puras $\mathcal{S}_i$. O simplex é uma extensão do conjunto de estratégias puras que assinala os conjuntos de probabilidades a todas as M estratégias puras disponíveis para o jogador i.

Uma estratégia pura $s_i \in \mathcal{S}_i$ é dita estritamente dominada para o jogador i, se existe uma estratégia $s_i' \in \mathcal{S}_i$ tal que para todas as estratégias dos outros jogadores ($\forall\ s_{-i}' \in \mathcal{S}_{-i}$) vale a desigualdade:

$$\mathbf{V_i(s_i, s_{-i}) < V_i(s_i', s_{-i})}\ ,\ \text{para qualquer } s_{-i}' \in \mathcal{S}_{-i} \qquad \mathbf{(245)}$$

Diz-se que s_i é estritamente dominada por s_i' e assim a estratégia s_i pode ser excluída, pois ela não deve ser jogada por jogadores racionais. A definição para o caso de estratégias mistas é similar. Na eq. (245), se no lugar da desigualdade estrita "<", se tiver a desigualdade não estrita "≤", então a estratégia s_i é chamada de estratégia fracamente dominada. Essas, em geral, não devem ser excluídas a priori (podem ser equilíbrios de Nash), mas geralmente são excluídas em equilíbrios mais refinados como o equilíbrio perfeito em subjogos.

Definição. **Equilíbrio de Nash**: O perfil de estratégias $s = (s_1, s_2, \ldots s_J)$ é um equilíbrio de Nash (EN) em estratégias puras de um jogo bem definido se, para *todo* jogador i = 1, 2, …, J, vale a desigualdade:

$$\mathbf{V_i(s_i, s_{-i}) \geq V_i(s_i', s_{-i})}\ ,\ \text{para qualquer } s_i' \in \mathcal{S}_i \qquad \mathbf{(246)}$$

O equilíbrio de Nash implica que as estratégias que fazem parte desse equilíbrio são simultaneamente as melhores respostas para todos os jogadores. Dessa forma, não há incentivo para nenhum jogador desviar desse equilíbrio, unilateralmente. Para saber se é equilíbrio de Nash, basta fazer a seguinte pergunta *a cada* jogador separadamente: mudando a sua estratégia você ficaria melhor (aumentaria o valor V_i)? Se as respostas de todos os jogadores forem negativas, então é um EN.

A definição de EN para estratégias *mistas* é similar à definição apresentada para estratégias puras (observar também a notação da definição de *melhor resposta*, que foi feita para estratégias mistas). Uma condição necessária e suficiente para o perfil σ ser EN, é que cada jogador, dado os que os outros estão fazendo, é indiferente entre todas as estratégias puras que ele joga com

probabilidades positivas e que essas estratégias são pelo menos tão boas quanto as estratégias que tiverem probabilidades zero.

Outro resultado importante para EN para estratégias mistas é que, para se testar se o perfil σ é EN, basta considerar desvios em estratégias *puras*. Ou seja, para cada jogador i se testa se há incentivo para desviar da estratégia mista σ_i para a estratégia pura s_i. Caso não haja esse tipo de incentivo de desviar, então é EN[266].

É oportuno ressaltar que as probabilidades das estratégias mistas *não* são exógenas (estimativas de estados da natureza) e nem são advindas de preferências dos jogadores. Essas probabilidades são resultados da análise de equilíbrio. Essas probabilidades fazem os outros jogadores ficarem indiferentes sobre as estratégias dos mesmos. Portanto, uma maneira prática de estabelecer essas probabilidades dos outros jogadores, é verificar quais as probabilidades σ_{-i} que fariam o jogador i ficar indiferente entre as estratégias disponíveis para o jogador i.

Existência de EN: Todo jogo em que se permitam estratégias mistas e no qual os conjuntos de estratégias puras de todos os jogadores são finitos (número finito de estratégias em cada conjunto), tem pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Já no jogo em que só se permitem estratégias puras, a existência de EN só é garantida em alguns casos, pois o conjunto de estratégias de cada jogador deve ser convexo e para isso deve ter infinitos valores[267] (ou seja um contínuo de valores). A imensa maioria dos jogos tem EN, o problema maior é que muitos jogos têm mais de um EN, o que leva ao problema de seleção do melhor EN. Isso leva a uma série de conceitos de equilíbrio para *refinar* o EN.

Em jogos dinâmicos, em geral o EN não é suficiente para descartar estratégias não críveis. O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (ENPS) é o conceito de equilíbrio mais importante em jogos dinâmicos. A idéia central é o chamado *princípio da racionalidade seqüencial*, em que a estratégia de um jogador deve especificar ações ótimas em todos os pontos da árvore de jogos.

O princípio da retro-indução ("backward induction") muito conhecido em programação dinâmica e mesmo em OR, analisa a árvore de jogos de trás para frente, i. é, estabelece primeiro as estratégias ótimas nos nós terminais e depois

---

[266] Um corolário é: um perfil de estratégias puras s é EN num jogo de estratégias puras se e somente se é estratégia mista degenerada do jogo em estratégias mistas. Ou seja, pode-se dar a atenção apenas para as estratégias puras que aparecem no equilíbrio do jogo em que só se permite jogar estratégias puras, pois só elas aparecerão (probabilidade positiva) no equilíbrio do perfil σ.

[267] Um conjunto com *finitas* estratégias, não é convexo.

vai estabelecendo as estratégias ótimas nos nós anteriores, até chegar no primeiro nó de decisão da árvore. Esse princípio captura o princípio da racionalidade seqüencial e é usado em jogos finitos de informação completa.

Um teorema antigo (1913), devido a Zermelo, permanece de grande relevância prática e hoje pode ser assim formulado: todo jogo finito de informação perfeita tem um EN em estratégias puras que pode ser obtido através de retro-indução. Além disso, se nenhum jogador tiver o mesmo valor ("payoff") em quaisquer dois nós terminais, então existe um único EN obtido por retro-indução. Esse conceito será visto que está totalmente ligado ao conceito de ENPS. A prova desse teorema constrói as estratégias de equilíbrio usando o chamado "algoritmo de Zermelo"[268], que é uma generalização para múltiplos jogadores, da retro-indução da programação dinâmica (Fudenberg & Tirole, 1991, p.91).

Antes de definir formalmente ENPS, deve-se definir subjogo. Subjogo é um subconjunto do jogo Γ_E com as propriedades: (a) começa num conjunto de informação que contém apenas um nó de decisão e contém todos os nós sucessores; (b) não há conjuntos de informação quebrados, i. é, se o nó de decisão x está no subjogo, então cada nó $x' \in H(x)$ (i. é, o conjunto de informação onde está x) também estará no subjogo. Além disso, todo jogo tem pelo menos um subjogo trivial: o próprio jogo.

Definição. **Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos**: O perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_J)$ no jogo na forma extensiva Γ_E é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (ENPS) se ele induz um EN em cada subjogo de Γ_E.

Para o caso de jogo finito com informação perfeita, o Teorema de Zermelo assegura que existe o ENPS e que ele pode ser único. O ENPS é único caso nenhum jogador tenha os mesmos valores ("payoffs") em nós terminais quaisquer. Esse ENPS pode ser obtido por retro-indução. Assim, existe uma ligação estreita entre o conceito de ENPS e o de programação dinâmica, muito usada em OR (Dixit & Pindyck, 1994, cap.4). Todo ENPS é um EN, mas o inverso nem sempre é verdade. O conceito de ENPS é devido a Selten.

Nos casos de jogos infinitos, a definição de ENPS permanece no sentido de que induz EN em todos os subjogos. No entanto, o ENPS pode perder um pouco

---

[268] Zermelo usou esse algoritmo em 1912 na análise do *jogo de xadrez* (Binmore, 1992, p.32). Zermelo pode ser visto como o avô da programação dinâmica.

do apelo prático por não existir um nó terminal para fazer a retro-indução. Mas nem sempre o horizonte infinito enfraquece o ENPS (assim como não enfraquece a programação dinâmica[269], ver Dixit & Pindyck, 1994, cap. 4). Por ex., em jogos de barganha com horizonte infinito, muitas vezes o conceito de ENPS prediz um único resultado que é o resultado limite de um jogo finito.

Nas aplicações em exploração e produção de petróleo, no entanto, devido à existência de prazos legais para explorar uma concessão e iniciar os investimentos em desenvolvimento, o interesse maior dessa tese é nos casos de jogos finitos. Por um lado isso facilita bastante a análise de equilíbrio (ENPS pode ser obtido por retro-indução simples). Mas por outro lado dificulta a obtenção de resultados teóricos gerais pois o tempo passa a ser variável de estado e assim as soluções analíticas são raras e soluções numéricas são necessárias. A literatura de jogos de OR quase que exclusivamente tem se preocupado com jogos infinitos para obter esses resultados analíticos gerais. Nessa tese, serão vistos ambos os casos, mas para as aplicações de E&P serão focados os jogos finitos de guerra de atrito e barganha. Inicialmente, esses jogos serão analisados sucintamente desde o ponto de vista da teoria dos jogos tradicional. Depois serão vistos em jogos de OR.

Dentre os diversos tipos de jogos dinâmicos, é de particular interesse dessa tese a classe geral de jogos chamada de *jogos de momento ótimo* "timing games" ou *jogos de parada ótima* ("optimal stopping games"), i.é. jogos onde as estratégias puras dos jogadores são escolhas de *tempos de parada* ("stopping times"). Dessa forma, a cada momento, o conjunto de ações de cada firma i é dado por $A_i(t)$ = {parar; não parar}, ver, por ex., Fudenberg & Tirole (1991, p.117). Aqui, tempo de parada significa tempo para parar a política de "esperar e ver" e exercer a opção real. Num jogo de dois jogadores, o primeiro a exercer a opção (i. é, o primeiro a "parar") é chamado de líder (L) e o outro é chamado de seguidor (F, de "follower").

Esses tipos de jogos podem ser classificados em duas categorias: jogos de *externalidades negativas* (ex., jogos de preempção) e jogos de *externalidades positivas*. Esse último inclui modelos de jogos de guerra de atrito (que será analisado em detalhes nessa tese) e de jogos com *efeitos de rede*. Contrastando

[269] Inclusive o jogo ser infinito facilita, pois o tempo deixa de ser variável de estado em opções perpétuas e isso permite soluções analíticas.

com o jogo de guerra de atrito, nos jogos de rede a estratégia de exercício simultâneo das opções (S) é mais valiosa do que um único investimento (ex., a adoção de um novo padrão num mercado de novas tecnologias), de forma que o valor de exercício simultâneo não é menor que o valor de seguidor e geralmente é até mais valioso.

Em jogos estocásticos (não necessariamente jogos de opções), a introdução de uma variável de estado seguindo um processo estocástico (ex., o preço do petróleo P), aumenta o problema de multiplicidade de equilíbrios em jogos tais como os de guerra de atrito. Logo, como é usual em jogos estocásticos, a análise é focada em um tipo de equilíbrio chamado de equilíbrio de Markov. Esse tipo de equilíbrio é função apenas do estado corrente (ex., preço atual do petróleo) o qual segue um processo de Markov (como os processos estocásticos estudados no cap.2). Esse estado corrente sumariza o efeito direto do passado no jogo corrente, ver, por ex., Fudenberg & Tirole (1991, chapter 13)[270]. Equilíbrios de Markov são também perfeitos em subjogos. Nos jogos de interesse, se procura identificar pelo menos um *equilíbrio perfeito de Markov* (EPM) e, se possível, os EPM que sejam mais prováveis no longo prazo. Por ex., EPM's que sejam estáveis em processos evolucionários (ver item 4.1.5.3).

Outros equilíbrios de interesse, tais como o Bayesiano para jogos de informação incompleta, serão apresentados em tópicos mais específicos a seguir. Nos tópicos seguintes serão resumidos alguns jogos tradicionais importantes.

4.1.2. Guerra de Atrito

4.1.2.1. Introdução

Nessa seção será discutida uma importante classe de jogos chamados de *guerra de atrito*[271]. Uma importante versão de guerra de atrito com opções reais em exploração de petróleo será desenvolvida no cap. 5, por isso será dado relativo destaque para esse jogo. Primeiro, será apresentada sucintamente uma variante mais estática desse *jogo da espera* conhecido como jogo do medroso

[270] Ver Kapur (1995) para os equilíbrios perfeitos de Markov em jogos de guerra de atrito.
[271] Esse item é baseado em Dias (1997) e principalmente em Dias & Teixeira (2004).

("chicken")[272], o que permitirá ter mais intuição sobre a versão dinâmica de guerra de atrito. Uma versão do jogo do medroso é descrita a seguir. Dois adolescentes dirigem os seus carros em direção do outro. O primeiro a desviar (impedindo a colisão) é o "medroso" e perde o jogo[273]. Aqui, o primeiro a exercer a opção, denotado por *líder* (L)[274], perde o jogo. Dessa forma, o papel do *seguidor* (F) é mais valioso (F > L) nesse jogo. O exercício simultâneo (S) é pior que ser seguidor e igual ou melhor que ser líder, i. é., F > S ≥ L. Entretanto, ambos os jogadores preferem exercer a opção (medroso) a situação de ambos os jogadores nunca exercendo a opção ("colisão de carros"), i. é., a estratégia de *espera* simultânea (W) tem o menor valor W < L. Com esses ordenamentos de valores ("payoffs"), se podem identificar todos os equilíbrios de Nash. A Figura 54 mostra o jogo do medroso na forma estratégica Γ_N e os dois EN existentes em estratégias puras.

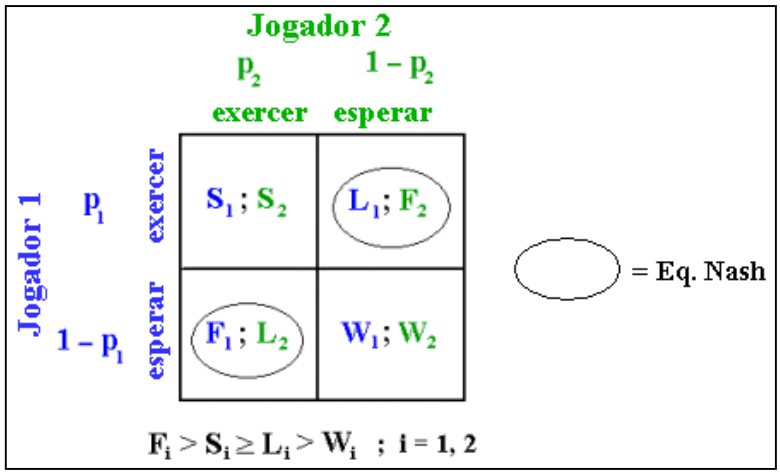

Figura 54 – Jogo do Medroso ("Chicken")

Os dois EN em estratégias puras são (F_1 ; L_2) e (L_1 ; F_2)[275]. Existe também um EN em estratégias mistas que é uma randomização sobre os dois EN em estratégias puras, com cada jogador i = 1, 2, escolhendo a probabilidade p_i para o exercício da opção de forma a *manter seu oponente j indiferente* entre exercer ou

[272] Esse jogo é bem discutido em Dixit & Skeath (1999, pp. 9, 110-112, 136-140, 331-334). Ele é mais estático, pois é geralmente analisado usando só a forma normal Γ_N em jogo matricial, sem especificar as estratégias de *parada ótima*. Entretanto, alguns autores (ex., Fudenberg & Tirole, 1991, p.119 n.7) consideram "chicken" apenas um outro nome para o jogo guerra de atrito.

[273] Outra versão desse jogo é mostrada no filme "*Rebel without Cause*" com James Dean. Não se recomenda a prática desse jogo, pelo menos dessas versões perigosas.

[274] Foram adotados os termos líder e seguidor pois eles permitem unificar a linguagem e a notação com o caso de preempção que será mostrado no item 4.1.5. O líder move primeiro.

[275] Pois não existe incentivo para desviar unilateralmente dessas estratégias.

não a opção[276]. Essa probabilidade é estratégica, pois é função dos valores do *oponente* F_j, S_j, L_j, e W_j:

$$\mathbf{p_i = \frac{L_j - W_j}{L_j - W_j + F_j - S_j}} \qquad \mathbf{(247)}$$

Essa probabilidade é estritamente menor que um e estritamente maior que zero porque $F_j > S_j$ e $L_j > W_j$. Note que também são obtidos esses <u>três equilíbrios</u> se ou $S_j = L_j$ ou $S_j > L_j$ (i. é, ambos são jogos do medroso). No entanto, se $F_j = S_j$ <u>ou</u> $L_j = W_j$ existirá apenas <u>um</u> equilíbrio degenerado em estratégias mistas. Esse resultado explica porque foi excluído o caso de $F_j = S_j$ nesse jogo[277]. Note também que se $L_j >> W_j$, a probabilidade de exercício p_i é perto de 1, i.é., mesmo com uma alta probabilidade de exercício, o oponente ficará indiferente em exercer ou não a opção porque W é muito baixo (medo de colisão).

Com três EN no jogo do medroso, a pergunta natural é: qual dos três EN é mais provável que os jogadores se coordenem? Esse é um problema comum de um jogo, ter múltiplos EN. Nesse caso, será visto no item 4.1.5.3 (jogos evolucionários) que apenas o EN em estratégias mistas é *estável* em termos evolucionários e assim deve ser o mais provável resultado no longo prazo.

O jogo de guerra de atrito foi introduzido na literatura da teoria dos jogos por Maynard Smith (1974), num jogo em que animais lutam por um prêmio (um território ou uma caça). Existe um custo de permanecer lutando e esse custo é crescente com duração do jogo. Assim, o valor de *nunca parar* (ou mesmo de parar mais tarde) para ambos os jogadores é menor que o valor do jogador conceder (parar) imediatamente. Nesse jogo, se um animal "parar" ele concede o prêmio gerando a externalidade positiva para o outro jogador. Esse é um "prêmio da espera", de forma que o valor do seguidor é maior que o do líder na guerra de atrito. No improvável caso de exercício *simultâneo* da opção (parada simultânea, com ambos os animais desistindo do combate ao mesmo tempo), ou o jogo é decidido de forma randômica (Maynard Smith, 1982, mas com o ganho esperado menor que o ganho do seguidor, i. é, F(t) > S(t) > L(t)) ou nenhum jogador ganha

[276] Na verdade os jogadores *não querem* manter os oponentes indiferentes. Essa é apenas uma conhecida *regra de bolso* para estratégias mistas que resulta de um problema de maximização de valor resolvido por cada jogador considerando as melhores respostas do oponente.

[277] Existem alguns jogos de externalidades positivas com *efeitos de rede* nos quais $F_j = S_j$ ou mesmo $F_j < S_j$. Entretanto, eles pertencem a outra classe de jogos, com muito fraca relação com o foco dessa tese, i.é., com os jogos do medroso e guerra de atrito.

o prêmio (F(t) > S(t) = L(t), como em Fudenberg & Tirole, 1991, p.119)[278]. O exercício simultâneo em guerra de atrito é sempre menos valioso do que o valor do seguidor.

Como mencionado antes, a guerra de atrito pertence à classe de jogos de momento ("timing games") ou jogos de parada ótima e é também conhecido como um *jogo da espera* ("waiting game"). Esse jogo tem muitas aplicações em economia. Na literatura de economia industrial, um exemplo é o exercício da *opção de abandono* em duopólios de *indústrias declinantes*. Nesse tipo de indústria, a saída (ou abandono) de uma firma beneficia a outra firma, pois a firma remanescente torna-se monopolista e assim obtém uma sobrevida lucrativa (Ghemawat & Nalebuff, 1985). Fudenberg & Tirole (1986) analisaram o mesmo caso, mas com foco em indústria *não* declinantes. Outro exemplo de guerra de atrito vem da literatura de *jogos de barganha não cooperativos*, ver, por ex., Ordover & Rubinstein (1986). Jogos de barganha não cooperativos são guerras de atrito no sentido que os jogadores são impacientes (existe um custo de adiar o acordo), as propostas são fixas (o prêmio é a diferença entre as propostas), mas o acordo requer a aprovação de ambos os jogadores, de forma que um dos jogadores deve conceder (parar) para poder fechar o acordo.

4.1.2.2. O Jogo da Espera na Perfuração Exploratória

O foco dessa tese será numa interessante aplicação do jogo guerra de atrito que surge em exploração de petróleo. Nessa aplicação a externalidade positiva é mais sutil: o exercício da opção pelo líder gera uma *revelação de informação* que beneficia o outro jogador (o seguidor), o qual pode usar essa informação grátis (a firma é chamada de "free rider") para decidir sobre o seu próprio exercício da opção. No contexto da teoria dos jogos tradicional, esse caso tem sido objeto de pesquisa principalmente por parte de Hendricks (exs., Hendricks & Porter, 1996, ou Hendricks & Wilson, 1985), enquanto que no contexto de jogos de OR, Dias (1997) foi o primeiro a analisar esse jogo. Dias (1997) analisou esse jogo em tempo discreto, usando uma árvore de jogos e retro-indução.

---

[278] No entanto, Huisman (2001, p.100-101) incluíu como guerra de atrito o caso L(t) > S(T), com $t \in [0, T]$. Mas isso difere das definições usuais de guerra de atrito de Fudenberg & Tirole (1991) e Maynard Smith (1982).

Para entender o jogo da perfuração exploratória, considere a Figura 55 em que duas firmas detêm direitos exploratórios em dois blocos vizinhos.

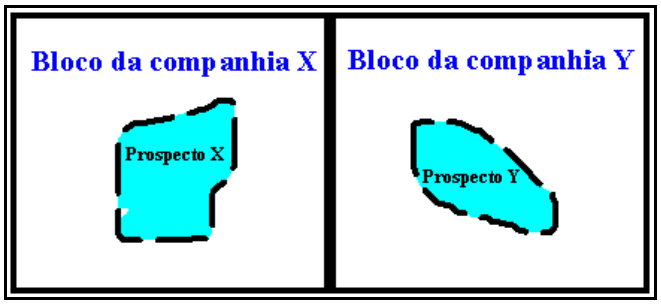

Figura 55 – Prospectos Correlacionados em Blocos Vizinhos

As estruturas dos prospectos (a Figura 55 mostra a vista de topo) foram indicadas pela sísmica 2D e vendidas (pelo governo ou por firmas particulares especializadas em sísmica) para ambas as firmas antes do leilão, de forma que os tamanhos dos prospectos (não necessariamente iguais) são conhecimento comum na maioria dos casos práticos. Também é conhecimento comum que esses prospectos são correlacionados, pois por hipótese eles estão no mesmo play geológico e a sísmica também identifica isso. Mas apenas perfurando o poço exploratório é que será possível comprovar ou não a existência de petróleo. As probabilidades de descobertas são expressas pelos fatores de chance (distribuições de Bernoulli), conforme discutido em detalhes no cap. 3 (item 3.4). Lá foi mostrado como atualizar um fator de chance após a revelação de uma informação, que aqui é a eventual perfuração do prospecto do bloco vizinho. A perfuração de um poço exploratório é um investimento totalmente irreversível (nada se recupera dos insumos gastos) e relativamente caro[279]. No entanto, se o prospecto for muito atrativo (elevado VME, ver cap.2), então o custo da espera pode ser alto e assim pode ser melhor "perder" o jogo e perfurar logo o prospecto.

Além da revelação sobre a probabilidade de sucesso (revelação de fator de chance), outras revelações podem ser relevantes. Por ex., sobre a qualidade do petróleo (óleo leve ou óleo pesado, gás com H_2S ou não, etc.) e sobre a qualidade da rocha reservatório (se muito ou pouco produtiva). No entanto, como apenas parte da informação é tornada pública, a revelação de fator de chance é a mais importante para o jogo guerra de atrito da perfuração, pois essa informação é tornada pública obrigatoriamente por ser fato relevante para o valor das ações em

[279] Um poço exploratório marítimo custa entre US$ 10 milhões e US$ 50 milhões, a depender da lâmina d'água e da profundidade da zona de interesse onde está o prospecto.

bolsas de valores e/ou por que o governo (ANP no caso do Brasil) tem interesse em divulgar esse fato para atrair novos investimentos e novas empresas. Essa questão será retomada quando se discutir a possibilidade de trocar de jogo (para um jogo cooperativo de barganha) que será visto no cap. 5 (item 5.4).

O jogo é finito, pois existe um prazo legal para descobrir e assumir um compromisso de investir no desenvolvimento do eventual campo descoberto (ver cap.2). Considere que o prazo legal é igual para ambas as companhias de petróleo, pois é comum que blocos vizinhos tenham sido provenientes do mesmo leilão. Além disso, com a mesma expiração, o jogo fica bem mais interessante: caso os prazos fossem diferentes a interação estratégica seria menor, já que a companhia com prazo mais longo iria provavelmente esperar a perfuração na concessão de prazo mais curto.

Também será assumido que o jogo é restrito a dois jogadores (J = 2). Esse caso é importante na prática de negócios da exploração porque é mais comum. Isso porque a revelação de informação de blocos vizinhos (com prospectos no mesmo play geológico) é mais forte ou muito mais forte do que a revelação de áreas mais distantes. Assim, na maioria dos casos só dois blocos adjacentes têm revelação de informação relevante para, na prática, gerar interação estratégica relevante entre duas companhias de petróleo. Entretanto, existem interessantes casos com J > 2 jogadores que podem ser analisados de forma similar ao feito nessa tese, por ex., considerando um processo de revelação seqüencial. Alternativamente, pode ser um jogo com dois jogadores, mas considerando que os sinais *mais fracos* ocorrem em paralelo e de forma *exógena*, segundo um processo de revelação (ver cap. 3, item 3.4).

Como mencionado antes, a aplicação na exploração do jogo de guerra de atrito tradicional (i. é, sem opções) foi feita principalmente por Hendricks. Mas aqui existem algumas diferenças. Uma importante diferença em relação, por ex., a Hendricks & Porter (1996), é na modelagem da revelação de informação exploratória, assim como na variável técnica em que se dá o principal impacto dessa revelação de informação. Eles modelaram o volume de reservas com uma distribuição lognormal em que o seu valor esperado é revelado pela perfuração do prospecto vizinho. Entretanto, o impacto maior da informação revelada para o público é sobre o sucesso (descoberta) ou fracasso do investimento, i. é, sobre o fator de chance (FC), conforme discutido no cap.3 (ver item 3.4.1). Existe também

algum impacto público sobre a qualidade esperada do petróleo (anúncio do tipo "foi descoberto petróleo leve"). Mas o impacto sobre o *volume* é muito fraco, uma vez que a sísmica é que pode dar melhor essa informação num prospecto específico, i. é, a sísmica pode indicar uma grande estrutura num bloco e uma pequena estrutura no outro. Ou seja, se for descoberta uma *grande reserva de óleo leve* num bloco, isso aumenta a chance de descoberta no bloco vizinho (e inclusive de ser óleo leve), mas se a estrutura mapeada pela sísmica for pequena, o volume esperado não muda com o resultado do bloco vizinho[280]. Além disso, a informação mais precisa sobre volume só é publicada após os investimentos em delimitação do campo[281].

4.1.2.3. Formalização e Estratégias da Guerra de Atrito

Seguindo Fudenberg & Tirole (1991, p.118), as estratégias puras s_i na guerra de atrito são tempos de parada[282], i.é., mapas simples do conjunto de datas para o conjunto de ações factíveis {parar; não parar}. O jogo termina quando pelo menos um jogador pára (exerce sua opção), que no caso exploratório é a perfuração de um poço pioneiro. As *estratégias comportamentais* b_i especificam as probabilidades condicionais $b_i(t)$ de parada em cada instante t se nenhum jogador tiver parado até lá. Já as estratégias mistas são distribuições de probabilidades sobre as estratégias puras s_i. Fudenberg & Tirole apontam também que, dado que as estratégias puras são tempos de parada, é natural identificar estratégias mistas como sendo funções acumuladas de probabilidade $G_i(t)$ para $t \in [0, \infty)$, ou seja, $G_i(t)$ é a probabilidade do jogador i parar antes ou exatamente no instante t. Essa função $G_i(t)$ não precisa ser contínua (pode ter "saltos").

Considere o caso de interesse (que será detalhado no capítulo 5) de apenas dois jogadores, i e j. Além da justificativa prática vista para o caso da exploração,

---

[280] No entanto, em bacias/regiões inexploradas, o anúncio de um grande volume descoberto, irá incentivar as firmas a entrarem em novos leilões e fazerem investimentos em sísmica para tentar identificar outras grandes estruturas. Mas no caso analisado, se assume que as estruturas de interesse já foram mapeadas pela sísmica.

[281] Entretanto, alguma informação privada – principalmente detalhes técnicos como a profundidade do contato óleo-água, detalhes da qualidade da rocha e dos fluidos, etc. – pode ser útil para revisar as expectativas em relação ao fator de chance, à qualidade e até do volume do prospecto. Mas como esses detalhes não são revelados para o público, só um acordo de *parceria* poderia fazer a firma do prospecto vizinho ter acesso a esses detalhes. Isso será visto no cap. 5 como um forte incentivo para a cooperação (modelado com as ferramentas do cap. 3).

[282] Em termos mais gerais, s_i são *conjuntos de parada* ("stopping sets"), i. é, intervalos de tempo nos quais a parada é ótima.

o caso de dois jogadores é importante em geral para a teoria, pois qualquer análise de J-jogadores (J > 2) em jogos finitos começa em retro-indução com um subjogo no qual apenas dois jogadores permanecem (os outros já teriam exercido suas opções). Para o jogador i, denote o valor do líder por $L_i(t)$, o valor do seguidor por $F_i(t)$ e o valor de cada firma no exercício simultâneo por $S_i(t)$, de acordo com os seus tempos de parada:

- Valor do jogador i = $L_i(t)$ se $t_i < t_j$;
- Valor do jogador i = $F_i(t)$ se $t_i > t_j$; e
- Valor do jogador i = $S_i(t)$ se $t_i = t_j$.

Como visto anteriormente, o jogo de interesse (exploração de petróleo) é finito e assim existe uma data T em que a opção expira e o jogo termina (com exercício(s) ou não). Outros exemplos de jogos finitos de guerra de atrito na economia são: (a) na negociação de salários entre gerentes e trabalhadores, a expiração do contrato pode ser vista como a expiração do jogo; (b) na negociação de um contrato com um fornecedor, a data que a firma espera ficar sem estoques pode ser assumida como expiração desse jogo. Ver Ponsati (1995) para outros detalhes sobre jogos finitos de guerra de atrito.

Dessa forma o jogo é definido no intervalo [0, T], e suas estratégias são tempos de parada pertencentes a esse intervalo. Nessa aplicação está claro que a guerra de atrito é sem efeitos de rede, pois o prêmio (revelação de informação) não pode ser usado (para decisão ótima) pelo líder ou mesmo pelos jogadores que exerceram simultaneamente as opções[283]. Nesse contexto, a guerra de atrito é caracterizada com as seguintes condições:

$$\mathbf{F_i(t) \geq L_i(t) \quad para\ t \in [0, T)} \qquad \mathbf{(248)}$$

$$\mathbf{L_i(t) = S_i(t) \quad para\ t \in [0, T]} \qquad \mathbf{(249)}$$

$$\mathbf{L_i(t) \downarrow t \quad para\ t \in (0, T)} \qquad \mathbf{(250)}$$

$$\mathbf{F_i(t) \geq F_i(\tau) \quad para\ \tau > t,\ \tau \in (0, T)} \qquad \mathbf{(251)}$$

A condição da eq. (248) diz que a externalidade positiva em geral tem valor e assim o valor do seguidor é maior do que o do líder, ou pelo menos nunca menor. Condição da eq. (249) diz que o exercício simultâneo da opção não gera ganhos para os jogadores. Condição da eq. (250) diz que se for para ser líder, é

[283] Outro exemplo de guerra de atrito *sem* efeitos de rede está na *guerra de preços* em indústrias declinantes: o prêmio (menor competição) não é capturado pela firma que tanto tenha abandonado a indústria sozinha ou simultaneamente.

melhor ser antes do que mais tarde. Isso ocorre de forma similar para o valor do seguidor da eq. (251), que prefere que o rival exerça a sua opção o quanto antes para revelar informação e ele poder *eventualmente*[284] exercer uma opção que se revele madura para o exercício imediato. As condições das eqs. (250) e (251) são *ceteris paribus*, i.é., para as mesmas condições de mercado (claro que o valor do líder aumenta se o preço do petróleo aumentar ao longo do tempo). No contexto tradicional, a eq. (250) diz que existe um custo em postergar um projeto de VME positivo. No contexto de jogos de OR, existe um custo (líquido do benefício da espera) de postergar uma opção que está "deep-in-the-money".

No jogo de exploração de petróleo, se na expiração o jogo ainda for uma guerra de atrito (não tiver exercício em $t < T$), deverá ser colocado adicionalmente uma *condição terminal*, principalmente para o valor do seguidor, em $t = T$. Note que a eq. (248) deixa isso em aberto, propositalmente para dar flexibilidade e evitar descartar jogos de guerra de atrito com diferenças de especificação na condição terminal que não descaracterizam o jogo. Assim, existem pelo menos três alternativas interessantes de condição terminal. Em qualquer caso, note que o seguidor não pode usar a informação revelada *depois* de T, pois sua opção já teria expirado e o bloco devolvido ao governo. A primeira alternativa de condição terminal para o seguidor é colocar a seguinte condição terminal:

$$\mathbf{F_i(T) = 0} \qquad \mathbf{(252)}$$

Note que essa é a única alternativa correta se T for infinito (opção perpétua), pois devido ao efeito de desconto do fluxo de caixa (e considerando que o valor do ativo básico é finito), se tem $F_i(\infty) = L_i(\infty) = 0$. Mas mesmo no caso finito, essa alternativa tem uma lógica, pois continuar esperando na expiração poderia significar não perfurar e devolver o bloco ao governo, mesmo que não seja ótimo. A desvantagem é que, nesse caso, o valor do líder na expiração pode ser maior que o valor do seguidor (invertendo a principal característica do jogo guerra de atrito) se na expiração o valor do líder for estritamente positivo (VME > 0).

A segunda alternativa de condição terminal para o seguidor é mais comum, manter a vantagem do segundo movimento, i. é, $F(T) > L(T)$. Nesse caso, a característica do jogo é que é *possível* na expiração capturar o prêmio. Isso é

[284] Pode ocorrer que a revelação de informação esperada não torne a opção do seguidor "deep-in-the-money" para nenhum cenário, por isso o sinal de igual pode ocorrer. No contexto de opções finitas, no entanto, o valor da opção (ceteris paribus) *sempre* declina com o tempo.

verdade no caso dos jogos de guerra de atrito de contratos, mencionados antes, pois se um jogador ceder em t = T, automaticamente o outro jogador ganha o prêmio F – L, que nesses casos são assumidos estritamente positivos. No contexto da tese (exploração de petróleo), considere a alternativa similar:

$$\mathbf{F(T) \geq L(T)} \qquad \mathbf{(253)}$$

Essa condição terminal teria a vantagem de não ser descontínua em t = T. A Figura 56 mostra como poderia ser os valores do líder e do seguidor na expiração, consistente com a condição da eq. (253), e em função (assuma linear) de uma variável de estado de interesse, no caso o preço do petróleo.

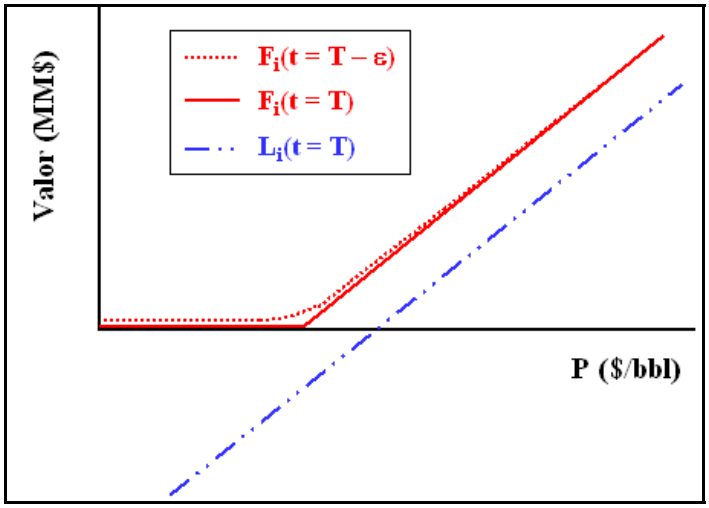

Figura 56 – Alternativa de Condição Terminal na Guerra de Atrito

Aqui se assume que o valor F tem a característica de opção (por isso não pode ser negativa), pois, pela natureza do seguidor, ele sempre usa a informação de forma ótima para decidir se perfura ou não o seu próprio prospecto. Note que o valor de F um pouco antes (em $t = T - \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um valor infinitesimal) da expiração, é próximo e se aproxima suavemente (continuamente) de F(T). O valor do líder, que representa o valor do exercício da opção sem a informação extra, pode ser negativo para baixos valores da variável de estado (P). Na Figura 56, para elevados preços do petróleo, parece que as retas dos valores do seguidor e do líder são paralelas, mas nos problemas práticos (como será visto no cap.5) elas podem se encontrar suavemente para um valor alto de P. Por isso a eq. (253) admite a igualdade, ao contrário de outros exemplos mais simples da literatura. A razão é que para elevadíssimos preços do petróleo a revelação de informação torna-se irrelevante economicamente, pois a opção seria exercida em qualquer

cenário revelado (mesmo com más notícias). Mas se esses altos valores forem excluídos do *jogo*, F > L em t = T, e o equilíbrio será único (teorema de Zermelo).

A desvantagem da segunda alternativa (eq. 253) é de interpretação, já que mesmo considerando a perfuração como instantânea, pela natureza *seqüencial* – exercício da opção pelo líder, seguido de anúncio público do resultado, seguido de exercício ou não do informado seguidor – parece mais lógico o seguidor só poder usar essa informação na data T + ε, onde ε > 0 é um valor infinitesimal. Mas nesse caso a opção já teria expirado. Isso leva à terceira alternativa a seguir.

A terceira alternativa de condição terminal para o seguidor ao contrário da primeira e em concordância com a segunda alternativa, caracteriza o valor do seguidor como uma *opção*, de forma que F nunca é menor do que L, mesmo na expiração. Mas difere da segunda alternativa por não poder usar a revelação de informação se a mesma ocorrer apenas na expiração. A terceira alternativa de condição terminal (t = T) para o seguidor é dada por:

$$\mathbf{F_i(T) = Max\{L_i(T), 0\}} \qquad \mathbf{(254)}$$

Assim, mesmo considerando a perfuração como instantânea, o seguidor só poderia usar essa informação na data T + ε, onde ε > 0 é um valor infinitesimal mas suficientemente positivo para a opção já ter expirado e assim não poderia usar a informação. Nesse caso, olhando para a Figura 56, haveria uma descontinuidade na expiração, pois a curva tracejada de F(t = T – ε) despencaria para o valor do líder L(T) na região em que L(T) > 0. Essa descontinuidade é a maior desvantagem dessa alternativa, pois não haveria uma "última data" em que o seguidor poderia usar essa informação.

As três alternativas de condição terminal são possíveis, mas as mais adequadas no problema em análise parecem ser a segunda e a terceira. O mais importante é deixar claro a condição usada e a conseqüente premissa assumida.

Por conveniência de cálculo, será assumido que a perfuração é instantânea. Poderia-se imaginar que a expiração legal na verdade ocorra em t = T' = T + t_R, onde t_R é o *tempo de revelação* da informação (ou tempo de aprendizado), i.é, o tempo de perfuração que é da ordem de três meses. Mas isso em geral não altera o jogo do ponto de vista conceitual. Esse ponto será novamente abordado no cap.5.

As condições dadas pelas eqs. (248) a (251) e a (253) ou (254), diferem um pouco daquelas apresentadas por Fudenberg & Tirole (1991, p.121-122),

especialmente devido ao jogo de interesse da tese ser finito. Fudenberg & Tirole tinham em mente jogos *infinitos*. Assim, as condições deles foram inspiradas pelas aplicações que eles desenvolveram (ex.: Fudenberg & Tirole, 1986) para o abandono de firmas em duopólios e/ou guerra de preços.

Como é padrão em jogos de parada ótima finitos, o jogo é resolvido de trás para frente ("backwards"), resolvendo primeiro o subjogo em t = T e depois trazendo os resultados (EN e valores resultantes) nos subjogos precedentes que ocorrem em t < T e assim determinar o ENPS, pois por definição o ENPS induz EN em todos os subjogos que começam em qualquer instante t. Nos jogos de OR, esses equilíbrios são equilíbrios perfeitos de Markov, no sentido de ser condicional à variável de estado que segue um processo estocástico (aqui será o preço do petróleo). Nesse caso, os tempos de parada deverão ser funções da variável estocástica.

4.1.3. Jogos de Barganha

Jogo de barganha é um dos ramos da teoria dos jogos de maior interesse prático, se não for o maior[285]. No cap. 2, ao comentar o exemplo da Figura 3, observou-se que era possível desenhar contratos de parceria para obter ganhos baseados na revelação de informação de um prospecto em outro. Esses contratos de parceria são exemplos de resultados de jogos de barganha. A análise dos equilíbrios desses jogos de barganha e os possíveis métodos de solução, são de grande interesse para a indústria de petróleo.

A teoria dos jogos de barganha é dividida em três ramificações: (a) jogos de barganha não-cooperativos; (b) jogos de barganha cooperativos; e (c) jogos de barganha evolucionários. A teoria não-cooperativa é baseada principalmente no famoso modelo de ofertas alternadas de Rubinstein (1982), que chega a um único ENPS que nem sempre parece intuitivo ou "justo". A teoria cooperativa mais popular é, de longe, a chamada solução de Nash (1950, 1953), que apresenta resultados mais intuitivos. A teoria evolucionária é mais recente, ver Napel (2002) para detalhes, e baseada na teoria dos jogos evolucionários (ver item 4.1.5.3). Enquanto a teoria não-cooperativa de barganha especifica os detalhes do *processo* de barganha (exs.: ofertas são alternadas, o jogador i faz a primeira oferta, o

[285] Esse item é baseado principalmente em Dias & Teixeira (2004).

tempo entre cada oferta, se é jogo infinito ou não, etc.), a solução cooperativa é mais simples e geral, pois independe do processo *específico* em que se dá a barganha. Embora a especificação do processo de barganha possa provar a existência do ENPS, ele pode chegar a resultados menos intuitivos, por ex., que o primeiro jogador a fazer a oferta tem uma vantagem decisiva para obter todo ou a maior parte do prêmio do jogo de barganha.

A ênfase maior dessa tese será em jogos de barganha cooperativos, mas existe uma ligação estreita da teoria dos jogos de barganha não-cooperativos (Rubinstein) com a solução cooperativa de Nash: no modelo de ofertas alternadas, se for permitido um pequeno risco de desistência da negociação ("breakdown") depois da rejeição de qualquer oferta, a solução de barganha não-cooperativa (ENPS) converge para a solução cooperativa de Nash quando a probabilidade de desistência vai para zero (ver Osborne & Rubinstein, 1994, seção 15.4). Isso será mais bem discutido e usado depois para obter um ENPS.

Para motivar e introduzir alguns conceitos e notação, considere o exemplo do cap. 2, em que foi usada a eq. (3) para calcular o valor de um prospecto. No exemplo o VME foi de – 1,5 milhões. Nesse exemplo existe um outro prospecto, vizinho e no mesmo play geológico, que tem as mesmas características e o mesmo VME negativo do primeiro. No entanto, a perfuração de um dos prospectos tem um benefício adicional, mais sutil, que é revelar informação para o outro prospecto (Figura 3). Assim, a união dos dois prospectos é bem mais valiosa que a soma dos VMEs individuais. Agora assuma que cada um desses dois prospectos iguais é de uma companhia de petróleo diferente, Companhia i e Companhia j. Na ótica da guerra de atrito, i. é, sem cooperação, nenhuma das duas companhias iria perfurar o seu poço (pois o VME < 0) e assim o jogo terminaria com ambas as firmas obtendo o valor zero com a estratégia "ótima" da guerra de atrito. Note que não haveria incentivo em desviar de forma unilateral dessa estratégia em qualquer subjogo (qualquer t) desde que o exercício tenha VME negativo, e assim esse equilíbrio seria ENPS, mas resultando em valor zero para ambos os jogadores.

Agora considere a possibilidade de um acordo de cooperação entre as duas companhias de petróleo, que reconhecem o benefício da revelação de informação e irão procurar dividir esse benefício num processo de barganha. Seja U a união dos dois ativos. Seja U_i e U_j os valores dos jogadores i e j resultantes de um jogo

de barganha cooperativo. Seja w_i e w_j, com $w_i + w_j = 1$, as participações ("working interest") das firmas i e j na união de ativos U, ou seja:

$$\mathbf{U_i = w_i\, U} \quad \textbf{(255)}$$

$$\mathbf{U_j = w_j\, U} \quad \textbf{(256)}$$

Para explotar a revelação de informação, o acordo de cooperação prevê que um poço será perfurado imediatamente e o outro será perfurado ou não a depender da informação revelada pela primeira perfuração. Assim, o valor da firma i é:

$$\mathbf{U_i = w_i \{VME_1 + [FC_1 \,.\, Max(0, VME_2^{+})] + [(1 - FC_1) \,.\, Max(0, VME_2^{-})]\}} \quad \textbf{(257)}$$

O valor da firma j é similar (com w_j). Imagine o seguinte contrato de parceria: devido à simetria dos prospectos, as firmas dividem seus prospectos em 50% de participação em cada prospecto por cada firma. Ou seja, $w_i = w_j = 50\%$. Quais os valores das firmas nesse caso? Na discussão da Figura 3 foi visto que o valor da união de ativos, com perfuração de um poço e o uso da revelação de informação, era U = + 3,75 MMS. Dessa forma, o acordo simétrico de barganha resulta nos valores $U_i = U_j$ = + 1,875 MM$, um resultado bem melhor do que o do jogo guerra de atrito. Isso significa que existe um forte incentivo em muitos casos para haver uma troca de jogos (da guerra de atrito para o jogo de barganha). Assim, a cooperação é melhor resposta simultânea, i. é, não há incentivo unilateral para desviar a qualquer tempo t, e assim também pode ser vista como ENPS. Isso será desenvolvido com mais detalhes no cap. 5, mas se continuará nesse exemplo para desenvolver a notação de jogos cooperativos de barganha.

Nesse exemplo, se as firmas não conseguissem chegar a um acordo, se teria um *desacordo* ("disagreement") ou desentendimento e as firmas voltariam a se comportar de forma não-cooperativa. Essa alternativa não-cooperativa – chamada de ponto de desacordo ("*disagreement point*", d) ou ponto de *status quo*, nesse exemplo teria valor igual a zero ($d_i = d_j = 0$), pois em caso de desacordo até a data T, as firmas não iriam perfurar nenhum poço e os prospectos seriam devolvidos para o governo.

No exemplo, dada a simetria, pareceu natural a troca de 50% de participação de cada prospecto para cada firma, como sendo um equilíbrio natural desse jogo cooperativo. Entretanto, existem outras estratégias cooperativas de equilíbrio. Na verdade, existe um contínuo de estratégias disponíveis que são EN, a maioria deles com participações assimétricas. Por ex., se o acordo é tal que a firma j tem uma participação de apenas $w_j = 40\%$ (e $w_i = 60\%$), os valores dos jogadores com

esses contratos seriam U_i = 2,25 MM$ e U_j = 1,5 MM$. Mesmo sendo menor que o valor do outro jogador, U_j é positivo (melhor que $d_j = 0$), de forma que não existe incentivo unilateral de desvio (i. é, é EN). Na prática esse não é o mais provável resultado em equilíbrio, mas é também EN. Entretanto, a teoria de barganha cooperativa usando a *solução* de Nash[286], irá recomendar a divisão de 50%-50% como a única solução do jogo nesse exemplo.

Assuma que a variável de barganha no contrato em negociação é a participação $w_i = 1 - w_j$. O conjunto de pares possíveis de participação $\{w_i, w_j\}$, com $w_j = 1 - w_i$, *mais* o ponto de desacordo $d = (d_i, d_j)$, formam o (total) conjunto factível ("*feasible set*"), denotado por ***S***, elemento básico do jogo de barganha. Para qualquer $w_i \in [0, 1]$, o contrato $\{w_i, w_j\}$ é simultaneamente melhor resposta, de forma que o (não-cooperativo) conceito de equilíbrio de Nash não pode ajudar a selecionar um único contrato de equilíbrio. Entretanto, os conceitos ou axiomas da teoria de barganha podem ajudar a apontar um único resultado.

Seja um jogo cooperativo de barganha definido pelo conjunto factível e pelo ponto de desacordo, o par (***S***, d), sendo ***S*** um conjunto convexo, limitado, fechado e com pelo menos um ponto dominando estritamente o ponto $d \in \boldsymbol{S}$. Defina a *solução* do jogo como uma regra que dá as proporções da divisão do prêmio ou excedente ("surplus"). Os três critérios mais aceitos para selecionar uma solução cooperativa são[287]: (a) a solução de Nash (1950), que recomenda o ponto de ***S*** no qual o produto dos ganhos em relação a d é máximo; (b) a solução de Kalai & Smorodinsky (1975), que sugere o ponto de ***S*** no qual os ganhos em relação a d são proporcionais aos máximos valores possíveis dentro do subconjunto de pontos factíveis dominando d; e (c) a solução igualitária, a qual recomenda a solução que iguale os ganhos dos jogadores em relação a d. No exemplo *simétrico* simples apresentado, a solução natural $w_i = w_j = 50\%$ coincide para todos os três critérios. Mas para o caso de valores assimétricos (ex., $d_i = 0$ e $d_j = +1$ MM$), essa coincidência não se verifica.

A solução cooperativa de Nash é uma abordagem *axiomática* baseada *principalmente* em três princípios gerais: (a) *invariância de escala*, i.é, a solução

---

[286] Não confundir "solução *cooperativa* de Nash" com "equilíbrio de Nash".

[287] Ver Thomson (1994) para uma avançada, mas concisa discussão sobre essas e outras soluções de barganha cooperativa. Para uma ótima introdução à solução cooperativa de Nash num nível elementar, ver Dixit & Skeath (1999, ch.16).

não muda em caso de transformações lineares na escala de valores ("payoff"); (b) *eficiência do resultado*, i.é, os jogadores obtêm somados não menos que *todo* o prêmio disponível (nenhum ganho mútuo é deixado inexplotado); e (c) *independência de contração*, i.é, a solução é invariante à remoção de soluções alternativas factíveis, mas irrelevantes (soluções não adotadas).

Nash (1950) provou que a sua solução é a única que satisfaz os axiomas de invariância de escala, de ser Pareto-ótimo (um critério de eficiência mais forte), de independência de contração, e de *simetria*[288]. Entretanto, a formulação da solução de Nash sem a premissa de simetria tornou-se mais comum em *aplicações* econômicas (Dixit & Skeath, 1999, p.528), mesmo gerando múltiplas soluções (um grau de liberdade, ou *flexibilidade*, para considerar alguma outra variável na seleção do problema e/ou a assimetria se os jogadores terem diferentes *poderes de barganha*)[289]. No cap. 5 será usada a solução de Nash *com* o axioma de simetria, a fim de obter uma solução única no jogo de OR.

A Figura 57 ilustra a solução de Nash para o jogo de barganha cooperativo.

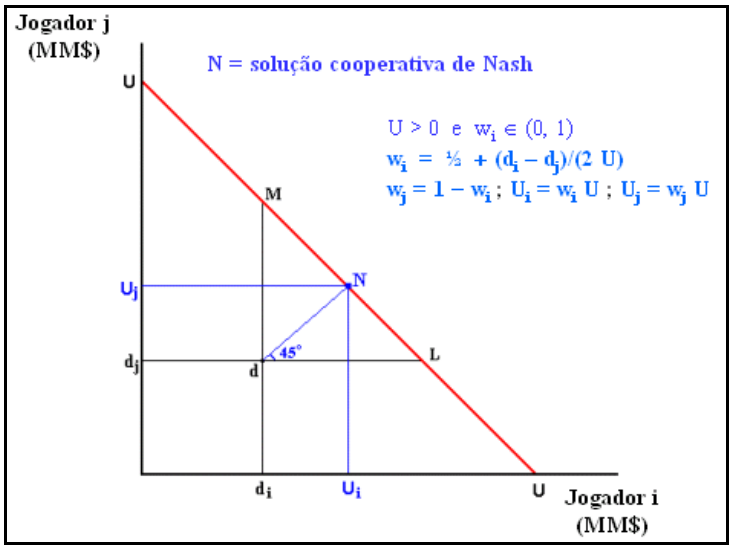

Figura 57 – Solução de Nash para o Jogo de Barganha Cooperativo

Na Figura 57, a linha (vermelha) que liga os pontos (U, 0) e (0, U) representa o conjunto factível de *acordos* (todas as combinações convexas dividindo U)[290], enquanto que o ponto de desacordo d com coordenadas (d_i, d_j) representa os valores das firmas em caso de não fechar o acordo (ou desacordo,

[288] O problema de barganha (***S***, d) é simétrico se a solução f_i(***S***, d) com um jogador é igual à solução com o outro jogador f_j(***S***, d).

[289] Uma visão análoga foi usada na tese para a *estrutura de informação flexível* (ver cap.3).

[290] Esse conjunto não necessariamente é linear, embora seja bem mais comum.

um ponto chave que será discutido abaixo). Note que somente o segmento de reta L-M é de interesse (para um acordo), pois de outro modo as firmas ficariam melhor com os valores dados pelo ponto de desacordo d. O ponto N que está nesse segmento, é a solução única da barganha cooperativa de Nash. O axioma de simetria significa simplesmente que o segmento d-N tem inclinação de 45°, enquanto que sem o axioma de simetria, se poderia escolher qualquer ponto do segmento L-M. É fácil deduzir as seguintes equações que, junto com as eqs. (255) e (256), caracterizam a solução de barganha de Nash:

$$\mathbf{w_i = ½ + (d_i - d_j)/(2\,U)} \;,\; U > 0 \;\text{ e }\; w_i \in (0, 1) \qquad \mathbf{(258)}$$

$$\mathbf{w_j = ½ - (d_i - d_j)/(2\,U)} \;,\; U > 0 \;\text{ e }\; w_j \in (0, 1) \qquad \mathbf{(259)}$$

Formalmente, além de ser a única a atender aos 4 axiomas mencionados, a solução de Nash N($\boldsymbol{S}$, d) é o resultado do seguinte problema de maximização:

$$\mathbf{N(\boldsymbol{S}, d) = argmax\{(U_i - d_i)\,(U_j - d_j) \mid (U_i, U_j) \in S,\, U_i \geq d_i,\, U_j \geq d_j\}} \qquad \mathbf{(260)}$$

Onde os argumentos que maximizam a expressão da eq. (260) são as variáveis de barganha w_i e w_j (participações em U dos jogadores i e j).

A ligação entre as teorias de barganha cooperativa e não-cooperativa – chamada de *programa de Nash* ("Nash program"), tem sido discutida desde Nash (1953) com o seu conceito de *jogo de ameaça* ("threat game") e o seu conceito de *jogo da exigência* ("demand game")[291]. Pesquisas mais recentes têm mostrado que, para uma ampla classe de casos de interesse prático, o ENPS (único em alguns casos) do jogo não-cooperativo de barganha converge para a solução cooperativa de Nash. Isso aumenta a relevância da solução de Nash para o jogo de barganha. Essa notável ligação entre as teorias não-cooperativa e cooperativa de barganha foi descoberta por Binmore (1987), que no jogo de ofertas alternadas de Rubinstein (1982) fez o intervalo de tempo entre as ofertas tender a zero, obtendo a solução de Nash como limite. Binmore & Rubinstein & Wolinsky (1986) consideraram o risco de desacordo ("breakdown"), obtendo também a solução de Nash como o limite do ENPS quando esse risco tende a zero. Rubinstein & Safra

[291] No jogo de ameaça, cada jogador assume uma ameaça ao outro jogador se o oponente não aceitar sua proposta e *depois* jogam um jogo não-cooperativo de exigência. O equilíbrio desse jogo da exigência coincide com a solução de Nash quando as exigências são ótimas.

& Thomson (1992) estenderam esse resultado para o caso dos valores dos jogadores tendo preferências mais gerais (utilidade não esperada), em que também o ENPS converge para a solução de Nash.

Além dos próprios axiomas, uma das questões mais discutidas na literatura de barganha cooperativa – e muito importante também para justificar o ENPS – é o ponto de desacordo d. Existem pelo menos dois caminhos trilhados na literatura para estabelecer esse ponto, ambos ligados a jogos não-cooperativos, já que algum jogo não-cooperativo deve ser jogado em caso de falhar o acordo (desacordo). Um caminho usa a idéia inicial de Nash sobre a escolha de ameaças ("threat") *antes* da negociação da divisão de U. O outro caminho, que será adotado nessa tese, inclusive no cap.5, é que os jogadores não escolhem ou anunciam ameaças[292]. Eles simplesmente procuram fechar o acordo sem fazer ameaças, embora saibam que, se houver um indesejável e inesperado desacordo irreversível, eles irão jogar um jogo não-cooperativo a partir do instante t_d, quando ocorreu o desacordo. O desacordo é indesejado, pois desaparece o ganho potencial (Pareto eficiente) que só existe em caso de acordo. Por isso ele é improvável (desviar para estratégias que não ganham o prêmio), embora o risco de desacordo possa ser arbitrariamente pequeno (com probabilidade positiva ε). Se o jogo não-cooperativo inesperado ocorrer e se ele tiver um único equilíbrio (EN), então esse equilíbrio determinará o ponto de desacordo d (Binmore, 1992, p.262; Harsanyi, 1977, p.168; Binmore, 1998, p.65). No contexto mais dinâmico dessa tese, se irá procurar o ENPS do subjogo que começa em t_d para determinar o ponto d.

Note que o ponto d não é uma *opção externa* (Binmore, 1998, p.80), i.é, uma alternativa àquela barganha, e sim o resultado inesperado de uma falha de negociação. Uma opção externa seria, por ex., se existisse um terceiro jogador (outra companhia de petróleo) que fizesse uma oferta externa para um dos jogadores (ou para ambos), por também ter um prospecto correlacionado em um terceiro bloco. Essa oferta geraria para um ou ambos os jogadores a alternativa b_i e/ou b_j, em geral com valores diferentes de d_i e d_j, que os jogares poderiam desviar (quebrar a barganha) se fossem melhores que os valores que estiverem na mesa de

[292] Essa distinção de caminhos aparece em Binmore (1992, p.261-263) e antes em Harsanyi (1977, p.167-169).

negociação entre os dois primeiros jogadores. Assim, não se deve confundir opção externa com ponto de desacordo, i.é:

$$\mathbf{b = (b_i, b_j) \neq d = (d_i, d_j)} \qquad \mathbf{(261)}$$

Já o caminho do jogo de ameaças é menos claro e geralmente não leva ao ENPS. Essas ameaças anunciadas podem ter efeitos no jogo da ameaça, sendo ou não críveis. Mas se a ameaça não for crível ela soa como "blefe" e não é considerada que será levada a cabo pelo oponente. Uma ameaça crível é aquela que todos acreditam que poderá ser levada a cabo por ser a ação mais racional, dada as circunstâncias. A discussão clássica sobre ameaças críveis e não criveis é devido a Schelling (1956 e 1960). Podem-se trabalhar as circunstâncias para tornar uma ameaça mais crível. Por ex., a tática do conquistador espanhol Cortés, que queimava os próprios navios para emitir um sinal de não ter alternativa a não ser lutar. Esse sinal indicava um compromisso de não recuar ou não desistir, que servia tanto aos próprios soldados, como principalmente ao inimigo, que assim via a ameaça como crível (ver Dixit & Nalebuff, 1991, p.152-155).

4.1.4. Outros Jogos de Interesse

4.1.4.1. Jogos de Informação Incompleta

Em muitos jogos que ocorrem na economia (e na vida), é mais realista considerar que existe uma informação incompleta sobre o outro jogador. No exemplo exploratório, um jogador pode identificar pela sísmica se a sua estrutura ou a do vizinho é maior ou não, mas a firma não sabe qual a probabilidade de sucesso que foi estimada pelos geólogos e geofísicos da outra companhia de petróleo, em geral não sabem a taxa de desconto que a outra usou, além de outros parâmetros usados para estabelecer o VME do prospecto. Assim, existe uma informação incompleta sobre o valor do jogo para o outro jogador.

Nos jogos de informação incompleta, cada firma só recebe informações parciais sobre os valores do jogo, representadas por distribuições de probabilidades a priori sobre os possíveis cenários. Os chamados jogos de sinalização são exemplos de jogos de informação incompleta. Nesses casos geralmente existe uma parte informada e outra parte não-informada, i. é, a informação é assimétrica. O problema de assimetria de informação, especialmente

no mercado, gera problemas de eficiência econômica. Esse tema tem sido muito analisado por economistas e já rendeu 5 prêmios Nobel de economia. Em 1996, foram laureados Mirrless (taxação de renda ótima dado que o contribuinte tem informação privada)[293] e Vickrey (análise e desenho de leilões). Em 2001 foram laureados Akerlof (seleção adversa, o problema do mercado de "limões"), Spence (jogos de sinalização) e Stiglitz (menu de alternativas ou "screening"). Spence e Stiglitz apontaram soluções (ou antídotos) para reduzir o problema de ineficiência do mercado (seleção adversa) devido à assimetria de informações. Todos esses problemas podem ser (e vários foram originalmente) solucionados com métodos de jogos de informação incompleta.

O método geral para resolver os jogos de informação incompleta é o *método Bayesiano* desenvolvido por Harsanyi (1967-68). Nele, o jogo original com informação incompleta torna-se um jogo equivalente de Bayes com informação completa, embora imperfeita. Os valores dos jogadores (ou preferências) são associados à realização de v.a. É assumido, como premissa, que a distribuição conjunta dos valores dos jogadores são de *conhecimento comum*. Conhecer essa distribuição conjunta geralmente implica conhecer as distribuições a priori e a estrutura de dependência (ver cap.3).

No jogo reinterpretado como de informação completa, mas imperfeita, a natureza faz o primeiro movimento escolhendo a realização da v.a. sobre o valor ou "tipo" do (ou de cada) jogador. Em termos formais, cada jogador i tem uma função valor $V_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, onde $\theta_i \in \Theta_i$ é uma v.a. escolhida pela natureza que só é observada pelo jogador i. A distribuição multivariada (conjunta) dos J jogadores é dada por $G(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_J)$, assumida conhecida por todos os J jogadores. Uma estratégia pura para o jogador i é uma regra de decisão ou função $s_i(\theta_i)$ que dá a escolha estratégica para cada realização do seu tipo θ_i. O conjunto de todas essas funções é o conjunto de estratégias puras $\mathcal{S}_i$ do jogo Bayesiano. O valor esperado do jogador i é dado por:

$$\tilde{V}_i(s_1(.), s_2(.), \ldots, s_J(.)) = E[V_i(s_1(\theta_1), s_2(\theta_2), \ldots, s_J(\theta_J)) \mid \theta_i] \qquad (262)$$

[293] Mirrless introduziu conceitos e métodos a partir de 1971 que fazem parte do chamado "princípio da revelação", que permite restringir a busca de mecanismos ótimos apenas àqueles que revelem diretamente a verdade (i. é, seja ótimo para a parte informada revelar toda a verdade).

Harsanyi usa um novo conceito de equilíbrio, o equilíbrio Bayesiano de Nash (EBN). O EBN para estratégias puras é definido de modo similar ao EN, mas para valores esperados condicionais (usa a eq. 262). O perfil de estratégias puras $s = (s_1, s_2, \ldots s_J)$ é um equilíbrio Bayesiano de Nash (EBN) se, para *todo* jogador i = 1, 2, …, J, vale a desigualdade:

$$\tilde{V}_i(s_i, s_{-i}) \geq \tilde{V}_i(s_i', s_{-i}) \text{ , para qualquer } s_i' \in \mathcal{S}_i \qquad \textbf{(263)}$$

Num EBN em estratégias puras, cada jogador está jogando a melhor resposta para a distribuição condicional dos valores das estratégias dos oponentes, para cada tipo que esse jogador pode assumir. Alternativamente, cada tipo de jogador pode ser pensado como um jogador diferente que maximiza o seu valor, dada a distribuição de probabilidade condicional sobre as escolhas estratégicas dos oponentes (Mas-Colell & Whinston & Green, 1995, p.256).

O EBN tem muitas conexões com o EN em estratégias *mistas*. Quase sempre o EBN em estratégias puras do jogo Bayesiano é equivalente ao EN em estratégias mistas do jogo original de informação completa (Gibbons, 1992, p.152-154). Essas conexões são feitas através dos chamados *teoremas de purificação* de Harsanyi (ver Mas-Colell & Whinston & Green, 1995, p.257).

Além disso, o *princípio de revelação* mencionado no cap. 3 tem uma versão no contexto de jogos Bayesianos (devido a Myerson) que diz que qualquer EBN de qualquer jogo Bayesiano pode ser representado por um mecanismo direto com incentivo-compatível, em que é ótimo revelar o seu tipo em jogos desenhados com esse mecanismo (ver Gibbons, 1992, p.164-165).

Nos jogos dinâmicos, o conceito de equilíbrio Bayesiano perfeito (EBP) é similar ao ENPS no sentido que um perfil de estratégias EBP deve induzir EBN em todos os subjogos (ou jogos de continuação) dadas as crenças (probabilidades) posteriores dos jogadores. Ou seja, aplica-se o teorema de Bayes para atualizar a distribuição de probabilidade conjunta, usando as informações (os sinais) que foram realizados até aquele estágio do jogo. Uma boa introdução a esses jogos, especialmente nas aplicações de jogos de sinalização, é encontrada em Gibbons (1992, cap.4). Existem diversas aplicações em finanças, como em política de dividendos e de emissão de dívidas (estrutura de capital da firma). Um exemplo clássico de assimetria de informação entre firmas emitindo dívidas ou ações e o mercado, é o artigo de Myers & Majluf (1984), com a teoria de "pecking-order".

Mas-Colell & Whinston & Green (1995, cap.9) usa o adjetivo "fraco" no EBP para caracterizar que o requerimento de consistência (atualização Bayesiana) só é exigido no *caminho de equilíbrio* e não em todos os possíveis caminhos da árvore de jogos. Ou seja, nos conjuntos de informação com probabilidades iguais a zero (de serem atingidos), nada é exigido. Mas existem casos em que um EBP fraco não é ENPS, o que gera a necessidade de fazer exigências adicionais para os outros conjuntos de informação.

Um exemplo de jogo dinâmico de informação incompleta é o *jogo de metas de inflação* que o Banco Central joga com os agentes do mercado. É um exemplo também de *jogo de sinalização* devido à assimetria de informação, com uma parte informada (BC) e outra não-informada (agentes do mercado). Esses agentes têm incerteza sobre o "tipo" do jogador "Banco Central", por ex., se ele é do tipo "duro" no combate à inflação (eventualmente sinalizando com aumento de juros) ou do tipo "mole" no combate à inflação (que cede a pressões políticas e não aumenta os juros quando necessário). O Banco Central sinaliza o seu tipo com a sua política monetária[294].

A premissa de conhecimento comum da distribuição conjunta dos valores dos jogadores nos jogos Bayesianos parece ser muito forte, mas não é bem assim. No exemplo exploratório, existem diversas fontes de informação que ajudam a gerar as distribuições a priori. Por ex., deve-se considerar que todas as companhias tiveram acesso aos registros sísmicos, inclusive do prospecto vizinho. Além disso, é razoável assumir que a probabilidade de uma companhia perfurar ao longo do termo da concessão segue uma curva U (ver Dias, 1997), porque esse é o comportamento mais comum indicado por estudos econométricos, conforme apontado por Hendricks & Porter (1996). Uma curva U significa que: (a) no início do termo da concessão muitos blocos são perfurados (prospectos muito atrativos e menos estratégicos); (b) no meio do prazo da concessão há uma redução na quantidade de poços pioneiros sendo perfurados; e (c) no final do prazo de concessão ocorre um aumento na perfuração desses poços. Hendricks & Porter

[294] Isso foi modelado por Vickers (1986) em dois períodos: a natureza escolhe o tipo de autoridade monetária (BC), que pode privilegiar a meta de inflação ou o crescimento; os agentes formam a sua expectativa π^e_1 sobre a inflação para o primeiro período; o BC observa π^e_1 e escolhe a inflação do 1º período π_1 (sinal), através da taxa de juros; os agentes observam π_1 mas não o verdadeiro tipo do BC; os agentes formam uma crença π^e_2 para a inflação do 2º período e tomam decisões de investimento, estoque e preços, o BC observa π^e_2 e escolhe a inflação do 2º período.

(1996) também indica que, pelo menos no início da concessão, quanto maior o valor do bônus pago pelo bloco (que é informação pública), maior a probabilidade dessa companhia exercer logo a sua opção de perfuração no bloco. Logo, existem vários dados que permitem modelar a distribuição a priori da outra companhia perfurar o seu bloco ao longo do prazo exploratório.

Os conceitos de EBN e EBP podem ser aplicados em praticamente todos os tipos de jogos (barganha, guerra de atrito, leilões, jogos de sinalização, etc.). Algumas referências adicionais serão feitas para o caso específico analisado no cap.5, para a guerra de atrito do jogo exploratório.

Assim, Harsanyi (1967/8) desenvolveu uma teoria geral para jogos de informação incompleta com foco na *incerteza sobre o tipo de um jogador*. Derivado do trabalho de Harsanyi, Wilson (1969) apresentou um modelo para o caso de incerteza sobre o valor do resultado ("payoff") do jogo. Esse modelo foi aplicado ao caso de um leilão selado de primeiro-lance. Esse modelo – muito citado na literatura de leilões, é apresentado no próximo tópico devido à relevância teórica e prática em leilões de blocos de exploração de petróleo.

4.1.4.2. Jogos de Leilões

A teoria dos leilões ("auction theory") é um dos mais importantes ramos da teoria dos jogos, especialmente devido a sua relevância prática. Muitos dos mercados mais importantes na economia podem ser vistos como mercado de leilões. Em exploração de petróleo, os direitos exploratórios sobre blocos são leiloados pelo governo, geralmente em *leilões selados de primeiro lance*, i. é, as companhias de petróleo entregam envelopes lacrados (selados), sendo que o maior lance ganha os direitos sobre o bloco e a companhia ganhadora paga o valor indicado no seu envelope (por isso é chamado de primeiro lance).

O desenho do leilão ótimo para um tipo de mercado e/ou a análise e o refinamento dos tipos de leilão existentes, são objetos da teoria dos leilões. A teoria dos leilões usa conceitos da teoria dos jogos, especialmente de jogos de informação incompleta sobre os valores que os jogadores (participantes do leilão) atribuem ao objeto (ou ativo) leiloado.

Além de presença obrigatória nos textos de teoria dos jogos, existem muitos livros-texto inteiramente dedicados à teoria dos leilões, a maioria recente. Exs.:

Kagel & Levin (2002), Krishna (2002), Milgrom (2004) e Klemperer (2004). A análise de jogos de leilões como jogos de informação incompleta foi originado no trabalho pioneiro (fundamental para o seu Prêmio Nobel) de Vickrey (1961). Ele mostrou estratégias ótimas nesse jogo de informação incompleta antes de Harsanyi (1967-68) formular a teoria geral desses jogos.

Vickrey (1961) analisou o leilão *selado de segundo lance*, em que ganha o envelope lacrado com o maior lance, mas o ganhador só paga o valor do segundo maior lance (é similar, em termos de resultados, ao leilão *aberto inglês* de lances alternados). Cada tipo faz uma avaliação diferente do bem (ex.: um fã fanático pode estar disposto a dar um lance maior que um fã não-fanático por um objeto). Vickrey mostrou que dar um lance igual ao valor do bem para cada tipo é uma estratégia dominante e independe do tipo do jogador. Logo, todos os interessados irão revelar quanto realmente vale o bem para cada um (cada tipo irá dar um lance diferente) e ganha quem acreditar que o bem é mais valioso. Logo, esse leilão de segundo lance incentiva cada tipo a dizer a verdade sobre o valor do bem e ganha quem mais está interessado no bem. Com muitos jogadores (tipos) participando do leilão, no *limite* o leiloeiro conseguiria vender o bem pelo valor máximo, i. é, pelo valor do jogador com a maior avaliação[295].

Em geral o número de jogadores não é tão grande e assim a pergunta natural é: qual o leilão ótimo, o de segundo lance ou o de primeiro lance? A resposta, um tanto surpreendente, é que em geral ambos dão a mesma receita esperada ao leiloeiro! Isso é referido como sendo a equivalência de receita entre os dois leilões e a demonstração usa o *princípio da revelação* para restringir a busca de soluções. Um exemplo é mostrado em Dutta (1999, cap.23), que analisa o caso extremo do leilão com apenas dois compradores. Cada jogador tem 50% de chances de ser de cada tipo e pode ocorrer que os dois sejam do mesmo tipo. No leilão de primeiro lance ele obtém um EBN (único) em que o tipo de menor valoração μ oferta o seu próprio valor e o tipo de maior valor θ joga uma estratégia mista atribuindo uma distribuição de probabilidades a todos os lances entre μ e $(\theta + \mu)/2$. Depois Dutta usa a solução de Vickrey para o leilão de segundo lance e chega à conclusão que ambos os leilões dão a mesma receita esperada ao leiloeiro.

[295] Depois foi visto que esse equilíbrio é um EBN *separador* (separa os tipos de jogador).

Wilson (1977) mostra que os leilões competitivos satisfazem a *lei dos grandes números*, isto é, quando o número de participantes é grande (tende a infinito), o valor do lance vencedor tende ao valor correto do ativo leiloado. Em outras palavras, o lucro do ganhador do leilão é zero em caso de leilão com *competição perfeita*. Esse resultado (lucro zero) é consistente com outros resultados da teoria econômica para o caso de competição perfeita[296].

Na literatura profissional de petróleo, uma das mais citadas referências é o artigo clássico de Capen & Clapp & Campbell (1971), o primeiro[297] a relatar o problema da *maldição do vencedor*[298] ("winner's course") nesses leilões. Nele, é relatado que, de forma sistemática, as companhias de petróleo pagam mais do que valem esses direitos. A explicação é que as firmas, de forma ingênua, baseiam os seus lances nos seus valores esperados incondicionais do ativo em leilão, mas só ganham o leilão se suas avaliações individuais forem as mais altas dentre todos os jogadores. Dessa forma, embora em média as suas avaliações (e lances) não superestimem os valores dos ativos, as firmas só ganham quando as suas avaliações são as mais otimistas do leilão. Ou seja, ex-post (ou condicional a vencer) seus lances são geralmente maiores do que os valores dos ativos e se constata o prejuízo reportado por Capen & Clapp & Campbell (1971).

Milgrom (2004, p.166-181) analisa o caso de leilões de primeiro-preço dos direitos de exploração de blocos no Golfo do México, setor americano, com conclusões interessantes sobre o papel da informação no resultado do leilão. Ele se baseia nos artigos de Wilson (1969) e de Hendricks & Porter & Wilson (1994). Wilson (1967) também é um artigo clássico de informação assimétrica em leilões de primeiro lance de direitos exploratórios de petróleo, destacando o papel das firmas bem informadas (blocos vizinhos aos leiloados) das firmas menos informadas. Engelbrecht-Wiggans & Milgrom & Weber (1983) mostram que, em equilíbrio (agindo otimamente), o lucro esperado da firma informada é geralmente positivo, enquanto que os outros jogadores (os menos informados) tem lucro zero.

O modelo de Wilson (1969) é descrito sucintamente a seguir, que ele considera como um caso particular de Harsanyi (1967-68). Sejam dois jogadores 1

---

[296] Dixit & Pindyck (1994, cap.8) mostra que, apesar do gatilho de investimento ser o mesmo no caso de monopólio e competição perfeita, o lucro esperado no primeiro caso é positivo (estritamente), enquanto que no segundo caso as firmas investem com lucro esperado igual a zero.

[297] Ver Kagel & Levin (2002, p. 2).

[298] Ou *curso* do vencedor, curso no sentido de ser inevitável, como o curso de um rio.

e 2 que disputam num leilão um objeto de valor X, sendo que X é desconhecido pelos jogadores, que conhecem apenas a (mesma) distribuição a priori do valor de X, de densidade g(X). Antes do leilão, cada jogador i observa um sinal ou conjunto de informações S_i, que provê alguma informação a respeito de X. No caso de leilão de blocos para exploração de petróleo, cada jogador observa uma fonte comum de informação: os *registros sísmicos* vendidos tanto por firmas que lançam linhas sísmicas e/ou processam como pela agência de petróleo do governo. Wilson (1969) considera que os jogadores podem ter diferentes quantidades de informação sobre o valor de X. No caso de petróleo, uma firma pode ter maior conhecimento geológico da área do que a outra firma por já deter (e ter explorado) blocos vizinhos ao bloco em licitação, por ex. a Petrobras nos leilões da ANP.

Dessa forma, as empresas irão tomar a decisão (lance do leilão) usando a sua distribuição posterior, $g_i(X \mid S_i)$ para o caso do jogador i. Para o jogador i, existem infinitas possíveis distribuições posteriores que o seu oponente –i pode ter em mente na hora do leilão. Se i deseja ganhar o leilão minimizando o "*dinheiro deixado sobre a mesa*" (diferença entre os dois primeiros lances do leilão), ele deve levar em conta essas infinitas distribuições posteriores do oponente.

Nesse leilão exploratório existem pelo menos dois tipos de firmas licitantes: as firmas "vizinhas" que detêm direitos (e informações geológicas) em blocos vizinhos aos blocos em licitação – chamadas *firmas bem informadas*, e as firmas "não-vizinhas" ou *mal informadas* sobre a potencialidade dos blocos em licitação. Logo, existe *assimetria de informação* entre os participantes do leilão.

Para resolver o jogo, Wilson (1969) assume que cada jogador i conhece, além da distribuição a priori, as densidades condicionais do oponente $f_{-i,\,i}(S_{-i} \mid S_i)$. Nesse caso de dois jogadores, embora o jogador 1 não conheça S_2 e nem o jogador 2 conheça S_1, é assumido que ambos os jogadores conheçam as densidades condicionais dos oponentes. Essa é uma premissa crítica, já que é muito difícil conhecer tais densidades condicionais dos oponentes. O mercado (firmas) sabe quem são as firmas mais bem informadas (exs., Petrobras no Brasil; Shell em águas profundas do Golfo do México, etc.) e as firmas menos informadas. Mas daí a conhecer essas densidades condicionais dos seus competidores vai um grande passo. O que geralmente se sabe é fazer uma ordenação de graus de conhecimento entre as companhias de petróleo. Pelo menos nesses casos mais complexos, é muito mais *simples* usar uma métrica com uma escala de 0 a 1 (de ignorância total

para conhecimento total) para quantificar as diferenças de conhecimento S_i entre as firmas, do que estimar essas densidades condicionais ou mesmo funções verossimilhanças. Ou seja, também nesse contexto a métrica *redução esperada de variância* η_i^2 defendida no capítulo 3, parece interessante. Estimando η_i^2 para cada jogador, pode-se estimar as distribuições de revelações de cada jogador (ver cap. 3), pois a distribuição a priori é conhecida e comum. Assim, é possível resolver problemas complexos de equilíbrio dado que os jogadores estão maximizando os seus lances nos diversos cenários das suas distribuições de revelações. As vantagens são a simplicidade em ordenar as firmas em função do conhecimento do objeto leiloado com uma simples escala percentual, a facilidade de estimação da razão de correlação com métodos populares como regressões e ANOVA, e a significância e simplicidade conceitual da métrica interpretada como redução esperada de variância, ver item 3.3. A extensão para leilões do uso da métrica proposta nessa tese é deixada como sugestão para futuros trabalhos.

4.1.5.
Duopólios, Oligopólios e Outros Jogos

4.1.5.1.
Duopólios e Jogos com Dois Jogadores

Na prática, a teoria dos jogos é mais relevante com dois ou poucos jogadores e por isso o caso de dois jogadores é muito estudado na literatura[299]. Será apresentado um exemplo de duopólio que irá ilustrar outros conceitos clássicos de equilíbrio ainda não vistos. Esse item será usado depois em exemplos de jogos de opções reais, especialmente no caso de *preempção* de uma firma num mercado com dois potenciais entrantes.

Sejam duas firmas que dividem um mercado geográfico de um produto específico. Considere uma (por enquanto determinística) curva de demanda inversa linear, dada pela equação.

$$\mathbf{p = 30 - Q_T} \qquad \mathbf{(264)}$$

Onde p é o preço do produto, Q_T é a produção da indústria (= $q_1 + q_2$ para o caso de duopólio). Por simplicidade, assuma que o custo variável é zero – alternativamente, considere p como a *margem* de lucro operacional. Para entender

[299] Esse item é baseado em Dias & Teixeira (2003).

os possíveis equilíbrios, serão plotadas as *curvas de reação* das duas firmas, i. é, as funções melhor resposta dos dois jogadores[300] dada as estratégias das outras firmas, de forma que o lucro é maximizado para cada possível estratégia da outra firma. A Figura 58 mostra essas curvas, assim como as possibilidades de equilíbrios para essas duas firmas que competem em quantidade (estratégias são as escolhas de produções q_1 e q_2).

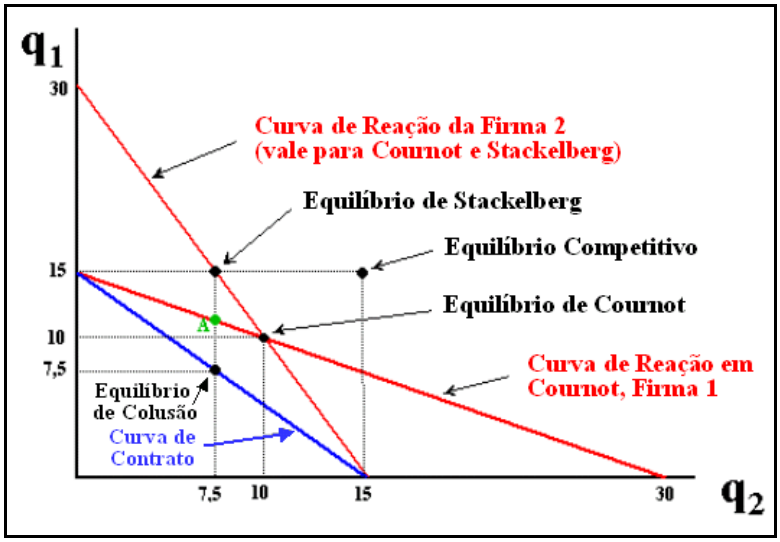

Figura 58 – Equilíbrios Clássicos em Duopólio

Os valores dos diversos tipos de equilíbrios em termos de lucros assim como os valores das respectivas margens unitárias, são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Lucros e Margens dos Equilíbrios dos Duopólios

Equilíbrios	Lucros		Margem Unitária P
	Firma 1	Firma 2	
Colusão	112,5	112,5	15
Stackelberg	112,5	56,25	7,5 (*)
Cournot	100	100	10
Competitivo	0	0	0

(*) Margem depois da entrada do seguidor. Antes da entrada do seguidor a margem do líder é p = 30 – 15 = 15 = margem da colusão.

A Figura 58 mostra as curva de reação (melhor resposta) das duas firmas, de forma que o ponto de cruzamento é a *melhor resposta simultânea* nesse jogo. Note que esse ponto é EN pois não existe incentivo para desvio unilateral. Esse EN é também o clássico equilíbrio de Cournot. O equilíbrio de Cournot (q_1 = 10 e q_2 = 10, no exemplo da Figura 58), também chamado de equilíbrio de *quantidade*,

[300] No caso mais geral, as *correspondências* de melhor resposta no lugar de *funções*.

é o mais provável resultado tanto por ser EN, como por motivos que serão discutidos abaixo. Em essência, no equilíbrio de Nash-Cournot as firmas escolhem quantidades e um preço de equilíbrio faz a oferta e demanda se igualarem ("clears" o mercado), de acordo com uma curva inversa da demanda.

A Figura 58 também mostra o equilíbrio de Stackelberg. Nesse caso, existe um líder que entra primeiro no mercado ofertando uma quantidade que maximiza o lucro monopolista ($q_1 = 15$ e $q_2 = 0$, no exemplo). Quando a firma 2 entra como seguidora, ela observa a produção do líder e ajusta a sua produção de acordo com a sua curva de melhor resposta (reação). Logo, tanto a produção ($q_1 = 15$ e $q_2 = 7,5$) como o lucro (Tabela 14) são maiores para o líder, no caso o dobro do valor do seguidor. Isso é chamado de *vantagem do primeiro lance de Stackelberg*. Isso é possível se assumir um compromisso imutável do líder com aquela produção. Entretanto, se o jogo continua o equilíbrio de Stackelberg não é EN, pois existe um incentivo para o líder reduzir a sua produção para maximizar o lucro (ponto A na Figura 58). Depois disso, o seguidor irá reagir do mesmo jeito, até alcançar o equilíbrio de Nash-Cournot. Fudenberg & Tirole (1991, p.74-76) aponta que existe um problema de *consistência temporal* ("time consistency") com o equilíbrio de Stackelberg, pois a quantidade do líder não é uma melhor resposta para a produção do seguidor. Assim, em jogos de momento ótimo com uma firma entrando primeiro, o resultado de Cournot é o equilíbrio mais provável.

A outra possibilidade é o equilíbrio de colusão ($q_1 = q_2 = 7,5$). Ele maximiza o lucro *conjunto* das firmas, com a curva do contrato, mostrada na Figura 58, dividindo o lucro máximo conjunto. Entretanto, sem um contrato formal ele não é EN porque existem incentivos para ambas as firmas desviarem. Além disso, contratos de colusão (associar-se para aumentar o lucro à custa do consumidor) são em geral ilegais ou antiéticos. No exemplo de jogos de OR (item 4.2), será visto que a *colusão tácita* (sem contrato formal) pode ser EN, dependendo das condições da indústria.

A Figura 58 também mostra o caso de equilíbrio competitivo perfeito. Nesse caso, ambas as firmas elevam a suas produções até elas alcançarem uma margem de lucro igual a zero. Para o caso de duas firmas, é fácil ver que isso não é EN.

Por que não uma competição de *preços*, o chamado equilíbrio de Bertrand? O artigo clássico de Kreps & Scheinkman (1983) faz a comparação entre a

competição de Bertrand x Cournot[301]: "*Com premissas brandas sobre a demanda, o único equilíbrio resultante é o de Cournot*". No jogo de dois estágios do artigo deles, as firmas escolhem capacidade (Cournot) no primeiro estágio e então seguem uma competição de preços de Bertrand. O resultado final é o resultado padrão de Cournot!

Será útil a discussão sobre a função inversa da demanda. Uma equação genérica é dada abaixo.

$$\mathbf{P = D(Q_T)} \qquad \textbf{(265)}$$

Onde P é o preço, $D(Q_T)$ é a função (inversa) demanda e Q_T é a produção total da indústria. Algumas possibilidades para a função demanda são:

Demanda Linear: $\mathbf{P = a - b\,Q_T}$, com $a > 0$, $b > 0$, $a > b\,Q_T$ **(266)**

Demanda Iso-Elástica: $\mathbf{P = 1 / (Q_T + W)}$ **(267)**

Demanda Exponencial: $\mathbf{P = a\,.\,exp[-\varepsilon\,Q_T]}$ **(268)**

A função *demanda linear* é a mais simples e a mais popular na literatura. A desvantagem é que quando Q_T aumenta até $Q_T = a/b$, o preço vai a zero (e fica negativo para Q_T maior). Logo, essa função pode ser representativa para uma indústria somente para um certo intervalo de valores de Q_T.

A *demanda iso-elástica* no seu formato mais simples é $P = 1 / Q_T$. No entanto, esse formato mais simples tem uma desvantagem. A receita total (= P.Q) é constante e, portanto, na presença de um custo operacional variável, a indústria (monopólio ou oligopólio em colusão) irá achar ótimo reduzir a produção para um valor próximo de zero (com os preços indo para infinito) para poder reduzir o custo operacional sem reduzir a receita! Claro que isso causa problemas matemáticos. A solução adotada, eq. (267), foi analisada por Agliari & Puu (2002), usando uma curva iso-elástica *modificada* $P = 1 / (Q + W)$, de forma que é uma translação da hipérbole para uma nova posição, interceptando o eixo das ordenadas. Com essa modificação, o preço máximo é 1/W quando a produção tende a zero.

A função *demanda exponencial* tem as boas propriedades de preços *não* poderem ser zero e muito menos negativos, além de preços serem finitos quando Q_T tende a zero. Em adição, o parâmetro ε pode ser aqui interpretado como um

[301] Ver também Varian (1992, pp.301-302) para uma discussão sobre esse ponto.

tipo de *elasticidade da demanda*. Logo, essa função é uma boa alternativa de função demanda, flexível especialmente para uso em jogos estocásticos.

4.1.5.2. Oligopólios e Jogos de Quotas da OPEP

Quando o número de firmas cresce, os resultados em termos de produção da indústria, lucro esperado, preços, etc., em geral ficam numa situação intermediária entre os casos de duopólio e de competição perfeita. Esse pode ser visto como um caso limite de oligopólio com infinitas firmas. O caso de oligopólio será discutido com maior detalhe no item 4.2, quando se abordar conceitos de jogos de OR tais como o princípio da miopia ótima de Leahy e o modelo de oligopólio sob incerteza desenvolvido por Grenadier. Aqui será discutido brevemente um caso de interesse da indústria do petróleo, que é o cartel da OPEP.

A OPEP é um cartel de alguns países produtores de petróleo que tem tido variado grau de sucesso e fracasso nas suas tentativas de controlar a produção e os preços do petróleo. Pode-se caracterizar pelo menos dois jogos envolvendo a OPEP. O primeiro, externo, em que a OPEP atua como uma *coalizão de produtores* cujos oponentes são os produtores não-OPEP, que também disputam o mercado de suprimento de petróleo. Como cartel a OPEP busca a produção ótima principalmente para que os preços não caiam abaixo de um certo patamar. Já os produtores não-OPEP são *tomadores de preço* e produzem o máximo possível economicamente. Isso significa que um aumento de preços causado por uma redução da produção da OPEP, incentiva os produtores não-OPEP a produzirem o petróleo que antes não era comercial. Mas essa possibilidade de colocar produção extra é muito limitada no curto prazo, de forma que um acréscimo significativo de produção por parte dos produtores não-OPEP, em geral leva anos[302].

O segundo jogo envolvendo a OPEP é interno: a disputa por cotas de produção dentro da OPEP. Ou seja, dado um nível "ótimo" de produção da OPEP, quanto cada país membro irá produzir. Mesmo chegando a um acordo interno, existem incentivos para cada país aumentar a produção, desrespeitando as cotas acordadas ("cheating"). Isso porque, além do interesse individual de aumentar o

[302] Fora da OPEP, os novos campos de petróleo com volume significativo são campos marítimos e em águas cada vez mais profundas. Assim, demora anos para colocar óleo novo no mercado. Mesmo campos já descobertos, levam cerca de três anos para serem postos em produção. Pode-se levar 10 anos entre o leilão de novos blocos numa área e o início da produção nessa área.

lucro vendendo mais, é difícil no curto prazo identificar se alguém (e quem) está desrespeitando as cotas acordadas. Isso significa que a OPEP – como todo cartel – é instável devido aos interesses individuais não-cooperativos.

O livro texto de Dutta (1999, p.81-82 e cap.17) faz diversas análises da OPEP à luz da teoria dos jogos. Primeiro apresenta o jogo em termos de duopólio estático OPEP x não-OPEP (p.81-82) em que se joga uma competição de quantidade e, portanto, uma competição de Cournot. Esse duopólio é assimétrico pois Dutta colocou um custo de produção para a OPEP de US$ 5/bbl e para os produtores não-OPEP de US$10/bbl, fazendo que em equilíbrio a produção da OPEP seja maior. No exemplo de Dutta, o preço de equilíbrio em Cournot foi pouco mais de US$ 26/bbl, bem acima dos custos de produção de ambos os jogadores. Além disso, se os produtores não-OPEP se juntassem a OPEP num cartel gigante, a produção seria reduzida (cortando as de mais alto custo) e os preços iriam para US$ 35/bbl nesse exemplo.

Dutta (1999, cap.17) mostra o caso da OPEP à luz dos jogos dinâmicos repetidos. Os chamados *teoremas populares* ("folk theorems") para jogos repetidos, mostram que é possível sustentar equilíbrios em colusão se os jogos forem repetidos infinitas vezes. Dutta analisa o jogo de cotas interno da OPEP considerando apenas dois países, sendo um país (Arábia Saudita) com maior capacidade de produção do que o outro (Venezuela). Ele considera que esses países podem escolher a suas produções (dois cenários para cada, alta e baixa) e analisa duas diferentes conjunturas de demanda mundial de petróleo, alta demanda e baixa demanda. Quando a demanda é baixa, além de ser EN quando ambos escolhem alta produção, também o lucro *conjunto* é maior com essa estratégia (isso depende dos parâmetros usados)[303]. No entanto, quando a demanda é alta, Dutta mostra que existe uma situação típica do conhecido jogo "dilema dos prisioneiros"[304], em que o EN é dado por ambos escolherem produção alta, mas o lucro conjunto é maximizado com ambos escolhendo produção baixa. A pergunta do exemplo é: pode a OPEP manter os preços altos nos tempos de alta demanda?

[303] Isso realmente se verificou nos tempos de baixa demanda (décadas de 50 e 60), mas não em fevereiro de 1999 quando, devido aos baixíssimos preços, até países não-OPEP (ex.: Noruega) cortaram a suas produções. Naquele ano, os preços dobraram em menos de 10 meses.

[304] No dilema dos prisioneiros, existe um resultado (ambos "não confessam") que é melhor para ambos, mas que não é EN (existe um incentivo para desviar). O único EN é um resultado pior para ambos. Em jogos infinitamente repetidos, pode-se "escapar" desse resultado pior.

Isso depende da comparação entre lucro de curto prazo (incentivando o desvio para produzir mais) e o lucro de longo prazo, já que o jogo se repete infinitamente. Assim, Dutta mostra que o incentivo a desviar depende da taxa de desconto do fluxo de caixa, se ela for pequena o lucro de longo prazo será mais importante e não haveria incentivo a desviar. Mas se ela for grande, há incentivo para desviar em função do lucro de curto prazo ser relativamente mais importante. Além disso, ele mostra que os produtores menores têm maior incentivo de desviar do que a Arábia Saudita no caso de alta demanda.

Existem várias simplificações nos exemplos de Dutta, de forma que esses resultados devem ser olhados com cuidado. Por ex., no lado dos altos preços, existe a possibilidade de novas fontes de energia se tornarem mais importantes, além da ampliação da participação no mercado de produtores não- OPEP. No lado dos baixos preços, existe a possibilidade de abandonos irreversíveis de campos de petróleo, que fazem automaticamente haver uma redução da produção mundial.

Dixit & Skeath (1999, p.269-271) também analisam as maneiras de como escapar do dilema dos prisioneiros e citam a OPEP. Esse livro texto estuda três maneiras para se escapar do dilema dos prisioneiros: (a) repetição dos jogos; (b) uso de penalidades e recompensas[305]; e (c) liderança. O aspecto de liderança é relevante para o caso da OPEP devido ao papel da Arábia Saudita como produtor flexível ("swing producer"). Ou seja, para induzir uma posição cooperativa, o maior produtor (líder) age cooperativamente (reduzindo a sua produção), mesmo sabendo que vários países irão desrespeitar o acordo do cartel. Dixit & Skeath mostram um exemplo em que, se um dos jogadores for bem mais forte do que o outro, pode ser ótimo (EN) cooperar, mesmo com o outro não cooperando. Isso explicaria a atitude da Arábia Saudita de cortar a sua produção, mesmo com os outros não fazendo o mesmo. Outro exemplo de liderança citado é os EUA, que durante décadas adotou uma política tarifária relativamente não-protecionista, mesmo com seus aliados como Japão e Europa sendo muito mais protecionistas.

No contexto de jogos de OR esse tema tem sido muito pouco analisado. Uma exceção é Tvedt (1999), que analisa a OPEP e não-OPEP como um duopólio

[305] A queda brusca do preço do petróleo em 1986 é vista por muitos como uma punição da Arábia Saudita aos países que estavam sistematicamente violando as cotas acordadas.

com um líder e um seguidor, considerando que a demanda é estocástica, a fim de determinar características como a dinâmica dos preços resultante.

4.1.5.3. Jogos Evolucionários

A teoria dos jogos tem sido usada em biologia para modelar o comportamento dos animais em conflito e especialmente a *evolução das espécies*. Foi nesse ramo da ciência que nasceu a chamada teoria dos jogos evolucionários e o refinamento do EN chamado de estratégia evolucionária estável (ESS, "evolutionary stable strategy"). Esse conceito chave de equilíbrio, assim como o nascimento desse ramo da teoria dos jogos é devido a Maynard Smith & Price (1973) e nasceu praticamente de forma simultânea com a análise dos jogos de guerra de atrito (Maynard Smith, 1974). Ver também Maynard Smith (1982) e Hammerstein & Selten (1994) para uma discussão mais detalhada desse ramo da teoria dos jogos. Existe uma literatura crescente em econômica usando o conceito de ESS para selecionar um de múltiplos EN, em diversas aplicações. Dentre os livros texto de teoria dos jogos evolucionários com enfoque econômico, deve-se destacar Samuelson (1997), Vega-Redondo (1996) e Gintis (2000).

Definição. **ESS em estratégias mistas**: Uma estratégia mista σ é ESS se e somente se: (a) É a melhor resposta para si mesma; e (b) para qualquer estratégia alternativa (*mutante*) melhor resposta σ' para σ, ela é melhor do que σ' é contra si mesma, i.é., para todas as estratégias disponíveis $\sigma' \neq \sigma$ com lucros (ou valores) $\pi_1(\sigma', \sigma) = \pi_1(\sigma, \sigma)$, deve-se ter $\pi_1(\sigma, \sigma') > \pi_1(\sigma', \sigma')$. A condição (a) simplesmente diz que um ESS tem de ser equilíbrio de Nash consigo mesmo e a condição (b) é a *condição de estabilidade* contra a invasão de estratégias mutantes.

Maynard Smith (1982, appendix B) mostrou que um jogo matricial com dois EN em estratégias puras sempre tem um ESS e provou que a eq. (247) do jogo do medroso (ver item 4.1.2) é um ESS. Revisitando o jogo do medroso, considere que os jogadores são iguais (mesmos valores ou "payoffs"). O único equilíbrio *simétrico* é aquele em estratégias mistas ($p_i = p_j$, não necessariamente 50%). A teoria dos jogos evolucionários dá uma racionalidade importante para selecionar um dos múltiplos (três, no jogo do medroso) EN, escolhendo aquele que também é ESS. No jogo do medroso o único ESS é o equilíbrio de Nash em

estratégias mistas. ESS's são estratégias *dinamicamente estáveis* no sentido que elas são aptas a resistir à infiltração de estratégias alternativas chamadas de estratégias mutantes. Assim, ESS's são resultados mais prováveis no longo prazo. Além disso, nos jogos com dois jogadores, o ESS é também um *equilíbrio perfeito em subjogos* (ENPS), pois um ESS não admite estratégias fracamente dominadas. Mas mesmo em jogos finitos a existência de um ESS não é garantida, enquanto que foi visto no item 4.1.1 que pelo menos um ENPS sempre existe em jogos finitos. ESS é uma condição mais robusta que o ENPS.

A teoria dos jogos evolucionários também tem sido analisada na forma extensiva Γ_E. O livro texto de Cressman (2003) é quase inteiramente dedicado a esse tópico na forma extensiva, incluindo uma detalhada discussão sobre o jogo de guerra de atrito sob essa perspectiva (p. 207-217).

4.2.
Jogos de Opções Reais

4.2.1.
Introdução e Estratégias de Gatilho

4.2.1.1.
Histórico e Literatura de Jogos de Opções Reais

A demanda prática e teórica de modelos de opções reais considerando também a interação estratégia racional entre jogadores (firmas)[306], em que o exercício da opção de um jogador altera os valores de OR de outros jogadores, levou ao nascimento da literatura dos *jogos de opções reais em tempo contínuo*[307]. Isso ocorreu no começo dos anos 90 com a dissertação de Smets (1993, depois de um artigo de trabalho em 1991)[308]. Já a literatura dos jogos de OR em tempo discreto começou com Smit & Ankum (1993), com uma abordagem intuitiva para importantes modelos de jogos de opções; e com Smit & Trigeorgis, também em 1993[309], que analisaram outros aspectos.

---

[306] Esse item é baseado principalmente nos artigos de Dias & Teixeira (2003) e (2004).

[307] O termo "option games" apareceu primeiro em Lambrecht & Perraudin (1994).

[308] Esse modelo foi sintetizado em Dixit & Pindyck (1994, chapter 9). Esses autores tomaram o *atrativo risco* de incluir no seu livro o na época recente modelo inovador de Smets (1993). O preço foram dois erros menores de interpretação apontados por Huisman & Kort (1999).

[309] Esse último é bem sumarizado no livro texto do Trigeorgis (1996, chapter 9).

A teoria dos jogos é uma ferramenta bem estabelecida na área de organização industrial e para modelar competição imperfeita. Entretanto, a teoria dos jogos tradicional sozinha ignora os avanços da teoria de finanças sobre risco-retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza. A teoria dos jogos e a teoria das opções são abordagens complementares, que juntas fornecem uma metodologia rigorosa com um rico potencial de aplicações.

Sobre a combinação entre a teoria das opções e a teoria dos jogos, Ziegler (1999, p.133) escreveu: "*a teoria dos jogos com análise de opções substitui a maximização da utilidade esperada encontrada nos modelos de teoria dos jogos clássica com a maximização do valor de uma opção ... a abordagem de opções tem a vantagem que automaticamente leva em conta o valor do dinheiro no tempo e o risco*". Ele também destaca a "ligação entre mercados e organizações" com a teoria das opções determinando o valor baseado em critérios de mercado, e a teoria dos jogos levando em conta a estrutura da organização.

O primeiro *livro texto* dedicado só a jogos de opções reais foi Huisman (2001), focando em importantes modelos teóricos de jogos de OR em tempo contínuo, principalmente para aplicações de momento ótimo de adoção de uma nova tecnologia. Antes, Grenadier (2000a) editou uma boa seleção de artigos de jogos de opções. Dois livros recentes completam a lista de livros dedicados a jogos de OR. Primeiro, o livro texto de Smit & Trigeorgis (2004), bastante acessível e que foca principalmente modelos em tempo discreto, com vários exemplos práticos. O outro é o livro de Thijssen (2004), que segue uma linha similar à de Huisman (2001) em aplicações de adoção de tecnologia, mas com outros modelos, por ex., considerando a redução da incerteza com o tempo. Alguns modelos de Thijssen (2004) tem alguns pontos de contato com o modelo do cap. 5, e por isso ele será discutido um pouco mais abaixo.

Como será visto, em muitos casos as ferramentas de opções reais são suficientes para analisar jogos de OR, sem a necessidade de usar técnicas mais complexas tais como a busca de pontos fixos (ver Border, 1985, para uma análise detalhada desses métodos em teoria dos jogos e economia) das correspondências de melhor resposta dos jogadores. Não foi por acaso que uma extensa pesquisa bibliográfica feita pelo autor indicou que a grande maioria dos artigos de jogos de OR vem de *pesquisadores de OR e não de teoria dos jogos*. Ferramentas tais

como processos estocásticos e controle ótimo estocástico são, geralmente, mais úteis do que teoremas de ponto fixo e outras ferramentas relacionadas. Mas o conhecimento adequado da teoria dos jogos é sempre necessário para o engenheiro financeiro que desenvolve modelos de jogos de opções. Além disso, um outro caminho promissor para resolver os jogos de OR vem de dois pesquisadores de teoria dos jogos, Dutta & Rustichini (1995). Eles provaram que o mapa de melhor resposta satisfaz uma condição forte de monotonicidade, a qual é usada para determinar a existência do conjunto de equilíbrios perfeitos de Markov. Esse caminho poderia ser aplicado no caso de guerra de atrito sob incerteza do cap. 5.

Além de pesquisadores de OR e de teoria dos jogos, uma terceira escola de pesquisadores podem contribuir para a literatura de jogos de OR. São pesquisadores da área de controle ótimo (pesquisa operacional) que se interessaram por teoria dos jogos, especialmente no ramo de jogos estocásticos *diferenciais*. Dois exemplos são: Basar & Olsder (1995) e Dockner et al (2000). Entretanto, a ponte entre a teoria dos jogos de opções e esse ramo da literatura de controle ótimo, ainda precisa ser construída.

Nas próximas seções serão estudados, no contexto de jogos de OR, os casos de duopólio simétrico, duopólio assimétrico e oligopólio. Em todos os casos a demanda será incerta e será discutida a literatura existente sobre esses temas. O caso de guerra de atrito e jogos com externalidade positiva, que será desenvolvido só no cap.5, será agora objeto de uma pequena revisão sobre o que existe de relacionado na literatura de jogos de OR.

Thijssen (2004) aborda jogos de opções reais com tanto em alguns casos de competição, como em alguns casos de externalidade positiva. No caso de externalidade positiva ("spillover" em Thijssen), a abordagem difere dessa tese – explicada em boa parte pela diferença de tipo de aplicação[310]. Por ex., ele usa o tempo como indexador de um processo de redução de incerteza (Thijssen, 2004, p.6). Como foi visto no final do item 3.4.3, pelo menos em aplicações de exploração de petróleo, o tempo corre mais rápido na parte de cima do *processo de difusão de eventos* (sinais) da Figura 52 do que na parte de baixo. Os sinais que

[310] Thijssen está mais interessado no momento ótimo de adoção de uma tecnologia. Esse é um tema com importantes aplicações em *organização industrial* (ver Tirole, 1988).

reduzem a incerteza são exercícios de opções. Por isso é melhor considerar o processo de revelação (redução de incerteza) como um processo de difusão de eventos e não um processo de difusão tradicional indexado pelo *tempo*.

Embora Thijssen (2004, p.9 e cap. 5) tenha abordado o jogo de guerra de atrito em opções reais, o modelo é muito diferente do modelo da tese não apenas pela questão de indexação tempo x eventos, como também por usar jogo de horizonte infinito (em E&P é finito) e por outros aspectos. Por ex., em Thijssen a firma que investir primeiro revela toda a verdade sobre o estado do projeto do outro. Já aqui existe uma revelação parcial – e mais importante – o poder dessa revelação (medida por η^2) irá depender do *tipo* de jogo. Ou seja, aqui é feita uma análise bem mais rica da revelação de informações com diferentes exercícios de opções e bem diferente de Thijssen, que por sua vez foca questões que são de menor interesse para o tipo de aplicação da tese.

Assim como Thijssen (2004), Décamps & Mariotti (2004) também analisam um jogo de guerra de atrito com dois tipos de sinais: sinais de uma fonte *exógena* (chamada de "background signals"), geralmente revelados aleatoriamente segundo um processo de Poisson; e sinais de uma fonte *endógena*, geralmente mais fortes, emitidos pelos jogadores quando exercem a sua opção. Embora a aplicação do cap.5 de guerra de atrito seja focada apenas na revelação de informação endógena, poderia ser considerado também um processo exógeno de sinais mais fracos em paralelo, por ex., com a perfuração de poços mais distantes. O modelo de processo de revelação mostrado no cap. 3 pode ser usado até de uma maneira mais realista do que um processo de Poisson. O processo de revelação estudado pode ser usado para não só atualizar os fatores de chance, como para regular as probabilidades de sinais positivos e negativos, de forma que a freqüência de sinais é maior no caso de revelação positiva do que a negativa, refletindo o aumento da probabilidade de exercício de opções (perfurações) com as boas notícias e a redução dessa probabilidade com as más notícias. Um processo de Poisson tradicional, como usado em Thijssen (2004) e em Décamps & Mariotti (2004), não captura essas diferenças de tempo esperado de ocorrência dos sinais. O uso de duas fontes de sinais (exógeno e endógeno) no contexto de um processo de revelação, é deixado como futura extensão, pois no cap. 5 será trabalhado o caso mais simples, usando apenas o sinal endógeno, a fim de permitir uma exposição mais clara do foco principal do jogo, inclusive a possibilidade de *troca de jogo*.

O jogo de OR de Décamps & Mariotti (2004), embora também seja uma guerra de atrito envolvendo aprendizagem com o exercício da opção do jogador rival, difere em muitos outros aspectos do analisado nessa tese (especialmente a aplicação do cap. 5). Por ex., eles consideram que valor do projeto é igual para ambos os jogadores, embora desconhecido (os sinais ajudam a revisar as probabilidades sobre esse valor que é igual para ambos) e a informação é simétrica sobre esse valor (ambos os jogadores sabem que os valores do retorno do projeto são iguais para ambos os jogadores). Nessa tese, os valores dos projetos são diferentes entre os jogadores[311] e eventualmente existe assimetria de informação, mas sobre o *valor do projeto* do outro[312]. Por outro lado, em Décamps & Mariotti (2004) os custos de investimento são desiguais e a informação sobre esses custos são informações privadas de cada firma, i. é, existe informação assimétrica sobre esses custos de investimento. Já na aplicação de interesse da tese, os custos de exercício das opções não são informações privadas e geralmente são aproximadamente iguais, conforme justificado a seguir.

Em muitas indústrias, o custo é um fator estratégico que diferencia os jogadores (as firmas), pois impulsiona uma competição de preços e/ou a entrada em novos mercados (novos investimentos). Em exploração de petróleo isso não ocorre por algumas razões[313]. Primeiro, as companhias de petróleo (exceto OPEP) são *tomadoras de preços* e não formadoras de preços. Isso significa que *não* existe competição por *preço*. Segundo, o custo de investimento da perfuração de um poço é conhecido, pois o principal elemento de custo, a *taxa diária de sondas*, é um valor de mercado divulgado em revistas especializadas[314]. A grande maioria das empresas de E&P de petróleo não tem sondas próprias (ou tem numa quantidade mínima, geralmente para manutenção de poços) e contratam sondas no

---

[311] Por ex., os tamanhos das estruturas mapeadas pela sísmica são q.c. diferentes de um bloco para o outro. Geralmente ambos os jogadores têm uma idéia de quem tem a maior estrutura, pois ambos tiveram acesso aos registros sísmicos antes do leilão dos blocos.

[312] Eventualmente, pode existir dúvida de qual estrutura é maior, pois o registro sísmico disponível antes do leilão (de conhecimento comum) pode ser de má qualidade e geralmente as firmas ao ganharem um bloco no leilão, fazem uma sísmica mais detalhada (a sísmica 3D) antes de pensar em perfurar, o que *pode* revisar a ordem relativa de qual estrutura é maior.

[313] Essa explicação detalhada está sendo dada por ser uma dúvida comum. Em Montreal (2004), o autor foi questionado por um pesquisador sobre assimetria de informação no custo.

[314] Exs.: Petrodata Ltd; ODS-Petrodata (http://www.ods-petrodata.com), etc. Como mencionado no item 2.1.3, McCormack & Sick (2001) fizeram um estudo de correlação entre taxas diárias de sondas e preços do petróleo. Se as taxas diárias de sondas fossem informação privada, eles não poderiam fazer esse estudo.

mercado. Mesmo que uma firma use uma sonda contratada cujo valor do contrato não tenha sido divulgado, o custo de investimento da perfuração tem de ser feito com o valor de mercado (*custo de oportunidade*) e não com o valor histórico/contábil do contrato específico de uma sonda[315]. A taxa diária de sondas, um valor de mercado (logo sem assimetria de informação), responde pela maior parte do custo de investimento (ou de exercício da opção de perfurar) que é o produto da taxa diária de sondas pelo número médio de dias de perfuração. Uma parcela bem menor, os custos de insumos como lama de perfuração e tubos de revestimento, também são valores de mercado conhecidos. Sendo essa sonda operado pela firma contratada (pela dona da sonda, uma terceira empresa), o número esperado de dias de perfuração não depende da eficiência da companhia de petróleo (e sim da operadora contratada) e é função principalmente da *profundidade* do objetivo a ser perfurado. Se as firmas estão perfurando em prospectos correlacionados, esses devem ter a mesma idade geológica e assim ter profundidades similares. Mas caso haja alguma diferença relevante de profundidades dos prospectos, essa informação em geral também não é assimétrica porque ambas as firmas tiveram acesso aos mesmos registros sísmicos antes do leilão e tem uma boa idéia de quem tem o objetivo mais profundo.

Assim, o mais razoável no caso específico de E&P de petróleo é considerar os custos de investimento (perfuração) como sendo aproximadamente iguais e de conhecimento comum. O que realmente é desigual – e eventualmente assimétrico, é o valor do campo em caso de descoberta. Isso porque as firmas têm prospectos com diferentes tamanhos das estruturas, geólogos com diferentes estimativas de probabilidades de sucesso, diferentes taxas de desconto corporativas, etc.

Essa diferença do que é (ou pode ser) assimétrico no problema da tese e no artigo de Décamps & Mariotti (2004) tem importantes conseqüências no *método de solução do jogo* guerra de atrito. Décamps & Mariotti (2004, p.82) não podem usar *estratégias de gatilhos* (“trigger strategy”) simples como é aqui usada, pois no modelo deles *não* existe uma correspondência 1-1 entre o que os jogadores conhecem sobre o valor do projeto e o que conhecem sobre o custo de

[315] Isso é aceito rotineiramente na indústria de E&P de petróleo, não só por ser o correto em termos de análise de FCD, como para evitar distorções: se fosse usado o custo do contrato, todos os gerentes de ativos iriam querer a sonda com o contrato mais barato para reduzir seus custos ou melhorar os projetos. Na Petrobras é norma usar o valor de mercado e não o valor contratual.

investimento do rival[316]. Como eles mesmos reconhecem, quando o valor do projeto é desconhecido e assimétrico existe sempre uma correspondência 1-1 entre o que um jogador sabe sobre o rival e o quanto ele pode obter em média ao investir. Sob essa ótica, o problema da tese é mais simples do que o analisado em Décamps & Mariotti (2004), pois aqui é possível usar estratégias de gatilhos e no modelo deles não pode. Por outro lado, devido a essa complexidade, eles optaram por uma estrutura de informação (relação sinal com a variável de interesse) mais simples do que a desenvolvida nessa tese (cap.3).

Huisman (2001, pp.205-208) analisou jogos de externalidades positivas, mas o tipo analisado foi mais um jogo com *efeitos de rede*, onde o valor do exercício simultâneo pode ser maior que o valor do seguidor, do que o jogo guerra de atrito como definido por Fudenberg & Tirole (1991) ou Maynard Smith (1982).

4.2.1.2. Estratégias de Gatilho em Jogos de Opções Reais

Os jogos de OR em tempo contínuo, na grande maioria dos casos analisados na literatura, são resolvidos com estratégias ótimas para os jogadores que são denominadas *estratégias de gatilho simples* ("trigger strategy"), que integram a solução (equilíbrio) do jogo. Essas estratégias podem ser vistas como a ação ótima de jogadores (firmas) que *consideram as melhores respostas dos rivais* e fazem sua otimização em *retro-indução* ("backwards") no estilo da programação dinâmica. Dessa forma, essas estratégias serão ENPS ao induzir um EN em todo o subjogo que começa num instante $t \geq 0$ qualquer[317].

Isso significa que a metodologia de OR na valoração sob incerteza é *quase* toda a solução do jogo, desde que se considerem as ações ótimas (melhor resposta) também dos *outros* jogadores de forma endógena no modelo. Isso é feito em vários artigos da literatura de jogos de OR, inclusive o modelo clássico de Smets analisado em Dixit & Pindyck.

Mas foi mencionado que nem sempre é possível usar estratégias de gatilho simples para resolver problemas de jogos de OR: Décamps & Mariotti (2004, p.82) não podem usar essas estratégias simples pois no modelo deles não existe uma correspondência 1-1 entre o que os jogadores conhecem sobre o valor do

[316] Ou seja, para cada cenário da distribuição de valor do projeto, existem vários possíveis custos de investimento do oponente (uma outra distribuição).

[317] Não se está dizendo que esse método identifica *todos* os ENPS.

projeto e o que conhecem sobre o preço de exercício da opção. Também Murto (2002) argumenta que em alguns casos essas estratégias simples fazem desaparecer outros ENPS e considera o caso mais complexo de conjuntos desconectados de exercício ("disconnected stopping set"). Mesmo em problemas de OR sem interação estratégica, existem casos em que não se podem usar estratégias de gatilho simples: no cap. 2, item 2.4.2 (ver Figura 17), em vez de um gatilho para investir numa alternativa, se tinha um *conjunto* (intervalo de preços do petróleo) de investimento ótimo, com regiões intermediárias de espera desconectando essas regiões de exercício ótimo. Ou seja, também é um exemplo de "disconnected stopping set" mencionado por Murto (2002), mas no contexto de OR tradicional. Em termos técnicos, em vez de um *valor* de parada ótima se tem um *conjunto(s) de parada ótima*. No entanto, Lambrecht (2001) num problema similar ao de Murto, forçou os conjuntos de exercício serem conectados e resolveu mais facilmente o problema, sendo criticado por Murto (2002) por achar apenas o principal (único) ENPS ao não considerar a possibilidade de conjuntos de exercício desconectados que gerariam ENPS menos intuitivos[318].

Felizmente, a grande maioria dos problemas de OR não tem essas complicações e podem ser usadas estratégias de gatilho simples tais como "invista para $P \geq P^*$" ou "abandone para $P < P^{**}$". Em termos de *jogos de parada ótima*, se diz "entre no mercado em $t = t^*$", estipulando o *tempo de parada ótima* como o primeiro instante em que uma variável estocástica atinge um certo valor de gatilho. Dessa forma, definindo o gatilho estará definido o tempo de parada ótima como o ínfimo tempo que a variável estocástica atinge o valor de gatilho.

Para essa classe de jogos de OR em tempo contínuo em que podem ser usadas estratégias simples de gatilhos é que se enunciará a seguinte proposição, a qual é a principal contribuição do cap. 4 da tese à literatura.

Proposição 8: Sejam os jogos de OR em tempo contínuo, sendo que as estratégias podem ser caracterizadas como estratégias de gatilho simples ("trigger strategy"). Então existem *pelo menos* dois métodos equivalentes para resolver esses jogos. O primeiro é o método diferencial e o segundo é o método integral. Em ambos, se obtém os *valores* dos jogadores executando as estratégias ótimas

[318] Lambrecht (2001) assumiu como premissa ("Assumption 4", p.771) a restrição que cada firma só usa estratégias de gatilho simples, exatamente para descartar estratégias mistas e EN não intuitivos, por ex., uma firma abandonar o mercado após uma *elevação* de preços.

definidas por *gatilhos*. Com os valores e gatilhos dos jogadores, se tem os elementos para a análise de equilíbrio. Esses dois métodos são resumidos a seguir:

(a) Método Diferencial: usa os métodos tradicionais de OR em que equações diferenciais estocásticas (ordinárias ou parciais) descrevem os valores dos jogadores. A otimização das estratégias dos jogadores, que considera as melhores respostas dos rivais de forma endógena, é feita através das condições de contorno de continuidade e de contato suave.

(b) Método Integral: usa uma soma de integrais estocásticas para descrever os valores dos jogadores, em que os limites de integração são tempos de parada ótima combinados com tempos limites triviais (0 e ∞). Esses tempos de parada ótima são definidos como os ínfimos tempos em que a variável estocástica atinge um valor de gatilho. A otimização das estratégias dos jogadores, que considera as melhores respostas dos rivais de forma endógena, é feita através de métodos tradicionais de otimização, tais como a *condição de primeira ordem*, associado ao conceito de *valor esperado do fator de desconto estocástico*, que dá a atualização de um valor obtido pelo exercício ótimo de uma OR no tempo de parada T*.

Prova: Será feita através de exemplos clássicos de duopólios simétricos e assimétricos nos itens 4.2.2 e 4.2.3, em que se mostrará que ambas são aplicáveis aos problemas de jogos de OR e resultam nos mesmos valores. Nesses jogos, os valores dos jogadores exercendo otimamente as opções e as suas estratégias ótimas definidas por gatilhos, serão suficientes para caracterizar equilíbrios em estratégias puras e em estratégias mistas desses jogos.

Em alguns casos da literatura, como em Dixit & Pindyck (1994, cap.9), houve uma combinação de métodos, usando o método diferencial para achar o valor e o gatilho do seguidor e o método integral para calcular o valor e o gatilho do líder[319]. Aqui (item 4.2.2), usando um caso simétrico um pouco mais complexo, se mostrará que se poderia usar só o método diferencial ou só o método integral para solucionar esse jogo de OR. Por ex., para calcular o valor e o gatilho do líder com o método diferencial, basta usar a equação diferencial que rege o valor do líder *durante a sua fase de monopólio*[320], considerando como *condição de contorno* o instante em que existe o exercício da OR do *outro* jogador, que faz

[319] Embora Dixit & Pindyck não tenham calculado explicitamente o valor do gatilho do líder, ficou claro (p. 312) que um método simples de otimização poderia calcular esse gatilho.

[320] E não o valor da *opção de investir e se tornar líder*, que é um valor secundário no jogo.

a curva de valor do líder ser côncava. Isso não foi notado antes pelos analistas desse jogo clássico de OR (Dixit & Pindyck, Huisman & Kort, Grenadier, etc.).

O método integral também pode ser usado sozinho na solução de jogos de OR, embora também venha sendo usado parcialmente. Por ex., o *valor do seguidor* em Dixit & Pindyck poderia ser calculado com uma única integral estocástica, a qual é resolvida com uma simples equação do valor esperado do fator de desconto estocástico, que dá o valor do seguidor em função do gatilho do seguidor. Esse gatilho pode ser obtido com a otimização tradicional (condição de primeira ordem) e novamente com o conceito de valor esperado do fator de desconto. Em casos mais gerais, pode haver uma soma de duas integrais (como em Dixit & Pindyck para calcular o valor do líder) ou mais integrais. Isso depende dos *tempos de parada ótima* relevantes do problema que irão determinar como devem ser divididas as fases do jogo (e logo os limites de integração), fases essas marcadas por exercícios de OR. Por ex., uma fase inicial (sem exercício), uma fase em que uma firma tem monopólio (um exercício de opção) e fase em que as duas firmas produzem em duopólio (já exerceram as duas opções).

Deve-se mencionar que o método diferencial é de longe o mais usado em OR. O método integral em problemas tradicionais de OR, foi mais bem estabelecido com o artigo de Dixit & Pindyck & Sødal (1999), sendo que os casos menos favoráveis de aplicação são quando a opção tem maturidade finita, já que o método é fortemente analítico. Além disso, existem algumas situações em que um método é mais simples que o outro e vice-versa. Esses e outros pontos metodológicos serão ilustrados nos exemplos dos itens 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4. No apêndice 9.2, são discutidos tópicos úteis para o método integral, tais como o tempo esperado de toque de um processo Browniano, o fator de desconto esperado e métodos de otimização sob incerteza usado no método integral.

4.2.2.
Duopólio sob Incerteza Simétrico

A diferença básica dos modelos que serão analisados no restante desse capítulo, em relação aos modelos tradicionais, é a presença de uma demanda incerta, que flutua ao longo do tempo de forma exógena aos jogadores. Considere a seguinte função inversa da demanda genérica estocástica:

$$\mathbf{P(t) = Y(t) \,.\, D(Q_T)} \qquad \mathbf{(269)}$$

Onde P é o preço, $D(Q_T)$ é a função (inversa) demanda, Q_T é a produção total da indústria e Y é um choque estocástico multiplicativo da demanda, sendo $Y(t = 0) = 1$ e o valor futuro $Y(t > 0)$ é incerto e modelado com um processo estocástico. Ou seja, a eq. (265) de função demanda determinística é multiplicada por um choque estocástico e assim o preço muda não só com a produção dos jogadores, mas também pela simples passagem do tempo (evolução da economia).

Para facilitar a intuição sobre a demanda estocástica, considere o exemplo numérico com a função demanda linear: $P = Y (500 – 25\ Q_T)$. A Figura 59 mostra a curva de demanda inicial (Y = 1) e uma curva futura de demanda depois de choques estocásticos que aumentaram a demanda para Y = 2.

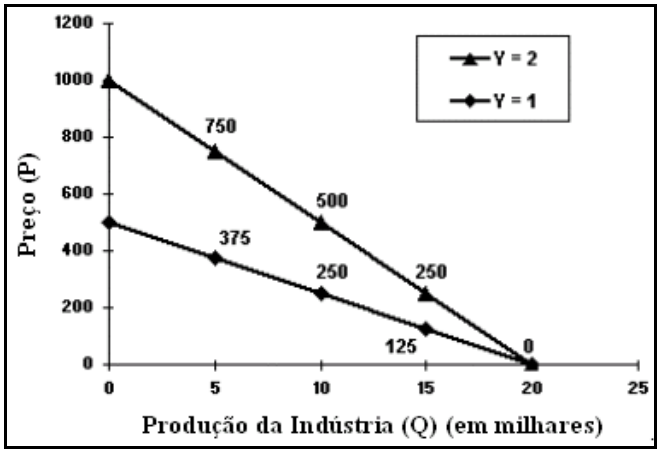

Figura 59 – Incerteza na Curva de Demanda

A Figura 59 mostra que se a produção da indústria é 10.000 unidades (por ano), o preço do produto é inicialmente de $250 por milhar. Se a variável estocástica dobra, o mesmo ocorre com o preço (sobe para $500/1.000 unidades).

O modelo de duopólio sob incerteza simétrico foi o primeiro modelo conhecido de jogos de OR devido a Smets (1993). Em adição à sua relevância histórica, esse modelo tem grande importância teórica – fundações dos jogos estocásticos de parada ótima em tempo contínuo – e também significado prático para duopólios quando não existe vantagem competitiva de uma firma. Na indústria do petróleo, imagine duas firmas disputando uma região no mercado de abastecimento de derivados e pensam em investir numa nova base de distribuição.

Esse item sumariza a análise profunda feita por Huisman & Kort (1999). Eles estenderam a literatura existente sobre esse modelo (Smets, Dixit & Pindyck) em várias maneiras, especialmente permitindo equilíbrios em *estratégias mistas* e analisando a possibilidade de equilíbrios em *colusão tácita* "non-binding

collusion". Em adição, eles apresentaram várias proposições que estabelecem as condições para a ocorrência de diferentes equilíbrios, de uma maneira rigorosa. Por razões de espaço, serão mostrados apenas resultados selecionados[321]. A explanação aqui apresenta apenas modificações menores em relação à notação original. No entanto, foram incluídos alguns tópicos não discutidos por Huisman & Kort, por ex., as *duas maneiras de se calcular os valores do líder e do seguidor* (a pequena contribuição dessa tese para a literatura de jogos de OR) e algumas explicações adicionais não discutidas no artigo deles.

Esse modelo de duopólio é simétrico no sentido das firmas serem homogêneas (firmas iguais), de forma que isso sugere estratégias simétricas. Será evitado o formalismo na descrição das estratégias, dando preferência para uma completa, mas mais intuitiva abordagem. Ao longo do texto ficarão claras tanto as estratégias de exercício da opção, como as estratégias de espera, para cada estado da natureza (que muda com o tempo) e condicionais às estratégias ótimas da outra firma[322].

A primeira diferença do modelo de Huisman & Kort, quando comparado com Smets ou Dixit & Pindyck, é que as duas firmas já estão ativas no mercado, produzindo uma unidade cada (por unidade de tempo) e elas estão considerando o exercício de uma (definitiva) *opção perpétua de expansão* da produção. Isso significa que a "entrada" (leia-se *expansão*) de uma firma afeta o lucro corrente da outra firma – no caso reduzindo o lucro pois aqui o modelo considera a *externalidade negativa* no preço dada pela curva de demanda. O investimento para expandir a produção (preço de exercício da OR) é o mesmo para as duas firmas e denotado por I. As firmas fazem face a uma curva (inversa) de demanda que dá o *fluxo de lucro* P(t) na venda de uma unidade e que é dada por:

$$\mathbf{P(t) = Y(t) \,.\, D(N_i, N_j)} \qquad \mathbf{(270)}$$

Onde Y(t) é um choque estocástico da demanda que segue um movimento geométrico Browniano (MGB, ver cap.2), com tendência α e volatilidade σ; e

---

[321] Ver http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly2.html, para outros resultados e gráficos.

[322] Entretanto, uma descrição mais formal das estratégias do jogo de parada ótima *contínuo* que começa no instante t, requer *duas* funções para cada jogador i. Uma é (G_i, α_i): $[t, 1] \times [t, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, onde $G_i(\tau)$ é a função acumulada de probabilidade de exercício, e a outra é $\alpha_i(\tau)$, o *átomo de probabilidade* (ver discussão sobre estratégias mistas). O tempo é normalizado, de forma que um jogo de horizonte infinito com tempo $s \in [0, \infty]$ é normalizado para $\tau \in [0, 1]$ através da função $\tau = s / (s + 1)$.

$D(N_i, N_j)$ é um parâmetro de demanda determinístico *para a firma i*, o qual depende dos status das firmas i e j. Os possíveis valores para D(Ni, Nj) são:

- D(0, 0) significa que ambas as firmas não investiram ainda (mas existe um fluxo de lucro Y D(0, 0) porque as firmas estão ativas no mercado);
- D(1, 0) significa que a firma i investiu e é a "líder" porque a firma j ainda não investiu;
- D(0, 1) significa que a firma i é a "seguidora" porque só a outra firma (j) investiu e se tornou a líder; e
- D(1, 1) significa que ambas as firmas investiram no mercado (investimento simultâneo).

Esses fatores $D(N_i, N_j)$ são ajustados para o nível de produção. O custo operacional é zero ou já está incluído em D, de forma que P é interpretado como *fluxo de lucro* em vez de preço. Por ex., o fluxo de lucro do líder é Y.D(1, 0) e esse fluxo de lucro é maior que Y.D(0, 0). Ou seja, o efeito da maior produção obtida quando se investe e se assume o papel de líder, já está incluída no valor de D(1, 0). A mudança de status de D(0, 0) para D(1, 0) demanda um custo afundado de investimento I. Além disso, devido à simetria do problema, quando uma firma está lucrando Y D(1, 0), a outra firma está lucrando Y D(0, 1), etc. Para o caso que eles chamam de *modelo de mercado novo* ("new market model"), i. é, o caso original de Smets e de Dixit & Pindyck em que as firmas *não* estão ativas no mercado em t = 0, se tem o caso particular D(0, 0) = D(0, 1) = 0.

Huisman & Kort assumem que as firmas são neutras ao risco, de forma que o desconto é feito com a taxa livre de risco. Entretanto, é fácil estender o caso para firmas avessas ao risco usando o método dos *ativos contingentes* (ver cap. 2) supondo que o termo de tendência α do processo estocástico real é substituído pela tendência livre de risco (ver cap. 2, a comparação das eqs. 9 e 4).

Os parâmetros de demanda determinística têm uma restrição adicional de *externalidade negativa* (o exercício da OR de uma firma reduz o valor da outra firma) dada pela desigualdade:

$$\mathbf{D(1, 0) > D(1, 1) > D(0, 0) > D(0, 1)} \qquad \mathbf{(271)}$$

A outra premissa do modelo é a *vantagem do primeiro lance* ("first mover advantage"), dada pela desigualdade:

$$\mathbf{D(1, 0) - D(0, 0) > D(1, 1) - D(0, 1)} \qquad \mathbf{(272)}$$

Essa desigualdade diz que o ganho de começar como líder é maior que o ganho de começar como seguidor (para o mesmo Y e o mesmo investimento I).

Antes de qualquer exercício de opções (será visto que isso ocorre quando Y está abaixo do *gatilho do líder* Y_L), o valor de cada firma é o corrente fluxo de caixa da firma em *perpetuidade*, $Y\ D(0, 0) / (r - \alpha)$, com $r > \alpha$, *mais o valor da opção de investimento* (exercendo como líder ou como seguidor, cada um com 50% de chances, como será visto depois) líquido de perdas competitivas devido a externalidade negativa da entrada esperada do rival.

Como é padrão em *jogos de momento ótimo*, a solução é feita em retro-indução ("backwards"). Isso significa que primeiro é necessário estimar o valor do seguidor (dado que o líder entrou antes) e então calcular o valor do líder, dado que o líder sabe que uma entrada ótima do seguidor poderá ocorrer no futuro. Aqui se considera que qualquer firma pode se tornar a líder (os papéis *não* são atribuídos de forma exógena). Será visto as duas maneiras mencionadas de se estimar o valor do seguidor. Primeiro, usando o método diferencial, com os passos tradicionais do método dos ativos contingentes (Lema de Itô, etc., ver cap. 2), o valor do seguidor F é dado pela equação diferencial ordinária (EDO) a seguir.

$$\mathbf{0{,}5\ \sigma^2\ Y^2\ F_{YY} + \alpha\ Y\ F_Y - r\ F + Y\ D(0, 1) = 0} \qquad \mathbf{(273)}$$

Onde os primeiros três termos correspondem à parte homogênea da EDO e o último termo no lado direito da eq. (273) é o termo não-homogêneo, também chamado de "fluxo de caixa", pois ele é o fluxo de lucro do seguidor antes do exercício da opção. Note que esse termo de fluxo de caixa não existe no modelo de "novo mercado" do Dixit & Pindyck, enquanto que em Huisman & Kort o seguidor ganha um fluxo de caixa mesmo antes da sua opção (de expansão) ser exercida. A solução da EDO é a soma de uma parcela (solução) homogênea do tipo $\mathbf{A\ Y^{\beta 1} + B\ Y^{\beta 2}}$, mais uma *solução particular*. Os parâmetros $\beta_{1,\,2}$ são as raízes da equação quadrática $0{,}5\ \sigma^2\ \beta^2 + (\alpha - 0{,}5\ \sigma^2)\ \beta - r = 0$ (ver Dixit & Pindyck, cap.5). A lógica econômica impõe que a constante B no termo da raiz *negativa* (β_2) seja igual a zero[323]. Logo, a solução da EDO, eq. (273), do seguidor é:

$$\mathbf{F(Y) = A\ Y^{\beta 1} + Y\ D(0, 1) / (r - \alpha)}\ \mathbf{,} \quad \text{se} \quad Y \le Y_F \qquad \mathbf{(274a)}$$

$$\mathbf{F(Y) = Y\ D(1, 1) / (r - \alpha) - I} \quad \mathbf{,} \quad \text{se} \quad Y \ge Y_F \qquad \mathbf{(274b)}$$

[323] Pois quando (a demanda) Y tende a zero, o valor do seguidor precisa ir a zero também.

Onde Y_F é o gatilho do seguidor para o investimento ótimo. É necessário determinar duas incógnitas, a constante A e o gatilho Y_F. Para isso, é necessário aplicar as conhecidas (ver cap. 2 ou Dixit & Pindyck) condições de contorno de *continuidade* e de *contato suave*:

$$\mathbf{F(Y = Y_F) = Y_F\, D(1, 1) / (r - \alpha) - I} \qquad \textbf{(275)}$$

$$\mathbf{F_Y(Y = Y_F) = D(1, 1) / (r - \alpha)} \qquad \textbf{(276)}$$

Com o subscrito Y na eq. (275) denotando a primeira derivada em relação a Y. Derivando a eq. (274a) em $Y = Y_F$ e igualando à eq. (276); assim como igualando a eq. (274a) em $Y = Y_F$ à eq. (275), se obtém duas equações e duas incógnitas (A e Y_F). Com um pouco de álgebra se chega aos seguintes valores:

$$\mathbf{A = \frac{Y_F^{1-\beta_1}}{\beta_1}\ \frac{D(1, 1) - D(0, 1)}{(r - \alpha)}} \qquad \textbf{(277)}$$

$$\mathbf{Y_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\ \frac{(r - \alpha)\, I}{D(1, 1) - D(0, 1)}} \qquad \textbf{(278)}$$

Substituindo a constante A (eq. 277) na eq. (274a), se chega ao valor do seguidor obtido por Huisman & Kort. A eq. (278) dá o gatilho do seguidor.

O segundo caminho para achar o valor do seguidor e seu gatilho é o método integral, que é baseado no conceito de *tempo de parada* ou *tempo do primeiro toque* ("first hitting time") e no conceito de *fator de desconto esperado* ("expected discount factor"). Seja T* o primeiro instante que a variável estocástica toca o valor Y* (nesse caso $Y^* = Y_F$). O valor do seguidor tem dois componentes. Primeiro o fluxo de lucro antes do exercício da opção (lembrar que aqui ambas as firmas são ativas no mercado mesmo antes de exercerem as suas opções), de t = 0 até $t = T^*$ (ou T_F). Segundo, o fluxo de lucro depois do exercício da opção em Y_F, líquido do investimento I, de $t = T^* = T_F$ até infinito. Esse valor é dado pelas integrais abaixo[324]:

$$\mathbf{F(Y) = E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(0,1)\, dt\right] + E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1,1)\, dt\right] - E\left[e^{-rT^*}\right] I} \qquad \textbf{(279)}$$

Lucro esperado antes do exercício

Lucro esperado depois do exercício

[324] Note que o *valor do seguidor* assume que a outra firma entrou em t = 0. Se em vez disso se quer o valor *da firma* planejando ser seguidora, assumindo que a outra firma entrará como líder em $T_L > 0$, então três integrais seriam necessárias: uma de 0 a T_L, com D(0, 0); outra de T_F a T_L, com D(0, 1) e a última de T_F para infinito, com D(1, 1).

Note que para o modelo de *novo mercado* D(0, 1) = 0 e a primeira integral é zero (caso do Dixit & Pindyck). Em t = T* a firma obtém um fluxo de lucro em perpetuidade com valor presente em T* de $\mathbf{Y_F\ D(1,\ 1)/(r - \alpha)}$. Trazendo para valor presente, de T* ao instante corrente (t = 0), se obtém:

$$\mathbf{F(Y) = D(0,1)\ E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t)\ dt\right] + E\left[e^{-rT^*}\right]\left[\frac{Y_F\ D(1,1)}{r-\alpha} - I\right]} \quad \textbf{(280)}$$

O *valor esperado do fator de desconto estocástico* depende só dos parâmetros do processo estocástico e da taxa de desconto r. Esse fator é dado pela equação simples abaixo para o tempo aleatório T* em que uma variável Y atinge um gatilho simples Y*:

$$\mathbf{E\left[e^{-rT^*}\right] = \left(\frac{Y}{Y^*}\right)^{\beta_1}} \quad \textbf{(281)}$$

Para a prova, ver o apêndice 9.3. O valor do primeiro valor esperado da eq. (280) é dado por:

$$\mathbf{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t)\ dt\right] = \frac{Y}{r-\alpha}\left[1 - \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1 - 1}\right]} \quad \textbf{(282)}$$

Para a prova desse valor esperado, ver também o apêndice 9.3[325]. Substituindo as eqs. (281) e (282) na eq. (280), pode-se verificar que o resultado encontrado para o seguidor é o mesmo do obtido com o primeiro método, i. é, as eqs. (274a, b) com as eq. (277). Para o caso mais comum de modelo de mercado novo, esse segundo método é mais fácil porque a equação do fator de desconto esperado é fácil de lembrar e a primeira integral é zero.

Entretanto, como calcular o valor do *gatilho* com o segundo método? Será apresentado um método simples usando uma abordagem de *otimização padrão* para a decisão de investimento (para detalhes desse método, ver Dixit & Pindyck & Sødal, 1999).

Seja o *valor presente líquido* do exercício da opção ser $\mathbf{VPL_F = V(Y) - I}$. A maximização do valor do projeto é balanço ("trade-off") entre a espera por um valor maior do projeto V(Y) e o fator de desconto (maior, quanto mais cedo a

[325] Apesar dessas provas serem apresentadas em Dixit & Pindyck (chapter 9, appendix), a prova aqui mostra alguns passos intermediários não apresentados naquele livro texto.

opção for exercida). Em caso de espera por um valor demasiadamente alto de V(Y), se pode esperar demasiadamente e o fator de desconto ficaria muito pequeno. Logo, nesse balanço do custo-benefício da política de espera, existe um valor ótimo para Y que maximiza o valor presente do VPL esperado obtido com o exercício da opção, i. é, a função G(Y) abaixo:

$$G(Y) = \underset{Y}{\text{Max}}\ E\left[e^{-rt} \right] . \left[V(Y) - I \right] \tag{283}$$

O benefício do exercício da opção é $V(Y) = Y\,[D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha)$. Denote o fator de desconto esperado por $R(Y_0, Y_F)$, i. é (para simplicidade de notação, faça $Y_0 = Y$):

$$R(Y, Y_F) = E[\exp(-r\,T^*)] = (Y/Y_F)^{\beta_1} \tag{284}$$

Logo, o problema de maximização da eq. (283) se torna:

$$G(Y) = \text{Max}\{ R(Y, Y_F) . (\{ Y\,[D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha)\} - I)\} \tag{285}$$

A *condição de primeira ordem* para maximizar a eq. (285) determina que se tome a derivada parcial de G em relação à variável de controle estocástico Y_F e iguale a zero. Assim, se obtém:

$$R(Y, Y_F).[D(1, 1) - D(0, 1)]/(r - \alpha) + R_{Y_F}(Y, Y_F).Y_F\,[D(1, 1) - D(0, 1)]/(r - \alpha) = R_{Y_F}(Y,Y_F) . I \tag{286}$$

O valor da derivada do fator de desconto esperado em relação a Y_F é:

$$R_{Y_F}(Y, Y_F) = -\beta_1\, Y^{\beta_1} / [Y_F^{(\beta_1 + 1)}] \tag{287}$$

Substituindo as eqs. (287) e (284) na eq. (286), rapidamente se conclui que a equação resultante para o gatilho é a mesma obtida com o primeiro método, i. é, a eq. (278). Como antes, esse segundo método (integral) parece mais simples para o caso de novo mercado, mas não tinha sido usado antes para resolver esse jogo de OR.

Para o valor do líder L(Y) se pode também aplicar qualquer um dos dois métodos. Por exemplo, o valor do líder é dado pela soma das integrais líquida do custo de investimento I:

$$L(Y) = \underbrace{E\left[\int_0^{T^*} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1, 0)\ dt \right]}_{\text{Lucro esperado na fase de monopólio}} + \underbrace{E\left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt}\, Y(t)\, D(1, 1)\ dt \right]}_{\text{Lucro esperado na fase de duopólio}} - I \tag{288}$$

Ou seja, entrando como líder a firma experimenta uma fase como monopolista com fluxo de lucro Y D(1, 0) e, quando o seguidor entra (em $t = T^* =$

T_F), o fluxo de lucro cai para Y D(1, 1). Pode-se seguir os passos do caso do valor do seguidor (segundo método) para calcular o valor do líder. Entretanto, talvez seja mais fácil aqui o primeiro método, i. é, o método da equação diferencial para o valor do líder *durante a fase de monopólio*[326], denotado por V(Y) = L(Y) + I. Esse valor V(Y) precisa ser igual (continuidade) ao valor do investimento simultâneo (valor do seguidor) no ponto da condição de contorno em $Y = Y_F$. A equação diferencial para V(Y) é dada por:

$$\mathbf{0{,}5\,\sigma^2\,Y^2\,V_{YY} + \alpha\,Y\,V_Y - r\,V + Y\,D(1,0) = 0} \qquad \mathbf{(289)}$$

O último termo (parte não-homogênea) é o fluxo de caixa representado pelo fluxo de lucro durante a *fase monopolista*. Outra vez, a solução da EDO é dada pela soma da solução geral (da parte homogênea) mais a solução particular relacionada ao fluxo de caixa.

$$\mathbf{V(Y) = B\,Y^{\beta_1} + \frac{Y\,D(1,0)}{r-\alpha}} \qquad \mathbf{(290)}$$

A constante B é o parâmetro a ser calculado, requerendo apenas uma condição para isso. A maior diferença comparada com a constante A (eq. 277) do valor do seguidor é que a constante B é negativa, refletindo no valor (esperado) do líder, as perdas devido ao possível futuro exercício da opção de investimento do seguidor. Isso é mostrado matematicamente abaixo. A condição de contorno relevante aqui é a condição de continuidade ("value-matching") no ponto que o seguidor entra (em Y_F). A condição de suavidade não é aplicável aqui, pois esse ponto não é derivado do controle ótimo do líder, ele é derivado de um problema de otimização, mas do *outro* jogador. Essa condição de contorno é:

$$\mathbf{V(Y_F) = Y_F\,D(1,1) / (r-\alpha)} \qquad \mathbf{(291)}$$

O valor do líder durante a fase monopolista é igual ao valor do investimento simultâneo em Y_F. Igualando as eqs. (290) e (291), se obtém o valor da constante B em função de Y_F.

$$\mathbf{B = \frac{Y_F\,[D(1,1) - D(1,0)]}{Y_F^{\beta_1}\,(r-\alpha)}} \qquad \mathbf{(292)}$$

Note que o valor da constante é negativo pois D(1, 1) < D(1, 0). Isso significa que o efeito da entrada do seguidor é diminuir o valor do líder, como era

[326] O "truque" é trabalhar a EDO de V(Y) e não de L(Y) ou da opção de ser líder.

de se esperar pela intuição econômica nesse duopólio. O valor negativo da constante significa que a função valor do líder é côncava.

O valor do líder na fase de monopólio V(Y) é obtido substituindo a constante (eq. 292) na eq. (290) do valor do líder. Com V(Y), se pode descobrir o *valor de estar se tornando líder*, L = V – I, que para $Y < Y_F$ é dado por:

$$L(Y) = \frac{Y\,D(1,0)}{r-\alpha} + \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1} \frac{Y_F\,[D(1,1)-D(1,0)]}{r-\alpha} - I \qquad \textbf{(293)}$$

Pode-se verificar que esse valor é o mesmo que poderia ser obtido usando o (segundo) método baseado no valor esperado das integrais. Se $Y \geq Y_F$, o valor de estar se tornando líder é igual ao o valor de estar se tornando seguidor que é igual ao valor do exercício simultâneo S(Y):

$$L(Y) = S(Y) = \frac{Y\,D(1,1)}{r-\alpha} - I \qquad \textbf{(294)}$$

O valor do exercício (investimento) simultâneo é também importante porque é necessário responder questões fundamentais tais como: (a) o que ocorre se uma firma desviar da estratégia de seguidora, investindo? e (b) uma firma quer se tornar líder, mas o que ocorre se o rival tem a mesma idéia ao mesmo tempo e ambos investem simultaneamente? Em outras palavras, é necessário verificar se a estratégia de seguidor é EN e o valor esperado (ou perdas esperadas) se por "erro" ambos investem ao mesmo tempo. Isso será útil para o cálculo do equilíbrio em estratégias mistas. Note que o investimento simultâneo pode ser ótimo para ambos os jogadores se o estado da demanda for tão alto que $Y \geq Y_F$, mas é um erro no caso da demanda ser tal que $Y < Y_F$.

Só falta agora calcular o gatilho do líder. Sem a ameaça de preempção, a firma irá investir otimamente no gatilho do monopolista Y_M. Entretanto, devido à ameaça de preempção, as firmas não podem esperar tanto para investir. Se uma firma esperar até $Y = Y_M$, a outra firma pode investir em $Y_M - \varepsilon$, mas a primeira firma poderia se antecipar ao rival investindo antes, em $Y = Y_M - 2\,\varepsilon$, etc. Esse processo pára quando uma firma não tem mais incentivo para se antecipar ao rival. A firma 1 tem incentivo para se tornar líder se $L_1 > F_1$ e, mais importante para a decisão da firma 1, a firma 1 sabe que a rival tem também o incentivo para se tornar líder quando $L_2 > F_2$. Assim, a estratégia da firma 1 para se tornar líder é investir quando $L_2 = F_2$. No entanto, devido à simetria do problema, $L_1 = L_2$ e $F_1 =$

F_2 para todo Y, e assim o líder do gatilho é definido como sendo o Y no intervalo $0 < Y < Y_F$ tal que os valores do líder e do seguidor são iguais, i. é:

$$\mathbf{Y_L := \{\, 0 < Y < Y_F \mid L(Y) = F(Y) \,\}} \qquad \mathbf{(295)}$$

O qual pode ser calculado facilmente com um algoritmo simples, dada as curvas dos valores do líder e seguidor em função da demanda Y.

Existe uma proposição em Huisman & Kort mostrando que o gatilho do líder Y_L é *único*. Devido à simetria, esse gatilho é igual para as duas firmas.

A Figura 60 mostra os valores do líder e do seguidor, além das entradas ótimas como líder e como seguidor. Os dados de entrada são os mesmos usados por Huisman & Kort (1999), i. é, o caso base é dado por: $\alpha = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $r = 10\%$, $Y(t = 0) = 1$, $I = 20$ (para cada firma) e os fatores determinísticos da demanda são $D(0, 1) = 1$, $D(0, 0) = 2$, $D(1, 1) = 2.5$ e $D(1, 0) = 4$.

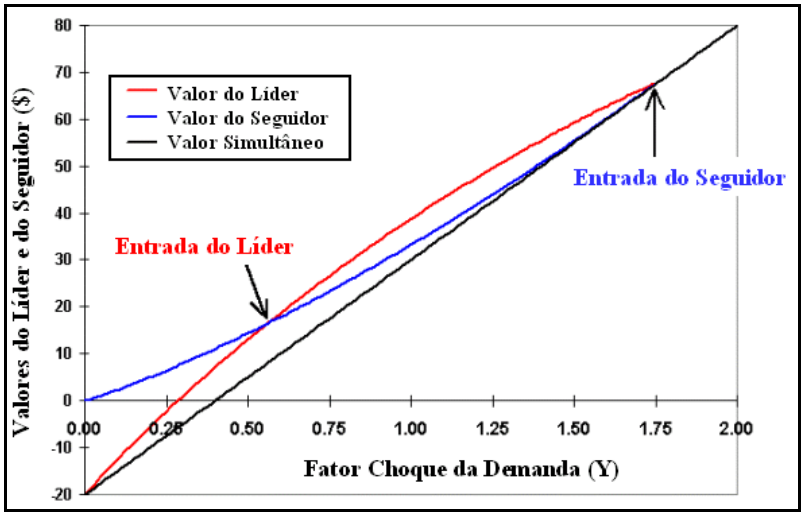

Figura 60 – Entradas do Líder e Seguidor no Duopólio Simétrico

Outra extensão interessante de Huisman & Kort é que eles consideraram a possibilidade de equilíbrios de colusão sem um contrato efetivo (formal) entre as firmas, i. é, sem comunicação entre os jogadores. Eles analisaram em que medida uma política *tácita* de "esperar e ver" pode ser equilíbrio. Firmas poderiam calcular se "esperar e ver" é a melhor estratégia (ou não) até o nível de gatilho de colusão $Y = Y_C$, quando ambas investiriam simultaneamente (ou uma firma investiria e a outra investiria *imediatamente* após).

Colusão tácita (ou não forçada, ou informal) será um EN somente se não existir incentivo para desviar dessa estratégia. Desvio aqui significa ganhar o lucro do líder com a outra escolhendo investir mais tarde como seguidora. Denotando o valor em colusão de cada firma por $C(Y, Y_C)$, a colusão será ENPS

somente se $C(Y, Y_C) \geq L(Y)$ para, pelo menos, todos os Y *no intervalo* $(0, Y_F)$. Se isso ocorre, existem infinitas possibilidades de colusão como EN. Desses equilíbrios, o que é Pareto ótimo é investir no gatilho de colusão Y_C dado por:

$$Y_C = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha)\ I}{D(1, 1) - D(0, 0)} \quad \textbf{(296)}$$

A Figura 61 apresenta os valores do líder, seguidor e *em colusão* como funções do choque estocástico da demanda Y. Os parâmetros usados foram os mesmos da Figura 60. Note que o valor em colusão é sempre maior do que o valor do líder, de forma que o equilíbrio em colusão é factível (as firmas em colusão não têm incentivos de desvio). Para os dados de entrada do caso base, a curva do valor da colusão tem um *contato suave* na linha de valor de exercício simultâneo em $Y_C = 5{,}29$, um valor muito alto que está fora do gráfico.

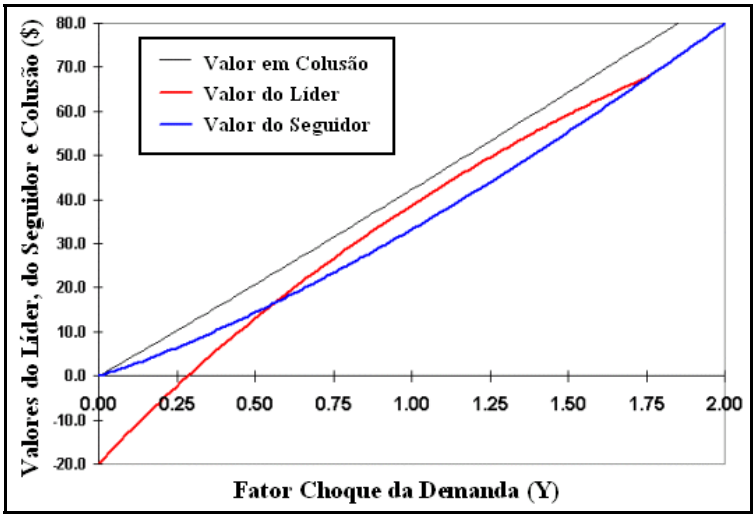

Figura 61 – Valor em Colusão como Estratégia Dominante

Se a *vantagem de ser líder* for *suficientemente grande*, a colusão pode ser destruída por preempção de uma das firmas. A Figura 62 ilustra esse ponto, quando se eleva essa vantagem de ser líder fazendo $D(1, 0) = 5$.

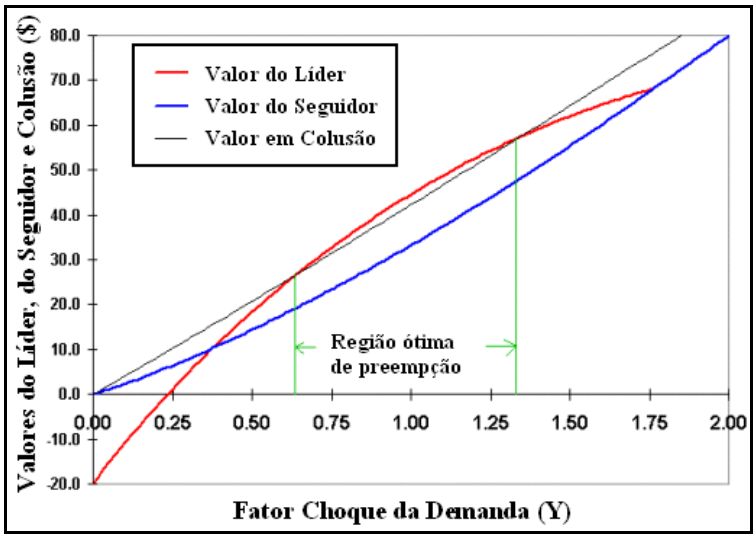

Figura 62 – Região de Preempção Destruindo a Colusão

Na Figura 62 existe uma região onde a preempção é ótima devido ao maior valor para o papel de líder quando comparado com o valor em colusão. Logo, nesse caso as firmas em colusão têm incentivo para trair e assim a colusão nesse caso não é ENPS. Além disso, conforme apontam Huisman & Kort (1999), no modelo de "novo mercado" a colusão tácita nunca é EN.

Agora imagine que o estado inicial da demanda está entre Y_L e Y_F. Ambas as firmas têm incentivo para se tornar líder pois L > F (ver a Figura 60 para ficar claro). Não há lógica em imaginar que, sem qualquer comunicação, uma firma irá deixar a outra firma se tornar líder, i. é, não há lógica em imaginar que a probabilidade de investimento simultâneo seja zero. Ambas as firmas irão desejar ter o lucro do líder, mas ambas as firmas têm medo da possibilidade de ficar pior com o investimento simultâneo (um "equívoco"), já que o valor do investimento simultâneo é o menor valor (seria melhor até ser o seguidor). Assumindo que não existe comunicação entre os jogadores, o único caminho racional para tratar esse problema na teoria dos jogos é permitindo *estratégias mistas*[327].

Com estratégias mistas as firmas irão racionalmente calcular a probabilidade ótima de exercer a opção de investimento visando o valor do líder, mas considerando a probabilidade positiva de investimento simultâneo. As firmas irão jogar um *jogo simultâneo* (possivelmente com infinitas rodadas) onde a firma i

[327] Quando a comunicação é permitida, como sugerido em Joaquin & Buttler (2000), existe a alternativa do jogo de barganha para dividir a diferença L – F com a concordância de que apenas uma das companhias se tornaria a líder, evitando o equívoco do exercício simultâneo. Entretanto, nessa aplicação o acordo é ilegal, já que o preço ao consumidor é elevado (ou deixa de cair).

pode escolher investir com probabilidade p_i e não investir com probabilidade igual a $1 - p_i$; jogadores i = 1 ou 2.

A análise de estratégias mistas em tempo contínuo deve ser feita com cuidado e usando ferramentas especiais. A passagem de tempo discreto para tempo contínuo apresenta problemas quando se usa a consideração tradicional de limite. Fudenberg & Tirole (1985) reportou que os métodos usuais apresentam "perda de informação" nessa passagem, com o caso contínuo não representando o limite do caso discreto. Em adição, com as ferramentas tradicionais, várias estratégias convergem com probabilidade 1 para serem jogadas no instante t = 0, um resultado não-consistente.

Para determinar as estratégias mistas simétricas, Huisman & Kort usaram a mesma ferramenta usada em Fudenberg & Tirole (1985): eles especificaram "probabilidades" chamadas de "átomos" $p(\tau)$ que, se positivo, indicam que a *probabilidade acumulada de exercício* $G_i(\tau)$ é igual a 1. Logo, τ é definido como o primeiro instante que algum jogador exercerá a opção, dado que ninguém exerceu antes. Esse tipo de recurso é tomado da literatura de *controle ótimo estocástico* (ver, por ex., Birge & Louveaux, 1997, p.289).

A idéia fundamental é que *controle não toma tempo*. Usando essa analogia, o controle aqui é o resultado de um jogo simultâneo que pode ser repetido. Isso é como um otimizador automático instantâneo. Dessa forma, o jogo simultâneo com dois jogadores, *mesmo se repetido infinitas vezes*, é jogado *instantaneamente* (não há consumo de tempo). Esse método determinará as probabilidades das estratégias mistas e, segundo Huisman & Kort, pode ser provado que é o verdadeiro limite do jogo equivalente em tempo discreto.

O jogo simultâneo, o qual pode ser repetido infinitas vezes, exatamente no instante em que um (ou ambos) jogador exercerá a opção (i.é, em $t = \tau$), é mostrado na forma estratégica (normal) na Figura 63, junto com as probabilidades de exercício das opções.

		Firma 2	
		$p_2(\tau)$	$1 - p_2(\tau)$
Firma 1	$p_1(\tau)$	S(Y(t)) , S(Y(t))	L(Y(t)) , F(Y(t))
	$1 - p_1(\tau)$	F(Y(t)) , L(Y(t))	Repete o jogo

Figura 63 – Jogo Simultâneo em $t = \tau$

O valor da firma 1, V_1 (ainda não otimizado) é dado por:

$$\mathbf{V_1 = p_1\, p_2\, S + p_1\,(1 - p_2)\, L + (1 - p_1)\, p_2\, F + (1 - p_1)\,(1 - p_2)\, V_1} \qquad \mathbf{(297)}$$

O último termo significa que em caso de repetição, se obtém o valor V_1 devido à definição de τ: quando esse jogo é jogado (em τ, com talvez infinitas rodadas) é certo que algum jogador (ou ambos) exercerão a opção. Uma forma alternativa e equivalente (talvez mais intuitiva) de obter V_1 é dada abaixo:

$$\mathbf{V_1 = [\, p_1\, p_2\, S + p_1\,(1 - p_2)\, L + (1 - p_1)\, p_2\, F\,] \,.}$$
$$\mathbf{.\, [1 + (1 - p_1)\,(1 - p_2) + (1 - p_1)^2\,(1 - p_2)^2 + ...\,]} \qquad \mathbf{(298)}$$

O somatório entre os primeiros colchetes é o valor esperado obtido numa rodada em caso de definição nessa rodada (investimento de um ou dois jogadores). O segundo somatório entre colchetes é multiplicado pelo valor esperado, considerando o caso de definição na primeira rodada (multiplicando por um), na segunda rodada [multiplicando por $(1 - p_1)\,(1 - p_2)$] e etc., até infinito. O somatório do segundo colchetes é simplesmente a soma infinita (convergente) de uma progressão geométrica, de forma que é fácil de calcular. Logo, a equação para o valor (não otimizado) do jogo simultâneo para a firma i, V_i, i = 1 ou 2, é:

$$\mathbf{V_i = \frac{p_i\, p_j\, S + p_i\,(1 - p_j)\, L + (1 - p_i)\, p_j\, F}{1 - [(1 - p_i)\,(1 - p_j)]}} \qquad \mathbf{(299)}$$

Agora os jogadores irão calcular as probabilidades ótimas para exercício da opção, i. é, a probabilidade que maximiza o valor esperado V_i. A *condição de primeira ordem* para esse problema de otimização é $\partial V_1 / \partial p_1 = 0$, para a firma 1, dado que o rival está planejando exercer a opção com probabilidade p_2. A condição de segunda ordem indica que esse problema é de maximização. Note também que, devido à simetria do problema, as probabilidades ótimas devem ser iguais, i. é, $p_1 = p_2 = p^*$. Isso permite uma simplificação adicional. Usando a condição de primeira ordem e a propriedade de simetria, depois de alguma álgebra se obtém a seguinte equação simples para a probabilidade ótima de investir em estratégias mistas:

$$\mathbf{p^* = \frac{L - F}{L - S}} \qquad \mathbf{(300)}$$

A Figura 64 dá uma *interpretação geométrica* para a probabilidade ótima de exercício p* em estratégias mistas. Pense as curvas como os valores do outro jogador, embora nesse caso simétrico os valores dos dois jogadores sejam iguais.

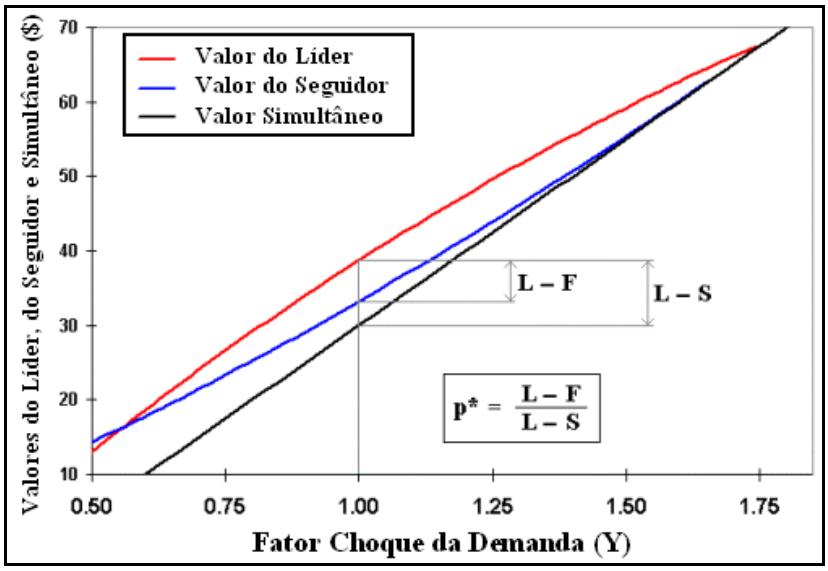

Figura 64 – Interpretação Geométrica da Probabilidade em Estratégias Mistas

Na Figura 64 é fácil ver que quando L = F e L > S, se tem p* = 0. Quando L tende para F (e S), se o limite p* = 1. No equilíbrio em estratégias mistas, a probabilidade p* pode ser interpretada como sendo igual à razão entre o benefício advindo da preempção (L – F) e o intervalo de variação total possível (L – S). Note que L – S = [(L – F) + (F – S)].

Para concluir esse exemplo, será calculada a *probabilidade de somente uma das firmas exercer* a opção e também a *probabilidade de exercício simultâneo* da opção. Para isso, considere de novo o jogo simultâneo na forma estratégica da Figura 63. Usando um raciocínio similar ao usado para calcular os valores (eq. 297 ou a eq. 298), se pode escrever que a probabilidade Pr(um = i) que somente a firma i estará investindo em τ é dada por:

$$\mathbf{Pr(um = i) \;=\; p(\tau)\,(1 - p(\tau)) \;+\; (1 - p(\tau))\,.\,(1 - p(\tau))\,.\,Pr(um = i)} \qquad \mathbf{(301)}$$

Logo, a probabilidade Pr(um = i) é dada por:

$$\mathbf{Pr(um = i) = \frac{1 \;-\; p(\tau)}{2 \;-\; p(\tau)}} \qquad \mathbf{(302)}$$

Naturalmente, a probabilidade Pr(um = j) de somente a firma j investir nesse jogo simultâneo em τ é exatamente a mesma devido a simetria. Já a *probabilidade de exercício simultâneo* (ou probabilidade de "equívoco", se $Y < Y_F$), denotado por Pr(dois), usando um raciocínio similar, é dada por:

$$\mathbf{Pr(dois) = \frac{p(\tau)}{2 \;-\; p(\tau)}} \qquad \mathbf{(303)}$$

Note que as três probabilidades somam um, i. é, Pr(um = i) + Pr(um = j) + Pr(dois) = 1. Isso é por causa de que não existe possibilidade de não haver exercício nesse jogo simultâneo, devido a definição de τ. Agora pode-se usar o valor ótimo achado para a probabilidade $p(\tau)$, eq. (300), para estimar as probabilidades de cada firma investir sozinha e a probabilidade de investimento simultâneo. Por ex., em Y_L se sabe que L = F e L > S. Logo, $p(\tau) = 0$. Nesse caso, Pr(dois) = 0 e Pr(um = i) = Pr(um = j) = ½. Note também que Pr(dois) é consistente com os limites quando Y tende para Y_F ou Y_L, respectivamente 1 e 0.

Portanto, quando o mercado começa com $Y < Y_L$ (demanda ainda incipiente) existem 50% de chances de cada firma se tornar a líder e probabilidade zero de "equívoco" quando Y alcançar Y_L. Essa conclusão de Dixit & Pindyck (1994, cap. 9) sobre as estratégias mistas nesse jogo é correta somente nesse caso. Caso a demanda comece aquecida, de forma que $Y(t = 0) \in (Y_L, Y_F)$, então existirá uma probabilidade estritamente positiva de "equívoco" (exercício simultâneo indesejável).

4.2.3. Duopólio Sob Incerteza Assimétrico

O modelo assimétrico para o duopólio é uma hipótese mais realista na maioria das indústrias. Aqui as firmas são não-homogêneas já que, para o mesmo investimento, uma firma tem *menor custo operacional* do que a outra. Isso significa que uma firma tem vantagem competitiva sobre a rival. No exemplo da indústria do petróleo, com duas firmas que disputam uma área geográfica para distribuição de derivados de petróleo, uma firma pode ter menor custo operacional por trabalhar numa escala maior que a rival, de forma que os custos fixos são mais diluídos devido à escala. Ou pode-se pensar que a refinaria de uma firma é mais moderna e tem menores custos operacionais do que a outra. Assim, esse tópico pode ser útil em várias aplicações da indústria de petróleo (mas não apenas).

Aqui é sumarizado e estendido o conhecido modelo de Joaquin & Buttler (2000)[328]. Seguindo esses autores, é assumida a *função demanda inversa linear*, com as quantidades determinadas pela competição de Cournot. Ambas as firmas são baseadas no mesmo país e ambas estão considerando um investimento no

[328] Esse item, assim como o anterior, é baseado no artigo de Dias & Teixeira (2003).

mesmo país vizinho. A função demanda em Joaquin & Buttler é *determinística* e constante ao longo do tempo. Entretanto, a taxa de câmbio X(t) é incerta e evolui segundo um processo estocástico modelado como MGB (ver cap. 2), com parâmetros do processo livre de risco igual a δ (taxa de dividendos), σ (volatilidade) e taxa livre de risco r. Em termos matemáticos, isso é equivalente a considerar um choque estocástico multiplicativo Y(t), como antes[329]. A função demanda inversa linear determinística é:

$$\mathbf{P = a - b\,Q_T},\ \text{com } a > 0,\ b > 0,\ a > b\,Q_T \qquad \mathbf{(304)}$$

Onde $P(Q_T)$ é o preço do produto *em moeda estrangeira*, o qual é função da produção (oferta) total nesse mercado Q_T. Para o preço *em moeda local*, basta multiplicar a eq. (304) pela taxa de câmbio X(t).

No caso de exercício da opção de investimento, existe um *custo operacional variável* c_i para a firma i, onde i pode ser "l" ou "h", para as firmas de baixo custo ("low-cost") e de alto custo ("high-cost"), respectivamente. A vantagem competitiva da firma de baixo custo é expressa pela inequação $c_l < c_h$. A função *fluxo de lucro* $\pi_i(Q_i)$ para a firma i *em moeda estrangeira* é:

$$\mathbf{\pi_i(Q_i) = Q_i\,[\,a - b\,Q_T - c_i\,]} \qquad \mathbf{(305)}$$

Usando o método dos ativos contingentes e considerando que a taxa de dividendos $\delta > 0$ é interpretada como a *taxa de juros em moeda estrangeira*, o *valor presente* de um fluxo *perpétuo* de lucro é dado pela divisão da eq. (305) por δ. O fluxo de lucro ótimo do monopolista e os fluxos de lucro em equilíbrio do duopólio de Cournot são, respectivamente:

$$\pi_{M_i} = \frac{(a - c_i)^2}{4\,b} \qquad \mathbf{(306)}$$

$$\pi_l = \frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9b} \quad \Big| \quad \pi_h = \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \qquad \mathbf{(307)}$$

Aqui serão colocados diretamente os resultados[330], os quais podem ser obtidos com qualquer um dos dois métodos apresentados antes, sendo que aqui o modelo é de "novo mercado" (facilitando os cálculos). O valor de seguidor para a firma de alto custo é $F_h(X)$, que exerce sua opção como seguidora no gatilho X^*_{Fh},

[329] A extensão para o caso de demanda estocástica, mas sem taxa de câmbio estocástica, é bastante direta.

[330] Ver http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly3.html para detalhes e discussão adicional.

é dado pela equação abaixo (para o caso menos provável da firma de baixo custo como seguidora, basta inverter "l" e "h").

$$F_h(X) = \begin{cases} \left[\frac{(a-2c_h+c_l)^2}{9b}\frac{X^*_{F_h}}{\delta} - I\right]\left(\frac{X}{X^*_{F_h}}\right)^{\beta_1} & , \text{se } X < X^*_{F_h} \\ \frac{(a-2c_h+c_l)^2}{9b}\frac{X}{\delta} - I & , \text{se } X \geq X^*_{F_h} \end{cases} \quad \textbf{(308)}$$

Onde β_1 é a raiz positiva (e > 1) da equação quadrática $0{,}5\ \sigma^2\ \beta^2 + (r - \delta - 0{,}5\ \sigma^2)\ \beta - r = 0$. O formato da equação do valor do seguidor quando a taxa de câmbio é menor do que o gatilho, tem uma interpretação natural. O primeiro termo (entre colchetes) é o VPL do exercício da opção em X^*_{Fh}. O segundo termo (multiplicativo) é o valor esperado do fator de desconto estocástico, rever a eq. (281), para o tempo aleatório de exercício do seguidor T^*_{Fh}. A segunda linha da eq. (308) é também o valor de exercício simultâneo para qualquer X (mas para o caso de $X < X^*_{Fh}$, esse seria o valor de "equívoco").

O gatilho para a firma de alto custo como seguidora é:

$$X^*_{F_h} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\ \frac{9b\ \delta\ I}{(a-2c_h+c_l)^2} \quad \textbf{(309)}$$

O valor do líder para a firma de baixo custo L_l (de novo, para o caso menos provável da firma de alto custo ser a líder, basta permutar "l" e "h"), se $X < X^*_{Fh}$, é dado pela equação abaixo:

$$L_l = \frac{(a-c_l)^2}{4b}\frac{X}{\delta} + \left[\frac{(a-2c_l+c_h)^2}{9b} - \frac{(a-c_l)^2}{4b}\right]\frac{X^*_{F_h}}{\delta}\left(\frac{X}{X^*_{F_h}}\right)^{\beta_1} - I \quad \textbf{(310)}$$

O formato da eq. (310) também permite uma explanação intuitiva. O primeiro termo do lado direito é o lucro de monopólio em perpetuidade da firma líder. O termo do meio é o valor presente esperado das perdas competitivas (i. é, o termo entre colchetes é negativo), o qual ocorre a partir da entrada do seguidor (diminuindo o lucro de monopólio em perpetuidade). O último termo é o investimento requerido para exercer a opção. Se $X \geq X^*_{Fh}$, o valor do líder é igual ao valor de investimento *simultâneo*.

Para obter o valor do líder, foi achada a *mesma* constante A_i usada em Joaquin & Buttler (eq.16.6e), mas num formato mais heurístico que permite uma rápida extensão para outras curvas de demanda, é mostrada a seguir.

$$A_1 = \left[\frac{(a - 2c_1 + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_1)^2}{4b}\right]\frac{(X^*_{F_h})^{1-\beta_1}}{\delta} \quad \textbf{(311)}$$

Pode-se identificar no termo entre colchetes um formato de diferença de fluxos de lucro: o fluxo de lucro do duopólio menos o fluxo de lucro do monopólio. Dessa forma é fácil concluir que essa constante é negativa, já que o fluxo de lucro na fase de duopólio é menor do que na fase de monopólio. O valor negativo da constante significa que a função valor do líder é côncava, refletindo o efeito da entrada futura do seguidor que diminui o valor do líder, como esperado pela intuição. A Figura 65 mostra os valores do líder, do seguidor e de investimento simultâneo, para os mesmo dados de entrada usados no exemplo original de Joaquin & Buttler.

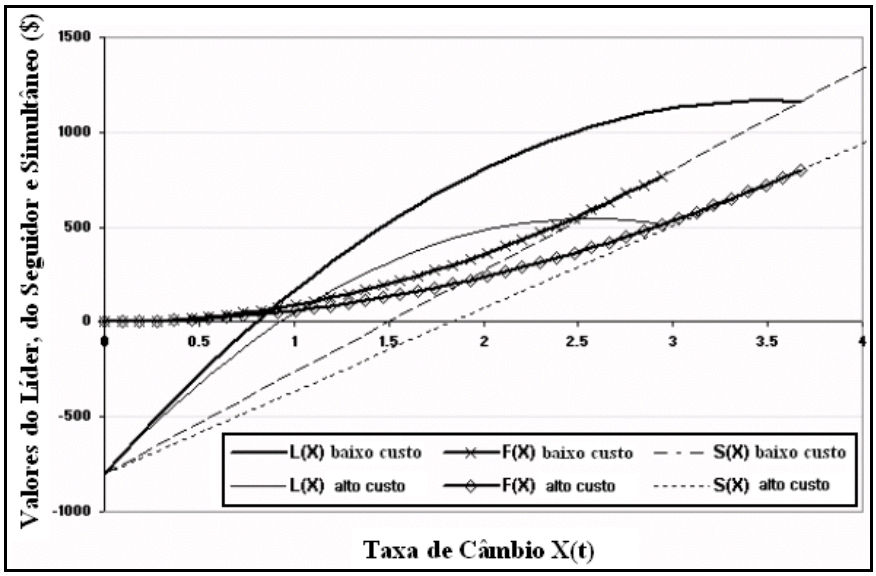

Figura 65 – Valores do Líder, Seguidor e Simultâneo em Duopólio Assimétrico

Como estimar o gatilho do líder? A resposta precisa de algumas considerações adicionais quando comparada com o caso simétrico do item 4.2.2. Sem a ameaça de preempção, a firma de baixo custo iria investir otimamente no gatilho monopolista X_{Ml}. Entretanto, devido à ameaça de preempção, as firmas não podem esperar tanto tempo para investir. Se uma firma espera até $X = X_M$, *em alguns casos* a outra firma pode se antecipar investindo em $X_M - \varepsilon$, etc. Esse processo termina quando uma das firmas não tem mais incentivo para se antecipar ao rival. A Figura 66 mostra isso, através de uma ampliação ("zoom") de uma região da Figura 65, mostrando apenas os valores do líder e do seguidor.

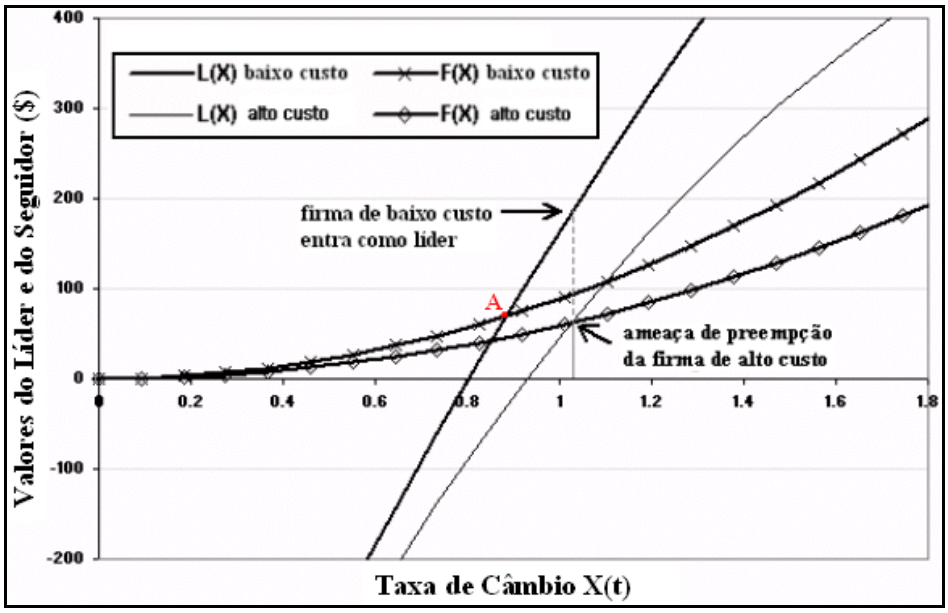

Figura 66 – Gatilho do Líder Determinado pela Ameaça de Preempção do Rival

A firma l (baixo custo) tem incentivo para se tornar líder se $L_l \geq F_l$ (ponto A da Figura 66) mas não é necessário investir nesse ponto, pois a firma de baixo custo sabe que a firma de alto custo somente terá incentivo para se tornar líder se $L_h \geq F_h$. Logo, a estratégia da firma de baixo custo para se tornar líder é investir quando $L_h = F_h$ (ou um valor infinitesimal menor).

Nesse caso X_{Ll} é o valor da taxa de câmbio onde $L_h(X_{Ll}) = F_h(X_{Ll})$ sendo que $X_{Ll} < X_{Fh}$. Nos outros casos, dependendo principalmente da diferença entre os custos operacionais c_l e c_h, a vantagem competitiva pode ser maior, desaparecendo a ameaça de preempção antes do exercício monopolista ótimo em $X = X_{Ml}$. *Nesse caso*, a vantagem competitiva é tão alta que a firma de baixo custo ignora a competição investindo no gatilho monopolista X_{Ml}. Como exemplo, aumentando c_h (de \$21, usado em Joaquin & Buttler, para \$23,5) os valores do líder e do seguidor para a firma de alto custo mostram que essa firma nunca irá querer ser líder, conforme indicada pela Figura 67. Pode-se observar que $F_h > L_h \; \forall \; X$, i. é, a curva do seguidor está sempre acima do valor do líder para a firma de (muito) alto custo. Nesse caso, é sempre melhor para a firma de alto custo ser a seguidora, esperando por uma taxa de câmbio muito favorável, nesse exemplo $X_{Fh} = 5{,}44$.

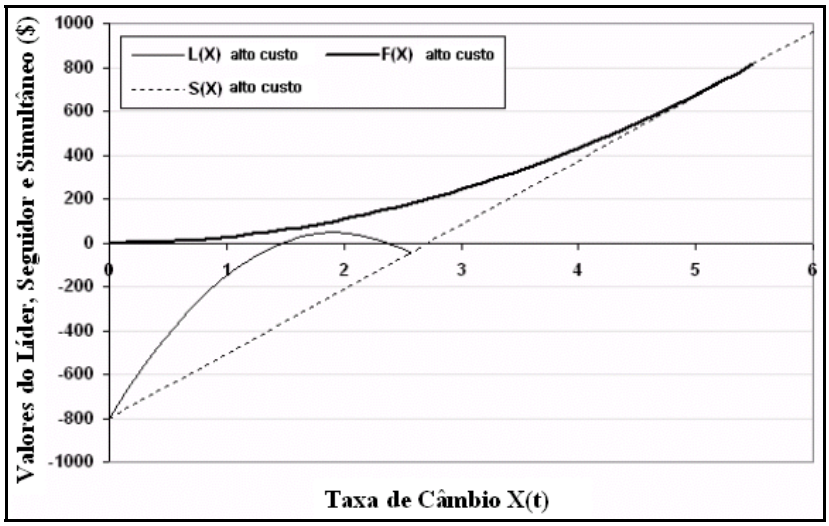

Figura 67 – Caso Sem Perigo de Preempção da Firma de Alto Custo

Para a rival firma de baixo custo, o caso da Figura 67 significa que não haverá ameaça de preempção, de forma que a firma de baixo custo pode ignorar a competição e investir no gatilho monopolista X_{Ml}. Logo, o valor do gatilho do líder é o mínimo entre o seu gatilho de monopólio e o menor valor da outra firma em que essa rival teria incentivo para se tornar líder. Esse é, essencialmente, o "Result 3" do artigo de Joaquin & Buttler (2000).

Como foi visto no item 4.2.2, para o modelo de "novo mercado" (que é o caso aqui) a colusão tácita nunca é EN. Com firmas assimétricas, essa conclusão é ainda mais forte.

Agora, imagine que o estado inicial da taxa de câmbio é tal que ambas as firmas tem incentivo para se tornarem líder. Isso ocorre quando existe uma região de taxas de câmbio em que L > F para ambas as firmas. Entretanto, *ambas as firmas estariam piores em caso de exercício simultâneo da opção*, pois os valores das firmas com o investimento simultâneo são ainda menores do que os valores de seguidores para essas firmas, i. é, S < F para ambas as firmas. Assim, é óbvio que, *sem comunicação* entre as firmas, existe uma probabilidade positiva de "equívoco" com o investimento simultâneo. A Figura 68 mostra essa região, que no exemplo fica compreendida entre 1,03 e ~ 2,94, i. é, entre X_{Ll} e X_{Ph}, onde X_{Ph} é o limite superior de preempção da firma de alto custo, nessa região de preempção mostrada na Figura 68.

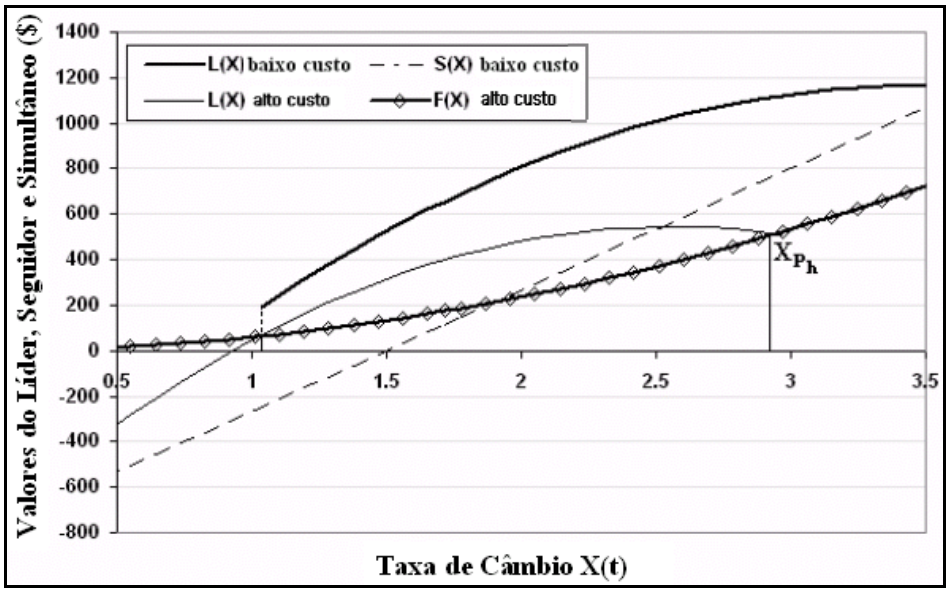

Figura 68 – Região de Preempção da Firma de Alto Custo

Note que se a firma de alto custo tem incentivos para se tornar a líder (caso da Figura 68), o mesmo ocorre com a firma de baixo custo. Entretanto, foi visto que o inverso não é necessariamente válido. Denote a região mostrada na Figura 68 de região de preempção da firma de alto custo. A existência dessa região depende dos parâmetros, especialmente da diferença entre os custos (do grau de vantagem competitiva). No caso base de Joaquin & Buttler essa região existe. Isso significa que a firma de baixo custo nessa região sofre o risco de obter o valor do exercício simultâneo ("equívoco") em vez do "lógico" ou "natural" valor de líder quando investindo. Esse risco deve ser considerado quando se analisa esse jogo. A ameaça de exercício da firma de alto custo é crível, pois se ela investir antes, o melhor que a firma de baixo custo pode fazer é se resignar a esperar (papel de seguidora), a menos que $X \geq X_{Fh}$. Em realidade, a firma de alto custo como líder e a firma de baixo custo como seguidora, também é ENPS, mesmo sendo uma estratégia menos provável de ocorrer.

A Figura 69 mostra o mais provável ou principal ENPS com a firma de baixo custo entrando como líder e a firma de alto custo entrando como seguidora. Nessa figura aparece uma nova função valor: o valor da opção de se tornar líder. Essa função valor é calculada com o gatilho de líder X_{Ll}, usando o *valor esperado do fator de desconto estocástico* (a muito útil eq. 281) para o tempo aleatório em que a variável X(t) alcança X_{Ll}, vezes o valor do líder para a firma de baixo custo.

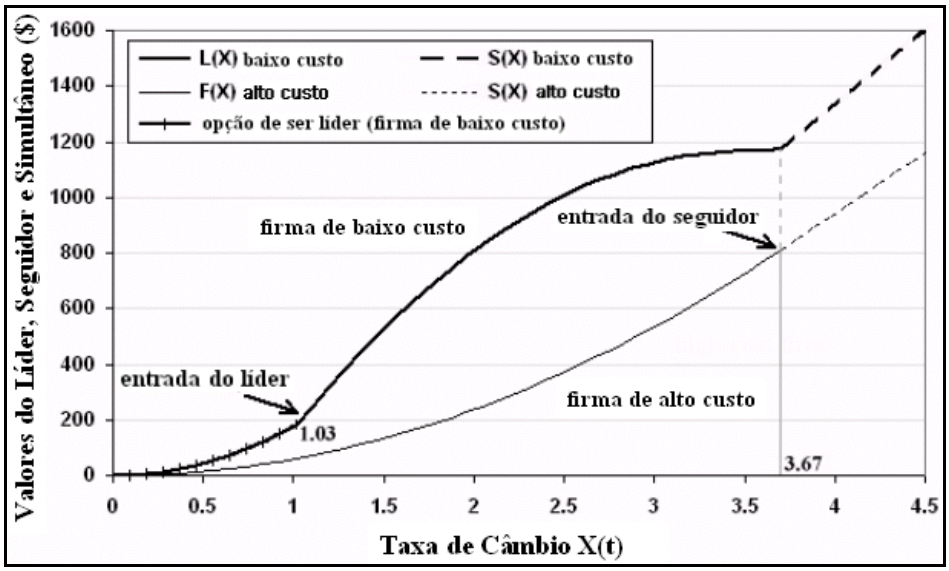

Figura 69 – Principal Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos no Duopólio Assimétrico

A Figura 70 mostra o menos provável e secundário ENPS, com a firma de alto custo entrando como líder e a firma de baixo custo entrando como seguidora.

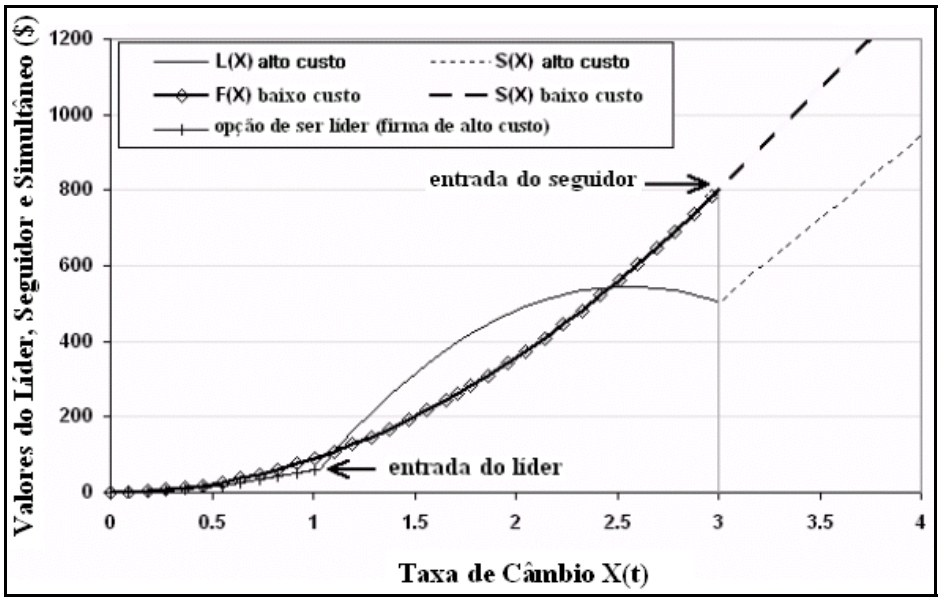

Figura 70 – ENPS Secundário no Duopólio Assimétrico

O cálculo das probabilidades ótimas para exercício das opções considerando que o rival está fazendo o mesmo, segue passos similares aos do item 4.2.2 e pode ser visto em Dias & Teixeira (2003). Aqui serão dadas só algumas conclusões gerais sobre essas estratégias mistas. Se o jogo começar com uma taxa de câmbio $X(t = 0) < X_L$, então a probabilidade de ocorrer o ENPS secundário é zero, i. é, com probabilidade 1 a firma de menor custo será a líder. Entretanto, essa a probabilidade de ocorrer o ENPS secundário é estritamente positiva se X começar (t = 0) dentro da chamada *região de preempção para a firma de alto custo*.

Além disso, dependendo dos parâmetros, existe a possibilidade de "equívoco", i. é, o exercício simultâneo quando o ótimo seria apenas uma firma estar ativa no mercado. Lembrar que se esse "equívoco" ocorrer, o desvio não é possível, pois o investimento é irreversível.

No item 4.2.4 será mostrada uma *variação do método diferencial* para resolver problemas de oligopólio sob incerteza, com a introdução de alguns novos conceitos que ajudarão a resolver não só esse problema, como a enriquecer o conjunto de métodos de solução de jogos de OR em geral.

4.2.4. Oligopólio sob Incerteza

Esse item apresenta principalmente o modelo de oligopólio sob incerteza baseado no artigo de Grenadier (2002). Por razões de espaço, serão apresentados apenas resultados selecionados, mas com algumas simulações e gráficos não mostrados naquele artigo. Essas adições são feitas para destacar importantes conceitos tais como a comparação entre monopólio, duopólio e oligopólio em termos de produção resultante para o mesmo choque de demanda. Também será destacado o conceito de *barreira refletora superior* limitando os preços máximos em oligopólio devido ao (mesmo imperfeito) efeito da competição.

Grenadier (2002) tem pelo menos duas contribuições importantes para a literatura de jogos de OR:

- Extensão do *princípio do comportamento míope ótimo* ("principle of optimality of myopic behavior") de Leahy para o caso de oligopólio; e
- A determinação das estratégias de exercício em oligopólio usando uma indústria "artificial" em competição perfeita, através de uma *função demanda modificada*.

Os dois "truques" simplificam a solução dos problemas porque "*o jogo de exercício pode ser resolvido como um problema de otimização de um único agente*", de forma que novamente podem ser aplicadas as ferramentas usuais de OR em tempo contínuo. Ou seja, novamente não são necessárias técnicas mais complexas de busca de pontos-fixos de correspondências de melhor resposta dos jogadores. Se pode até mesmo usar a simulação de Monte Carlo para resolver esse modelo simulando a demanda estocástica, como será visto.

Na primeira contribuição conceitual, a firma míope (denotada por i) é uma firma que, ao considerar a sua entrada ótima no mercado, assume que toda a produção das outras firmas (denotada por Q_{-i}) permanecerão constante para sempre. Como mencionado por Dixit & Pindyck (1994, p.291), "*cada firma pode fazer a sua decisão de entrada ... como se fosse a última firma que entraria nessa indústria e então faria o cálculo padrão do valor da opção*" e "*ela pode ser totalmente míope em relação às decisões de entrada das outras firmas*". A memorável propriedade do comportamento míope ótimo foi descoberta por Leahy (1993) e tem sido usado e estendido em várias maneiras. Ver também Baldursson & Karatzas (1997).

O artigo de Grenadier é relacionado estreitamente a Dixit & Pindyck (1994, principalmente cap. 9, seção 1; mas também os caps. 8 e 11). Em Dixit & Pindyck (cap. 9) cada firma produz só uma unidade, de forma que a produção total da indústria é igual ao número de firmas, enquanto que no modelo de Grenadier o número de firmas é fixo (n) mas cada firma pode adicionar mais que uma unidade de produção. Talvez o caminho de Grenadier para modelar o oligopólio seja mais útil e realista (uma melhora sobre Dixit & Pindyck), por ex., monopólio, duopólio e competição perfeita são casos particulares respectivamente para n = 1, 2, e ∞. Entretanto, para o caso de firmas assimétricas, o método de firmas com produção unitária de Dixit & Pindyck tem vantagens sobre o caminho de Grenadier, pois seria apenas um problema de ordenação (as firmas de baixo custo seriam as primeiras a entrar).

No entanto, em ambos os casos é necessário assumir a premissa de que o *investimento é infinitamente divisível* (firma i pode adicionar uma capacidade infinitesimal dq com um investimento infinitesimal dI). Apesar de ser mais realista uma premissa de adições de tamanho discreto na capacidade pelas firmas, essa abordagem pode ser uma aproximação razoável em muitas indústrias (ex., quando o novo investimento é uma fração pequena da atual capacidade instalada da indústria), especialmente para *estudos de equilíbrio da indústria*. Mas o modelo é menos realista para o *nível da decisão da firma*. Essa aproximação é necessária para permitir a extensão do princípio do comportamento míope ótimo de Leahy, o qual simplifica bastante a solução do problema. Entretanto, essa premissa não é necessária para o *caso perfeitamente competitivo* de Leahy (ver a excelente explanação de Dixit & Pindyck, cap. 8, section 2), onde a firma

competitiva analisa de forma míope um investimento *discreto* (“lump-sum”) para entrar na indústria competitiva.

A segunda contribuição de Grenadier permite a aplicação de importantes resultados obtidos para os casos de competição perfeita para os aparentemente mais complexos casos de competição imperfeita de oligopólios dinâmicos sob incerteza. Como exemplo, Grenadier apresenta uma extensão de seu artigo prévio no mercado imobiliário (“real-estate”) que considera o efeito do *tempo de construção* numa indústria perfeitamente competitiva (Grenadier, 2000b). Ele obtém soluções analíticas explícitas, simples, para as estratégias de investimento em equilíbrio, usando esse artifício esperto. Outros resultados obtidos para mercados perfeitamente competitivos poderiam também ser facilmente estendidos para o caso de oligopólio. Exemplos são os resultados de Lucas & Prescott (1971) sobre equilíbrio em expectativas racionais, Dixit (1989b) sobre modelos de histerese e Dixit (1991) para modelos de tetos (limites superiores) de preços, dentre outros resultados conhecidos.

O modelo é descrito da seguinte forma. Assuma que cada firma de um oligopólio de n-firmas tem uma seqüência de oportunidades de investimento que são como opções de compra americanas perpétuas, como o ativo básico sendo o valor de um projeto de adição de capacidade. A primeira premissa é que todas as firmas são iguais, com tecnologia para produzir um produto específico. A produção é infinitamente divisível e a unidade de preço desse produto é P(t). Esse preço muda com o tempo porque a *demanda* D[X(t), Q(t)] evolui segundo um processo estocástico contínuo. Assuma *ou* que as firmas são neutras ao risco *ou* que o processo estocástico X(t) é neutro ao risco (i. é, a tendência neutra ao risco é a tendência real menos o prêmio de risco, ver cap. 2).

Inicialmente, como no artigo de Grenadier, considere um processo de difusão estocástico mais geral dos que os mostrados no cap. 2 (ex., eq. 4):

$$\mathbf{dX = \alpha(X)\,dt + \sigma(X)\,dz} \qquad \mathbf{(312)}$$

Considere também uma função demanda inversa mais geral do que as anteriores (mais geral, por ex., do que a eq. 265):

$$\mathbf{P(t) = D[X(t), Q(t)]} \qquad \mathbf{(313)}$$

Para o caso do popular movimento geométrico Browniano (MGB, eq. 4), é só fazer $\alpha(X) = \alpha \, . \, X$; e $\sigma(X) = \sigma \, . \, X$. Como antes, α é a tendência (real), σ é a volatilidade e dz é o incremento de Wiener.

No equilíbrio perfeito de Cournot-Nash, as estratégias são quantidades e o mercado indica o preço de balanço oferta-demanda para cada estado da demanda ao longo do tempo. As firmas escolhem quantidades $q_i^*(t)$, i = 1, 2, ... n, maximizando seus lucros e considerando as melhores respostas dos competidores, que são as quantidades q_{-i}^*.

Com a premissa simplificadora de firmas iguais, a conseqüência é a escolha de EN simétricos, i. é, $q_i^*(t) = q_j^*(t)$ para todo i, j. Denote a produção total da indústria *em equilíbrio* por Q*(t). A produção ótima de cada firma nesse oligopólio simétrico de n-firmas em EN é:

$$\mathbf{q_i^*(t) = Q^*(t) / n} \qquad \mathbf{(314)}$$

O preço de exercício da opção de adicionar a capacidade dq é o investimento (I . dq), onde I é o custo unitário de investimento, que é igual para todas as firmas. A opção de adicionar capacidade é exercida pela firma i quando o choque da demanda X(t) alcança o nível de gatilho $X_i^*(q_i, Q_{-i})$.

Grenadier sumariza o equilíbrio na sua "Proposition 1", usando o método diferencial, especificamente uma equação diferencial parcial (EDP) e três condições de contorno. A EDP é obtida usando o método de OR tradicional (Lema de Itô, portfólio livre de risco, etc.). Como usual em problemas de OR, as duas primeiras condições de contorno são as condições de continuidade e de contato suave (ver cap. 2). Entretanto, a terceira condição de contorno é uma condição de interação estratégica, requerendo que cada firma i maximize o seu valor $V_i(X, q_i, Q_{-i})$ dada as estratégias dos competidores (gatilhos).

A terceira condição de contorno é também uma *condição de continuidade, mas no gatilho dos competidores*[331] $X_{-i}(q_i, Q_{-i})^*$, a qual é igual a $X_i(q_i, Q_{-i})^*$ devido ao equilíbrio simétrico. A terceira condição pode ser vista também como uma busca de *pontos fixos* nos mapas de melhor resposta. Entretanto, essa condição não será necessária, conforme a "Proposition 2" de Grenadier, que estende o conceito de miopia ótima para o caso de oligopólios. Essa proposição

[331] Similar ao caso discutido no item 4.2.2, para a determinação da constante da eq. (290), que resultou na eq. (291), usando a condição de continuidade no ponto ótimo dos rivais.

assume que o *investimento é infinitamente divisível* (ver discussão acima) e diz que o gatilho míope da firma é igual ao gatilho estratégico da firma (ENPS em Cournot). Assim, Grenadier consegue estabelecer os principais elementos para o equilíbrio com apenas duas condições de contorno ("Proposition 3" de Grenadier).

Denote o valor da firma míope por $M^i(X, q_i, Q_{-i})$. Seja o valor marginal da produção da firma míope $m^i(X, q_i, Q_{-i})$ definido por:

$$\mathbf{m^i(X, q_i, Q_{-i}) = \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) / \partial q_i} \quad \textbf{(315)}$$

Dada a simetria, se pode escrever $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$, pois $q_i = Q/n$ e também $Q_{-i} = (n - 1) \cdot Q / n$. A "Proposition 3" de Grenadier estabelece o EN simétrico: cada firma exercerá sua opção de investimento assim que X(t) suba para o nível de gatilho X*(Q). Seja m(X, Q) o *valor marginal do investimento da firma míope*. A seguinte EDO e as duas condições de contorno determinam ambas X*(Q) e m(X, Q):

$$\mathbf{½\ \sigma(X)^2\ m_{XX} + \alpha(X)\ m_X - r\ m + D(X, Q) + (Q / n)\ D_Q(X, Q) = 0} \quad \textbf{(316)}$$

Sujeito a :

$$\mathbf{m[X^*(Q), Q] = I} \quad \textbf{(317)}$$

$$\mathbf{\partial m[X^*(Q), Q] / \partial X = 0} \quad \textbf{(318)}$$

Onde os subscritos da eq. (316) denotando derivadas parciais. A eq. (317) é a condição de continuidade em X*(Q) e a eq. (318) é a condição de suavidade. Os últimos dois termos do lado direito da eq. (316) compreende a parte não-homogênea da EDO, os chamados "termos de fluxo de caixa". Essa parte não-homogênea jogará um papel especial no modelo de Grenadier, pois ela é a *função demanda modificada* mencionada antes. Os primeiros três termos da EDO compreendem a parte homogênea da EDO, como antes.

A beleza do modelo é que somente duas condições de contorno "de opções reais" no gatilho comum X*(Q) são *suficientes* para determinar a estratégia de exercício ótimo da opção, provada pela "Proposition 2" de Grenadier, a qual diz que o gatilho da firma míope é igual ao gatilho estratégico da firma.

Grenadier ("section 5") mostra que, além dos casos de monopólio e de indústria perfeitamente competitiva, também é possível resolver o caso de

oligopólio como um problema de otimização de um único agente ("single agent optimization problem"). O procedimento é apenas "fingir" que a indústria é perfeitamente competitiva, maximizando uma função objetivo "fictícia". Essa função objetivo "fictícia" usa uma função demanda artificial definida por:

$$\mathbf{D'(X, Q) = D(X, Q) + (Q / n)\, D_Q(X, Q)} \qquad \mathbf{(319)}$$

Como mencionado no início desse item, esse resultado é muito importante por permitir a extensão de conhecidos (ou de fácil obtenção) resultados do caso de competição perfeita para o caso de oligopólio. Aqui será focado o caso da seção 3 do artigo de Grenadier, mas com algumas simulações adicionais não mostradas naquele artigo.

Considere um processo estocástico específico, no caso o MGB (eq. 4) para o choque da demanda X(t). Considere também uma função demanda inversa específica, no caso uma curva com elasticidade da demanda constante, dada por:

$$\mathbf{P(t) = X(t)\, .\, Q(t)^{-1/\gamma}} \qquad \mathbf{(320)}$$

Onde $\gamma > 1/n$ assegura que os lucros marginais são decrescentes em X. Assuma também que a taxa de desconto livre de risco r é estritamente maior que o parâmetro de tendência[332] α. O gatilho ótimo X*(Q) é dado por:

$$\mathbf{X^*(Q) = v_n\, .\, Q^{1/\gamma}} \qquad \mathbf{(321)}$$

Onde v_n é uma barreira refletora superior, i. é, é o *preço máximo* que o produto pode alcançar no mercado oligopolista. Quando o preço alcança esse nível, as firmas adicionam capacidade numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional (exercícios de OR).

Para esse choque multiplicativo da demanda, enquanto X(t) segue um MGB não-restrito, o preço P(t) segue um MGB restrito pela barreira refletora superior v_n, dada por:

$$\mathbf{v_n = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\right)\left(\frac{1}{1 - 1/n\gamma}\right)(r - \alpha)\, I} \qquad \mathbf{(322)}$$

Onde $\beta_1 > 1$ é a conhecida raiz positiva da equação quadrática, que aqui é: $\frac{1}{2}\sigma^2 \beta (\beta - 1) + \alpha \beta - r = 0$. Note que o gatilho X*(Q) é decrescente com a

[332] Equivale a assumir $\delta > 0$ no caso de tendência neutra ao risco (no MGB é $\alpha' = r - \delta$).

quantidade de firmas no oligopólio (n), o que parece bem intuitivo. Esse é um efeito competitivo de intensidade n, que aqui reduz o gatilho de entrada.

Para manter o preço num valor igual ou menor que v_n, a adição de capacidade dQ (= n dq) quando X(t) > X*(Q), com custo I dQ, terá de ser maior, quanto maior for a diferença X(t) − X*(Q). Em outras palavras, se X(t) > X*(Q), então $Q(t) = (X(t) / v_n)^{\gamma}$.

Qual o *prêmio da opção* quando se exerce essa opção estratégica no oligopólio de n-firmas? Grenadier define esse prêmio de opção como o VPL em X* por unidade de investimento I, denotado por OP(n) e dado por:

$$\mathbf{OP(n) = 1 / [(n \gamma) - 1]} \qquad \mathbf{(323)}$$

Logo, quando n tende a infinito o prêmio da opção OP(n) tende a zero, um resultado consistente com a literatura de competição perfeita (ver Dixit & Pindyck, 1994, chapter 8, que o VPL é zero para o caso de competição perfeita). Para um valor finito de n o VPL é positivo, mas cada vez menor quando aumenta o número de firmas (n) no mercado, i. é, com a intensidade da competição. No modelo do item 4.2.2 (Huisman & Kort), existe um caso especial em que o VPL de exercício de uma opção de expansão pode ser (em si) negativo, a fim de evitar a entrada do competidor que poderia ser ainda pior para as operações correntes da firma[333]. No caso da guerra de atrito (ver cap. 5) se vê o oposto: o prêmio da OR de firmas em guerra de atrito quando exercendo a sua opção como líder, pode ser maior que o tradicional (monopolista) prêmio de OR, pois existe um incentivo adicional para a espera, que é a espera pela revelação de informação.

Serão realizados alguns cálculos numéricos a fim de mostrar o poder dos conceitos acima na compreensão do equilíbrio do oligopólio sob incerteza. Serão usados os mesmos dados de entrada do artigo de Grenadier ("section 3" para a sua "Figure 1", exceto onde indicado). Os valores são: α = 0,02 p.a.; r = 0,05 p.a.; σ = 0,175 p.a.; γ = 1,5; n = 10 firmas; I = 1 $; Q(0) = 100 unidades; e X(0) = 1,74 $/unidade.

Um aspecto interessante e prático do *princípio do gatilho míope ótimo* é que se pode usar a simulação de Monte Carlo para resolver o modelo. Não é necessário trabalhar em retro-indução ("backwards") porque se sabe o gatilho

[333] Isso só ocorre quando as firmas já estão operando no mercado. No caso do "modelo de mercado novo", isso nunca ocorre.

("míope") X*(Q(t)) antecipadamente. Logo, se esse gatilho é atingido por um caminho simulado da demanda X(t), haverá adição de nova capacidade pelas firmas oligopolistas. Assim é fácil estudar muitas propriedades advindas do exercício estratégico das OR em oligopólios e o comportamento agregado da indústria no longo prazo. Por exs., a produção da indústria Q(t), os investimentos ao longo dos anos, a evolução dos preços, etc. A Figura 71 mostra algumas dessas propriedades para o caso de oligopólio com 10-firmas, mostrando uma amostra de caminho ("sample-path") da demanda X(t) num horizonte de 10 anos.

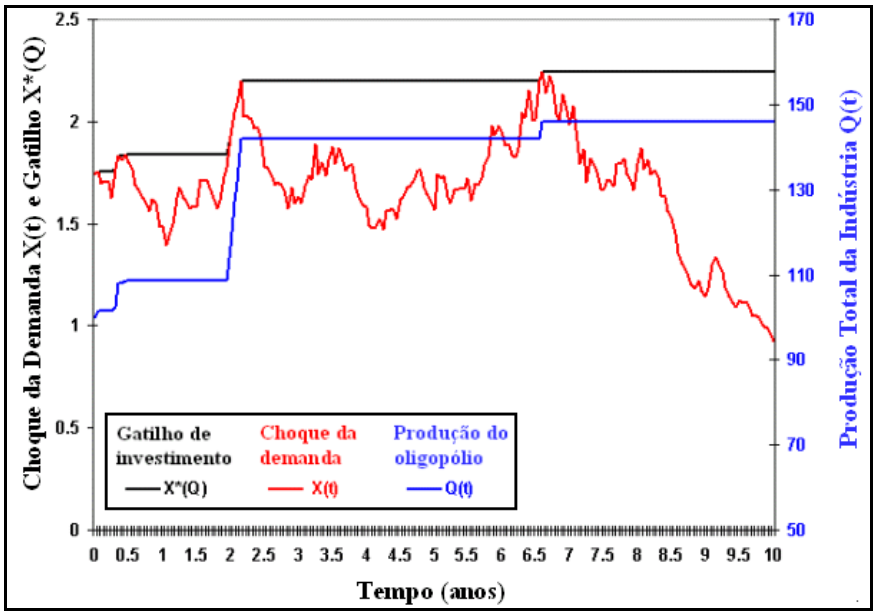

Figura 71 – Amostra da Demanda e Exercício Estratégico no Oligopólio de 10-Firmas

Na Figura 71, quando a demanda sobe até o nível de gatilho, todas as 10 firmas exercem as suas opções de expandir capacidade, aumentando a produção agregada da indústria. Nesse modelo, a adição de capacidade das firmas é proporcional à diferença entre o choque da demanda X(t) e o nível de gatilho X*(Q(t)), se positivo. No caso de demanda abaixo do gatilho X*, nenhum investimento é feito (e nenhum abandono também nesse modelo). No modelo de Grenadier as firmas são iguais, de forma que no caso de oligopólio de 10-firmas, cada firma adiciona 1/10 da nova capacidade Q(t) – Q(t – dt) em caso de choque positivo em t e se X(t) ≥ X*(Q(t – dt)).

A Figura 71 também mostra que, para essa específica amostra de caminho, depois do ano 8 a demanda cai a níveis bem menores do que em t = 0, mas a produção total da indústria permanece (de forma que os preços caem). Esse modelo não considera a redução da produção da indústria devido ao estado de

baixa demanda. Um melhoramento possível desse modelo é considerar outras opções tais como a opção de parada temporária (a um certo custo) e a opção de abandono (ou pelo menos a opção de contração).

A Figura 72 mostra, para uma amostra de caminho da evolução da demanda, que a produção total da indústria Q(t) é muito maior para o caso de oligopólio com 10-firmas (n = 10) do que para o caso de duopólio (n = 2), que por sua vez é maior do que o caso de monopólio (n = 1).

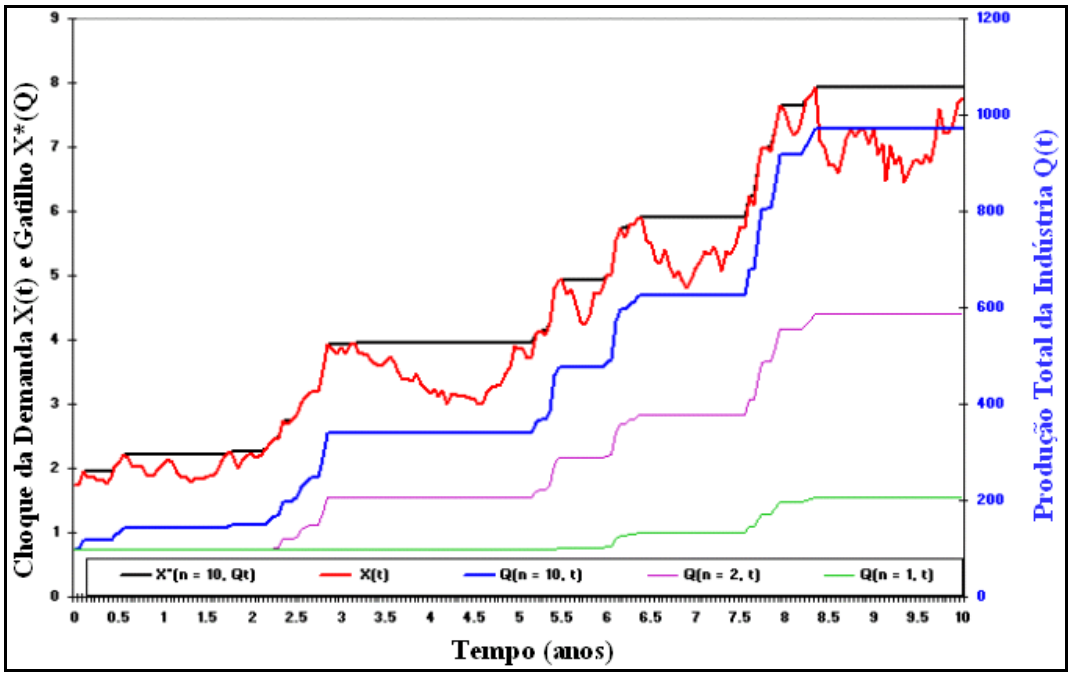

Figura 72 – Produção da Indústria sob Monopólio, Duopólio e Oligopólio (10-Firmas)

A Figura 72 mostra que, para a mesma evolução da demanda, depois de 10 anos o oligopólio com 10 firmas produz conjuntamente perto de 1000 unidades, o duopólio produz cerca de 600 unidades e o monopólio produz apenas 200 unidades (1/5 da produção do oligopólio de 10-firmas).

A Figura 73 a seguir mostra a evolução dos preços, considerando uma possível evolução da demanda com a respectiva evolução da produção do oligopólio. Note que existe uma barreira refletora superior para esses preços em 0,8081/10 unidades, de forma que quando existe um choque positivo da demanda que faz o preço subir de forma a alcançar essa barreira refletora, a adição de capacidade do oligopólio é alta o suficiente para o preço ou se manter nesse nível (se a demanda permanecer subindo) ou ser refletido para baixo.

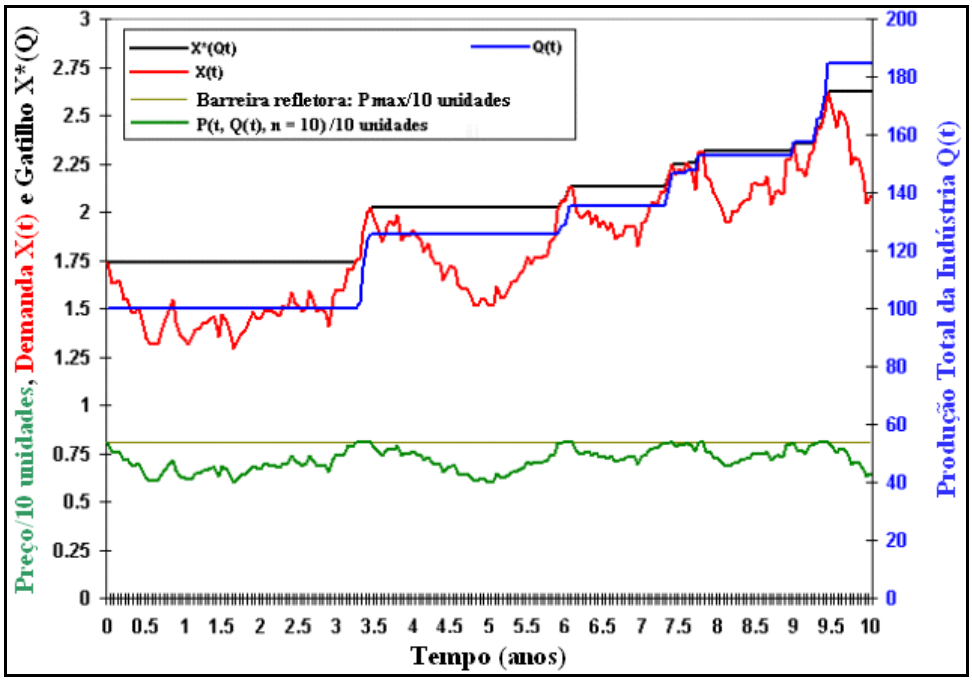

Figura 73 – Evolução de Preços e Barreira Refletora no Oligopólio de 10-Firmas

Todas as figuras apresentadas nesse item foram facilmente obtidas com as equações apresentadas e com a simulação de uma possível evolução da demanda incerta. Uma simulação de Monte Carlo mais completa daria as distribuições de probabilidades da produção, dos preços, dos investimentos na indústria, etc., para qualquer instante futuro t. Isso permitiria fazer um estudo mais realista dos oligopólios, do que é feito com a abordagem tradicional, que ignora a incerteza dinâmica da demanda.

Nesse capítulo foi visto que, em geral, existem pelo menos dois métodos para resolver os jogos de OR quando os mesmos podem ser caracterizados por estratégias simples de gatilho, o método diferencial e o integral. Isso foi mostrado na Proposição 8, que indica alguns caminhos não observados na literatura e principalmente sistematiza um conjunto de modelos de jogos de OR.

Nesse capítulo foi dada visão geral da teoria dos jogos tradicional, assim como os principais modelos analisados na literatura recente de jogos de OR. O efeito da interação estratégica pode tanto reduzir o prêmio exigido para o exercício da OR (até torná-lo negativo num caso especial), como em Grenadier, mas pode também aumentar o prêmio da espera. Esse último caso será visto numa aplicação de guerra de atrito sob incerteza que será mostrada no cap. 5.

5
Aplicações de Opções Reais Híbridas em Petróleo

5.1.
Introdução

Esse capítulo desenvolve aplicações dos conceitos apresentados nos capítulos 2, 3 e 4. São aplicações de opções reais (OR) combinando conceitos tradicionais dessa literatura, sumarizados no cap. 2, com conceitos de outras teorias, desenvolvidas/mostradas nos capítulos 3 e 4. Em todas essas aplicações estarão presentes as incertezas técnicas e de mercado, sendo particularmente relevante e comum a todas essas aplicações o papel do *valor da informação*.

Essas aplicações analisam decisões de investimento e valores de oportunidades de investimento em exploração e produção de petróleo (E&P). Dessa forma, outra característica comum é que existe um tempo legal de expiração da OR para descobrir e/ou desenvolver uma reserva descoberta. Tendo a OR *maturidade finita*, serão requeridos métodos numéricos padrões.

O capítulo 5 é particularmente útil para mostrar o poder prático das OR híbridas, já que os problemas aqui abordados são considerados relativamente complexos. Será mostrada a utilidade dos métodos apresentados nos caps. 2 e 3. Aqui serão apresentadas duas aplicações, sendo que uma pode ser classificada como de OR Bayesianas e a outra pode ser classificada como um jogo de OR.

Na primeira aplicação se estudará o caso de um campo de petróleo já descoberto, com um certo grau de delimitação, mas com alguma incerteza técnica residual sobre o volume e a qualidade da reserva. Existe a opção de desenvolver o campo, mas existem também K alternativas de investimento em informação que podem reduzir essa incerteza técnica. Ao mesmo tempo, os preços do petróleo seguem um processo estocástico, assim como o investimento é permitido também seguir um processo estocástico correlacionado com os preços do petróleo. O exemplo procura responder perguntas como: qual o valor do campo na presença de incerteza técnica? É melhor investir em informação antes de desenvolver? Qual a melhor alternativa de investimento em informação? Os conceitos de distribuição

de revelações e de medidas de aprendizagem, desenvolvidas no cap. 3, serão bastante úteis nesse contexto. A solução é relativamente simples.

Na segunda aplicação será considerada a interação estratégica entre companhias de petróleo com ativos exploratórios vizinhos e correlacionados. Serão úteis os conceitos desenvolvidos no cap. 4 sobre a teoria dos jogos e sobre a teoria dos jogos de OR. Essa aplicação pode ser vista como a integração de dois modelos de jogos de OR, um jogo não cooperativo (guerra de atrito) e um jogo cooperativo (barganha). Esses jogos são relacionados no sentido que o equilíbrio de um jogo pode ser usado como dado de entrada do outro jogo. Aqui a incerteza sobre a existência de petróleo é a incerteza técnica primária. Sendo essa incerteza correlacionada entre os prospectos de duas diferentes companhias de petróleo, o conceito de processo de revelação é usado para ajudar a quantificar os valores envolvidos na interação estratégica entre as firmas. Esse valor depende de qual jogo é praticado. Essa aplicação procura responder perguntas tais como: qual o valor das firmas em cada jogo? Qual as estratégias ótimas em equilíbrio? Qual jogo jogar e qual o valor de trocar de jogo?

5.2. Seleção de Alternativas de Investimento em Informação

5.2.1. Introdução

Uma companhia de petróleo possui direitos de concessão sobre um campo de petróleo não desenvolvido com incertezas técnicas residuais sobre o volume e a qualidade da reserva de óleo[334]. Em adição, a companhia observa o mercado e faz decisões baseadas no preço de longo prazo do preço do petróleo, função dos mercados à vista e futuro. Esse preço de longo prazo segue um processo estocástico. O investimento pode ter também incerteza de mercado e ser correlacionado com o preço do petróleo. A firma pode investir em informação antes de desenvolver o campo. Existem K alternativas de investimento em informação. Cada uma com diferentes custos, prazos de revelação de informação e capacidades de reduzir a incerteza técnica. Nesse contexto deve ser considerado que existe um tempo legal que expira a opção de desenvolver esse campo: se até

[334] Esse tópico é baseado no artigo Dias (2002).

essa data o campo não for desenvolvido, a firma perde os seus direitos de concessão e o governo readquire os direitos sobre esse campo de petróleo.

Aqui a modelagem do problema usará o desenvolvimento realizado no cap. 3. Em particular, se mostrará a força e a utilidade prática do conceito de *distribuição de revelações*, a distribuição de *expectativas condicionais* onde o condicionante é a informação revelada pelo investimento em informação. Cada alternativa de investimento em informação terá as suas distribuições de revelações (uma para cada incerteza técnica), que serão determinadas apenas pelas distribuições a priori das incertezas técnicas (distribuições comuns a todas as alternativas) e pelas medidas de aprendizagem (específicas de cada alternativa de investimento em informação) η^2, medidas essas diretamente relacionadas com as variâncias da distribuições de revelações. Essas distribuições de revelações serão usadas numa simulação de Monte Carlo que, combinada com o método tradicional de solução de OR (solução de uma EDP), irá resolver o problema.

5.2.2. O Efeito da Incerteza Técnica no VPL de Desenvolvimento

Para poder avaliar o valor da OR é necessário saber o valor que se obtém com o exercício da OR de desenvolvimento, i. é, o VPL de desenvolvimento[335]. A função VPL de desenvolvimento foi discutida com algum detalhe no cap. 2 (item 2.3). Nessa seção se verá principalmente como quantificar o efeito negativo da incerteza técnica na função VPL. Isso independe do modelo específico que se adote. O motivo é que o dimensionamento ótimo do investimento é feito assumindo valores para as variáveis técnicas tais como o volume e a qualidade da reserva ou é um investimento ótimo para um cenário mas não para os outros[336]. Na presença de incerteza técnica, quase certamente os verdadeiros valores dessas variáveis serão diferentes dos cenários nos quais foi projetado o sistema de produção. Isso só se saberá *ex post*, quando o investimento já tiver sido feito. É necessário pelo menos se saber a perda esperada no VPL causada pela incerteza técnica. Isso pode ser feito de forma natural com uma simulação de Monte Carlo.

---

[335] Não se está considerando as OR operacionais tais como a de parada temporária e a de abandono, apenas as OR de aprendizagem e de momento ótimo do desenvolvimento do campo.

[336] Ou, de forma equivalente, o valor do investimento I_D que maximiza o VPL para um cenário técnico, não necessariamente irá maximizar o VPL se ocorrer outro cenário ex post, a não ser que a diferença entre os cenários seja muito pequena.

Aqui será apresentada uma maneira específica de se fazer isso, considerando os principais fatos estilizados dessa análise, mas com simplificações práticas.

Como foi visto, o VPL é a diferença entre o valor do ativo básico "reserva desenvolvida" (V) e o valor do investimento para desenvolver o campo I_D, rever a eq. (1). O valor do ativo básico é uma função crescente do preço do petróleo (P), do volume de reservas (B) e da qualidade da reserva (q). Aqui se adotará o modelo de negócios para o valor do ativo básico V (eq. 23), por ser mais simples e resultar em valores de OR mais conservadores do que a alternativa do modelo de fluxo de caixa rígido. Mas a metodologia da aplicação aqui mostrada pode ser estendida facilmente, como menores adaptações, para outros modelos da função V(P, B, q), já que a EDP do valor da OR é escrita na variável preço do petróleo, que segue um processo estocástico definido, com a função V(P, B, q) aparecendo somente nas condições de contorno[337].

O valor do investimento no desenvolvimento da reserva (o preço de exercício da OR de desenvolvimento) é, em geral, uma função do volume de reservas (ver eq. 28) e pode também seguir um processo estocástico (ver eq. 29), i. é, o caso geral é $I_D(B, t)$, em que se multiplica um choque estocástico à função determinística $I_D(B)$. A função $I_D(B)$ é uma função otimização do investimento com a informação sobre o volume de reserva do campo. Ou seja, dado um volume de reserva B, o dimensionamento ótimo do investimento para desenvolver essa reserva deve ser uma função crescente de B, refletindo a necessidade de mais poços, maior capacidade de processo, maior diâmetro de dutos, etc[338]. Ver no cap. 2 porque o investimento é assumido não ser função de q e porque uma função linear de B é razoável para o dimensionamento ótimo de I_D. No exemplo numérico não será considerada a incerteza de mercado em I_D, mas será mostrado que a metodologia de solução não muda, especialmente se essa incerteza de mercado for um MGB correlacionado com um MGB para os preços do petróleo. Em caso de outros processos estocásticos para essas variáveis, terá de haver uma pequena adaptação da metodologia[339].

---

[337] Note que *não* existe na EDP termos de "fluxo de caixa", pois o valor da OR é o valor da reserva não-desenvolvida, que não gera fluxos de caixa antes de seu exercício.

[338] Por simplicidade, não se está considerando alternativas de escala de investimento em função do preço do petróleo, como no item 2.4.2.

[339] Com as variáveis P e I_D seguindo MGB's, se poderá usar uma curva de gatilhos *normalizada*, que reduzirá dramaticamente o tempo computacional. Para outros processos

Dessa forma, substituindo a eq. (23) na eq.(1) e considerando $I_D(B, t)$, pode-se escrever a equação do VPL de desenvolvimento, em valor presente na data de início de investimento, como a seguinte função das variáveis chaves q, B, P, e I_D:

$$\mathbf{VPL = V - I_D = q\,B\,P(t) - I_D(B, t)} \qquad \mathbf{(324)}$$

Essa equação vale para o caso em que *não* existe incerteza técnica em B e q. No caso de haver incerteza técnica nesses parâmetros, o caminho natural é trabalhar com o *valor esperado* desses parâmetros, a fim de minimizar o erro técnico de dimensionamento. Por ex., na eq. (59) se usa E[B] para estabelecer o valor de I_D. O problema é que, em geral, q e B *não* são independentes, ou seja, em geral o produto q B < E[q] E[B], ver a eq. (60) e a discussão que se seguiu. O ponto é que se o investimento se mostrar subdimensionado, então mesmo que toda a reserva B possa ser extraída com a capacidade subdimensionada, o valor presente da reserva (produto q B P) será menor devido à taxa de extração mais lenta[340]. Isso porque, caso se faça um certo dimensionamento de capacidade e se descobrir *depois* que a reserva é maior ou mais produtiva, então a capacidade instalada será uma restrição e a reserva B não poderá ser produzida na velocidade refletida no valor de q. Esse é o lado da *ameaça* da incerteza técnica: o dimensionamento (leia investimento) será quase certamente sub-ótimo na presença da incerteza técnica, pois ex post a capacidade instalada com o investimento I_D se mostrará excessiva (produto q B revelado maior que E[q] E[B]) ou se mostrará insuficiente (produto q B revelado menor que E[q] E[B]) e apenas por sorte se mostrará igual (produto q B revelado igual que E[q] E[B]). Quando o investimento for *excessivo*, existe um desperdício de investimento e o VPL é penalizado pelo excessivo I_D. Quando o investimento é *insuficiente* o VPL deve ser penalizado por um valor menor de V, *por ex.*, da maneira discutida a seguir.

É necessário fazer um ajuste para poder usar o modelo da eq. (324) com valores esperados de q e B no lugar de valores determinísticos de q e B da eq. (324). No cap. 2 foi visto um exemplo mais simples (com apenas três cenários discretos), onde foi usado um fator γ para penalizar o valor do ativo básico V, ver eq. (61). Esse fator foi usado apenas para penalizar *um* cenário mais favorável,

---

estocásticos, essa curva de gatilhos não poderá ser normalizada, implicando *apenas* num aumento (relevante) do tempo computacional. Mas a metodologia é similar e os conceitos são os mesmos.

[340] Lembrar que a qualidade q é relacionada com o valor presente de receitas líquidas, i.é, com a *velocidade* que as reservas são extraídas e vendidas no mercado.

rever o exemplo da Tabela 8. Mas foi dito que, no caso de distribuições contínuas ou com vários cenários, que esse fator γ deveria ser variável, i. é, deveria ser maior quanto maior for o desvio do produto q B do valor pelo qual o investimento foi dimensionado. Ou seja, o fator de penalização deve ser crescente com o grau de subdimensionamento, dado pela diferença q B – E[q] E[B].

Sejam os cenários de *subdimensionamento* do investimento. Para esses cenários, denote o fator de penalidade por γ^+, definido no intervalo (0, 1]. Esse fator penaliza o valor da reserva desenvolvida V nos cenários q B > E[q] E[B].

A Figura 74 permitirá ter a intuição sobre esse efeito e também obter algumas equações para corrigir o efeito da incerteza técnica na função VPL, mais precisamente no cálculo de V. Esse gráfico é construído fazendo análise de fluxo de caixa do projeto considerando, além do caso $\overline{V}$ = E[q] E[B] P, em que o investimento foi dimensionado, mais dois cenários para os casos em que o investimento ficaria subdimensionado e superdimensionado. Gráficos similares para corrigir o efeito da incerteza técnica no VPL, têm sido encontrados na literatura profissional de E&P de petróleo, por ex., Demirmen (1996, Fig. 3)[341].

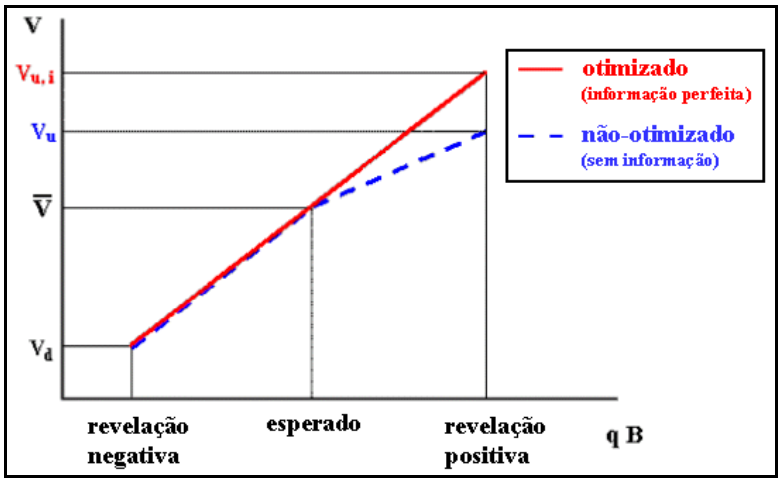

Figura 74 – Efeito da Incerteza Técnica no Valor do Projeto

Assim, se houvesse informação perfeita para dimensionar o investimento e se os valores verdadeiros de q e B fossem o do cenário mais favorável ("upside"), a otimização do investimento faria o valor da reserva ser $V_{u,\,i}$ (onde "i" significa informação perfeita), com $V_{u,\,i}$ = q B P. O caso de informação *perfeita* como base de análise é conveniente na prática, pois se sabe que é muito mais fácil otimizar

[341] Em Demirmen o gráfico é do VPL versus o volume de reservas B. Aqui, o gráfico é de V em vez do VPL diretamente, já que é mais conveniente no contexto de OR separar o valor do ativo básico do investimento. Mas a idéia é a mesma: corrigir o VPL do efeito da incerteza técnica.

sob certeza do que sob incerteza, além do primeiro ser um caso limite (inferior) do outro. Existindo incerteza técnica e dimensionando pelo valor esperado de q e B, no caso de revelação positiva ("upside"), o ex post subdimensionado investimento é uma restrição para a produção, e assim se obtém apenas $V_u < V_{u,\,i}$. Para estabelecer o fator γ^+ de forma que essa penalização seja proporcional ao grau de subdimensionamento, i. é, incidindo só na diferença $V_{u,\,i} - \bar{V}$. Para isso, note que se pode escrever $V_{u,\,i} = V_{u,\,i} + \bar{V} - \bar{V} = \bar{V} + (V_{u,\,i} - \bar{V})$. Assim, a equação abaixo define o fator $0 < \gamma^+ \leq 1$:

$$\mathbf{V_u = \bar{V} + \gamma^+ (V_{u,\,i} - \bar{V})} \qquad \textbf{(325)}$$

Logo, numa análise de fluxo de caixa[342] pode-se calcular esse fator γ^+:

$$\gamma^+ = \frac{V_u - \bar{V}}{V_{u,\,i} - \bar{V}} \qquad \textbf{(326)}$$

Esse fator é mais próximo de 1 quanto mais próximo V_u for de $V_{u,\,i}$. Para isso ocorrer, a incerteza técnica tem de ser a menor possível. Ou seja, o fator γ^+ deve ser menor (penalizar mais) quanto maior for a incerteza técnica. Também, para a mesma incerteza técnica, quanto *maior a flexibilidade* do sistema de absorver *poços opcionais*, mais próximo de 1 é esse fator. Por ex., em caso de revelação positiva para B, poderiam ser exercidas opções de expandir a produção através da perfuração de poços opcionais *previamente planejados*, mas isso em geral resulta num pequeno acréscimo no investimento I_D, ver item 2.4.3.

Assim, numa simulação de Monte Carlo para corrigir o VPL do efeito da incerteza técnica, a penalização nos cenários favoráveis faz a função VPL ser, para esses cenários, igual à equação abaixo (combine a eq. 325 com a eq. 324):

$$\mathbf{VPL = P\,\{E[q]\,E[B] + \gamma^+ (q\,B - E[q]\,E[B])\} - I_D} \quad , \quad \text{se } \mathbf{q\,B > E[q]\,E[B]} \qquad \textbf{(327)}$$

Onde foram usados as definições $V_{u,\,i} = q\,B\,P$ e $\bar{V} = E[q]\,E[B]\,P$ e, mais importante, o investimento I_D é calculado com a eq. (59), i. é, com o valor esperado E[B] e *não* com o B do cenário revelado ex post.

Agora considere os cenários de *superdimensionamento* do investimento. O fato de haver excesso de capacidade não significa que as reservas serão extraídas

[342] Lembre que o valor de V_u é calculado como o valor *presente* de receitas líquidas, numa simulação da produção considerando a restrição de capacidade da planta de processamento, etc. O cenário de subdimensionamento para essa análise pode ser qualquer, já que se assume linearidade.

mais rapidamente, especialmente se o sistema de produção for dimensionado para o pico de produção. Mas por questão de generalidade[343], defina outro fator de penalidade por γ^-, para os cenários em que q B < E[q] E[B]. Na aplicação, γ^- será igual a 1 (a idéia é que o dimensionamento *não* é uma restrição), mas esse fator pode até ser um *pouco* maior que 1[344]. Assim, para os cenários simulados em que q B < E[q] E[B], pode-se definir um $\gamma^- > 0$ de forma análoga ao γ^+, i. é:

$$\mathbf{V_d = \bar{V} - \frac{1}{\gamma^-}\,(\bar{V} - V_{d,i})} \qquad \mathbf{(328)}$$

Onde se $\gamma^- < 1$, o valor V_d é penalizado (em relação a $V_{d,i}$); se $\gamma^- > 1$, V_d é aumentado; e se $\gamma^- = 1$, então $V_d = V_{d,i}$. Assim, numa simulação de Monte Carlo para corrigir o VPL do efeito da incerteza técnica (superdimensionamento), a correção em V para o cenários favoráveis faz a função VPL ser, para esses cenários, igual à equação abaixo (combine a eq. 328 com a eq. 324):

$$\mathbf{VPL = P\,\{E[q]\,E[B] - \frac{1}{\gamma^-}\,(E[q]\,E[B] - q\,B)\} - I_D} \quad ,$$

$$\text{se } \mathbf{q\,B < E[q]\,E[B]} \qquad \mathbf{(329)}$$

Onde, como sempre, o investimento I_D é fixo e calculado com a eq. (59), i. é, com o valor esperado E[B]. Para o caso de coincidir que q B = E[q] E[B], o dimensionamento estaria correto e assim se poderia usar a eq. (324) para o VPL. Isso vale também para o caso sem incerteza técnica (informação perfeita).

Assim, uma simulação de Monte Carlo irá corrigir o VPL do efeito do dimensionamento (ou investimento) sub-ótimo causada pela incerteza técnica. Para isso, devem-se usar as distribuições a priori dos parâmetros q e B, para amostrar esses parâmetros e assim calcular o VPL com incerteza técnica através das eqs. (327), (324) e (329), para avaliar o VPL nos possíveis cenários de q e B.

A fim de simular o valor da OR com incerteza técnica, será útil também escrever a equação do valor do ativo básico com incerteza técnica $V(P, \tilde{q}, \tilde{B}, \gamma)$:

---

[343] Apesar do sistema de produção instalado não ser uma restrição, *pode* ocorrer que a incerteza técnica tenha causado locações desfavoráveis para os poços, tal que γ^- seja menor que 1.

[344] Se o dimensionamento *ótimo* for para um "plateau" (em vez do pico) de produção, ou se for possível alugar o excesso de capacidade de processo para outros campos, ver cap.2.

$$\mathbf{V(P,\ \tilde{q}\ ,\ \tilde{B}\ ,\ \gamma) =}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{P\{\ E[q]\ E[B]\}} & \mathbf{se\ \ q\ B = E[q]\ E[B]} \\ \mathbf{P\{\ E[q]\ E[B] + \gamma^{+}(q\ B - E[q]\ E[B])\}} & \mathbf{se\ \ q\ B > E[q]\ E[B]} \\ \mathbf{P\{\ E[q]\ E[B] - \dfrac{1}{\gamma^{-}}(E[q]\ E[B] - q\ B)\}} & \mathbf{se\ \ q\ B < E[q]\ E[B]} \end{cases} \qquad \mathbf{(330)}$$

Onde os valores q B são produtos de amostras das distribuições a priori de q e B. A complexa dependência entre essas distribuições é considerada de uma forma simples usando a eq. (330). Com isso se obtém o valor da opção real com incerteza técnica F(P(t), $\tilde{q}$, $\tilde{B}$, γ, t) e antes de se obter informação adicional. Se considerar que $\gamma^{+} < 1$ e $\gamma^{-} = 1$, então F(P(t), $\tilde{q}$, $\tilde{B}$, t) será sempre menor que o valor da OR sem incerteza técnica em que se usa os valores esperados dos parâmetros q e B, i. é, F(P(t), $\tilde{q}$, $\tilde{B}$, t) < F(P(t), E[q], E[B], γ, t). Assim, defina o parâmetro ψ_F como o fator de redução do valor da OR causada pela incerteza técnica, i. é, esse fator menor que 1 (e positivo) é dado pela equação:

$$\mathbf{\psi_F \ = \ \frac{F(P(t),\ \tilde{q},\ \tilde{B},\ t)}{F(P(t),\ E[q],\ E[B],\ \gamma,\ t)}} \qquad \mathbf{(331)}$$

Esse fator é mais severo (menor) quanto maior for a incerteza técnica. Assim, quanto menor a incerteza técnica, mais próximo de 1 será o redutor ψ_F. Logo, se houver uma redução esperada da incerteza técnica através de um investimento em informação, o valor de F(P(t), $\tilde{q}$, $\tilde{B}$, t) deve ficar mais próximo de F(P(t), E[q], E[B], γ, t), i. é, ψ_F mais próximo de 1. Para calcular o valor da OR ainda com incerteza técnica, mas com nova informação (menor incerteza) advinda de um sinal S (ex.: a perfuração de um novo poço de delimitação), existem pelo menos dois caminhos.

O primeiro caminho é usar fatores γ mais próximos do caso de informação perfeita (γ = 1), revisando esses fatores para o caso de adquirir nova (embora imperfeita) informação. Em caso de um sinal S deve-se esperar uma redução desses fatores de forma monotônica com a capacidade de reduzir a incerteza desse sinal. Essa capacidade de reduzir a incerteza será aqui a medida de aprendizagem $\eta^2(X \mid S)$, a *redução percentual esperada de variância* da variável técnica X com o sinal S, bastante discutida no cap. 3. Quanto maior for $\eta^2(X \mid S)$, maior o valor

de $\gamma_{X \mid S}$. Assim, se propõe em geral a seguinte revisão ("upgrade") do fator γ_X de uma v.a. X devido ao sinal S:

$$\gamma_{X \mid S} = \gamma_X + (1 - \gamma_X)\, \eta^2(X \mid S) \qquad (332)$$

Ou seja, quando $\eta^2(X \mid S) = 1$, $\gamma_{X \mid S} = 1$ e quando $\eta^2(X \mid S) = 0$, $\gamma_{X \mid S} = \gamma_X$. Esse caminho, no entanto, exigiria a simulação das distribuições *posteriores* de q e B, i. é, p(q | S) e p(B | S), para *cada* cenário de S, fazendo o tempo computacional ser muito elevado. Para evitar isso, se propõe uma correção mais prática do valor da OR com incerteza técnica e com nova informação S.

Esse segundo caminho é muito mais simples e usa uma idéia análoga à usada na eq. (332). Considera que o fator de redução ψ_F (eq. 331) é mais próximo de 1, quanto menor for a incerteza esperada após a nova informação. Assim, se propõe simplesmente uma revisão desse fator de redução para considerar o sinal S, denotado por $\psi_{F \mid S}$. Como o fator ψ_F considera a incerteza do produto q B, a redução da incerteza em ambas as variáveis fará aumentar o fator $\psi_{F \mid S}$. Por isso, considere a seguinte atualização ("upgrade") para o fator de redução $\psi_{F \mid S}$:

$$\psi_{F \mid S} = \psi_F + (1 - \psi_F) \left(\frac{\eta^2(q \mid S) + \eta^2(B \mid S)}{2} \right) \qquad (333)$$

Se não houver aprendizagem, i. é, $\eta^2(q \mid S) = \eta^2(B \mid S) = 0 \Rightarrow \psi_{F \mid S} = \psi_F$. Se a aprendizagem for perfeita, $\eta^2(q \mid S) = \eta^2(B \mid S) = 1 \Rightarrow \psi_{F \mid S} = 1$. Com isso, o valor da OR com incerteza técnica mas com informação imperfeita, *antes* de considerar o custo de obter essa informação, denotado por $F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t \mid S)$, é obtido simplesmente por:

$$F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t \mid S) = \psi_{F \mid S}\ F(P(t), E[q], E[B], \gamma, t) \qquad (334)$$

Ou seja, calcula-se o valor da OR usando os valores esperados revelados pela distribuição de revelações de q e B, como se não tivesse incerteza técnica, e depois se penaliza esse valor da OR multiplicando pelo fator de redução condicional $\psi_{F \mid S}$, dado pela eq. (331). Para usar a eq. (331), lembre que é necessário calcular o valor da OR com a incerteza técnica original, obtido com a simulação de Monte Carlo das distribuições a priori de q e B, onde o valor do ativo básico V é penalizado através da eq. (330).

Nesse item se mostrou como calcular o VPL sem incerteza técnica e com a incerteza técnica original, assim como o valor da OR sem incerteza técnica e com

a incerteza técnica original. Ambos usaram a simulação de Monte Carlo. Depois, se mostrou como calcular o valor da OR com incerteza técnica reduzida pela aprendizagem da nova informação S, através de uma equação simples de correção.

5.2.3. A Combinação das Incertezas e as Alternativas de Aprendizagem

Para calcular o valor da OR de desenvolvimento considerando também a evolução do mercado (preço do petróleo, principalmente), é necessário combinar cenários de incerteza técnica com os cenários de incerteza de mercado. Para isso, *novamente* a simulação de Monte Carlo deve ser usada e o valor da OR é função dessa combinação de cenários, ou seja, o valor tradicional da OR, denotado por F(P, t), é condicional ao cenário de volume e qualidade da reserva, i. é, F(P, t | q, B). No caso de incerteza técnica, a OR é calculada considerando as expectativas sobre esses parâmetros, E[q] e E[B], o(s) fator(es) de penalização γ sobre o valor do ativo básico V e o fator revisado $\psi_{F|S}$, conforme detalhado no item 5.2.2.

Na combinação dos dois tipos de incerteza para avaliar a OR, lembrar (cap. 2 e 3) que a OR tem de ser simulada como um processo neutro ao risco a fim de poder usar a taxa de desconto livre de risco r para descontar os valores resultantes dos possíveis exercícios da OR, nos diversos cenários. Lembrar que a incerteza técnica não demanda prêmio de risco, mas a incerteza de mercado demanda. Assim, deve ser simulado um *processo estocástico neutro ao risco* (ou seja, um processo real penalizado por um prêmio de risco). Para o caso do MGB, o processo neutro ao risco é dado pela eq. (9). Existe uma *discretização exata* (independe do intervalo de tempo Δt usado) para a eq. (9) que permite simular os preços do petróleo do MGB neutro ao risco:

$$\mathbf{P_t = P_{t-1}\ exp\{ (r - \delta\ -\ ½\ \sigma^2)\ \Delta t\ +\sigma\ N(0,\ 1)\ \sqrt{\Delta t}\ \}} \qquad \mathbf{(335)}$$

Onde N(0, 1) é a distribuição normal padronizada (média 0 e variância 1). Assim, pode-se simular recursivamente *n* amostras de caminhos do preço do petróleo. A divisão do intervalo de tempo entre o momento inicial (t = 0) e a maturidade da OR (t = T) em *m* sub-intervalos, permite traçar um caminho para P com *m* + 1 pontos. A precisão da simulação é maior quanto maior for *n* e/ou *m*.

Para o caso geral, o investimento I_D segue um processo estocástico dado pelo fator estocástico multiplicativo $\upsilon(t)$. Assim, pode-se escrever uma equação de

simulação para $\upsilon(t)$ análoga à eq. (335). Em adição, pode-se estimar um coeficiente de correlação positivo $\rho(P, \upsilon)$ entre esses processos estocásticos.

O gatilho de desenvolvimento dá a regra de decisão para o momento ótimo de desenvolvimento do campo (ver cap. 2). Para reduzir dramaticamente o tempo computacional do cálculo do valor da OR, é melhor trabalhar com uma curva normalizada de gatilho. Isso *reduz a dimensionalidade do problema*, ver item 2.4.6 (sobre OR de mudança de uso), especialmente a eq. (48). No caso da presente aplicação, considere o valor normalizado da reserva desenvolvida, ou seja, V / I_D, onde a equação do ativo básico V é a eq. (330). Note que para $V / I_D = 1$, o VPL é igual a zero, que é o gatilho da OR em $t = T$.

A curva de gatilho normalizada, denotada por $(V / I_D)^*$, a qual é função decrescente do tempo, dá os valores que fazem ser ótimo o imediato investimento (exercício da opção) a cada instante $t \in [0, T]$. Para o MGB, essa curva de gatilho $(V / I_D)^*$ depende só[345] de σ, r, e δ. O uso da curva de gatilho normalizada em vez de P* ou V*, permite usar uma única curva de gatilho para todo cenário proveniente da combinação das incertezas técnicas e de mercado. Para isso, basta comparar o valor (V / I_D) simulado, a cada instante t, com o valor dessa curva de gatilho $(V / I_D)^*$ nesse mesmo instante, para decidir sobre o exercício ou não da OR. Assim, qualquer que seja a combinação de q e B, a curva de gatilho é a mesma, apesar do preço de exercício da OR (I_D) mudar com o cenário revelado E[B]. Sem essa normalização (por ex., usando V*), depois da revelação de um novo cenário E[B] a curva de gatilho V* mudaria, pois o preço de exercício I_D mudaria. Isso aumentaria (quase multiplicaria pelo número de simulações) o tempo computacional, pois *cada* iteração de Monte Carlo demandaria o cálculo de uma nova curva de gatilhos.

Como visto no item 2.4.6, essa normalização só é possível porque a OR é homogênea de grau 1 no valor de V e de I_D, e a curva de gatilhos *normalizada* é homogênea de grau zero nas mesmas variáveis, desde que V e I_D sigam MGB's (que podem ser correlacionados). Para outros processos estocásticos, a mesma propriedade não foi provada e em geral não é válida.

---

[345] Note que, pela Proposição 1, $\sigma_V = \sigma_P$. Se I_D também segue um MGB causada pelo choque υ, essa curva depende de δ_I, δ e de σ_T, sendo que a taxa de dividendo de I_D, δ_I, pode ser assumida igual a taxa de juros r e σ_T é a "volatilidade total" dada por $\sigma^2_T = \sigma^2_P + \sigma^2_I - 2 \rho \sigma_P \sigma_I$.

Considere que existem K alternativas distintas de investimento em informação, k = 0, 1, 2, …K, sendo k = 0 a alternativa de <u>não</u> investir em informação. Cada alternativa tem um poder de revelação diferente, dada pela medida de aprendizagem $\eta^2(X \mid S_k)$ para cada v.a. com incerteza técnica (aqui q e B). Assuma que, para a alternativa k existe um *custo de aprendizagem* (custo do investimento em informação com a alternativa k) igual a C_k e um *tempo de aprendizagem* ("time to learn") ou tempo de revelação t_k. Logo, o modelo considera o importante aspecto da realidade de que a aprendizagem leva tempo, penalizando as alternativas que demandam mais tempo para revelar a informação. Inicialmente, considere que o investimento em informação sempre comece no instante inicial (t = 0). Depois, será analisada a relevância, ou irrelevância, de considerar o momento ótimo de aprendizagem. Por simplicidade de notação, seja W_k o valor da opção real que inclui o custo C_k, o tempo t_k e seus dois benefícios $\eta^2(q \mid S_k)$ e $\eta^2(B \mid S_k)$ de aprendizagem com a alternativa k, i. é:

$$\mathbf{W_k = -C_k + F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t \mid S_k)} \qquad \mathbf{(336)}$$

O objetivo é escolher a alternativa k* que maximiza o valor da OR, i. é, com o maior valor W_k. Isso é formalizado na Proposição 9 a seguir.

Proposição 9: Seja o problema de OR de desenvolvimento de um campo de petróleo, com direitos de início de desenvolvimento que terminam na data legal T, onde o preço do petróleo P segue um MGB e o investimento I_D é dado pela eq. (59) e possivelmente multiplicado pelo fator $\upsilon(t)$, que segue um MGB correlacionado com P. Sejam q e B v.a. com distribuições a priori conhecidas representando a incerteza técnica residual. Sejam K alternativas de investimento em informação, cada alternativa com custo C_k, tempo de revelação t_k e revelando informação através do sinal S_k. Assuma que se a firma investir em informação, ela o fará em t = 0 e só pensará em desenvolver o campo após o resultado dessa aprendizagem, em $t = t_k$. Assuma que o valor do ativo básico (a reserva desenvolvida) V(P(t), q, B) é dado pelo modelo de negócios, eq. (23). Então:

(a) o problema de seleção da melhor alternativa de investimento em informação k* é dado por:

$$\mathbf{k^* = \underset{k \in \{0, 1, 2, \ldots, K\}}{\arg\max}\ W_k} \qquad \mathbf{(337)}$$

(b) Com o valor da OR (o valor da reserva não-desenvolvida), que considera tanto a *opção de espera* (momento ótimo de desenvolvimento) como a *opção de aprendizagem* usando uma alternativa k, sendo dado por:

$$\mathbf{W_k = -C_k + E\left[\max_{t \in [t_k, T]} \left\{ E^Q \left[e^{-rt} \, (\tilde{q}\, \tilde{B}\, P(t) - I_D(\tilde{B}, t)) \right] \right\} \mid S_k \right]} \quad \textbf{(338)}$$

Onde Q do operador E^Q significa que o valor esperado é tomado sob a medida neutra ao risco (medida equivalente de martingale) para os processos estocásticos de P e I_D. O operador expectativa externo é condicional à informação revelada S_k. O operador E^Q é maximizado pela escolha ótima do momento t* de exercício da opção de desenvolvimento. Assim, a *solução* do problema de maximização da eq. (338) é dado por:

$$\mathbf{t^* = \inf \left\{ t \in [t_k, T]: \frac{q\, B\, P(t)}{I_D(B,\, t)} \geq \left(\frac{V}{I_D} \right)^* (t) \right\}} \quad \textbf{(339)}$$

Com a convenção padrão que o *ínfimo de um conjunto vazio é + infinito*, de forma que para o um caminho i sem exercício (conjunto vazio) o valor dentro de $E^Q(.)$ na eq. (338) é zero. Na eq. (339), $(V / I_D)^*(t)$ é a curva normalizada de gatilhos ao longo do tempo, que depende dos parâmetros do(s) processo(s) estocástico(s) (σ, r, e δ), mas não da particular combinação das v.a. q, B, P e I_D.

(c) Esse complexo problema pode ser resolvido de forma *mais simples*, assumindo que a informação S_k de cada alternativa k pode ser representada pela seguinte <u>estrutura de informação flexível</u>, eq. (63), que no atual contexto é:

$$\mathbf{\mathcal{I}_k = \{\eta^2(q \mid S_k), \eta^2(B \mid S_k), A\}} \quad \textbf{(340)}$$

Onde A é a seguinte assertiva: *as distribuições de revelações de q e B são aproximadamente do <u>mesmo tipo</u> das suas distribuições de revelações do caso particular de informação perfeita*. Pelo Teorema 1, essas distribuições limites são as próprias distribuições a priori de q e B, que são dados do problema. Sendo que se pode trabalhar com q e B como se fossem independentes e usar os valores esperados dessas v.a. através da seguinte aproximação para W_k:

$$\mathbf{W_k = -C_k +}$$

$$\mathbf{E\left[\max_{t \in [t_k, T]} \left\{ E^Q \left[e^{-rt} (E[q|S_k]\, E[B|S_k]\, P(t) - I_D(E[B|S_k], t)) \right] \right\} \right] \psi_{F \mid S_k}} \quad \textbf{(341)}$$

Onde o fator $\psi_{F|S_k}$, dado pela eq. (333), permite trabalhar com q e B como se fossem v.a. independentes, pois corrige o efeito da incerteza técnica residual (após S_k) no valor da OR calculada pelo termo max{.} usando expectativas correntes de q e B que são reveladas pelo sinal S_k. Essas expectativas são amostradas das *distribuições de revelações* dessas variáveis para a alternativa k. O operador E[.] externo calcula o valor esperado considerando os diversos cenários dessas distribuições de revelações.

Prova: (a) se forem calculados os valores de K + 1 opções reais W_k (i. é, K alternativas de investimento em informação mais a alternativa k = 0 de não investir em informação) e escolher a alternativa k*, se estará maximizando o valor do campo considerando tanto as opções de aprendizagem como o momento ótimo de desenvolvimento, dadas as premissas assumidas e se os valores W_k puderem ser expressos pelas eqs. (338) e (339).

(b) O formato da eq. (338) é apenas uma maneira mais *conveniente* de se expressar o valor de uma opção do tipo americana, que já considera o exercício ótimo dessa opção americana, exs.: Neftci (2000, p. 494), Shreve (2004, p.345), Duffie (2001, p.185). No contexto de OR, ver, por ex., Murto (2004, p.7) ou Maeland (2001, eq. 7)[346]. Como os processos são neutros ao risco e a incerteza técnica não demanda prêmio de risco, o valor obtido com o exercício da opção em t* pode ser descontado com a taxa livre de risco r. O tempo de parada (exercício) ótima t* é considerado apenas no intervalo $[t_k, T]$, pois se assumiu que se a firma estiver investindo em informação, ela irá esperar pelo menos até obter essa informação em t_k, antes de exercer a opção de desenvolvimento. Esse tempo ótimo t* é obtido pela curva de gatilho normalizada, que foi provada ser homogênea de grau zero em V e em I_D por McDonald & Siegel (1986, p.713, ver também e Dixit & Pindyck, 1994, pp.207-211) se V (e, logo, P) e I_D seguem MGB's (correlacionados), como aqui é assumido. Isso significa que a curva de gatilhos e, logo, t*, independem da combinação particular i de cenários, i. é, da combinação particular de P_i, I_{Di}, q_i e B_i no intervalo de avaliação $[t_k, T]$ da alternativa k. Esse cálculo deve ser repetido para cada uma das K + 1 alternativas.

---

[346] Em alguns casos se usa "sup" (supremo) em vez de "max". Como aqui as quantidades são finitas, se preferiu usar o termo "max". Aqui se preferiu não carregar na notação, dizendo que E^Q é condicional a uma filtração dos processos de P e I_D. Além disso, a definição de gatilho da eq. (339) dispensa dizer que o termo dentro de $E^Q(.)$ tem de ser positivo, como alguns especificam.

(c) Esse problema é complexo no formato geral, pois q e B não são independentes e o problema de dimensionamento ótimo do investimento leva a um complexo problema de otimização sob incerteza já que existem infinitas distribuições posteriores. Trabalhando com as expectativas condicionais de q e B (distribuições de revelações) se simplifica bastante o problema (usa-se apenas as médias dessas distribuições posteriores), conforme mostrado no cap. 3. As distribuições de revelações são totalmente definidas (médias, variâncias e tipos[347] de distribuição) pelo Teorema 1, que usa as informações conhecidas dadas pelas distribuições a priori de q e B e pela estrutura de informação flexível da eq. (340), a qual demanda requisitos mínimos de especificação para a informação revelada S_k. Além disso, com o fator de correção $\psi_{F \mid S_k}$ pode-se usar no cálculo do valor do ativo básico V os produtos $E[q \mid S_k]\ E[B \mid S_k]$, conforme desenvolvido no item 5.2.2 e aplicado na eq. (341). Dessa forma, o problema é bastante simplificado e pode-se calcular o valor esperado $E^Q(.)$ por simulação de Monte Carlo dos processos estocásticos neutros ao risco de P e de I_D, e das distribuições de revelações $R_q(S_k)$ e $R_B(S_k)$, conforme será mostrado a seguir, o que comprovará que o problema pode ser resolvido de uma maneira relativamente simples. □

A Proposição 9 ilustra a utilidade das distribuições de revelações desenvolvida no cap. 3. Além disso, permite que se assuma uma descrição simplificada para o sinal S_k, através de uma estrutura de informação flexível, definida pela eq. (63) do cap. 3, i. é, $\mathcal{I} = \{\eta^2(X \mid S), \bullet\}$. Essa estrutura de informação (eq. 340) usa as medidas de aprendizagem $\eta^2(q \mid S_k)$ e $\eta^2(B \mid S_k)$.

A Figura 75 mostra como o valor esperado da eq. (338) é calculado. Essa figura mostra duas amostras de caminho da simulação de Monte Carlo. Essa abordagem combina a simulação de processos neutro ao risco das incertezas de mercado ao longo de todo o intervalo de tempo [0, T][348] com a simulação das incertezas técnicas através da simulação das distribuições de revelação no instante t_k, ou seja, a combinação de incertezas ocorre na data de revelação da alternativa

[347] Se a distribuição demandar mais parâmetro(s) do que a média, a variância e a classe da distribuição (triangular, etc.), então o tipo inclui esse(s) parâmetro(s). Por ex., na distribuição triangular o adjetivo "simétrica". Para distribuições como a normal, lognormal e outras, a média e a variância são suficientes se a classe estiver especificada. A idéia é ser *similar* com o caso limite.

[348] Como a discretização é exata e o caminho entre t = 0 e t = t_k não é relevante nesse problema, se poderia começar a simular o caminho apenas a partir de t_k até T.

k, onde quase certamente mudarão as expectativas de q e B nas quais se baseia o cálculo de V e, portanto, da OR. A Figura 75 também mostra a curva de gatilho normalizada (em vermelho) considerando dois anos para a expiração dos direitos de desenvolvimento do campo e como dois desses caminhos são avaliados no modelo de OR.

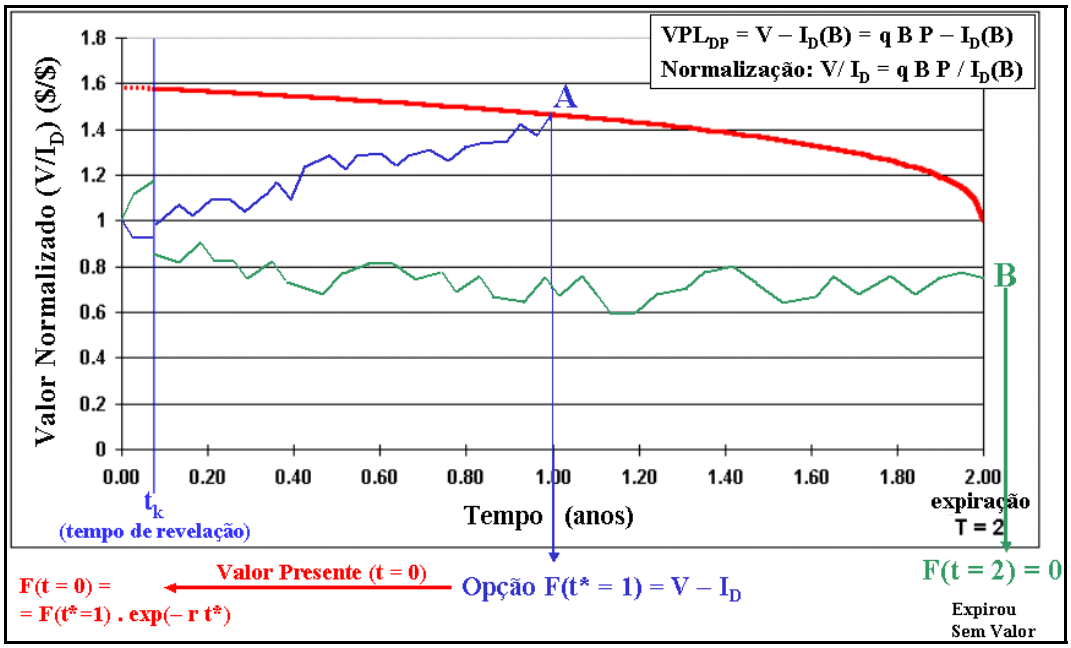

Figura 75 – Valoração duma Alternativa de Investimento em Informação

Na Figura 75, o valor normalizado começa (t = 0) perto de 1, ou seja, tem VPL perto de zero. O valor normalizado do projeto V/I_D evolui estocasticamente por causa da simulação das incertezas de mercado (P e I_D) e na primeira amostra de caminho (azul escuro) esse valor começa caindo. Na data t_k, o investimento em informação (que começou em t = 0) gera um sinal S_k, e assim são sorteados um cenário de E[q] e um de E[B] das suas distribuições de revelação para essa alternativa k. Essa revisão dos valores de q e B usados em V, causa (q.c.) um salto no valor normalizado V/I_D, que para esse caminho foi um pequeno salto para cima[349]. Após esse salto da distribuição de revelações, o valor normalizado (com as novas expectativas sobre q e B) continua a sua trajetória de oscilar continuamente ao longo do tempo devido aos processos estocásticos de P e I_D. Esse caminho (azul) atinge a curva de gatilhos no ponto A, no caso em t = 1 ano, que pela definição da eq. (339) é o tempo de parada ótima t* para esse caminho. Nesse ponto, a opção é otimamente exercida, obtendo o valor $V – I_D$ (em t = t*) e

[349] Lembrar que a distribuição de revelações é centrada nas expectativas correntes, i. é, sua média é o valor esperado anterior (da distribuição a priori).

esse valor é trazido em valor presente usando a taxa livre de risco r. Esse valor é armazenado, já que é um dos cenários do cálculo da expectativa E^Q.

A segunda amostra de caminho (verde), evolui de forma similar (com outros sorteios das distribuições envolvidas), mas sofrendo um salto para baixo em $t = t_k$ (revelação negativa sobre q e/ou B), e depois disso continua a sua trajetória, mas sem conseguir atingir a curva de gatilhos durante todo o período, de forma que a opção expira sem ser exercida (ponto B) e assim ela vale zero. O valor dessa opção para esse caminho é zero. Após n iterações (milhares) se soma todos os valores das opções dos n caminhos e divide-se pelo número de iterações n. Esse é o valor do termo $\text{Max}\{E^Q[. \mid .]\}$ da eq. (341). Multiplica-se pelo redutor $\psi_{F \mid S_k}$, a fim de corrigir o efeito da incerteza técnica no cálculo da OR. Em seguida subtrai-se o custo de adquirir essa informação, C_k, e assim obtém-se o valor de W_k para a alternativa k. Repete-se o mesmo procedimento para todas as alternativas e assim se obtém um conjunto de K + 1 valores de W_k. Conforme a eq. (337), escolhe-se a alternativa de investimento em informação que gera o maior valor desse conjunto.

Em resumo, basta conhecer as medidas $\eta^2(q \mid S_k)$ e $\eta^2(B \mid S_k)$ de cada alternativa e mais algumas premissas simples para obter as distribuições de revelações e resolver esse complexo problema. Serão vistos a seguir alguns exemplos numéricos para ilustrar melhor o modelo, assim como a questão do momento ótimo de adquirir informação.

5.2.4. Exemplo Numérico e Momento de Adquirir Informação

Os seguintes resultados são de interesse serem calculados no exemplo:

- VPL *sem* incerteza técnica: É o VPL calculado pela eq. (324), onde existe informação perfeita sobre q e B;
- Opção real *sem* incerteza técnica: é o valor tradicional de OR considerando só a incerteza de mercado e usando os valores verdadeiros (informação perfeita) sobre q e B, conforme discutido no cap. 2;
- VPL *com* incerteza técnica: é o VPL em que existe incerteza técnica em q e B, de forma que, para minimizar o erro técnico de dimensionamento, se usa os valores esperados de q e B. Como eles não são independentes, faz-se uma

simulação de Monte Carlo com as eqs. (327), (324) e (329), a depender do cenário simulado. Ele é menor que o VPL sem incerteza técnica;

- Opção real *com* incerteza técnica e *sem* informação: é um valor menor que o caso o valor tradicional OR sem incerteza técnica, e é obtida por simulação de Monte Carlo usando a eq. (330) para V, com I_D fixo dado pela eq. (59);
- Opção real *com* incerteza técnica e *com* informação S_k: Essa OR considera o custo e o benefício da informação da alternativa k. É obtida com as eqs. (341) e (339) da Proposição 9. Além de considerar o custo C_k da informação, considera que ela demanda um tempo de aprendizagem (ou de revelação) t_k.
- Valor dinâmico líquido da informação S_k: É a diferença entre o valor da OR com e sem o investimento em informação S_k, dado que existe incerteza técnica. Esse valor é o VOI (líquido) no contexto dinâmico de OR.

Embora o valor dinâmico líquido da informação seja um importante indicador, visto que ele é a diferença entre dois valores simulados, é preferível (menor erro) selecionar a melhor alternativa de investimento em informação através da eq. (337), como manda a Proposição 9, i. é, através do maior valor da OR com a informação (penúltimo item da lista acima).

Considere dois campos de petróleo (são dois exemplos), com duas alternativas de investimento em informação para cada caso. Qual é a melhor alternativa em cada caso? É melhor investir em informação do que não investir em informação (alternativa k = 0)?

Serão assumidos os seguintes dados de entrada para o processo estocástico (MGB) do preço do petróleo: r = 6% p.a.; δ = 6 % p.a.; e σ = 20 % p.a. Assuma que o preço inicial do petróleo é 20$/bbl. Considere por simplicidade que o investimento não segue um processo estocástico e é dado só pela eq. (59). Assuma que V é dado pelo modelo de negócios.

Considere primeiro o campo de petróleo 1. As *distribuições a priori* das incertezas técnicas sobre q (em %) e B (em milhões de barris) são modeladas com as seguintes distribuições triangulares (mínimo; mais provável; máximo) obtidas com ajuda de análises estatísticas geológicas e de reservatórios:

- B ~ Triang (300; 600; 900)
- q ~ Triang (8%; 15%; 22%)

Análises de fluxo de caixa com capacidade restringida, mostraram que o fator $\gamma^+ = 75\%$ e o fator $\gamma^- = 1$.

A Alternativa 1 (S_1) é a mais barata e consiste da perfuração de um poço *vertical*. O custo de aprendizagem é C_1 = US$ 10 MM e leva t_1 = 45 dias para obter a informação e revisar as expectativas sobre q e B. O poder de revelação dessa alternativa (percentagem de redução esperada de variância) é dado pelas medidas $\eta^2(q \mid S_1) = 40\%$ e $\eta^2(B \mid S_1) = 50\%$.

A Alternativa 2 (S_2) consiste de perfurar um poço *horizontal*. O custo de aprendizagem é C_2 = US$ 15 MM e leva t_2 = 60 dias para obter a informação e revisar as expectativas sobre q e B. O poder de revelação dessa alternativa é dado pelas medidas $\eta^2(q \mid S_2) = 60\%$ e $\eta^2(B \mid S_2) = 75\%$.

O custo de desenvolvimento é função de E[B] e, para essa faixa de lâmina d'água, uma regressão mostrou que é dada por: I_D (MM$) = 310 + (2,1 x E[B]).

Os resultados[350] do Campo de Petróleo 1 são dados na Tabela 15[351].

Tabela 15 – Opções de Aprendizagem: Resultados para o Campo 1

Alternativas	S_1	**S_2**
(1) VPL sem incerteza técnica	230	230
(2) OR sem incerteza técnica	302,1	302,1
(3) VPL com incerteza técnica	178,5	178,3
(4) OR com incerteza técnica mas sem informação	264,2	263,7
(5) OR com incerteza técnica e com informação (W_k)	285,2	298,8
(6) Valor dinâmico líquido da informação [(5) – (4)]	21,0	35,1

Existem alguns valores na Tabela 15 (entre as colunas das alternativas S_1 e S_2) que diferem apenas pelo erro da simulação (linhas 3 e 4). As duas últimas linhas são valores líquidos do custo de aquisição de informação. Os valores positivos da linha 6 mostram que é melhor investir em informação do que a alternativa k = 0 de não investir em informação. Olhando a linha 5 (ou a 6), se

[350] Esses e outros casos podem ser resolvidos pela planilha *timing_inv_inf-hqr.xls* que está disponível em http://www.puc-rio.br/marco.ind/xls/timing_inv_inf-hqr.xls e no CD-Rom.

[351] Foram usadas 10.000 iterações para a Alternativa 1 e 100.000 para a Alternativa 2, usando um algoritmo de simulação *híbrido de quase-Monte Carlo* (é mais eficiente que o Monte Carlo tradicional) desenvolvido pelo autor, ver http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi_mc.html. Os módulos dos erros estimados são menores que 0,3% para ambas as alternativas. O tempo computacional usando um processador Pentium III, 1 GHz, foi de menos de 2 minutos para 10.000 iterações e cerca de 16 minutos para 100.000 iterations, com uma planilha Excel 97.

conclui que a alternativa 2 (sinal S_2) é melhor mesmo sendo 50% mais cara que a alternativa 1. Em caso de diferenças pequenas entre as alternativas, é recomendável aumentar o número de simulações.

Agora considere o Campo de Petróleo 2. Esse estudo de caso foi apresentado em Souza Jr. & Dias & Maciel (2002). O investimento no desenvolvimento é o mesmo do Campo 1, i. é, I_D (MM$) = 310 + (2,1 x E[B]). As *distribuições a priori* das incertezas técnicas sobre q (em %) e B (em milhões de barris) são modeladas também com distribuições triangulares (mínimo; mais provável; máximo) dadas por:

- B ~ Triang (145; 320; 560)
- q ~ Triang (6%; 15%; 25%)

Análises de fluxo de caixa com capacidade restringida, mostraram que o fator $\gamma^+ = 65\%$ e o fator $\gamma^- = 1$.

A Alternativa 1 (S_1) é a mais barata e consiste da perfuração de um poço vertical, mas *sem realizar um teste de produção*. O custo de aprendizagem é C_1 = US$ 6 MM e leva t_1 = 35 dias para obter a informação e revisar as expectativas sobre q e B. O poder de revelação dessa alternativa (percentagem de redução esperada de variância) é dado pelas medidas $\eta^2(q \mid S_k) = 60\%$ e $\eta^2(B \mid S_k) = 75\%$.

A Alternativa 2 (S_2) consiste de perfurar um poço vertical, mas dessa vez *realizando um teste de produção*. O custo de aprendizagem é C_2 = US$ 12 MM$ e leva t_2 = 65 dias para revelar a nova informação sobre q e B. O poder de revelação de S_2 é dado pelas medidas $\eta^2(q \mid S_k) = 70\%$ e $\eta^2(B \mid S_k) = 80\%$.

Os resultados para o Campo de Petróleo 2 são dados na Tabela 16.

Tabela 16 – Opções de Aprendizagem: Resultados para o Campo 2

Alternativas	S_1	S_2
(1) VPL sem incerteza técnica	20,3	20,3
(2) OR sem incerteza técnica	116,2	116,2
(3) VPL com incerteza técnica	– 32,5	– 33,1
(4) OR com incerteza técnica mas sem informação	87,8	86,6
(5) OR com incerteza técnica e com informação (W_k)	128,3	126,6
(6) Valor dinâmico líquido da informação [(5) – (4)]	40,5	39,9

No caso do Campo de Petróleo 2, a alternativa mais barata é a melhor (linha 5). Entretanto, a diferença é muito pequena, de forma que é recomendado fazer outra simulação com maior número de iterações para confirmar essa diferença.

Esses exemplos numéricos mostram as duas fontes básicas de valor para a aprendizagem através de investimento em informação para reduzir a incerteza. Primeiro é a variância da distribuição de revelações que aumenta o valor da OR (ver cap. 3). Lembrar que quanto maior a redução esperada da incerteza (variância), maior é a variância da distribuição de revelações. Segundo, a incerteza técnica reduz o valor presente do fluxo de caixa esperado (ver discussão do item 5.2.2) devido à restrição da capacidade para os eventuais cenários positivos, causando uma assimetria que não permite tomar vantagem plenamente do lado positivo ("upside") da incerteza técnica. Esse efeito é levado em conta no fator de penalização γ^+ na simulação da função VPL e da OR. Essa penalização é menos severa quanto menor for a incerteza residual esperada.

Simulações adicionais mostraram que o efeito da volatilidade dos preços do petróleo no *valor da informação* não é monotônico. Essa análise e outras sensibilidades são deixadas para futuros trabalhos.

Uma discussão interessante é a questão do momento ótimo de aquisição de informação. Esse foi o tema do artigo de Murto (2004), comentado antes de forma crítica no item 3.1.3.1. Investimento em informação é caro, por ex., o custo de um poço marítimo varia de US$ 4 MM (poço "slim") a US$ 20 MM (e talvez bem mais se fosse poço pioneiro) e revela só informação parcial sobre o volume e a qualidade da reserva. Entretanto, o custo de investimento para o desenvolvimento (I_D) de um campo de petróleo é muito maior que o custo de adquirir informação adicional: o desenvolvimento típico de um campo marítimo requer mais de US$ 1 bilhão (o campo de Marlim demandou mais de US$ 4 bilhões). Logo, o custo de desenvolvimento é tipicamente cerca de 100 vezes o custo de aprendizagem com um poço adicional de delimitação!

Logo, para o caso de petróleo, o tópico de *momento ótimo de aprendizagem* não é tão relevante quanto o tópico de *momento ótimo de desenvolvimento*. A diferença de importância é muito grande pelos valores envolvidos que estão sendo postergados. O adiamento do investimento em informação tem o benefício de adiar o custo C_k, mas tem a desvantagem de adiar o exercício de possíveis OR de

desenvolvimento que estão "deep-in-the-money" (para os cenários de revelação de boas notícias).

Para ter uma idéia da questão da relevância do momento ótimo de aprendizagem, considere os estudos de casos apresentados acima, mas considerando também os adiamentos do investimento em informação de 6 meses e de 1 ano. O valor presente do investimento em informação é reduzido pelo fator de desconto[352], e o exercício da OR de desenvolvimento só é permitida após essa postergação (6 meses ou 1 ano) e mais o tempo de aprendizagem t_k. Os resultados obtidos para o Campo de Petróleo 1 são mostrados na Tabela 17.

Tabela 17 – Análise de Momento Ótimo de Aprendizagem para o Campo 1

Alternativas	S_1	$\mathbf{S_2}$
OR sem informação (sem aprendizagem)	267,9 (a)	263,3 (b)
OR com aprendizagem imediata	298,4 (a)	307,0 (b)
OR com aprendizagem adiada de 6 meses	293,9 (c)	305,9 (d)
OR com aprendizagem adiada de 1 ano	291,2 (e)	299,7 (f)

Ordem dos erros da simulação[353]: (a) 0,26%; (b) 0,29%; (c) 0,03%; (d) 0,16%; (e) 0,36%; e (f) 0,43%.

Assim, a aprendizagem imediata é melhor para a alternativa 1 e um pouco melhor para a alternativa 2. Lembrar que a alternativa 2 é mais cara que a alternativa 1. A opção de adiar o aprendizagem pode ser de alguma relevância para os casos de alto custo de aprendizagem, baixo poder de revelação, baixo fator de penalização (planta com flexibilidade de expandir a produção, com γ^+ perto de 1) e OR "out-of-money" (VPL < 0).

A formulação do problema de momento ótimo de aprendizagem é dada pela equação seguinte, similar a Murto (2004, eq. 2)[354], mas considerando o problema de expiração finita da OR, de K + 1 alternativas (sendo K alternativas de investimento em informação) e que o aprendizado leva um intervalo de tempo t_k (t_k não é uma data, é um intervalo de tempo). Em relação à eq. (338), aparece

[352] O fator de desconto é e^{-rt}. Para r = 6%, os fatores de desconto são 0,970 e 0,942, respectivamente para os casos de 6 meses e 1 ano.

[353] Esses valores são para 10.000 simulações, exceto itens (b) e (d), nos quais foram usadas 100.000 simulations devido aos valores próximos. O erro é só uma estimativa, pois compara o valor *tradicional* de OR que resulta da simulação de Monte Carlo com o resultado "teórico" da aproximação analítica eficiente (opção americana de compra) de Bjerksund & Stensland (ver Haug, 1998, p.26-29).

[354] Mas aqui se corrige uma imprecisão de Murto (onde está τ', o correto é $\tau' - \tau$).

também o instante ótimo t** (que tem de ser menor que t*) para investir em informação de forma a maximizar W_k.

$$\mathbf{W_k} = \max_{t^{**} \in [0,\, T-t_k]} \mathbf{E}\left[e^{-r\,t^{**}} \left[\mathbf{E}\left[\max_{t^{*} \in [t^{**}+t_k,\, T]} \left\{ \mathbf{E^Q}\left[e^{-r\,(t^{*}-t^{**})} \left(\tilde{q}\,\tilde{B}\,P(t^{*}) - I_D(\tilde{B}, t^{*})\right)\right]\right\} | \mathbf{S_k} \right] - \mathbf{C_k} \right]\right] \quad \textbf{(342)}$$

Em palavras, para a alternativa k se escolhe o momento ótimo t** para investir em informação que maximiza o valor esperado externo, sendo que essa data pode ser qualquer uma entre t = 0 e t = T – t_k , de revelar a informação, que toma o tempo t_k, e a fim de ter tempo de eventualmente usá-la para desenvolver o campo. Como C_k está em valor presente na data de início de investimento em informação, o fator de desconto exp(– r t**) atualiza o valor obtido líquido de C_k para a data t = 0. Note que investindo em informação em t**, a escolha da data ótima de desenvolvimento fica limitado para o intervalo [t** + t_k, T]. Em caso de exercício da OR de desenvolvimento, o VPL obtido é trazido dessa data de exercício t* até a data t** com o termo exp(– r (t* – t**)), já que depois esse termo irá ser trazido para valor presente em t = 0 pelo outro fator de desconto mais externo. Esse é um problema bastante complexo[355]. O exemplo anterior apenas testou três valores para t** (0, 6 meses e 1 ano), que no caso mostraram que assumir t** = 0 pode ser bastante razoável devido aos valores relativos de investimentos do caso petróleo.

5.3. Jogo Não-Cooperativo de Opções Exploratórias: Guerra de Atrito

Nesse item será mostrada uma aplicação de jogos de OR para o caso exploratório, em que duas companhias de petróleo jogam o jogo não-cooperativo de guerra de atrito[356]. Como foi visto no item 4.1.2, a guerra de atrito é um jogo de momento ótimo (ou parada ótima) de externalidade positiva, em que as estratégias são *tempos de parada*, onde na verdade ocorrem as *ações* de fazer investimento. No contexto de jogos de OR, as ações são {exercer; não-exercer} uma OR. A maior parte da notação e dos conceitos, segue o tópico do cap. 4 sobre guerra de

[355] No caso de Murto (2004), as simplificações – não adequadas para a realidade do caso de petróleo, forçaram uma solução analítica. Ver item 3.1.3.1.

[356] Esse tópico é baseado em Dias & Teixeira (2004).

atrito (item 4.1.2), que deve ser consultado para casos de dúvidas. Também será usado nessa aplicação o cap. 3 (item 3.4), sobre modelagem de incerteza técnica exploratória com processos de revelação de Bernoulli.

Duas companhias de petróleo têm prospectos exploratórios vizinhos correlacionados. A incerteza técnica primária é sobre a existência de petróleo nos prospectos, expressa pelo fator de chance (FC), que é uma v.a. de Bernoulli. O preço do petróleo (de longo prazo) é outra variável chave e segue um MGB. Existe um tempo legal T para descobrir e se comprometer com um imediato plano de investimento para desenvolver o eventual campo descoberto. Ou seja, a OR tem maturidade finita.

A perfuração de um poço pioneiro num prospecto, a um custo I_w, comum a ambos os jogadores, gera uma informação relevante para o prospecto da *outra* firma. Essa revelação de informação é parcialmente pública gerando uma *externalidade positiva*, o que incentiva ambas as firmas a adiarem a perfuração de seus prospectos para tentar obter informação grátis. Para simplificar e poder ilustrar de forma clara os pontos de maior interesse, será assumida que a perfuração do poço pioneiro é instantânea. Essa premissa é usual na literatura por razões didáticas e conveniência de cálculo, como discutido no cap. 4.

O jogo é resolvido em retro-indução ("backwards"), como é padrão em jogos de parada ótima e em OR. Para isso é necessário saber os resultados ("payoffs") para as estratégias ótimas no subjogo terminal jogado na data t = T. Será usado o *método diferencial* (ver item 4.2.1.2) para resolver o jogo de OR e a condição terminal será colocada como condição de contorno. Considere o caso mais geral que, num instante $t \in [0, T]$, o seguidor (F) já conseguiu a informação adicional revelada pela perfuração do prospecto do líder (L). O seguidor irá revisar as suas expectativas sobre o fator de chance exploratório, a fim de calcular o seu VME (eq. 3), em caso de exercício. No contexto de OR, o seguidor irá verificar se sua opção exploratória de perfurar o seu prospecto está "deep-in-the-money" ou não. Assim, como nos exemplos dos itens 4.2.2 e 4.2.3, o problema do seguidor é um problema puro de OR pois a interação estratégica termina com o primeiro exercício da OR no caso de exploração de petróleo sem considerar outros ativos do portfólio de exploração (o jogo aqui é focado em só dois prospectos).

Considere que o seguidor perfura o poço pioneiro. Em caso de sucesso (confirmando a existência de reserva de óleo), o seguidor tem a *opção de*

desenvolver o campo[357]. Assim, existe uma OR composta: a opção de perfurar o poço dá, em caso de sucesso, a OR de desenvolver o campo. Uma *condição necessária* para a opção exploratória ser exercida é que, em caso de sucesso, a opção de desenvolvimento esteja madura para o imediato exercício ("deep-in-the-money"). É sub-ótimo gastar mais cedo I_w e, no melhor cenário (sucesso), manter o projeto parado esperando mais algum tempo[358] (ver uma situação similar em Dixit & Pindyck, 1994, p.190). Entretanto, a OR de desenvolvimento pode estar madura para o exercício ótimo, mas não a OR exploratória.

O exercício da OR de desenvolvimento é feito pagando o investimento no desenvolvimento I_D para receber o valor da reserva desenvolvida V, i. é, a eq. (1) $VPL = V - I_D$ que aqui é o resultado do exercício dessa OR de desenvolvimento. Como antes, o valor dessa reserva é a função V(P(t), q, B), que aqui será dada pelo *modelo de negócios*, eq. (23).

Para não confundir com a notação de seguidor, denote por R(P, t) o valor da opção real de desenvolvimento do campo. As variáveis de estado aqui são o preço (de longo prazo) do petróleo P (que segue um MGB) e o tempo. Por simplicidade não se considera a incerteza técnica nos parâmetros q e B, mas poderia ser feito com ajuda do modelo desenvolvido no item 5.2. Assumindo mercado completo para usar o método dos ativos contingentes (nesse caso é útil a seção 1D do cap. 6 de Dixit & Pindyck, 1994), se obtém a seguinte EDP para a opção de desenvolvimento R(P, t):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r-\delta) P \frac{\partial R}{\partial P} - r R + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \qquad (343)$$

Onde os parâmetros do processo estocástico neutro ao risco (σ, δ, r) do preço do petróleo são os discutidos anteriormente (ver cap. 2). As 4 condições de contorno dessa EDP, eq. (343), no problema de maximização de R(P, t), são:

$$R(0, t) = 0 \ , \qquad \text{se } P = 0 \qquad (344)$$

$$R(P, T) = \max(q\, B\, P - I_D, 0) \ , \qquad \text{se } t = T \qquad (345)$$

$$R(P^*, t) = q\, B\, P^* - I_D \ , \qquad \text{se } P = P^* \qquad (346)$$

---

[357] Por simplicidade, não está sendo considerada a fase de delimitação. Para uma incorporação simples dessa fase no modelo de jogos de OR, ver Dias (1997). Aqui se pode imaginar que o custo e o benefício dessa fase já está sendo incluído no VPL de desenvolvimento.

[358] Outra forma de ver isso: o *ativo básico* é outra opção, mas esse ativo básico-opção não paga dividendos (δ = 0). Uma conhecida propriedade de opções americanas diz que nunca é ótimo o exercício *antecipado* dessa opção. Mas se o ativo básico-opção tornar-se "deep-in-the-money", o exercício antecipado *pode* ser ótimo, pois o ativo básico passa a gerar fluxo de caixa (δ > 0).

$$\frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q\,B\ , \qquad \text{se } P = P^* \qquad \textbf{(347)}$$

Essas condições são padrões na literatura de OR[359]. Resolve-se esse problema por métodos numéricos tais como diferenças finitas ou aproximações analíticas, obtendo o valor da OR, R(P, t), e a regra de decisão ótima dada pela curva de gatilho P*(t). Apesar dos exercícios em circunstâncias diferentes, a metodologia apresentada para a OR de desenvolvimento é válida tanto para o líder como para o seguidor. Entretanto, nos casos de assimetria nos parâmetros da reserva esperada (q, B, I_D), se usará subscritos adicionais (i ou j) quando conveniente para distinguir os valores e OR dos jogadores.

Note que se obtém a OR de desenvolvimento somente se a OR exploratória tiver sido exercida antes e tiver obtido sucesso (descobrindo reservas não desenvolvidas, a opção real R). Seja o valor da opção real exploratória E(P, t) de perfurar o poço pioneiro ("wildcat") uma função das variáveis de estado preço do petróleo (P) e tempo (t). Outra vez usando o método de ativos contingentes, se obtém uma EDP similar para a opção exploratória E(P, t).

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial E}{\partial P} - r E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{(348)}$$

Os parâmetros do processo estocástico neutro ao risco (σ, δ, r) do preço do petróleo são como antes. As 4 condições de contorno dessa EDP dão padrões:

$$E(0, t) = 0\ , \qquad \text{se } P = 0 \qquad \textbf{(349)}$$

$$E(P, T) = \max[-I_W + FC\,(q\,B\,P - I_D), 0]\ , \qquad \text{se } t = T \qquad \textbf{(350)}$$

$$E(P^{**}, t) = -I_W + FC\,(q\,B\,P^{**} - I_D)\ , \qquad \text{se } P = P^{**} \qquad \textbf{(351)}$$

$$\frac{\partial E(P^{**}, t)}{\partial P} = FC\,q\,B\ , \qquad \text{se } P = P^{**} \qquad \textbf{(352)}$$

Como antes, resolve-se esse problema por métodos numéricos tais como diferenças finitas ou aproximações analíticas, obtendo a superfície de valores da OR, E(P, t), e a curva de gatilho P**(t) para essa opção. Por enquanto, está sendo considerado apenas o problema de OR, não se modelou a interação estratégica. Se o preço do petróleo está abaixo do gatilho P**, a firma irá esperar otimamente e isso independe da possibilidade de revelação de informação. Ou seja, se P < P**, a firma espera independentemente do jogo guerra de atrito. Assim, esse jogo

[359] São, respectivamente, a condição trivial para P = 0, a condição terminal (expiração legal) em t = T, a condição de continuidade em P* e a condição de contato suave em P*.

(interação estratégica) realmente *começa* quando pelo menos um dos prospectos está maduro para o exercício. Somente nesse caso aparece um custo de lutar (esperar), que é o custo de adiar o exercício de uma OR que está "deep-in-the-money". Logo, esse argumento indica que o gatilho do líder P_L não pode ser menor que o gatilho da opção "pura" (sem interação estratégica) P** e em geral pode ser maior, i.é:

$$\mathbf{P_L \geq P^{**}} \qquad \mathbf{(353)}$$

Portanto, em contraste com o jogo de preempção, a guerra de atrito aumenta o valor da espera. Ou seja, o *prêmio da espera* no contexto estratégico é maior que o de OR tradicional, que por sua vez é maior que nos jogos de preempção.

O valor da opção exploratória depende do parâmetro técnico chave que é o fator de chance FC. Será usada uma notação similar ao do item 3.4 (e mesmo do exemplo básico do cap. 2, Figura 3). Para cada prospecto existem três possibilidades para o conjunto de informação no qual os especialistas se baseiam para estimar FC: (a) sem (ou antes) da revelação de informação do prospecto vizinho, FC; (b) com revelação de informação positiva FC^+ (o vizinho descobriu petróleo); e (c) com revelação de informação negativa, FC^- (o vizinho perfurou e achou um *poço seco*). Naturalmente, a EDP, eq. (348) e suas condições de contorno (eqs. 349, 350, 351 e 352) se aplicam para todos os três casos, apenas o valor do fator de chance usado FC é que muda. O caso (a) é usado para a valoração do líder L(P, t), enquanto que os casos (b) e (c) são usados na valoração do seguidor (o jogador *informado*) F(P, t).

Assim, para valorar essas opções, é necessário as relações entre as variáveis FC, FC^+, e FC^-, que são v.a. de Bernoulli que foram estudadas em detalhes no item 3.4. Essas relações são dadas pelas eqs. (198) e (199). Além disso, no exemplo numérico será assumido que os fatores de chance dos jogadores i e j serem intercambiáveis, o que faz simplificar as relações entre FC, FC^+, e FC^-, uma vez que se pode usar equações ainda mais simples, i. é, as eqs. (213) e (214), além de evitar complicações, já que não é necessário se preocupar com os limites de Fréchet-Hoeffding para a consistência da distribuição bivariada de Bernoulli, desde que se use a medida de aprendizagem $\eta^2(X \mid S)$, ver Proposição 7. No contexto estratégico, o sinal S_j é o próprio FC_j. Assim, a estrutura de informação

flexível proposta para esse problema, para o jogador i que recebe um sinal (resultado da perfuração) FC_j do jogador j, é:

$$\mathcal{I}_i = \{\eta^2(FC_i \mid FC_j), \text{v.a. intercambiáveis}\} \quad (354)$$

Que inclui a assertiva "v.a. intercambiáveis" o que significa, por ex., que os fatores de chance iniciais dos dois jogadores têm as mesmas probabilidades de sucesso. Essa estrutura de informação, mais as probabilidades a priori, i. é, os fatores de chances iniciais (que são iguais), define totalmente o problema, permitindo resolver o problema de valor da informação, i. é, o problema da revisão de probabilidades com o exercício das OR exploratórias. A medida de aprendizagem $\eta^2(FC_i \mid FC_j)$, que aqui (v.a. de Bernoulli) é simétrica, dá o grau de correlação entre os prospectos numa escala de 0 a 1 e é interpretada como a redução percentual esperada da incerteza (cap. 3).

Na notação estratégica, as eqs. (213) e (214) para a revisão dos fatores de chance intercambiáveis, ficam sendo:

$$FC_i^+ = FC_i + (1 - FC_i)\,\eta(FC_i \mid FC_j) \quad (355)$$

$$FC_i^- = FC_i - FC_i\,\eta(FC_i \mid FC_j) \quad (356)$$

Em que se está usando a *raiz positiva* de $\eta^2(FC_i \mid FC_j)$ para obter uma equação linear. O valor da firma i como líder $L_i(P, t)$, i. é, o valor da firma i quando exercendo a opção *exploratória* é:

$$L_i(P, t) = -I_W + FC_i \,.\, R_i(P, t) \quad (357)$$

Em palavras, o líder gasta o investimento em perfuração I_W e obtém a opção exploratória $R_i(P, t)$ com probabilidade FC_i (e obtém zero de outro modo). A OR de desenvolvimento $R_i(P, t)$ é calculada com a EDP (eq. 343) e suas condições de contorno (eqs. 344, 345, 346 e 347).

O valor de seguidor $F_i(P, t)$ para a firma informada ("free-rider") i, considera o valor *esperado* do ganho da revelação de informação com o exercício da opção da firma j (líder). Para a firma i, uma revelação de informação positiva ocorre com probabilidade FC_j e uma revelação de informação negativa ocorre com probabilidade $(1 - FC_j)$. Assim, o valor do seguidor (informado), para a firma i como "free-rider" é:

$$F_i(P, t) = FC_j \,.\, E_i(P, t; FC_i^+) + (1 - FC_j) \,.\, E_i(P, t; FC_i^-) \quad (358)$$

Onde $E(P, t; FC_i^+)$ e $E(P, t; FC_i^-)$ são os valores das OR exploratórias calculados com os parâmetros FC_i^+ e FC_i^-, respectivamente. Esses parâmetros são

calculados com as eqs. (355) e (356) e as opções com a EDP (eq. 348) e suas condições de contorno (eqs. 349, 350, 351 e 352).

Para uma guerra de atrito simétrica, o (informado) seguidor irá exercer a sua opção em caso de revelação positiva (i.é, sua opção E foi melhorada com um "salto" no parâmetro FC_i^+) e deve esperar em caso de revelação negativa. Isso segue porque o líder exerce otimamente a sua opção exploratória somente se ela está madura ("deep-in-the-money"), condição necessária vista antes. Se a opção estiver madura antes da revelação – usando FC_i, ela também estará com FC_i^+, pois $FC_i^+ > FC_i$ e a OR exploratória é uma função monotônica crescente do parâmetro FC. Se ela não estava madura antes, então não havia interação estratégica antes.

Agora imagine um valor inicial (t = 0) para o preço P muito alto. Para esse P as OR exploratórias podem estar tão atrativas (mais que maduras) para ambos os jogadores, que o exercício simultâneo pode ser ótimo para ambos os jogadores. Isso ocorre quando os valores do líder e do seguidor são iguais, desaparecendo o incentivo para ser seguidor (guerra de atrito com prêmio igual a zero). No caso de jogadores simétricos, existe um valor de gatilho para P a partir do qual ambos os jogadores têm de jogar otimamente a estratégia de exercício simultâneo, renunciando ao prêmio de revelação de informação. Nesse caso de jogo simétrico, se pode ter um único gatilho de exercício simultâneo P_S, i. é, o menor valor de P no qual L(P, t) = F(P, t). Na guerra de atrito *assimétrica* se manterá essa notação, mas com o significado que P_{Si} e P_{Sj} são os gatilhos acima dos quais a interação estratégica não é mais relevante para as firmas i e j, respectivamente. Por simplicidade, considere inicialmente o caso do jogo simétrico. Métodos numéricos simples, resolvem a equação F(P, t) = L(P, t) obtendo P_S. Como aqui não estará mais sendo usada a notação S para sinal, denote, como nos itens 4.2 e 4.3, o valor do exercício simultâneo pela firma i por $S_i(P, t)$ (= $L_i(P, t)$). Formalmente[360], o gatilho de exercício simultâneo P_S é dado por:

$$\mathbf{P_S(t) = \inf \{ P(t) > 0 \mid L(P, t) = F(P, t), t \in [0, T] \}} \qquad \mathbf{(359)}$$

Com a convenção padrão de que o ínfimo de um conjunto vazio é $+\infty$. Uma situação em que o exercício simultâneo é claramente ótimo é quando o preço é tão alto que mesmo em caso de revelação negativa o valor da opção $E_i(P, t; CF_i^-)$ está

[360] Essa definição é mais adequada do que a alternativa de estabelecer P_S com uma condição de contorno *adicional* (continuidade ou contato suave) para a EDP (eq. 348), pois P_S pode ser ∞ para os casos extremos de intensidade de aprendizagem, como será visto abaixo.

maduro para o exercício imediato. Nesse caso a revelação de informação não muda o exercício ótimo da OR, ou seja, a informação é irrelevante para propósitos pragmáticos de exercício da opção, que vai ser exercida em todos os casos.

É possível a situação no qual $P_S = \infty$ para qualquer $t < T$? A resposta é sim, mas para o caso de revelação total (informação perfeita ou correlação perfeita entre os prospectos). Nesse caso $\eta^2(FC_i \mid FC_j) = 100\%$, um caso extremo de revelação de informação. Nesse caso, $FC_i^+ = 1$ e $FC_i^- = 0$ de forma que a revelação de informação é valiosa para *qualquer* valor finito de P, pois mesmo a possibilidade de descobrir um campo de petróleo gigante, o produto de um valor alto, mas finito, por zero é zero, e portanto $F(P) > L(P)$ para qualquer valor finito de P (ver eqs. 357 e 358, e note que E(.) é estritamente crescente em FC). No caso de revelação total, a aprendizagem sempre é valiosa se o custo de aprendizagem é zero como no caso de "free-rider".

Ilustrando os conceitos e equações apresentadas, considere o seguinte exemplo numérico[361] para a guerra de atrito simétrica, com os parâmetros:

- Parâmetros do processo estocástico (MGB): $r = \delta = 5\%$ p.a.; $\sigma = 15\%$ p.a.; $P(t = 0) = 20$ \$/bbl;
- Parâmetros dos prospectos[362] (valores simétricos, i. é, i = j): FC = 20%; B = 300 MM bbl; $q = 15\% \times \exp(-2\,\delta)$; $I_w =$ 30 MM \$; I_D (MM\$) = $[300 + (2\,B)] \times \exp(-2\,r)$
- Outros parâmetros: T = 2 anos; $\eta^2(FC_i \mid FC_j) = \eta^2(FC_j \mid FC_i) = 10\%$[363].

Com esses valores, a *opção de desenvolvimento* (dado o sucesso exploratório) torna-se "deep-in-the-money" somente quando o preço do petróleo sobe para P* = 26,08 \$/bbl, enquanto que a *opção exploratória* torna-se "deep-in-the-money" somente quando o preço do petróleo sobe para P** = 30,89 \$/bbl. Logo, para preços do petróleo abaixo de 30,89 \$/bbl, a estratégia de esperar é ótima para ambos os jogadores não por causa do jogo (da revelação de informação), mas por causa da teoria das OR que diz que a espera é melhor

[361] Esse exemplo pode ser analisado com a planilha war_attrition.xls do CD-Rom.

[362] Os termos $\exp(-2\,\delta)$ e $\exp(-2\,r)$ que aparecem respectivamente nos parâmetros q e I_D são fatores de desconto: depois de uma descoberta, está sendo considerado que a fase de delimitação e o estudo de viabilidade levarão cerca de dois anos. Somente depois é que a OR será exercida. Esses fatores de desconto apenas trazem os valores dos parâmetros de entrada usados da data de exercício da OR de desenvolvimento para a data de exercício da OR exploratória. A alternativa seria já fornecer os dados numéricos atualizados para a data de exercício de E(.).

[363] Logo, as raízes positivas são: $\eta(FC_i \mid FC_j) = \eta(FC_j \mid FC_i) = 0{,}3162$.

quando a opção exploratória não está madura para o exercício ótimo, independentemente da existência do prêmio do jogo guerra de atrito.

A Figura 76 mostra as curvas do líder e do seguidor assim como os gatilhos para esse exemplo numérico. Na parte de baixo da Figura 76 é mostrado a forma estratégica para um subjogo desse jogo de OR, quando a variável de estado é igual a P = 31 US$/bbl e t = 0 (faltando T = 2 anos para a expiração). Essa figura foi inspirada e adaptada de Smit & Trigeorgis (2004).

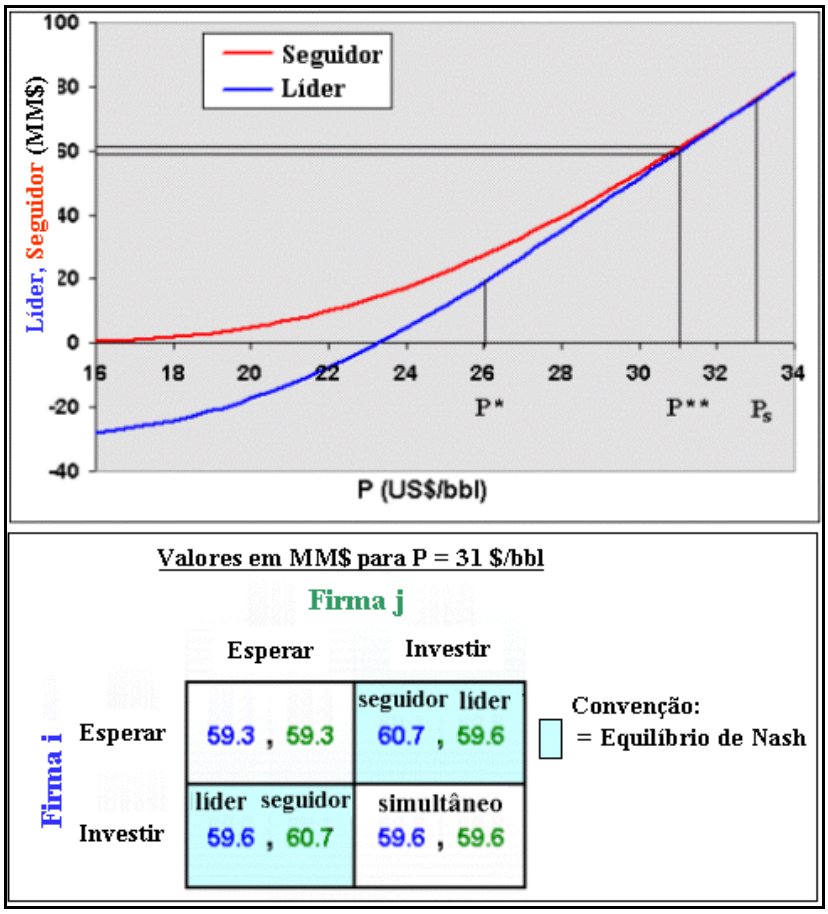

Figura 76 – Líder e Seguidor na Guerra de Atrito Exploratória Simétrica

A Figura 76 facilita a discussão de pontos importante do jogo guerra de atrito. Primeiro, as curvas tanto do líder como do seguidor são convexas na variável estocástica P. Lembrar que no jogo de preempção (itens 4.2.2 e 4.2.3) a curva do líder era côncava (ex.: Figura 60), pois lá um aumento da demanda gerava efeitos opostos no valor do líder: aumentava o lucro de curto prazo, mas aumentava a chance do seguidor exercer a sua opção, o que diminuía o valor do líder. Em contraste, aqui o exercício do seguidor não afeta o valor do líder, de forma que a curva do líder tem o formato convexo padrão de opções. Isso porque, como mostrado na eq. (357), o valor do líder é uma opção (de desenvolvimento)

multiplicada por uma constante (FC) menos uma constante (I_w). Logo, é apenas uma curva convexa padrão de opções com uma translação para baixo de I_w. Essa curva do líder somente torna-se linear em P depois de P* = 26,08 $/bbl, quando o componente de opção R(P, t) torna-se "deep-in-the-money" e vale a equação linear do VPL com P. Em contraste, a tradicional opção *exploratória* (não mostrada na Figura 76) somente torna-se madura para o imediato exercício (e linear) depois de P** = 30,89 US$/bbl.

A curva do seguidor, a qual é função do conjunto de resultados possíveis do exercício do líder (cenários de revelação de informação), é também convexa pois é apenas uma combinação convexa (linear) de duas funções convexas (opções padrões com diferentes parâmetros), ver eq. (358).

A Figura 76 também mostra a forma estratégica para o jogo no estado P(t) = 31 $/bbl e com dois anos antes da expiração da opção, a fim de discutir os aspectos de equilíbrio em estratégias puras. Nesse estado P e nesse subjogo (t) se tem dois equilíbrios de Nash (EN) em estratégias puras, (F_i, L_j) e (L_i, F_j), como no jogo do medroso analisado no cap. 4 (item 4.1.2.1 e Figura 54). Em termos dinâmicos, a retro-indução mostra que se um jogador está considerando se tornar líder, é sempre melhor ser líder no primeiro instante em que o preço do óleo atinge P**, do que após esse instante, pois existe um *custo de lutar* ("fighting cost") em adiar uma opção exploratória que está "deep-in-the-money"[364]. O equilíbrio perfeito de Markov (EPM) em estratégias puras para o líder é escolher o tempo de parada (ou estratégia de gatilho) t_L dado por:

$$\mathbf{t_L = inf \{ t \mid P(t) \geq P^{**}(t) \}} \qquad \mathbf{(360)}$$

Analogamente, a estratégia pura do seguidor é escolher um $t_F > t_L$ no primeiro instante em que a opção exploratória *com a informação revelada*, torna-se madura para o exercício ótimo imediato. Denote o gatilho da opção exploratória *após* a revelação de informação por P_F. O tempo de parada t_F irá ocorrer imediatamente após a revelação de informação em caso de revelação positiva e mais tarde (ou nunca) em caso de revelação negativa.

[364] Na parte inferior da Figura 76, os valores da estratégia (esperar, esperar) consideram o custo de adiar o exercício da opção por um mês com a taxa livre de risco. Entretanto, o raciocínio é válido para qualquer custo de espera estritamente positivo, de forma que um método mais rigoroso para estimar o custo de adiar o exercício de uma opção madura, não é necessário nesse contexto.

$$t_F = \inf \{ t \mid P(t) \geq P_F(t) \} \quad (361)$$

A Figura 77 mostra uma ampliação ("zoom") de uma região da Figura 76, a fim de destacar o intervalo [P**, P_S), o conjunto de estados no qual o jogo guerra de atrito é relevante[365].

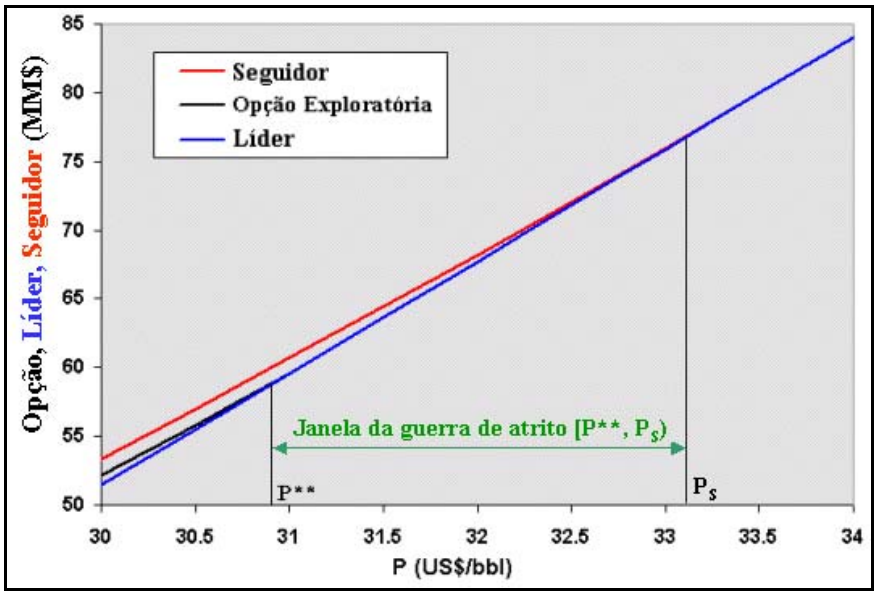

Figura 77 – Região Onde o Jogo Guerra de Atrito é Relevante

A Figura 77 também mostra o valor da (tradicional) opção exploratória, a qual é maior que o valor do líder para P < P** (o valor da espera é a diferença), que faz um contato suave no valor do líder em P**, e é igual ao valor do líder quando madura para exercício imediato (P ≥ P**). Em P = 31 $/bbl (> P**) ambos os jogadores tem opções exploratórias "deep-in-the-money", de forma que a guerra de atrito tem relevância: existe um incentivo devido ao jogo para esperar (o prêmio da revelação de informação) e um custo de lutar (o custo de adiar o exercício dessa opção madura para exercício imediato ótimo). Para P < 30,89 $/bbl, não existe o jogo (o jogo não importa) porque a política ótima é esperar e ver, independentemente da presença da outra firma. Em adição, para P = P_S = 33,12 US$/bbl, o preço é tão alto que o exercício simultâneo das opções é ótimo para ambos os jogadores, de forma que o jogo acaba para P > P_S. Para os valores numéricos adotados, o jogo guerra de atrito só existe na janela P ∈ [30.89, 33.12).

[365] Logo, para toda a região remanescente (P < P** and P ≥ P_S) o jogo não é relevante! Num artigo de jogos de OR com guerra de atrito, Murto (2002) também identifica uma região de estados (janela) em que não há interação estratégica. Entretanto, seu artigo tem muitas diferenças com o modelo da tese: aplicação para abandono de duopólio, opção perpétua (aqui é finita), opção de abandono simples (aqui é composta), etc.

Naturalmente esse intervalo é pequeno porque o prêmio de revelação de informação é relativamente pequeno com o adotado valor de $\eta^2(FC_i \mid FC_j) = 10\%$, além de não ter sido considerado revelação de informação sobre a qualidade da reserva q. Se aumentasse o prêmio do jogo aumentando o valor de $\eta^2(FC_i \mid FC_j)$, a janela do jogo guerra de atrito aumentaria porque o valor do líder seria o mesmo, mas o prêmio maior iria aumentar o valor do seguidor e, logo, o valor de P_S.

A Tabela 18 mostra a janela de relevância do jogo guerra de atrito usando diferentes valores de $\eta^2(FC_i \mid FC_j)$. Note que se $\eta^2(FC_i \mid FC_j) = 0$, não existe revelação de informação e assim não existe janela para o jogo (conjunto vazio) pois $P_S = P^{**}$ (e em P_S o jogo acaba). Para $\eta^2(FC_i \mid FC_j) = 100\%$, o caso de revelação total, a aprendizagem grátis é sempre mais valiosa que ser líder e assim $P_S = \infty$. Assim, para o caso de revelação total, o jogo guerra de atrito é relevante em qualquer caso de opção exploratória "deep-in-the-money" (qualquer $P \geq P^{**}$).

Tabela 18 – Revelação de Informação x Janela Relevante da Guerra de Atrito

$\eta^2(FC_i \mid FC_j)$ (%)	0	10	20	30	50	70	90	100
$[P^{**}, P_S)$ ($/bbl)	∅	[30,9, 33,1)	[30,9, 34,8)	[30,9, 36,7)	[30,9, 42,5)	[30,9, 55,5)	[30,9, 120)	[30,9, ∞)

Análise de Equilíbrio: Para o jogo *simétrico* de guerra de atrito, existem duas estratégias puras que são equilíbrios perfeitos. A primeira com a firma i exercendo primeiro a sua opção no tempo de parada (exercício) t_L e a firma j exercendo a sua opção em t_F. O segundo equilíbrio é o mesmo mas com os papéis das firmas i e j invertidos. Os pares de estratégias que são equilíbrio são (t_{Fi}, t_{Lj}) e (t_{Li}, t_{Fj}). Note que o clássico resultado da guerra de atrito com $t_{Lk} = 0$ ocorre se o preço inicial do petróleo for $P(t = 0) \geq P^{**}_k(t = 0)$, k = i, j.

O caso de guerra de atrito ***assimétrica*** é um caso de interesse prático maior, pois é mais comum. Nessa aplicação, as companhias de petróleo têm diferentes taxas de desconto, diferentes prospectos (registros sísmicos indicam diferentes volumes esperados de reserva em caso de sucesso), diferentes interpretações dos mesmos dados geológicos, etc. Conforme discutido no cap. 4 (item 4.2.1.1), apenas o preço de exercício I_w deve ser o mesmo para ambos os jogadores. Um conhecido resultado (ver Hammerstein & Selten, 1994, p.978) para guerra de atrito assimétrica é que, tipicamente a razão custo-benefício V/C deve ser

decisiva, i. é, o jogador com o maior V/C (a firma mais forte) deve ganhar (ser seguidora). Aqui o benefício é o ganho de revelação de informação, dado pela diferença $F_i - L_i$ para o jogador i. O custo de lutar C_i aqui depende em quão "deep-in-the-money" está a opção de perfurar da firma e da taxa de desconto, i. é, o custo de adiar o exercício de uma opção madura por unidade de tempo. O custo de adiar por um intervalo infinitesimal dt, com a taxa livre de risco r, uma opção exploratória madura para exercício ótimo que vale L_i, é:

$$\mathbf{C_i(P, t) = L_i(P, t) [1 - exp(- r\, dt)]} \qquad \mathbf{(362)}$$

Fazendo $\exp(- r\, dt) \cong 1 - r\, dt$ para um dt muito pequeno e substituindo, se obtém a seguinte expressão para o quociente benefício-custo Q_i da firma i:

$$\mathbf{Q_i(P, t) = (F_i - L_i)/C_i = (F_i - L_i)/(L_i\ r\, dt)} \qquad \mathbf{(363)}$$

No contexto de opções, em vez do quociente Q, a assimetria das firmas pode ser caracterizada de forma mais adequada pela diferença de valores de gatilhos, as em Murto (2002) e em Lambrecht (2001). No presente caso, o gatilho relevante para firmas assimétricas é P_S. Se a firma i é mais forte que a firma j, então se tem $P_{Si} > P_{Sj}$. Lembrar que em P_S o imediato exercício é ótimo independentemente dôo outro jogador. Então, *a firma com o maior gatilho P_S é mais paciente*. Para ver isso, considere um preço P abaixo[366] dos dois gatilhos P_S. A firma i pode estar certa que *antes* que o preço do petróleo alcance seu gatilho P_{Si}, o preço irá primeiro atingir o gatilho do oponente P_{Sj}, de forma que a firma j irá exercer antes a opção. Em outras palavras, não é crível a ameaça da firma j de esperar no intervalo $[P_{Sj}, P_{Si}]$. Com isso, esse EN não é perfeito (lembrar que o critério da perfeição demanda que o equilíbrio precisa ser de Nash em *todos* os subjogos).

Portanto existem dois critérios (quociente benefício-custo e gatilho) para estabelecer a assimetria no jogo assimétrico. No entanto, se a taxa livre de risco é a mesma para as duas firmas, a eq. 363 diz que a análise do quociente benefício-custo pode ser reduzida para a análise da razão F/L, i. é, simplesmente o jogador mais forte possui a maior razão F/L. Dada a definição de P_S, na maioria dos casos esses critérios são equivalentes. Para ver isso, ver as curvas de F e L na Figura 77. Se *aumentar* o valor do líder, diminuindo a razão F/L, o gatilho P_S diminui

[366] Preço acima de P_S terminaria o jogo em t = 0, já que pelo menos a firma de menor P_S exerceria a opção.

também[367] (para o mesmo I_w). Logo, esses dois critérios são equivalentes para P_S *finitos*. A desvantagem do critério de gatilho é que para os casos extremos de revelação da informação esses gatilhos podem ser *infinito* para ambas as firmas ($P_{Si} = P_{Sj} = \infty$), mesmo quando existem algumas diferenças entre os valores ("payoffs") das firmas. Nesse caso, o critério do quociente pode distinguir a firma fraca da firma forte, mas é difícil provar o ENPS como indicado abaixo.

A assimetria na guerra de atrito geralmente descarta um equilíbrio perfeito em estratégias puras, apontando para um *único* equilíbrio em estratégias puras o equilíbrio intuitivo com a firma mais *fraca* exercendo sua opção imediatamente e a mais *forte* (mais paciente) sendo o seguidor. Mesmo uma vantagem pequena ("ε advantage") é suficiente para fazer a firma mais forte a vencedora sem lutar, gerando um único ENPS. Esse resultado é mostrado me ambos, na literatura tradicional de guerra de atrito (Ghemawat & Nalebuff, 1985; Fudenberg & Tirole, 1991, pp.124-126) e na literatura de jogos de OR de guerra de atrito (Lambrecht, 2001; Murto, 2002). Murto (2002) descartou os equilíbrios perfeitos "paradoxais" com a firma mais forte exercendo primeiro, tanto se o grau de incerteza for de pequeno para moderado (mesmo para pequena assimetria), ou se a assimetria é suficientemente alta em caso de alto grau de incerteza. Entretanto, Murto (2002) principal contribuição é mostrar que, para um grau suficientemente alto de incerteza e para uma suficientemente pequena assimetria, o ENPS não-intuitivo com a firma mais forte concedendo primeiro, pode emergir porque o gatilho de exercício não é único[368]. Como em Lambrecht (2001, p.771-772) e por razões similares, (manter simples para *outras* extensões), a análise aqui fica restrita a simples gatilho de exercício P_S para cada firma, em vez de *conjuntos de exercícios desconectados*.

Logo, para a guerra de atrito assimétrica, o *único* ENPS é: a firma mais *fraca*, firma j (a firma com o menor P_S) perfura o poço em t_{Lj} (quando P alcança P^{**}_j) e a firma mais forte i torna-se seguidora exercendo sua opção em t_{Fi}, o

[367] Em adição, é intuitivo que um campo de petróleo mais valioso deve ter menores gatilhos de investimento P*, P** e P_S.

[368] Murto (2002) chama isso de "gap equilibrium". No caso de alta volatilidade, devido à iteração estratégica, cada firma tem pelo menos duas regiões de variáveis de estado onde o exercício da opção é ótimo independentemente da outra firma. No caso da *tese*, isso significaria que existe uma região entre essas regiões de exercício, onde o jogador mais forte pode exercer a opção se o preço *cair*. Logo, existem "regiões intermediárias de espera" como as indicadas no item 2.4.2 no contexto tradicional. Ver também a discussão de *estratégias de gatilho*, item 4.2.1.2.

primeiro instante em que a OR exploratória *com a revelação de informação*, torna-se madura para o imediato exercício. Esse tempo (t_F) pode ocorrer imediatamente depois de t_L, em caso de revelação positiva, ou, para o caso de revelação negativa, em um dos dois cenários: (a) no primeiro instante que P alcança o valor revisado de $P^{**}_i(t)$; ou (b) nunca, se o preço do óleo não alcançar esse valor no intervalo (t_{Lj}, T]. Em termos mais formais, o único ENPS é o par de estratégias (t_{Fi}, t_{Lj}).

É esse ENPS estável no sentido de ser ESS (estratégia evolucionária estável, ver item 4.1.5.3)? De acordo com um teorema de Selten, um ESS num jogo assimétrico tem de ser um EN *estrito*. Mas como apontado por Kim (1993), a conjectura de Maynard Smith (1974) de que esse equilíbrio em estratégias puras pode ser ESS em jogos *assimétricos*, pode ser estabelecido mesmo não obedecendo ao teorema de Selten se o conceito de ESS for substituído pelo conceito de *ESS-limite*, o qual considera a possibilidade de "tremulação" ("trembles"), i. é, pequenos erros nas escolhas das estratégias pelos jogadores.

Entretanto, para o caso de jogo *simétrico* no qual existem dois ENPS em estratégias puras, (t_{Fi}, t_{Lj}) e (t_{Li}, t_{Fj}), o único candidato a ser ESS é o equilíbrio em *estratégias mistas*, que é uma randomização sobre essas duas estratégias puras, contrastando com o caso do jogo assimétrico em que a estratégia pura é a candidata a ser ESS. Esse é um resultado clássico de Maynard Smith.

Estratégias mistas nesse jogo de momento ótimo são funções distribuições de probabilidades acumuladas G_i em $t \geq 0$, i.é, $G_i(t)$ é a probabilidade que o jogador i exerceu sua opção em ou antes de t. No artigo sobre guerra de atrito em tempo contínuo, Hendricks & Weiss & Wilson (1988) analisaram os equilíbrios em estratégias mistas, mostrando que a função distribuição acumulada G(t) tem *pontos de massa concentradas* em equilíbrio somente ou no início ou no final do jogo (equilíbrios *degenerados* em estratégias mistas). Para o caso dos equilíbrios *não-degenerados* em estratégias mistas, eles acharam que, sob certas condições, existe um contínuo de equilíbrios não-degenerados com probabilidade positiva de parada para ambos os jogadores no intervalo (0, t*), i.é, a função G(t) é estritamente crescente nesse intervalo, depois do qual ambos os jogadores esperam até a expiração do jogo (T) quando a função G(t) pode dar um salto devido a possibilidade de ponto de massa em T. Entretanto, o mesmo artigo aponta que para jogos de maturidades *finitas* (mencionando o caso específico de

exploração de petróleo como exemplo), não existe equilíbrio não-degenerado devido à descontinuidade dos valores entre F e L na expiração do jogo.

É oportuno rever a discussão das possíveis condições terminais desse jogo, apontadas no item 4.1.2.3 (especialmente as eqs. 253 e 254). A condição da eq. (253), $F(T) \geq L(T)$ é similar a Hendricks & Weiss & Wilson (1988)[369] que colocaram $F(T) > L(T)$ para o caso de jogo finito, em vez de $F(T) = \max\{L(T), 0\}$. Entretanto, em ambos os casos pode haver uma diferença de valores na expiração, $F(T) > L(T)$, que é o caso mais comum da condição da eq. (253). Como foi visto no item 4.1.2.3, essa condição tem a vantagem de fazer a função F(t) ser contínua na expiração (como em Hendricks & Weiss & Wilson, 1988, premissa A1). A condição da eq. (253) também pode ser vista como uma condição em que existe uma última data em que o seguidor pode se aproveitar da revelação de informação e assim facilita o trabalho de provar o ENPS por retro-indução.

Assim, a literatura toda leva a concluir que não existiriam equilíbrios não-degenerados, i. é, não existiriam equilíbrios em estratégias mistas com jogos assimétricos e, especialmente, para jogos finitos como é o presente caso. Assim, o equilíbrio com o jogador "mais forte" como seguidor, é o único ENPS nesses casos. Mas é interessante discutir melhor a questão de estratégias mistas em jogos de OR. Equilíbrios não-degenerados podem ocorrer no contexto de jogos de OR se for considerada a questão de múltiplos gatilhos P_S para cada firma, como em (2002). Essa análise pode ser muito complexa e, como visto antes, aqui estão sendo consideradas apenas as *estratégias de gatilho*, como em outros artigos de jogos de OR em guerra de atrito (ex.: Lambrecht, 2001). Também é de interesse discutir o caso de *informação incompleta* e da existência de *equilíbrios Bayesianos perfeitos* (EBP)[370]. Mas por questão de espaço e prioridade, será discutido uma alternativa de equilíbrio que pode ser muito mais interessante, por ser Pareto-dominante de todos os equilíbrios. Nominalmente, a alternativa de "*trocar o jogo*", com os jogadores abandonando a guerra de atrito em favor de um

[369] No caso deles, as funções L e F são contínuas em T por conveniência, pois lá o único resultado em T é a parada simultânea com valor S (nota 5). Eles assumem que haverá a parada até a expiração, i. é, G(T) = 1 (nota 7). No caso da tese, pode não haver exercício em todo o período.

[370] Na literatura tradicional de guerra de atrito, Ponsati (1995) provou a existência de um *único* EBP no caso de dois jogadores com informação incompleta nos dois lados e jogo finito (como aqui). Esse equilíbrio é similar ao de estratégias mistas indicado antes: uma função G(t) com ponto de massa na expiração e nenhum exercício de opção em algum intervalo precedente [t*, T). Como mencionado antes, é muito comum que os equilíbrios mistos e Bayesianos coincidam.

jogo de barganha através de um contrato "ganha-ganha" de parceria. Esse é o objeto da próxima seção, que mostrará que sob certas condições, esse contrato pode ser melhor mesmo quando comparado com a estratégia "free-rider" do seguidor (o maior valor da guerra de atrito). Isso ocorre graças à revelação de informação *adicional* de informação *privada* permitida pela parceria, o que aumenta o prêmio do jogo. O problema do jogo não-cooperativo é que ele é ineficiente no sentido que ganhos mútuos são deixados inexplotados. Antes porém, será discutida uma das premissas do jogo exploratório.

Nesse exemplo foi assumido que a perfuração do poço pioneiro é instantânea[371]. Se for considerado o efeito do tempo de revelação t_R de forma mais detalhada, o valor do *seguidor será penalizado* quando comparado com $t_R = 0$. Simulações iniciais mostram que os principais efeitos quando se considera $t_R > 0$ são: (a) valor do jogador informado (seguidor) é menor; (b) o gatilho para o exercício ótimo da opção é menor, pois o gatilho nesse caso é o ponto em que os valores do líder e seguidor são iguais; e (c) existe um preço do petróleo P' no qual, para $P \geq P'$, o único equilíbrio perfeito de Markov (EPM) é o exercício simultâneo da opção[372].

5.4. Mudando o Jogo de Opção: De Guerra de Atrito para Barganha

Nesse item será discutida a possibilidade de trocar o jogo não-cooperativo de guerra de atrito para o *jogo de barganha*[373]. Aqui se segue o conselho dado por Brandenburger & Nalebuff (1996), que apontam que nos jogos de negócios os maiores lucros são provenientes de mudar o próprio jogo, caso se esteja jogando o *jogo errado*. Em suas palavras "*changing the game is the essence of business strategy*". No caso do jogo de exploração de petróleo, isso pode ocorrer se for aumentado o conjunto de ações permitindo a opção de parceria. Pode uma

[371] Com a premissa de perfuração instantânea, dentre outras coisas, se evita as complicações *durante* o exercício da opção, i é, durante esse tempo de perfuração o preço P pode cair abaixo do gatilho de desenvolvimento e se poderia esperar depois dessa perfuração, mesmo se tiver sucesso.

[372] Para $t_R = 0$, se o exercício simultâneo for ótimo, o valor do seguidor é igual ao valor de exercício simultâneo e existem três EPM: exercício simultâneo; firma i como líder e firma j como seguidora; e firma j como líder e firma i como seguidora. Mas pode-se colocar t_R arbitrariamente pequeno ($\varepsilon > 0$), para descartar os outros equilíbrios e reforçar a condição $F_i(T) = \text{Max}\{L_i(T), 0\}$.

[373] Esse tópico é baseado em Dias & Teixeira (2004).

parceria (contrato) entre as firmas ser equilíbrio? Quais são as condições? Como selecionar um de múltiplos equilíbrios cooperativos?

Essas questões começaram a serem discutidas no cap. 2, com o exemplo simples da Figura 3, em que as opções em dois prospectos correlacionados estavam expirando, ambos com VMEs negativos (sem considerar a revelação de informação). Lá se indicou que, se cada um dos prospectos pertencessem a duas firmas diferentes, a estratégia não-cooperativa seria não exercer a opção e devolver os prospectos ao governo. Com a cooperação (parceria), apareceria um valor positivo ("surplus") devido ao efeito da revelação de informação, que poderia ser dividido entre os parceiros. Ou seja, o jogo guerra de atrito não permitiria maximizar o valor da firma, como no jogo de barganha. Serão aqui usados alguns conceitos, notações e equações do item 4.1.3, especialmente a solução de Nash para jogos cooperativos de barganha.

A novidade desse item com o conceito de "trocar o jogo" é que o *ponto de desacordo* ("disagreement point", d) vem do jogo de OR não-cooperativo visto no item anterior[374], i.é, o jogo guerra de atrito serve como dado de entrada no jogo cooperativo de barganha. Aqui se segue Binmore & Rubinstein & Wolinsky (1986) em que a solução de Nash para barganha é um ENPS do jogo análogo de *barganha não-cooperativa* (ofertas alternadas de Rubinstein, ver item 4.1.3), sob a premissa de que uma pequena probabilidade de desistência da negociação ("breakdown") convergindo para zero e com a escolha adequada o ponto de desacordo d. Como discutido no cap. 4, a guerra de atrito não é uma *opção externa* à mesa de barganha. Ela provê um indesejável (Pareto-inferior) resultado no evento de um jogo de desacordo[375]. Sob a premissa de que apenas ENPS são ameaças críveis no jogo da discórdia que se seguiria ao jogo da barganha no caso de desistência de negociação, o critério de perfeição requer que o ponto de desacordo seja equilíbrio perfeito na guerra de atrito. Essa combinação de guerra

[374] A seqüência do jogo pode ser como segue. Primeiro, as firmas estão jogando um jogo não-cooperativo (guerra de atrito) quando uma ou ambas as firmas identificam um ganho Pareto-superior com o jogo de barganha. As firmas trocam de jogo começando o jogo de barganha. Com alguma (muito alta) probabilidade p, eles concordam numa regra de divisão para a união de ativos U e com probabilidade (1 – p) eles discordam. No último caso, a única alternativa crível é jogar um jogo não-cooperativo, que aqui é o jogo guerra de atrito.

[375] Desistência da negociação é um evento aleatório com pequena probabilidade (dado que o jogo já foi trocado para a barganha). Isso pode ocorrer, por ex., devido a uma troca de gerente, ou simplesmente com a passagem do tempo devido a possível mudança do estado (P, t) de uma maneira que o jogo de barganha se torna menos atrativo.

de atrito e solução de Nash para a barganha, em geral não é o *jogo da ameaça* de Nash[376]. Aqui se considera que não é possível se comprometer com *ameaças críveis* outras que os ENPS do jogo da discórdia[377]. Logo, a solução aqui proposta do jogo de barganha é a solução de Nash com o (mais refinado) ENPS do jogo de guerra de atrito.

Se esse jogo tem um único equilíbrio assimétrico, como indicado no último item, (t_{Fi}, t_{Lj}), então o ponto de desacordo será ($d_i = F_i$, $d_j = L_j$). Naturalmente, se poderia usar um ponto de desacordo do equilíbrio paradoxal (t_{Li}, t_{Fj}) ou mesmo um equilíbrio Bayesiano ou em estratégias mistas, se eles existissem. Assim, esse é um rico e flexível caminho a ser analisado em futuro trabalho.

A alternativa de jogo de barganha tem uma importante vantagem sobre a guerra de atrito *no jogo de exploração de petróleo*, devido à possibilidade de explotar todo o potencial de revelação de informação. Ou seja, se pode obter resultados Pareto-ótimo apenas com a alternativa de jogo de barganha. Isso porque a informação *pública* do resultado de uma perfuração exploratória é apenas um subconjunto da informação acessível aos jogadores num contrato de parceria. Em comparação com a informação pública revelada, a informação adicional (*privada*) obtida com a cooperação pode aumentar o efeito de revelação de informação sobre o fator de chance[378] e prover alguma informação útil adicional sobre a qualidade q (não só se o óleo é leve ou não, mas propriedades das rochas, etc.) e até sobre o volume B (detalhes do contato óleo-água, já comentado antes) dessa possível reserva. Por simplicidade, considere apenas o efeito na variável fator de chance. Para distinguir os dois casos de revelação de informação (público e privado), denote $\eta^2(FC_i \mid FC_j)^*$ o caso com informação privada (cooperativa), que é maior que o caso com informação pública, i. é:

$$\eta^2(FC_i \mid FC_j)^* > \eta^2(FC_i \mid FC_j)$$

---

[376] Ver a diferença em Binmore (1992, p.261-265 and ex.7.9.5d, p.331). Ver item 4.1.3.

[377] Mas no caso de múltiplos EN no jogo da discórdia, o jogo da ameaça de Nash poderia fazer sentido pois as estratégias de ameaças são equilíbrios e, assim, ameaças realmente críveis. Bolt & Houba (1998) apresentaram um modelo onde todas as ameaças são EN no jogo da discórdia e cada ameaça (crível) é um ponto de desacordo no jogo da ameaça de Nash.

[378] Detalhada informação privada pode confirmar o *sincronismo* geológico com a primeira perfuração, aumentando o FC no prospecto vizinho, mesmo com uma revelação *pública* negativa sobre o resultado do poço (ex.: *traços* de óleo numa zona de interesse do outro prospecto).

Como a medida $\eta^2(FC_i \mid FC_j)$ é simétrica (por serem v.a. de Bernoulli, o jogo pode ser assimétrico) e por ser melhor trabalhar aqui com a sua raiz positiva, fica bem mais simples escrever essa inequação como:

$$\eta^* > \eta \quad \textbf{(364)}$$

Considere o mesmo exemplo do item anterior (5.3), mas agora com a revelação de informação privada η^* sendo dado por $\eta^2(FC_i \mid FC_j$, inf. privada) = 30% e, portanto, a raiz positiva $\eta^* = 0{,}5477$.

Com notação similar ao item 4.1.3, U é definido como a união dos ativos das duas firmas i e j. As participações das firmas i e j nesse ativo U são denotados respectivamente por $U_i = w_i \,.\, U$, $U_i = w_j \,.\, U$, com $w_j = 1 - w_i$ e esses pesos ("working interest") sendo calculados pela regra axiomática de Nash. De forma similar à eq. (257), mas agora no contexto de opções, o valor do ativo (portfólio) U é dado pelo VME de um prospecto (que pode ser negativo, rever o exemplo simples do cap. 2) mais o valor esperado das opções do outro prospecto atualizado com a revelação de informação (agora dada por η^*) proveniente da primeira perfuração (o segundo termo é então sempre não-negativo). Uma condição necessária para haver um acordo entre as firmas é $U \geq 0$ (parceria é uma opção, não é obrigação). Logo, no contexto de opções, o valor U da união de ativos é:

$$\mathbf{U = \max\{0, VME_j + [FC_j \,.\, E_i(P, t; FC_i^+)] + [(1 - FC_j) \,.\, E_i(P, t; FC_i^-)]\}} \quad \textbf{(365)}$$

Na equação acima se assume que o prospecto j será perfurado primeiro para revelar informação para o prospecto i. Lembrar que no caso *assimétrico* o prospecto j é o mais "fraco" e deve ser perfurado primeiro. Note que "fraco" em guerra de atrito significa ser o mais impaciente. Logo, em geral, os prospectos "fracos" no jogo guerra de atrito são os mais atrativos, pois o custo de postergar (lutar) é maior.

No contrato de barganha, a divisão de U seguirá a solução de Nash, com as participações w_i e w_j sendo dadas, respectivamente, pelas eqs. (258) e (259).

Nesse exemplo, em vez de escolher os valores de equilíbrio para o ponto de desacordo, que seria ($d_i = F_i$, $d_j = L_j$), pode ser mais interessante trabalhar com um caso fictício e mais extremo para esse ponto de desacordo, i. é, ($d_i = F_i$, $d_j = F_j$). Imagine que cada um dos jogadores se considera o jogador mais forte na guerra de atrito. Se mesmo nesse caso a alternativa de barganha for mais valiosa, então a

opção de barganha dominará qualquer possível equilíbrio que possa ser obtida com o jogo da discórdia (guerra de atrito). Isso pode ser importante na prática, pois se evita a análise de irrelevantes alternativas de equilíbrio, se for mostrado que a alternativa de barganha domina os mais favoráveis resultados que poderiam ser obtidos com o jogo não-cooperativo de guerra de atrito. Somente em caso de não-dominância desse jogo fictício, é que será necessário estudar em detalhes os equilíbrios do jogo não-cooperativo. Entretanto, isso apenas garante que, num certo intervalo de preços do petróleo, o jogo de barganha tem supremacia sobre o jogo de guerra de atrito. Esse jogo fictício não dá a melhor solução de barganha. Ou seja, a solução de barganha de Nash usando ($d_i = F_i$, $d_j = F_j$) não é a mais adequada *solução de barganha* para as firmas que concordam na existência de assimetria dos prospectos[379]. Mas essa solução fictícia permanece pertencendo ao conjunto factível Pareto-eficiente no jogo assimétrico mesmo se for reduzido d_i e/ou d_j usando qualquer outro equilíbrio no ponto de desacordo[380]. Em adição, a solução de barganha com ($d_i = F_i$, $d_j = F_j$) permanece estritamente maior que o melhor resultado da guerra de atrito (F) para cada jogador.

Denote $\underline{P}_U$ como o menor preço do petróleo no qual a alternativa de barganha *não* é inferior a *qualquer* resultado do jogo guerra de atrito. De forma similar, denote $\overline{P}_U$ como o mais alto preço do petróleo no qual a alternativa de barganha é estritamente melhor do que o melhor resultado da guerra de atrito para ambos os jogadores. Formalmente, para o jogador i (para o jogador j é similar), esses gatilhos de "troca de jogo" são definidos por:

$$\underline{P}_U(t) = \inf\{P(t) \mid U_i(P, t) > 0,\ U_i(P, t) \geq F_i(P, t)\} \quad (366)$$

$$\overline{P}_U(t) = \sup\{P(t) \mid U_i(P, t) > 0,\ U_i(P, t) > F_i(P, t)\} \quad (367)$$

Esses dois gatilhos de "troca de jogo" formam a janela de gatilhos do jogo de barganha $[\underline{P}_U, \overline{P}_U]$ na qual o jogo de barganha domina qualquer alternativa do jogo guerra de atrito, fazendo que essa não seja uma opção racional[381]. Lembrar

[379] Os jogadores podem discordar dos valores de uma análise econômica dos prospectos, mas os registros sísmicos darão aos jogadores a indicação relativa de qual o maior prospecto.

[380] O inverso é que não é verdadeiro, i.é, se aumentar os valores do ponto d, um conjunto de soluções do conjunto factível desaparecem (ver Figura 57).

[381] Está se assumindo que esse intervalo é único, o que deve ser verdade para a grande maioria dos casos práticos (ou seja, continua sendo considerada só a estratégia de gatilho).

que a guerra de atrito tem uma janela de relevância dada por [P**, P_S). Assim, se diz que o jogo de OR de *barganha domina* o jogo de OR de guerra de atrito, se [P**, P_S) $\subset$ [$\underline{P}_U$, $\overline{P}_U$].

A Figura 78 apresenta a análise integrada dos dois jogos. Ela mostra o valor da firma com a alternativa de barganha simétrica ($U_i = U_j$), a curva do valor do seguidor e a curva do valor do líder versus o preço do petróleo, para o subjogo em t = 0 (faltando dois anos para a expiração T). Apesar de que existe um intervalo de preços em que o valor do seguidor é maior que o valor desse jogador em barganha, note que o valor da barganha é sempre maior que o valor do líder (a exceção será para preços do petróleo muito altos em que esses valores serão iguais) e igual ou maior que o valor do seguidor na janela do jogo $\underline{P}_U$ = 29,6 \$/bbl e $\overline{P}_U$ = 36,7 \$/bbl. Logo, na região de interesse, a janela do jogo de barganha contém a janela do jogo guerra de atrito desse exemplo, [P**, P_S) = [30.89, 33.12), ver item 5.3, e assim a barganha domina o jogo guerra de atrito.

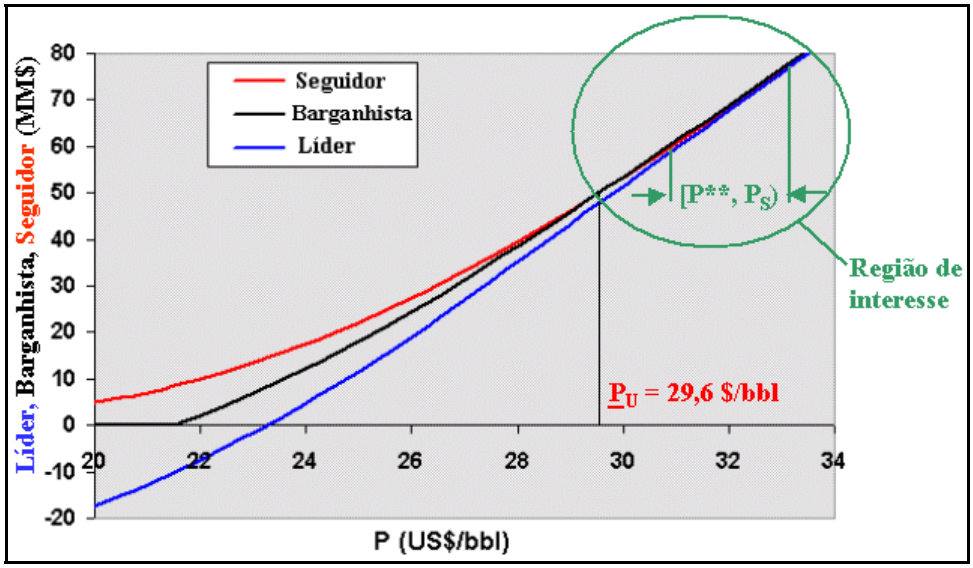

Figura 78 – Análise Conjunta Guerra de Atrito e Barganha

A Figura 79 mostra uma ampliação da região de interesse da Figura 78, para destacar o intervalo no qual a guerra de atrito tem relevância [30.89, 33.12).

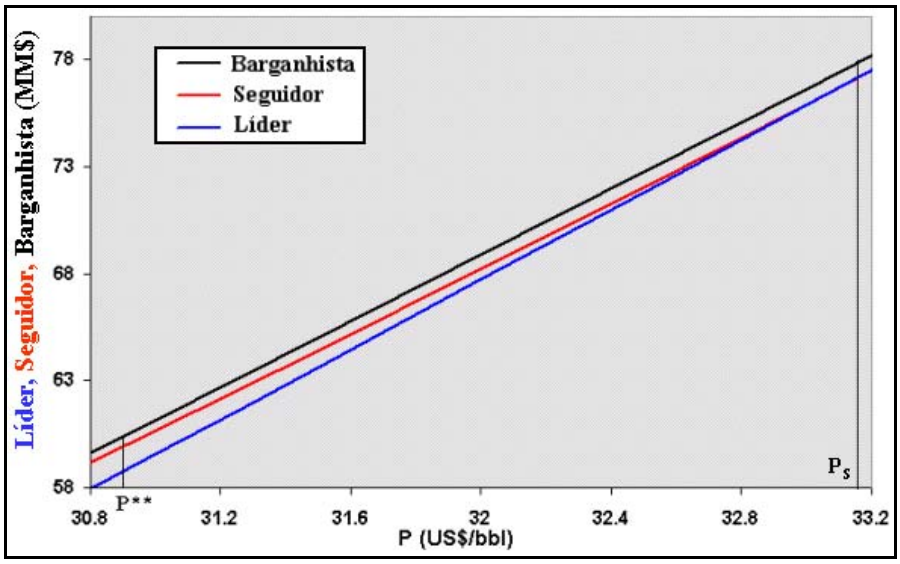

Figura 79 – Barganha versus Guerra de Atrito: Região de Interesse

Note na Figura 79 que o valor do barganhista é sempre maior que o melhor resultado da guerra de atrito (valor do seguidor), graças à revelação de informação adicional obtida com o contrato privado. Note também que a diferença entre os valores do barganhista e do líder é estritamente decrescente com os preço do petróleo, de forma que é intuitivo que eles irão se encontrar para um preço maior do petróleo (realmente essa curvas se encontram em $\overline{P}_U = 36{,}7$ \$/bbl).

Seja t_U o primeiro instante que os preços do petróleo alcançam o gatilho $\underline{P}_U$. Esse instante t_U <u>não</u> é o primeiro instante em que é ótimo trocar de jogo (da guerra de atrito para a barganha). Essa troca de jogo pode ser ótima antes de t_U, se no ponto de desacordo for considerado valores menores do equilíbrio da guerra de atrito (ex., estratégias mistas no jogo simétrico com [F + L]/2 para cada jogador) em vez do caso extremo considerado (F para cada jogador). Entretanto, para P no intervalo ($\underline{P}_U$, $\overline{P}_U$) é garantido que o jogo de barganha domina estritamente o jogo de guerra de atrito para qualquer resultado de equilíbrio não-cooperativo.

Qual o valor do prêmio do jogo de OR comparado ao prêmio tradicional nesse caso? Em ambos os jogos, guerra de atrito e barganha, esse prêmio é maior que o prêmio não estratégico de OR. No primeiro caso porque existe um incentivo adicional para a espera devido ao maior valor obtido pelo seguidor com a revelação de informação pública. Já no jogo de barganha, esse prêmio é maior por causa do contrato de barganha que permite explotar a revelação de informação privada, a qual em geral é maior do que a informação pública disputada pelos jogadores na guerra de atrito.

6
Outras Opções Reais Híbridas

6.1.
Introdução

Nesse capítulo serão analisadas, de forma resumida, outras opções reais híbridas de importância para aplicações. Será dada uma ênfase especial nas chamadas *opções reais evolucionárias*, que combina a teoria de OR com métodos de computação evolucionária, em especial os algoritmos genéticos (AG). Esse método é destacado pela sua importância prática, pois é um método flexível e que permite resolver problemas complexos de otimização sob incertezas.

Em seguida serão analisadas, de forma bem mais sumária, algumas outras opções reais híbridas tais como a combinação da teoria de OR com a teoria das restrições, as *opções reais nebulosas* ("fuzzy"), e combinações da teoria das OR com as duas principais teorias de preferências, i. é, com a *teoria da utilidade esperada* e com a *teoria dos prospectos*. Fechando o capítulo serão mencionadas algumas combinações de interesse, por ex., com a teoria das *redes neurais*, com teorias *organizacionais* e de *planejamento estratégico*, e combinações com a *teoria de desenhos de sistemas computacionais*.

Muitas outras combinações começam a ser desenvolvidas na literatura de OR, com interesse prático variado. Esse é um campo de pesquisas de grande potencial, que pode gerar importantes benefícios na solução de problemas complexos. Além disso, essas combinações ajudam na popularização da teoria das OR em outras comunidades de pesquisas. Os desafios para esses pesquisadores são grandes, já que a teoria das OR demanda um investimento de tempo em estudos de relativamente complexos problemas de investimento sob incertezas, teoria de finanças, etc. Mas deve-se ter em mente que o prêmio pode ser elevado, se forem desenvolvidos métodos realmente inovadores e eficientes para a solução desses problemas.

6.2.
Opções Reais Evolucionárias

A combinação da teoria das opções reais (OR) com a teoria de computação evolucionária, em especial com os *algoritmos genéticos*, chamada de opções reais evolucionárias, é uma das OR híbridas de maior potencial prático, pela sua flexibilidade de modelagem e pela facilidade relativa de ser entendida e usada[382].

A teoria das OR tem sido largamente usada para maximizar o valor de uma oportunidade de investimento sujeito a incertezas, restrições de tempo (expiração de direitos), flexibilidades disponíveis a um custo ou naturalmente nos projetos, etc. Em um artigo inicial nesse tema, Dias (2000), apontou dois problemas práticos importantes em modelos complexos de OR e de otimização sob incerteza de uma maneira geral. Eles são descritos a seguir.

O primeiro problema é a chamada *maldição da dimensionalidade* ("curse of dimensionality"), termo usado por Bellman e conhecido na literatura de programação dinâmica[383], que é a explosão exponencial do tempo computacional. No caso de OR, o método padrão de solução de equações diferenciais parciais (EDP) é o método de *diferenças finitas*. Quando o número de variáveis de estado é igual ou maior do que 4 (fontes de incerteza mais o tempo), geralmente o método se torna numericamente inviável para resolver a EDP. O antídoto padrão para o problema da dimensionalidade é a simulação de Monte Carlo, que a cada iteração amostra as distribuições de probabilidades das diversas variáveis aleatórias (v.a.), sendo que o tempo computacional, para o mesmo número de iterações, não cresce de forma relevante se acrescentar mais fontes de incertezas no sistema.

O segundo problema é a *maldição da modelagem* ("curse of modeling", ver por ex., Bertsekas & Tsitsiklis, 1996, preface), i. é, a formulação de um problema com um sistema explícito, de forma que se mudar alguns aspectos do problema é necessário mudar todo o procedimento de otimização. Por ex., num modelo de OR com EDP, caso se queira mudar o status da taxa de dividendos δ de determinístico para estocástico, o modelo de EDP muda totalmente e tem de ser reformulado totalmente para poder ser resolvido. Um método que use simulação de processos estocásticos e um algoritmo de otimização, poderia incorporar essa mudança de

---

[382] Esse tópico é baseado em Dias (2001b).

[383] Ver, por ex., http://www.stat.ucla.edu/~sabatti/statarray/textr/node5.html. Uma tradução alternativa é *curso* da dimensionalidade, no sentido de ser um problema inevitável (curso de rio).

status de maneira mais incremental ou modular, com ajustes menos drásticos no sistema de solução.

Esses dois problemas têm direcionado parte da pesquisa recente de OR para técnicas de solução que usam a flexível simulação de Monte Carlo. A aplicação do cap.5 (item 5.2) é um exemplo, que considerou quatro fontes de incerteza (variáveis P, I_D, q, B) e mais o tempo como variável de estado. Por isso, foi desenvolvida no cap. 3 toda uma teoria sobre *distribuição de revelações* para suportar aplicações importantes tais como a seleção de alternativas de investimento em informação considerando várias fontes de incertezas técnicas e de mercado. Essa teoria será útil nas aplicações de OR evolucionárias.

O maior problema do uso de simulação de Monte Carlo com OR é a dificuldade de realizar a *otimização* (tradicionalmente "backward") com a *simulação* ("forward"), que é necessário no caso de opções americanas, que são mais comuns no caso de OR. Ou seja, simular é fácil, difícil é otimizar, i. é, calcular a curva de gatilhos da OR. Lembrar (cap.2) que a curva de gatilhos dá a regra ótima de decisão e o valor da OR é condicional a essa regra ótima.

Devido a essas demandas da complexa realidade de análise econômica, existe uma grande quantidade de artigos focando no uso de simulação de Monte Carlo para opções americanas[384]. Longstaff & Schwartz (2001, o mais citado), Broadie & Glasserman (1997) e Ibáñez (2004), são exemplos (existem dezenas).

A abordagem de OR evolucionárias pode ser vista como uma das alternativas de otimização para usar a simulação de Monte Carlo. Ou seja, é uma maneira mais direta de otimizar o valor da OR que permite o uso de simulação de Monte Carlo para representar de maneira flexível o problema das incertezas. A principal ferramenta de otimização das OR evolucionárias é o método dos algoritmos genéticos (AG) com estruturas de dados, i. é, *programação evolucionária* no sentido de Michalewicz (1996). O problema de otimização é abordado através da evolução de soluções em direção a um ótimo, usando *operadores genéticos* tais como operadores especiais de cruzamento ("crossover") e mutação. O método de AG segue os princípios de evolução de Darwin, de forma que existem analogias: os candidatos a solução ótima são os *cromossomas*, que

[384] Até o início da década de 90, era considerado inviável usar simulação de Monte Carlo para resolver problemas de opções do tipo americana.

tem *genes* (características dos cromossomas), com a evolução se dando por reprodução (operadores de cruzamento) e mutação. Existe uma *população* de cromossomas que evoluem ao longo de *gerações*. Os mais bem adaptados (mais ajustados, "fitness") cromossomas têm mais chances de passarem o seu material genético (genes) para as gerações seguintes. Aqui, "adaptação" significa valor de OR de um projeto ou uma alternativa de investimento. O cromossomas aqui é o conjunto de características da regra de decisão que maximiza o valor da OR.

As literaturas de algoritmos genéticos e programação evolucionária são relativamente recentes, mas são bem desenvolvidas. Os livros clássicos e/ou mais citados são: Holland (1975), Goldberg (1989), Davis (Eds.) (1991) e Michalewicz (1996). As primeiras aplicações de AG em OR foram Winston (1999) e Dias (2000, 2001). A aplicação referencial desse item é a mesma do item 5.2, de seleção de alternativas de investimento em informação. Mas aqui o objetivo é descrever os conceitos envolvidos na metodologia e seu potencial prático, por ser um método flexível (pode-se usar qualquer processo estocástico simulável, incluir novas opções e regras, etc.) e de uso geral (não tem os problemas de modelagem específica, reportados no início desse item) para complexos problemas de otimização em OR.

O grande apelo de AG é o alto *paralelismo implícito*. Holland provou esse paralelismo dos AG em seus teoremas de *esquemas* ("schema"). Esquema é um gabarito de similaridade descrevendo um subconjunto de fileiras ("strings") com similaridades em certos pontos da fileira. Por ex., a fileira (*, *, c, d), onde * é "não se preocupe", é um esquema. Para a representação binária, pode ser provado que o processamento de uma população de somente n cromossomas, cada geração do AG processa de forma útil algo como n^3 esquemas! Esse é o paralelismo implícito do AG, que explica a sua alta eficiência computacional quando comparado com outros algoritmos, ver Goldberg (1989, p. 40-45).

O trabalho da abordagem evolucionária é gerar regras de decisão (curvas de gatilhos) que maximizem o valor da OR. Para fazer isso, a curva de gatilhos precisa ser codificada por um conjunto de genes com as características dessa curva de gatilhos. Em Dias (2001) isso é realizado através de dois pontos livres (unidos por segmentos de retas) e uma função. Para isso, é conveniente fazer uma mudança de variáveis na escala do tempo, reportando o tempo τ que falta para a expiração da OR ($\tau = T - t$) em vez do tempo cronológico. Com isso, é possível

usar a conhecida função logarítmica. Assim, a curva de gatilhos é modelada com dois pontos livres, que representam a curva de gatilhos perto da expiração, e uma função logarítmica[385], para a maior parte da curva de gatilhos. Essa função é:

$$(V/I_D)^* = c + d \ln(\tau) \quad (368)$$

Onde "c" e "d" são coeficientes da função (a serem evoluídos) e τ o tempo para a expiração. A Figura 80 ilustra a representação da curva de gatilhos como um cromossoma com dois pontos livres e a função logarítmica da eq. (368).

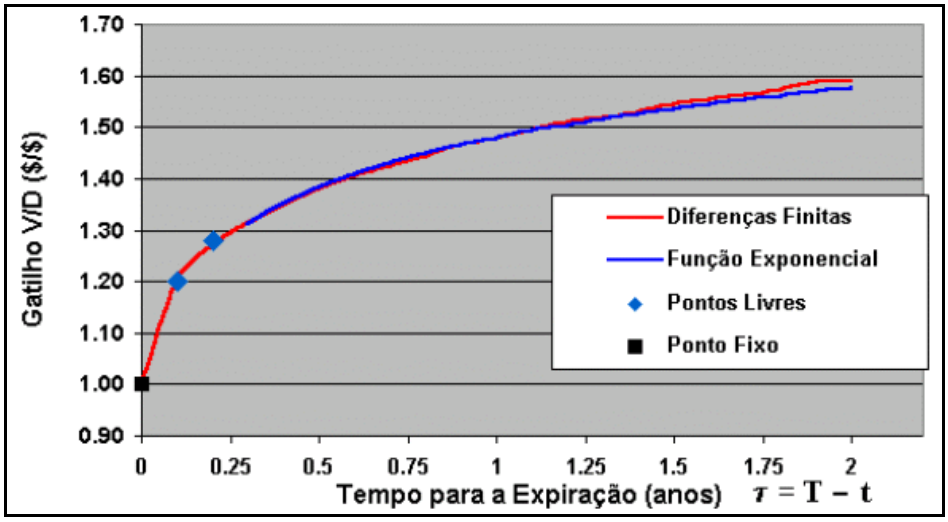

Figura 80 – Curva de Gatilhos Representada por Cromossoma

O ponto fixo para $\tau = 0$, é a regra de OR para a condição terminal (expiração) que, no caso, coincide com a regra do VPL = $V - I_D$, i. é, invista se o VPL > 0 ou invista se $V / I_D > 1$, nessa abordagem normalizada (ver as vantagens dessa normalização da curva de gatilhos no item 5.2). A Figura 80 mostra também uma solução obtida com o método de AG (em azul) e a solução "teórica" do método das diferenças finitas.

Note que essa abordagem é bem geral no sentido que essa idéia pode ser usada para resolver qualquer problema de *fronteira livre* ("free boundary"), não só no contexto de finanças. A idéia é usar funções e pontos, cujos valores e/ou parâmetros (coeficientes) são selecionados num processo evolutivo. É possível também selecionar a própria função (exponencial, polinômio, etc.) com esse processo evolutivo. Para casos muito complexos, essa pode ser a melhor alternativa.

---

[385] Para opções americanas de *venda*, Ju (1998) usa a função exponencial multi-peças para aproximar a curva de gatilhos. Para opções americanas de *conpra*, a aproximação logarítmica é uma idéia análoga, graças à conhecida simetria entre opções de venda e de compra.

A experiência com esse problema mostra que perto da expiração a curva de gatilhos tem um comportamento mais variável (e menos ajustada à função logarítmica). Os pontos livres são flexíveis o suficiente para capturar essas variações. Essa representação heurística da curva de gatilhos com 4 elementos é suficientemente simples e alcança o conjunto de possíveis soluções ótimas. No modelo de algoritmo genético, cada cromossoma tem 4 genes representando os 4 elementos que caracterizam a curva de gatilhos. Os genes são o par de pontos livres (a, b) e os coeficientes da curva logarítmica (c, d). A Figura 81 ilustra essa codificação de genes do cromossoma-gatilho.

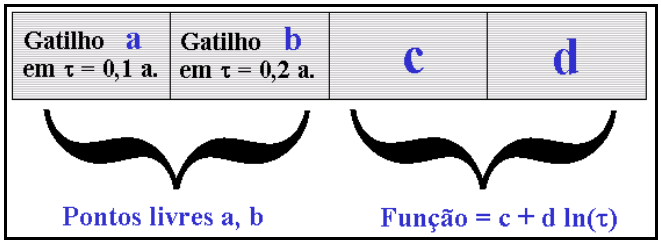

Figura 81 – Genes do Cromossoma-Gatilho

O vetor $(a, b, c, d)^T$ é decodificado para a curva de gatilhos $(V/I_D)_t$, através da função geração do vetor $(V/ I_D)_t$. Os pontos livres "a" e "b" são escolhidos serem V/I_D respectivamente nos instantes $\tau = 0{,}1$ e $\tau = 0{,}2$ ano (perto da expiração, onde a função logarítmica não funciona bem). Entre o ponto fixo ($V/ I_D = 1$ em $\tau = 0$) e os pontos livres, é usada uma interpolação linear. A curva logarítmica "começa" (do ponto de vista da expiração) no ponto imediatamente após o ponto "b" (i. é, em $0{,}2 + \Delta t$, onde Δt é o intervalo discreto de tempo usado na solução).

É importante colocar também algumas restrições para o AG, a fim de acelerar a convergência do algoritmo. Para isso, é usada a heurística de que a curva de gatilhos é monotonicamente decrescente (crescente) com o tempo cronológico (expiração)[386]. Assim, existem as seguintes restrições no modelo:

$$b > a \tag{369}$$

$$\mathbf{c + d * \ln(0.2 + \Delta t) > b} \tag{370}$$

Note que ambas são restrições lineares (o argumento logaritmo é um argumento, não um gene). Em adição a essas restrições é necessário especificar o

[386] Como provado por Villeneuve (1999, prop.3.4), para opções gerais do tipo americana de compra sobre diversos ativos, a *superfície* de gatilhos é contínua em [0, T), é convexa em $V \in (0, \infty)$ e o limite para $t \to T$ existe e é conhecido (condição de expiração).

domínio para os genes. O modelo irá trabalhar com representação em ponto flutuante (números reais) em vez da representação binária (comum em AG). Esses domínios, para o caso específico analisado, são:

$$\mathbf{a} \in \mathbf{(1.0, 1.6)};$$

$$\mathbf{b} \in \mathbf{(1.0, 1.8)};$$

$$\mathbf{c} \in \mathbf{(1.0, 2.0)}; \text{ e}$$

$$\mathbf{d} \in \mathbf{(0.0, 0.6)}$$

O método dos AG é sumarizado como segue. Os passos compreendem:

- a inicialização da população (conjunto inicial de soluções candidatas, as quais necessitam ser factíveis com as restrições e com os domínios dos genes);
- a valoração dos cromossomas (a parte mais complexa, a qual usará a simulação de Monte Carlo e os conceitos de OR) a qual é feita em paralelo para cada geração;
- a ordenação ("ranking") dos cromossomas para a seleção dos pais;
- a seleção dos pais para a reprodução;
- a reprodução com a ajuda dos operadores genéticos de cruzamento e mutação (gerando um novo conjunto de soluções candidatas); e
- o processo evolui através de gerações (o procedimento acima é repetido para n gerações), até um ótimo (ou mais freqüente, até perto do ótimo) solução ser alcançada. A Figura 82 ilustra esse procedimento em forma de fluxograma.

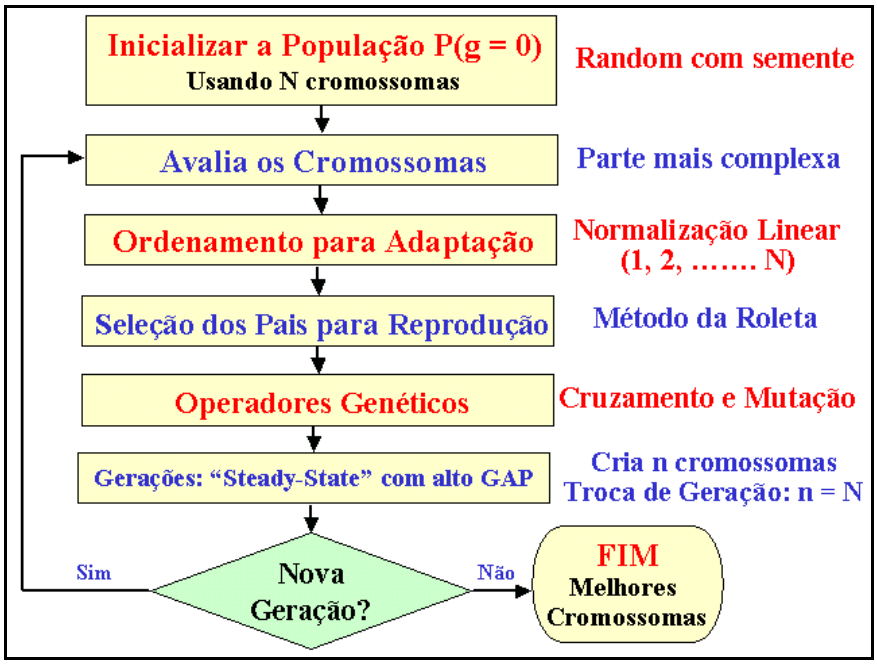

Figura 82 – Fluxograma do Método de Algoritmos Genéticos

Em Dias (2001b), o problema foi resolvido através do desenvolvimento de um software em C++. Em Dias (2000) foi usado o ambiente Excel com o software comercial RiskOptimizer, onde foram reportadas algumas críticas a esse programa porque ele usa uma pressão de seleção muito baixa e não permite o usuário alterar esse parâmetro. Em C++ foi adaptado código aberto em C do programa *Genocop*, desenvolvido por Michalewicz. Nesse programa foram usados 5 operadores genéticos: mutação uniforme; mutação não-uniforme; cruzamento aritmético; cruzamento simples; e cruzamento heurístico.

O fluxograma anterior é relativo à parte do AG, sem considerar a incerteza. A Figura 83 apresenta o fluxograma da modelagem sob incerteza, no contexto de OR. Ou seja, esse é o fluxograma básico das opções reais evolucionárias.

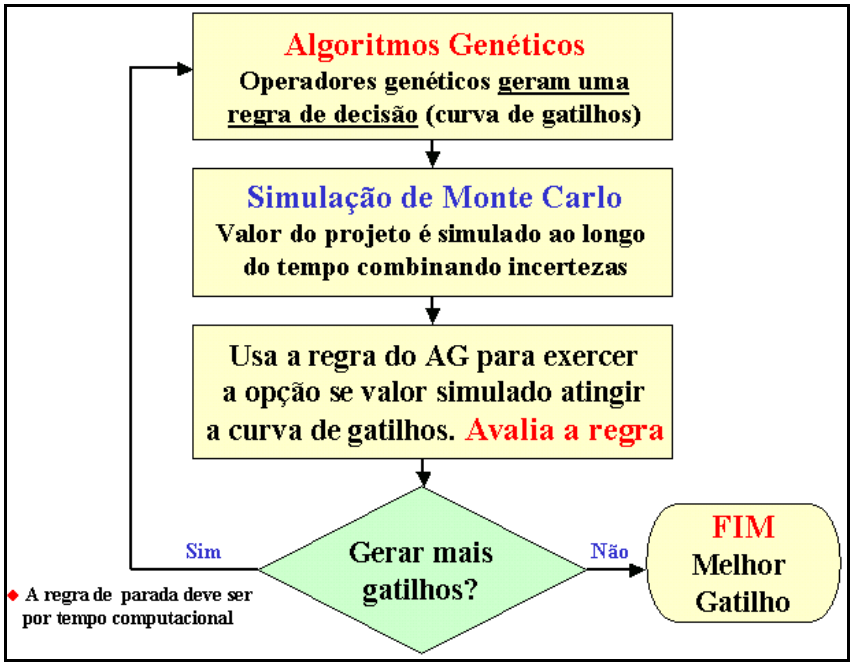

Figura 83 – Fluxograma das Opções Reais Evolucionárias

Com a simulação de Monte Carlo se simula as incertezas (processos estocásticos neutros ao risco, combinado com distribuições de revelações na data de revelação) e se usa a curva de gatilhos de cada cromossoma como regra de exercício da opção daquele cromossoma. Essas regras são valoradas: em cada iteração da simulação, cada vez que o valor normalizado do projeto toca a curva de gatilho, ocorre o exercício da opção, que gera um valor (VPL) de exercício, que é trazido a valor presente com a taxa livre de risco, armazenado, é feita nova iteração, etc. (ver Figura 75 do cap. 5).

Uma série de detalhes práticos computacionais, de interesse para a implementação e desenvolvimento de software, é discutido em Dias (2001b). Lá

se usou uma população de 40 cromossomas e 31 gerações em vários experimentos com diversas alternativas de investimento em informação. Um dos principais problemas do método de AG é o tempo computacional para avaliar todos os cromossomas de todas as gerações, usando simulação de Monte Carlo. Usando um Pentium III com 800 MHz, os tempos médios foram: tempo por cromossoma de 1,42 seg.; tempo por geração de 56,87 seg.; e tempo total (40 cromossomas e 31 gerações) de 29,38 min. Os valores obtidos foram muito próximos dos valores teóricos (diferenças da ordem de 0,5%) e as curvas de gatilho também bastante próximas, visualmente. Foram usados dois processos estocásticos e 5 alternativas de investimento em informação.

A Figura 84 ilustra uma típica evolução do valor da OR evolucionária através das gerações desse processo. Note que às vezes o valor dá saltos devido à entrada de novos cromossomas bem sucedidos.

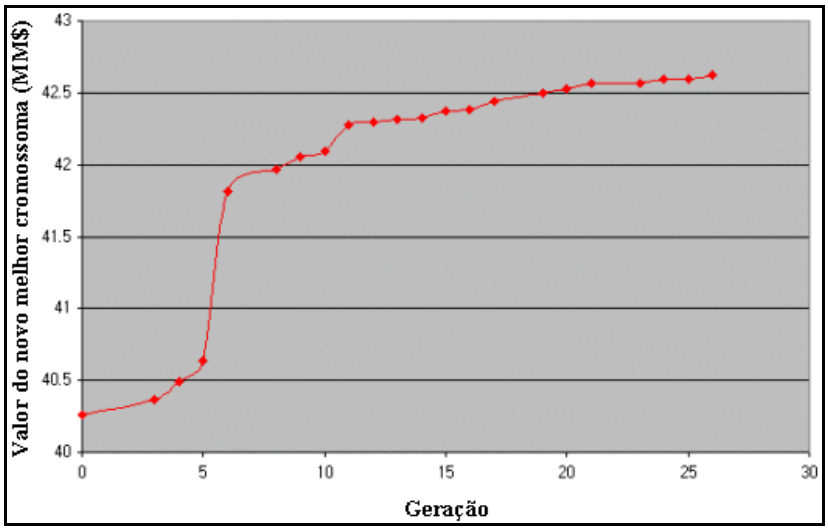

Figura 84 – Evolução do Melhor Cromossoma-Gatilho

A abordagem de OR evolucionárias se mostrou competitiva na aplicação em Dias (2001b), em relação a outros métodos mais tradicionais, tais como o método diferencial (EDP). Além disso, a abordagem evolucionária parece ser muito mais flexível para a escolha dos processos estocásticos e no modo de combinar incertezas técnicas e de mercado.

6.3. Outras Opções Reais Híbridas da Literatura

A combinação da teoria das opções reais com outras teorias vem sendo realizada para atender aplicações específicas. Geralmente se tem um problema em que tradicionalmente vem sendo aplicada uma certa teoria. Com a ótica de opções

reais, se observa que o problema pode ser mais bem analisado com técnicas de opções reais especialmente na especificação do valor resultante ("payoff") – usando o valor da opção real, e na especificação da decisão ótima (gatilho, momento ótimo de exercício da opção), mas sem rejeitar toda a teoria tradicional que analisa o problema. A seguir serão apresentados alguns exemplos.

6.3.1. Teoria das Restrições Combinada com Opções Reais

Rochman (2002) analisou a combinação da *teoria das restrições* com a teoria das opções reais, através de métodos de contabilidade gerencial para avaliar uma firma. A teoria das restrições (TOC) é um ramo da *ciência de gerenciamento* inventado pelo físico e consultor de negócios Eliyahu M. Goldratt, exposto no popular livro "A Meta"[387] (ver, por ex., McMullen, Jr., 1998, p.2-3, 30).

TOC vê uma firma como um sistema cuja meta é lucrar no curto e longo prazo, sujeito a condições de segurança e satisfação dos empregados e sujeito à satisfação do cliente. Para atingir a meta, a firma tem de identificar e gerenciar as suas *restrições* – ou limites. Essas restrições tanto podem ser externas – tais como o mercado, o governo, a legislação, etc., como podem ser internas – tais como uma máquina, capacidade instalada, normas da companhia, sistema contábil, etc. Restrição aqui significa qualquer limitação que impeça que o sistema atinja um desempenho maior em relação à sua meta. Todo sistema tem pelo menos uma restrição, caso contrário seu desempenho seria infinito. A identificação das restrições permite focar as ações de melhoria para permitir aumentar o desempenho, por ex., numa corrente o elo mais fraco é que tem de ser reforçado para aumentar a capacidade de tração da corrente, é inútil reforçar os elos fortes.

TOC é uma ferramenta usada para um processo dinâmico de melhoria da firma em direção a meta. Rochman (2002) caracteriza esse processo dinâmico através de 5 passos:

1. Identificar as restrições do sistema;
2. Decidir como explotar as restrições do sistema;
3. Subordinar todo o resto à decisão acima;
4. Elevar as restrições do sistema; e

[387] Escrito no começo da década de 80 esse livro (*best-seller*) expõe a sua teoria na forma de um romance e mostra a dificuldade de um gerente de fábrica em administrar sua empresa. Nele, Goldratt critica os métodos de administração tradicionais e propõe métodos científicos simples.

5. Se nos passos anteriores uma restrição tiver sido quebrada, voltar ao passo 1. Não permitir que a inércia cause uma restrição ao sistema.

Para evitar que inércia se torne uma restrição, Goldratt criou os chamados "processos de raciocínio da TOC". Esses processos são baseados na lógica e nas relações de causa-efeito da física e foram criados para ajudar a resolver problemas de gerenciamento da firma. "Árvore-Lógica" e suas variantes são ferramentas típicas desses processos. Os três questionamentos principais gerados com esses processos são: O que mudar? Para o que mudar? e Como causar a mudança?

Na prática a TOC é implementada através de um sistema de contabilidade gerencial adaptado para essa metodologia conhecido por "throughput accounting". Esse sistema usa 5 medidas ou métricas que são fornecidas pelo sistema contábil, incluindo conceitos relacionados à produção, investimento/estoques, despesas operacionais, lucro líquido e retorno do investimento (ROI). Essa última métrica é simplesmente o lucro líquido dividido pelo investimento.

Rochman (2002) coloca como a meta do sistema maximizar o ROI sujeito às restrições do sistema, e no seu exemplo considera dois produtos, sendo que o preço de um dos produtos segue um processo estocástico. Ele apresenta uma metodologia para considerar a flexibilidade no "mix" de produção de forma a calcular o valor da firma gerenciada por TOC em termos de opções reais.

Uma crítica relevante que se pode fazer ao modelo de TOC em Rochman (2002) é que o ROI não é a métrica mais adequada para a análise econômica.

Por outro lado, TOC é uma metodologia que trabalha dinamicamente as restrições de modo a aumentar o número e o valor das opções operacionais da firma. Por ex., se a firma tem um conjunto ("mix") de produtos possíveis de serem produzidos, em função da demanda por cada produto a firma pode não só fazer alocações ótimas de curto prazo das produções de cada produto, como também trabalhar as novas restrições para aumentar o desempenho em direção à meta de lucro, dada a evolução do mercado. Se a firma é gerenciada de forma a mudar dinamicamente em direção à meta, isso aumenta o valor da opção de alterar o "mix" de produção.

A discussão acima conclui que se a firma A usa o TOC enquanto que a firma B não usa o TOC, *ceteris paribus*, a firma A terá maior valor de opção real do que a firma B. Isso sugere a seguinte aplicação básica da teoria das opções reais híbridas na ciência de gerenciamento:

- Os ganhos no uso do TOC, observados em várias industrias, podem (devem) ser computados por opções reais, capturando a dinâmica de melhoria contínua em direção a meta de lucro num mercado onde as demandas (preços) absoluta e relativa dos produtos são estocásticas.

6.3.2. Opções Reais Nebulosas

A combinação da teoria ou lógica nebulosa ("fuzzy"), também chamada de *lógica difusa*, com a teoria das opções reais, vem sendo desenvolvida especialmente pela escola européia (finlandesa em particular). Um exemplo de aplicação em OR é do artigo de Zmeskal (2001), que valorou uma firma como uma opção européia. A lógica nebulosa procura modelar a incerteza de uma maneira alternativa à teoria da probabilidade, conhecida pela *teoria da possibilidade*. Ela procura trabalhar a imprecisão da informação fornecida pelas pessoas de uma maneira lógica e matemática, usando algumas operações. O seu sucesso está ligado à capacidade de quantificar *conceitos psicológicos e discursos*. Como usa conceitos simples de teoria dos conjuntos, esse método não demanda em si grande conhecimento matemático, o que permite uma popularização em várias áreas do conhecimento. Quando os conjuntos nebulosos são usados para fazer operações aritméticas, eles são chamados *números "fuzzy"*.

Por meio de um conceito conhecido como função pertinência, pode-se descrever quantitativamente o entendimento de dado atributo e refiná-lo de forma iterativa até obter uma precisão desejada. Um conjunto nebuloso é definido no contexto de um discurso e pode ser representado como um conjunto de pares ordenados de um elemento genérico x e seu grau de pertinência p. Esse grau de pertinência é obtido através de uma função de pertinência, a qual mapeia os elementos do conjunto do discurso no intervalo unitário [0, 1]. Sendo mapeado de forma similar ao feito com a probabilidade (também no intervalo unitário), é natural que se pense em usar essa representação em simulações de Monte Carlo e em outros métodos em que a teoria mais tradicional de probabilidades é aplicada.

Lazo (2004) fez um detalhado estudo em aplicações de OR, usando números "fuzzy" para representar as incertezas técnicas. Ele obteve uma grande redução do tempo computacional em relação aos casos em que foram usadas distribuições de probabilidades convencionais.

6.3.3.
Opções Reais e Teoria da Utilidade Esperada

Alguns autores, especialmente aqueles com formação na escola de análise de decisão tradicional (ver item 3.1, ou o livro texto de Raiffa, 1968), desenvolveram modelos e aplicações combinando a teoria das OR com a teoria de preferências chamada de teoria da utilidade esperada. Um dos artigos mais conhecidos nessa área é o de Smith & Nau (1995). Eles apontam que a análise de decisão estende as aplicações de OR para o caso de mercados incompletos. Numa linha similar aparece também o artigo de Henderson & Hobson (2002).

Na literatura aplicada de OR, existem vários artigos combinando a teoria da utilidade com OR. Dois exemplos em petróleo são: Lima & Suslick & Nepomuceno Filho (2004) e McCardle & Smith (1998). Entretanto, a tese irá discordar de McCardle & Smith (1998, abstract) de que a teoria das opções seja sinônimo de "ativos contingentes" e que a programação dinâmica estocástica não seja ferramenta da teoria das OR e sim especificamente de análise de decisão. Como discutido no cap.2, a principal característica da teoria das OR é ressaltar o valor da opcionalidade que existe na imensa maioria das decisões de investimento, especialmente sob incerteza, e não *como* essa opcionalidade é valorada. Lembrar, por ex., que o livro de Dixit & Pindyck (1994) usa tanto o método de ativos contingentes como a programação dinâmica para buscar o valor da opção real e a regra ótima que o maximiza.

A função utilidade U(x) mais usada nesses modelos é a utilidade exponencial, como por ex. em Lima & Suslick & Nepomuceno Filho (2004) e em Smith & Nau (1995). Essa função é dada pela equação abaixo para um valor monetário x qualquer:

$$\mathbf{U(x) = a - b\ exp(- x / \varsigma)} \qquad \mathbf{(371)}$$

Onde a e b são constantes e ς é um índice de aversão ao risco. Sendo x uma v.a., usa-se o conceito de *utilidade esperada* E[U(x)] nas decisões baseadas nessa teoria clássica de preferências.

As críticas no uso da teoria da utilidade de um decisor no caso de corporações são: (a) o decisor pode considerar aversão a riscos que são diversificáveis para os acionistas, mas não para os empregados; (b) o decisor avalia riscos em geral de forma diferente do mercado; (c) o decisor pode embutir

preferências regionais na avaliação de riscos; (d) o decisor muda, tem objetivos de curto-prazo devido aos incentivos contábeis e isso pode influenciar a sua utilidade. Isso tudo pode levar a uma discrepância entre valores de mercado e valores do decisor, o que é ruim mesmo com as imperfeições do mercado.

Uma alternativa interessante nessa integração de teorias foi a do artigo de Kasanen & Trigeorgis (1995), em que os autores propõem uma função utilidade do mercado no lugar da utilidade do decisor que é mais subjetiva e instável. Seria uma *utilidade agregada* dos investidores da corporação. Alguns autores criticam isso afirmando que o mercado não pode ter utilidade (Teisberg, 1995, p.45, n. 7).

Na abordagem de Smith & Nau (1995), a integração de OR e análise de decisão é feita da seguinte forma: (a) usam-se probabilidades (ou processos estocásticos) neutras ao risco para a incerteza de mercado; (b) computa-se o VPL usando a taxa livre de risco; e (c) calculam-se prêmios de risco para o caso da incerteza técnica e a seguir usam-se certezas equivalentes baseadas nas preferências dadas pela função utilidade exponencial. A discordância do autor dessa tese se dá no último item, já que a incerteza técnica não demanda prêmio por investidores diversificados, que é o caso de acionistas de corporações como as que atuam no setor petróleo (ver item 3.1).

Como foi comentado antes, o autor da tese considera que o nicho mais importante (e correto) de aplicação para a combinação da teoria das OR e da teoria de preferências (a utilidade esperada é de longe a mais importante), é o de opções reais para o consumidor. Ou seja, considerar as preferências dos consumidores ao desenhar produtos com opções (ou flexibilidades) embutidas. Um exemplo é o fenômeno dos chamados "restaurantes a quilo", onde o consumidor tem uma grande flexibilidade para escolher a quantidade e tipos de alimentos, conforme as suas preferências, além de atender outra preferência dos mesmos como a necessidade de alimentação rápida nos grandes centros urbanos. Outro exemplo é o automóvel "flex-fuel", onde o consumidor pode escolher o combustível em função do preço e reduz bastante o risco de desabastecimento de álcool, o qual o consumidor brasileiro tem grande aversão [388].

[388] O desabastecimento do mercado de álcool automotivo foi um dos grandes motivos da queda drástica das vendas de automóveis a álcool no Brasil na década de 90.

6.3.4.
Opções Reais e Preferências via Teoria dos Prospectos

A principal alternativa à teoria da utilidade esperada para modelar as preferências de agentes tomadores de decisão é a *teoria dos prospectos* ("prospect theory"), apresentada no artigo seminal de Kahneman & Tversky (1979). Essa teoria foi laureada com o Prêmio Nobel de Economia em 2002 de Kahneman (Tversky faleceu em 1996) por "*ter integrado métodos de pesquisa da psicologia na ciência econômica, especialmente no que concerne a julgamento humano e decisão sob incerteza*"[389]. Deve-se ressaltar que essa foi uma vitória da abordagem híbrida na ciência, pois houve a combinação de psicologia e economia/finanças.

O nome "prospectos" é derivado da análise empírica de como as pessoas escolhem prospectos com diferentes valores do binômio risco-retorno. Experimentos mostram que a escolha dos prospectos não é consistente com a teoria da utilidade esperada, enquanto que a teoria dos prospectos incorpora esses fatos empíricos observados. Assim, a teoria dos prospectos é uma *teoria positiva* (como as pessoas decidem) enquanto que a teoria da utilidade esperada é predominantemente uma *teoria normativa* (como as pessoas *devem* decidir)[390].

Incorporando os fatos empíricos estilizados, Kahneman & Tversky (1979) desenvolvem uma teoria que é consistente com o comportamento das pessoas em jogos lotéricos (e outros jogos de azar) e em seguro. Nesses prospectos as pessoas superestimam resultados de baixa probabilidade, que seriam inconsistentes com outras escolhas das pessoas à luz da teoria da utilidade esperada. Na teoria dos prospectos, a função valor V(.) é atribuída a ganhos e perdas em relação a um ponto de referência ξ (*status-quo*) em vez de atribuir ao valor do ativo em si. Além disso, essa função valor é normalmente côncava para ganhos e convexa para perdas, e tem uma maior inclinação (mais severa) para perdas que para ganhos, ou seja, a derivada à esquerda é maior que a derivada à direita do ponto de status-quo, $V'(\xi-) > V'(\xi+)$. Assim existe uma "quina" no ponto ξ que torna a função valor não diferenciável. A Figura 85 a seguir ilustra a função valor nessa teoria.

---

[389] Tradução do comunicado curto oficial do Prêmio Nobel em Econômica de 2002.

[390] List (2004) em uma série de experimentos mostrou que a teoria dos prospectos é mais consistente com o comportamento de consumidores inexperientes, enquanto que consumidores muito experientes se comportam de maneira mais consistente com a teoria clássica da utilidade.

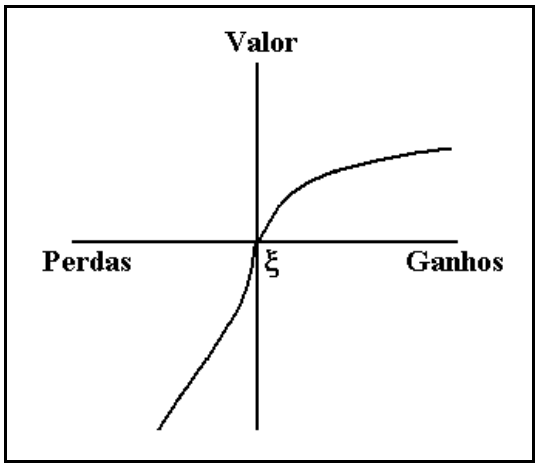

Figura 85 – Função Valor na Teoria dos Prospectos

O artigo recente de Kyle & Ou-Yang & Xiong (2004) faz uma combinação da teoria dos prospectos com a teoria das opções reais. Além da relevância teórica de combinar duas teorias premiadas com o Prêmio Nobel, o artigo tem grande importância prática, pois apresenta metodologias para trabalhar com uma função valor não-diferenciável. A condição de primeira ordem para otimização não pode ser aplicada. Como Kyle et al ressaltam, a *condição de contato-suave* ("smooth-pasting") – suficiente para o ótimo sob incerteza no caso tradicional, também não pode ser aplicada no contexto da função valor usada na teoria dos prospectos.

Eles analisam a decisão individual de um agente que tem um projeto, que pode se pagar imediatamente em caso de ocorrência de um evento que segue um processo de Poisson. O agente pode esperar por esse evento ou liquidar o projeto (exercer uma opção real) obtendo como compensação um valor que flutua segundo um movimento geométrico Browniano (MGB). Assim, é um problema de *parada ótima* tradicional, como em opções reais, mas com complicações derivadas da função valor da teoria dos prospectos. O agente tem uma função preferência (valor) com duas peças de função exponencial. O ponto de referência ξ (*status-quo*) nesse artigo é assumido ser o ponto de nivelamento ("*break-even*"), $\xi = 0$, em que o projeto apenas se paga. Acima de ξ a função valor é exponencial côncava (ganhos) e abaixo de ξ é exponencial convexa (perdas) com parâmetros tais que existe uma *quina* na junção ξ dessas duas exponenciais.

O uso da teoria dos prospectos num contexto dinâmico, em que a função valor depende de uma variável que segue um processo estocástico, apresenta a desvantagem de trabalhar com uma função-valor não diferenciável. Isso significa que não é possível aplicar o Lema de Itô, ferramenta fundamental para cálculo de

derivativos. Logo, trabalhar com teoria de prospecto é mais complicado matematicamente do que no caso de utilidade esperada ou em opções reais tradicionais. Felizmente existe uma *generalização do Lema de Itô* para funções de variáveis estocásticas não diferenciáveis, usando o conceito de *tempo local*, chamada de Fórmula de Tanaka[391]. Essa fórmula inclui um termo em que o tempo local ao redor do status-quo, $L(\xi)$, multiplica a diferença das duas derivadas da função valor (derivadas à direita e à esquerda), isto é, $L(\xi)\,[V'(\xi+) - V'(\xi-)]$ no caso mais simples de V ser função duma única variável estocástica, por ex., V(P) onde P é o preço do produto.

O artigo se beneficiou das propriedades do tempo local L(0) ser não-negativo e ser um processo não-decrescente para demonstrar uma regra de parada ótima (regra de exercício da opção). Como na teoria de prospecto a função valor é tal que $V'(\xi+) - V'(\xi-) < 0$, o termo adicional da Fórmula de Tanaka reduz o valor esperado da função valor $E_t[V_{t+s}]$, como ocorre quando se aplica o conceito de *desigualdade de Jensen* em função convexa.

Dependendo dos parâmetros do problema (das duas peças de funções exponenciais e do processo estocástico), em vez de uma solução de gatilho dada pela condição de contato suave ("smooth-pasting"), eles obtêm uma *solução de córner*, em que a estratégia ótima é liquidar o projeto (exercendo a opção) no ponto de nivelamento ξ. Para provar isso eles aplicaram a Fórmula de Tanaka, mostrando que a função valor tem *valor esperado máximo* se a opção for exercida quando o valor do projeto atingir o ponto de nivelamento. Intuitivamente: (a) se o projeto está hoje na faixa de perdas, a convexidade da função valor fará que ele espere até pelo menos o projeto atingir ξ, antes de liquidar o projeto; (b) se o projeto está hoje na faixa de ganhos, a grande aversão a perdas fará com que ele liquide o projeto se seu valor cair para o ponto ξ. Para outros parâmetros, pode ser ótima a liquidação imediata do projeto apenas no caso de iniciar com ganhos (e esperar por ξ em caso de iniciar com perdas). Em outros cenários de parâmetros, se obtém a liquidação imediata seja iniciando na região de perdas ou de ganhos,

[391] Ver Karatzas & Shreve (1991, seção 3.6) para detalhes da Fórmula de Tanaka e sobre o conceito de *tempo local*. Recordar que esse conceito foi mencionado no capítulo 2 para justificar a inexistência de "quinas" na função valor da opção com alternativas de escala de investimento.

ou até pode ser ótimo nunca liquidar o projeto espontaneamente (nesse caso só seria liquidado com a ocorrência do evento de Poisson).

Assim esse artigo mostrou que: (a) se necessita da versão mais geral do Lema de Itô – a Fórmula de Tanaka; (b) em vez de gatilhos obtidos através da condição de contato suave se pode ter obter soluções de córner para o problema de maximização; (c) pode até nunca haver solução.

Deve-se notar também, conforme ressaltam Kyle et al, que a teoria dos prospectos é uma teoria de escolha onde o "consumo" *ocorre apenas uma vez*. Aqui, apenas quando o agente liquida o projeto é que ele realiza valor (o ganho, ou a perda, ou zero) e a sua preferência é afetada[392]. Ou seja, não considera o efeito seqüencial de ter perdas enquanto espera.

Assim eles analisaram um caso teórico de grande relevância para mostrar os problemas e cuidados a tomar, mas ainda sem uma ligação mais forte com um problema prático bem definido de opções reais. A aplicação prática dessa teoria ainda tem se concentrado na decisão individual de compra ou venda de ativos de um portfólio. A extensão para opções reais é um trabalho ainda a ser feito.

6.3.5. Outras Opções Reais Híbridas

Dentro da linha de inteligência computacional, uma outra combinação de interesse da teoria das OR é com a teoria das redes neurais (ou neuronais). Taudes & Natter & Trcka (1998) usam redes neurais numa avaliação de OR de um *sistema manufaturado flexível*. Eles usam programação dinâmica sob incerteza com o algoritmo de *têmpera simulada* ("simulated annealing")[393] para selecionar os pesos da rede neural, que aproximam a função valor da OR. A incerteza é considerada através de uma simulação de Monte Carlo. A combinação mais geral da programação dinâmica com as redes neurais é chamada de *neuro-programação*

[392] Estudos experimentais, coerentes com a teoria dos prospectos, mostram que no problema de decisão de portfólio os indivíduos tendem a vender os ativos "ganhadores" (para realizar ganhos) e manter os ativos "perdedores" (para evitar realizar perdas e/ou esperar pelo "break-even") no portfólio. Mas se ao final de um certo período eles forem obrigados a vender todos os ativos, essa tendência diminui (ver Kyle et al, 2004, nota 11).

[393] Esse algoritmo usa a analogia entre o modo como um metal se resfria até uma estrutura cristalina de energia mínima ("annealing") e a busca por um mínimo de um sistema. Na simulação, cada iteração busca um ponto candidato a ser o mínimo na vizinhança do atual candidato e para isso usa a diferença entre os valores obtidos pela função-objetivo, chamada "função energia".

dinâmica ("neuro-dynamic programming"). Para teoria detalhada e estudos de casos, ver Bertsekas & Tsitsiklis, 1996.

Outra metodologia de OR híbrida advinda de teorias de inteligência computacional, usa a programação genética, especialmente a *regressão simbólica*. A idéia da programação genética é evoluir programas de computador para solucionar problemas, geralmente estruturados diagramas de árvores. A idéia da regressão simbólica é evoluir funções matemáticas a fim de obter uma solução, ou mais provavelmente, uma aproximação analítica para um certo problema. Para obter uma solução matemática, a regressão simbólica usa um conjunto de funções e operações matemáticas que são combinadas e evoluem visando resolver o problema com uma equação que seja função de todos os parâmetros relevantes. Posternak (2004) usou essa metodologia para obter uma aproximação analítica para a curva de gatilhos de uma opção cujo ativo básico segue um processo de reversão à média. Existem muitas aproximações analíticas para o caso de opções americanas de ativos que seguem um movimento geométrico Browniano, mas nenhuma para o caso de processos de reversão à média. Daí a relevância desse método. Esse é um caminho que ainda necessita de muito desenvolvimento.

Uma combinação de grande interesse vem sendo desenvolvida por dois professores de Harvard, Baldwin & Clark, sobre o poder da modularidade no desenho de sistemas computacionais em corporações e organizações de forma geral. Eles combinaram as teorias de organização industrial, opções reais e arquitetura computacional numa teoria de regras do "design" detalhada no livro texto Baldwin & Clark (2000). Os conceitos de OR permitem quantificar o valor de alternativas de sistemas computacionais com arquiteturas modulares. A visão modular permite que o sistema tenha grande flexibilidade e o valor dessa flexibilidade é maior quanto maior for a incerteza que afete o sistema em estudo. Os módulos dão grande agilidade para se adaptar às mudanças que são mais prováveis de ocorrer em caso de maior incerteza.

Existe também uma escola que combina a visão de OR com teorias sobre o pensamento estratégico especialmente em corporações. O uso de opções permite uma nova abordagem do modo de pensamento empresarial. Ajuda, por ex., a mudar a atitude em relação à incerteza, em que a visão de "medo da incerteza e minimizar investimentos" é trocada para "ganhar com a incerteza e maximizar a aprendizagem". A idéia é enfatizar e buscar oportunidades, inclusive os

investimentos incrementais derivados dos ativos existentes. A alavancagem através de opções de crescimento, mantém a firma "melhor capacitada para o jogo de negócios". Essa alavancagem diferencia a estratégia de opções da estratégia tradicional de diversificação, que só reduz o risco.

A estratégia dá as linhas-guia para a ação, mas o ambiente de negócios está em constante mudança. A análise de cenários faz as firmas pensarem em vários futuros possíveis, mas se tem de traçar hoje apenas uma estratégia para o futuro incerto, o que cria uma tensão entre estratégia e cenários que a teoria de OR pode ajudar. Assim, é necessário construir flexibilidade dentro do plano estratégico e é aí que entra o pensamento de opções. Uma das ênfases dos artigos de OR combinados com teorias de estratégia é no investimento em *capacidades*. Esse foi o foco de artigos como Kogut & Kulatilaka (2003). Também o livro de McGrath & MacMillan (2000) segue a linha de visão de OR para discutir a estratégia empresarial num mundo de freqüentes mudanças, i. é, incertezas.

7
Conclusões

7.1.
Principais Contribuições e Conclusões da Tese

Essa tese metodológica e normativa analisou a combinação de opções reais com outras teorias – opções reais híbridas, visando resolver problemas complexos de investimento sob incertezas especialmente do setor petróleo.

Nesse tópico será feita uma lista das principais contribuições dessa tese, assim como algumas conclusões. Extensões serão sugeridas no tópico 7.2.

Foi feita uma revisão sintética do estado da arte da *teoria* de OR, assim como o estado da *prática* de OR em corporações e em outras instituições. Isso foi feito em termos gerais e também focado no setor petróleo. O fato de OR incentivar o uso de novas informações, por ex., através do seqüenciamento dos investimentos, valoriza os conceitos de *aprendizagem em organizações* nessa era do conhecimento. Isso tem facilitado a difusão dos conceitos de OR em empresas e é uma motivação para essa tese abordar e dar ênfase a tópicos como valor da informação e medidas de aprendizagem.

Os capítulos 2, 3, 4, 5 e 6 apresentaram, em maior ou menor grau, algumas inovações ou novas contribuições para a literatura de opções reais. O capítulo 3, o mais extenso, foi o que apresentou a maior quantidade de inovações e por isso mereceu um detalhamento e uma formalidade maior.

No capítulo 2, foram apresentados alguns modelos que trazem algumas novidades na literatura tradicional de opções reais. Um exemplo é o modelo de escala ótima de desenvolvimento dum campo de petróleo, mostrando a existência de *regiões intermediárias de espera* (ou conjuntos desconectados de exercícios) que tinham sido ignoradas anteriormente em modelos similares. O modelo de opções de expansão, também apresentou alguma novidade[394] em termos de como modelar essas opções no contexto de desenvolvimento da produção de petróleo.

[394] Por ex., a depleção secundária agindo como um dividendo perdido que penaliza a espera no exercício da opção de expansão.

Além disso, a incerteza técnica é importante fonte de valor em aplicações de opções de expansão, motivando ainda mais os desenvolvimentos do cap. 3.

No capítulo 2 também foram estudados importantes aspectos básicos que foram usados em aplicações especialmente do capítulo 5. Um deles foi o modelo da função VPL de desenvolvimento de um campo de petróleo. O VPL é função de variáveis chaves como preços do petróleo, a qualidade e o volume de uma reserva, além da função investimento. Também foi discutida no cap. 2 a modelagem de incerteza de mercado através de processos estocásticos, em especial para os preços do petróleo. Num horizonte de 10 a 30 anos, além da maior simplicidade, o uso do movimento geométrico Browniano para modelar o preço do petróleo, parece ser bem melhor do que sugerido em boa parte da literatura de OR. Também foram abordados nesse capítulo aspectos práticos de uso de opções reais em empresas de petróleo e de regulação em E&P de petróleo.

No cap. 2, também foram apresentados alguns exemplos numéricos simples, que serviram de motivação para a necessidade prática de se estudar o valor da OR tanto no contexto de incertezas técnicas e de mercado, como nos casos com e sem interação estratégica.

No capítulo 3 foi discutida em profundidade a modelagem de *incerteza técnica*. Essa incerteza tem sido muito mal abordada na maior parte da literatura de opções reais. Um modelo adequado de incerteza técnica, que pudesse ser integrado no contexto dinâmico de opções reais, foi um dos principais objetivos dessa tese. Esse modelo permeou as aplicações no capítulo 5, inclusive se integrando ao modelo de jogos de opções reais em exploração de petróleo.

Uma proposição básica é que a incerteza técnica não demanda prêmio de risco na análise econômica de projetos em corporações com acionistas diversificados. A teoria clássica de finanças mostra que, rejeitar projetos de VPL positivo *por causa* da aversão ao risco de gerentes em relação à incerteza técnica, em média destrói valor do ponto de vista dos acionistas[395].

Os conceitos inovadores de *distribuição de revelações* e de *processos de revelação* se mostraram relevantes para ajudar a resolver importantes problemas práticos de opções reais e de jogos de opções reais, em que a incerteza técnica tem

[395] Conflitos de *agência* entre gerentes e acionistas são muito comuns na literatura de finanças. Ver por ex., Byrd & Parrino & Oritsch (1998), que gerentes podem ter *preferências diferenciais* em relação ao risco e *diferentes horizontes* para os resultados de investimentos.

um papel relevante. Esses conceitos estão diretamente ligados ao conceito de expectativas condicionais, largamente usado em finanças e em economia, o que ajudou na sua aplicabilidade. Note que as variáveis com incerteza de mercado *também* são modeladas como expectativas condicionais a uma *filtração*[396], mas indexadas pelo tempo e seguindo leis de processos estocásticos contínuos em que a incerteza em geral não é reduzida com o tempo. No caso de incertezas técnicas, essa filtração em geral é indexada por eventos (em vez do tempo) e seguindo leis de redução esperada de variância, aqui modeladas por processos de revelação.

A medida de aprendizagem η^2 proposta está diretamente associada ao conceito de distribuição de revelações. Esses conceitos apresentaram uma quantidade surpreendente (grande) de vantagens, propriedades matemáticas favoráveis e conexões com outras teorias. Isso justificou, em parte, a maior extensão do capítulo 3, que procurou explorar esses aspectos. Essa medida tem um lugar natural em aprendizagem probabilística, já que é a redução percentual esperada de variância, o que lhe confere a interpretação intuitiva de medida de redução de incerteza. Outra vantagem é a facilidade de estimação de η^2 através de métodos estatísticos populares tais como regressões e ANOVA. Isso porque essa medida pode ser vista como o R^2 de modelos paramétricos de regressões (lineares ou não), ou como somas de quadrados no contexto de ANOVA. Além disso, em essência, $\eta^2(X \mid S)$ é uma medida não paramétrica, já que independe das distribuições específicas de X e S, ela só depende das variâncias envolvidas.

A medida de aprendizagem proposta é baseada na suposição que a variância é representativa como medida incerteza nas aplicações propostas. Isso é verdade na grande maioria dos problemas de OR, VOI, finanças corporativas e economia. Mas η^2 não é uma panacéia, apesar de ser usada em diferentes aplicações não relacionadas com essa tese. Por ex., em aplicações tais como a de seguros, a variância não é representativa o suficiente, sendo necessário trabalhar com medidas de dependência para as *caudas* das distribuições, já que o foco de aplicações de seguros é analisar eventos extremos. Em alguns casos, como na teoria de comunicação de dados, usar o conceito de *entropia* para representar a incerteza pode ser mais conveniente. Porém, aqui se defende a tese de que em

[396] Em textos mais matemáticos, se especifica que o processo estocástico é condicional a uma filtração $\Im_t$. Em outros textos, isso fica subentendido para não carregar na notação.

problemas de valor econômico da informação, em OR e algumas outras aplicações, a medida η^2 tem vantagens que não foram observadas por outras medidas concorrentes usadas na literatura de VOI.

O uso da medida η^2, por ex., substitui o uso de medidas de verossimilhança (ou de confiabilidade da informação) muito usadas na literatura tradicional de VOI e na literatura Bayesiana. Vários exemplos e proposições mostraram as vantagens. A medida de verossimilhança apresenta vantagens quando já se tem os dados (usa um valor específico de S = s, advindo dos dados) para atualizar a distribuição a priori e obter *uma* distribuição posterior usando a lei de Bayes. Para análises ex-ante, como nos problemas de VOI, essas vantagens desaparecem, inclusive pela existência de infinitas (no caso de distribuições contínuas) possíveis distribuições posteriores. Além disso, uma medida de confiabilidade não é tão boa no contexto de aprendizagem, já que inexiste uma relação monotônica entre os conceitos de confiabilidade e aprendizagem econômica. Ou seja, o seu justo sucesso na literatura estatística não deveria se repetir no contexto econômico de VOI. Além disso, a *distribuição a priori* aqui teve uma importância até maior do que tem na literatura Bayesiana tradicional. Aqui, ela é não apenas um *ponto de partida*, representando o conhecimento inicial sobre um ativo[397], como um *ponto de chegada*, em termos de ser (ex-ante) o *limite* de um processo de revelação total. Assim, as OR são Bayesianas pela relevância da distribuição a priori no modelo, embora o teorema de Bayes não tenha tido aqui um papel relevante.

A tese procurou desenvolver uma teoria de medidas de aprendizagem probabilística, através de vários exemplos intuitivos e da formalização de uma lista de axiomas que essas medidas de aprendizagem devem ter para serem adequadas em problemas de valor econômico da informação, incluindo problemas de opções reais. A discussão de alguns detalhes técnicos se mostrou importante em uma classe de aplicações. Por ex., os limites de Fréchet-Hoeffding foram importantes quando a estrutura da informação usou a distribuição da v.a. S (sinal ou informação), como nas aplicações de fator de chance exploratório (v.a. de

[397] Esse conhecimento inicial, no caso de um campo de petróleo, geralmente custou dezenas de MM$. Ignorar ou dar pouca importância à distruição a priori, parece ser inaceitável nesse caso.

Bernoulli) do cap. 3[398] e na aplicação de jogos de opções do cap.5. No cap. 3 se definiu o conceito de *estrutura de informação flexível*, que dá as características probabilísticas relevantes do sinal (ou nova informação) S. Esse conceito foi usado nas aplicações do cap. 5 para definir como integrar a nova informação no modelo de OR. Nessas aplicações, a medida de aprendizagem η^2 foi o elemento comum e importante da estrutura de informação flexível.

A preocupação com a consistência da distribuição bivariada com FC e S usando os limites Fréchet-Hoeffding, foi um *diferencial* dessa tese em relação à literatura que examina dependência na exploração de petróleo, já que essa análise não foi feita anteriormente para esse tipo de aplicação. Essa análise tem sido feita quase apenas em estudos matemáticos sobre distribuições multivariadas, mas ela é importante em estudos aplicados por colocar limites no aprendizado possível.

O estudo de *processos de revelação de Bernoulli*, i. é, de seqüências de distribuições bivariadas de Bernoulli, se mostrou bastante relevante em aplicações de exploração de petróleo e de grande interesse para a teoria. Nas aplicações, exemplos são os jogos de OR analisados no cap. 5, e em análises de portfólios exploratórios ou análises de entrada em novas bacias ou áreas de fronteira, numa visão de longo prazo (aplicações mencionadas, mas não desenvolvidas por questões de espaço). Na teoria, esse estudo tem interesse, pois uma seqüência de distribuições bivariadas de Bernoulli é a seqüência mais simples possível de distribuições multivariadas. Além disso, a distribuição de Bernoulli pode ser vista como o elemento básico da gênese de várias outras distribuições conhecidas.

No capítulo 4, foram sumarizados os conceitos básicos da teoria dos jogos, especialmente os conceitos de equilíbrio de Nash (EN) e equilíbrio perfeito em subjogos (ENPS), a fim de modelar, de forma endógena, a interação estratégica entre as firmas. Em seguida, foram analisados alguns dos mais importantes jogos tradicionais. Por causa das aplicações do capítulo 5, a ênfase foi nos jogos guerra de atrito e barganha cooperativa. Foi mostrado que a interação estratégica principal no caso de exploração de petróleo é modelada com a *guerra de atrito*. No caso do jogo de *barganha*, o foco foi na *solução cooperativa de Nash* devido à

[398] E foi importante do ponto de vista teórico e prático para mostrar que, se assumir que FC e S são v.a. intercambiáveis, então não é necessário se preocupar com esses limites, pois a distribuição bivariada intercambiável de Bernoulli aceita qualquer intensidade de aprendizagem.

sua importância prática e pela sua conexão com o ENPS do modelo de barganha não-cooperativa, em casos limites do modelo de ofertas alternadas de Rubinstein.

No cap. 4 foi introduzida e discutida a emergente literatura de jogos de opções reais. Como nova contribuição, foi mostrado que, pelo menos no caso mais comum de jogos de OR onde os equilíbrios são especificados através de *estratégias de gatilho*, existem dois métodos que solucionam de forma equivalente esses dois jogos, o *método diferencial* e o *método integral*. Foram estudados exemplos clássicos de duopólios simétricos e assimétricos sob incerteza. Além de indicar a aplicabilidade dos dois métodos de solução, o formato da solução do caso assimétrico, permite uma extensão imediata para outras funções demanda. Também foi discutido o caso de oligopólio sob incerteza, especialmente pelo fato desse modelo usar outros conceitos que simplificaram de forma extraordinária a solução, facilitando a simulação de oligopólios.

Os equilíbrios são de *Markov* no sentido de serem condicionais às variáveis de estado correntes e não à sua história. Por ex., no modelo de duopólio simétrico, se o preço inicial for abaixo do gatilho do líder (P_L), então existem 50 % de chances para cada jogador ser o líder e 0% de chances de haver investimento simultâneo. Se o preço inicial for igual ou superior ao gatilho do seguidor (P_F), então existem 100% de chances de ambos exercerem simultaneamente as suas opções. No caso de $P(t = 0) \in (P_L, P_F)$, então existem chances tanto de qualquer uma das firmas ser líder e a outra seguidora, como a chance de exercício simultâneo por "equívoco", i. é, as ações que levam as firmas a terem os piores resultados possíveis, mesmo abaixo do valor do seguidor, podem ser equilíbrio.

No capítulo 5 foram apresentadas aplicações mais detalhadas que ilustraram principalmente as teorias desenvolvidas nos capítulos 2, 3 e 4. A primeira aplicação foi relacionada ao desenvolvimento de campos de petróleo sob incertezas de mercado (preço e investimento) e sob incertezas técnicas (qualidade e volume da reserva), ou seja, 5 variáveis de estado (4 incertezas e o tempo, já que a opção é finita), o que mostrou a relevância das distribuições de revelações na prática. Nessa aplicação, o problema foi formulado para efetuar a seleção de alternativas de investimento em informação, com diferentes custos de aprendizagem, diferentes tempos de aprendizagem e diferentes poderes de revelação (medidos por η^2). A consideração de todos esses importantes elementos juntos, não tinha sido feita antes na literatura tradicional de VOI e nem no

contexto de OR. A solução relativamente simples, com a ajuda de uma simulação de Monte Carlo, num problema aparentemente tão complexo, mostrou o poder prático dessa metodologia.

Outra aplicação importante apresentada no cap. 5 foi a de jogos de OR no contexto de exploração de petróleo. Essa aplicação foi dividida em duas partes – ou dois jogos – que se integram. O primeiro jogo é o não-cooperativo de guerra de atrito em que o prêmio em disputa é a revelação de informação advinda da perfuração do prospecto do rival, que se torna pública. No caso assimétrico, esse jogo da espera tem, em geral, um único ENPS que é a firma mais "forte" ganhando o prêmio, no caso sendo a firma seguidora (que exerce, se exercer, a opção depois do líder), onde forte significa ser o mais paciente. Esse jogo não é de todo satisfatório, pois deixa ganhos mútuos de revelação de informação sem ser explotados. A solução Pareto-ótimo nesse caso é a troca de jogo a favor do jogo da barganha, com a negociação de um contrato de parceria. O jogo de barganha é analisado através da solução cooperativa de Nash. Tanto no jogo de guerra de atrito como no jogo da barganha são usadas estratégias de gatilhos, em que opções são exercidas em "tempos de parada", definidos como o primeiro instante em que a variável de estado (aqui preço do petróleo) atinge um certo gatilho. Foram estabelecidas janelas (intervalos) de preços em que o jogo guerra de atrito tem relevância (i. é, efetiva interação estratégica) e foi mostrado que nessa janela o jogo de barganha pode dominar totalmente o jogo guerra de atrito, a depender do ganho adicional de revelação de informação obtido com a parceria, devido à revelação de informação privada (detalhes técnicos que não são publicados).

Assim, a troca do jogo não-cooperativo de guerra de atrito pelo jogo cooperativo de barganha, através de um contrato de parceria, na maioria dos casos práticos é a melhor alternativa. A companhia de petróleo tem mais incentivos para propor a parceria quanto menor for o VME dos prospectos e maior for o grau de dependência dos prospectos. No entanto, dados econométricos (Hendricks & Porter, 1996) mostraram que, no caso da fase de perfuração exploratória, a conduta não-cooperativa é a predominante. Vários fatores podem explicar isso, desde custo de transação para deixar a posição inicial (o jogo começa como não cooperativo), conservadorismo corporativo e/ou medo de fazer um mau negócio

na troca de participações em ativos, assimetria severa entre os jogadores[399], ou até mesmo falta de consciência de *todo* o potencial de ganho que é possível no caso de prospectos dependentes, que são *mais valiosos e de menor risco* quando em parceria. Em muitos casos, os gerentes têm consciência da redução de risco, mas não do ganho de valor relevante que pode ser compartilhado com a revelação de informação de prospectos dependentes. Assim, essa tese estimula parcerias, ao destacar a quantificação do ganho adicional que pode ser obtido numa parceria, devido *apenas* à questão da revelação de informação de prospectos dependentes.

No capítulo 6, foram apresentadas algumas outras OR híbridas. Um destaque foi o método das OR evolucionárias. Esse método tem a vantagem da *flexibilidade* de modelagem por ser um método de otimização de *uso geral*. Ele usa conceitos evolucionários tais como os *algoritmos genéticos*, que são úteis especialmente para casos complexos, onde não existe um método analítico ou direto para encontrar o ótimo. Outra vantagem é que não demanda grandes conhecimentos matemáticos de técnicas de otimização sob incerteza para resolver problemas de OR. A maior desvantagem, o tempo computacional para avaliar por simulação de Monte Carlo as dezenas de gerações de dezenas de soluções-candidatas (cromossomas), tende a ser cada vez menor devido ao aumento exponencial da velocidade de processamento computacional ao longo do tempo.

Nesse sentido, as OR evolucionárias podem ter um papel importante no uso efetivo de OR em empresas num futuro próximo. A difusão prática de OR deverá ser acompanhada pela disponibilidade de programas "amigáveis" de OR. Para isso, no médio prazo a popularização de OR dependerá de programas de uso geral, que não demandem conhecimentos matemáticos sofisticados, em que o usuário possa escolher processos estocásticos de um menu, assim como escolher distribuições a priori de variáveis com incerteza técnica e a estrutura da informação dos sinais (usando η^2?), que possa incluir outros agentes no modelo através da ativação de opções de interação estratégica para que o programa possa pesquisar equilíbrios, etc. Essas são algumas das importantes características práticas que devem ser demandadas. Programas de OR evolucionárias podem ter uma importante participação nesse mercado, devido às suas qualidades práticas.

---

[399] Basta uma de duas firmas não ter interesse que a parceria não sai. Isso pode ser explicado por assimetrias. Exs.: firma com poucos prospectos x firma com muitos prospectos; firma com prospectos que tem prazo grande (leilão recente) x firma com prospectos expirando, etc.

7.2. Sugestões de Extensões do Trabalho

Diversas extensões e estudos adicionais podem ser feitos tanto no plano teórico como prático.

A aplicação da teoria desenvolvida pelo autor sobre distribuições de revelações já vem ocorrendo. Por ex., em projetos do Pravap 14 para o caso de opções de expansão, onde a incerteza técnica é bastante relevante. No entanto, outras aplicações são possíveis usando esse conceito. Um exemplo é o caso mencionado no cap. 2 sobre *poços inteligentes*. É uma aplicação complexa, mais pelo problema de como modelar a ação ótima de controle com a informação, do que pelo problema da análise econômica do valor do mapa das ações ótimas para cada possível informação recebida.

No plano teórico, diversas análises podem ser feitas especialmente para estender a nova teoria apresentada no cap. 3. Por ex., seria de interesse uma análise mais profunda da medida de aprendizagem η^2 dentro da teoria de comparação de experimentos de Blackwell (item 3.1.4.2), a fim de estabelecer um teorema similar ao de Blackwell para η^2. Também, o teorema da decomposição do aprendizado aqui apresentado, poderia ser estendido de alguma maneira para o caso de v.a. dependentes compondo a soma de funções da variável de interesse.

No caso de processos de revelação de Bernoulli, várias novas pesquisas poderiam ser feitas. Aqui foram analisados alguns processos. Vários outros processos poderiam ser analisados, por ex., *outros* processos que fossem totalmente convergentes ou que fossem recombinantes. Além disso, pode ser de interesse a análise de outras propriedades desses processos.

Em termos de aplicação, pode-se explorar o efeito combinado de *dois processos de revelação de Bernoulli em paralelo*: um endógeno (com sinais fortes, mas menos freqüentes) e um exógeno (com sinais fracos, mas com maior freqüência). O processo endógeno pode tanto ser numa aplicação com interação estratégica, como num caso sem essa interação, em que uma firma tem uma seqüência de atividades exploratórias que revelam informações para os prospectos ainda não perfurados. Outra extensão é na análise de portfólio exploratório com oportunidades dependentes, tanto em termos do valor desse portfólio, como para determinar uma seqüência ótima econômica de exercícios de opções exploratórias.

Diversos outros jogos de interesse para a indústria do petróleo poderiam ser analisados no contexto de jogos de OR. Por ex., jogos de sinalização e em especial os jogos de leilões. No cap. 4 foi sugerido o uso da medida η^2 para modelar a incerteza sobre tipos de jogadores em leilões. Existe uma carência de literatura de jogos de *OR* aplicados a leilões. De interesse prático é a integração de jogos de leilões com o de barganha. A idéia seria analisar a alternativa de participar do leilão através de uma coalizão (parceiros) para um subconjunto das áreas oferecidas e em outras áreas participar sozinha do leilão.

Uma extensão complexa, mas interessante, foi sugerida no item 5.3, em que se poderia usar um modelo similar ao de valor da informação do item 5.2, para modelar a *fase de delimitação* e integrá-lo no modelo estratégico do item 5.3.

Outra extensão no modelo estratégico do item 5.3 é permitir que, em caso de revelação de informação (pública), houvesse alguma revelação também sobre a qualidade da reserva q. Além disso, em caso de parceria, poderia ser considerada revelação de informação privada adicional sobre o volume[400].

Se essa tese servir de motivação para novas pesquisas nas literaturas de opções reais, valor da informação, jogos de opções e de outras opções reais híbridas, então a tese terá cumprido um de seus objetivos mais importantes.

Nesse sentido, em vez de ser um ponto de chegada, é preferível que essa tese seja considerada um ponto de partida.

[400] Já que detalhes que não são divulgados ao público, tais como a profundidade do contato óleo-água, permite alguma revisão do volume de reserva no prospecto vizinho.

8
Referências Bibliográficas

ABEL, A.B.; DIXIT, A.K.; EBERLY, J.C.; PINDYCK, R.S. Options, the Value of Capital, and Investment. **Quarterly Journal of Economics**, August, 1996, p.753-777

ADELMAN, M.A.; KOEHN, M.F.; DE SILVA, H. The Valuation of Oil Reserves. **Proceedings of 1989 SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium**, p.45-52. Dallas, March, 1989. SPE paper nº 18906.

ADELMAN, M.A.; WATKINS, G.C.; The Value of United States Oil and Gas Reserves. **MIT Center for Energy and Environmental Policy Research**, May, 1996, 92 p.

AGLIARI, A.; PUU, T. A Cournot Duopoly with Bounded Inverse Demand Function. In: Puu, T.; Sushko, I. (Ed.). **Oligopoly Dynamics – Models and Tools**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002, p. 171-194

ALLEMAN, J.; NOAM, E. (Ed.). **The New Investment Theory of Real Options and Its Implications for Telecommunications Economics**. Norwell (EUA): Kluwer Academic Publishers, 1999, 280 p.

AMRAM, M.; KULATILAKA, N. **Real Options – Managing Strategic Investment in an Uncertain World**. Boston: Harvard Business School Press, 1999, 246 p.

ANP (AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO). Caso BG vs. TBG Referente ao Conflito Relacionado ao Serviço de Transporte Não Firme. **Parecer Técnico**, Superintendência de Comercialização e Movimentação de Gás Natural, Rio de Janeiro, 26/01/2001. Disponível em www.anp.gov.br, Gás Natural, Resolução de Conflitos, ou diretamente em www.anp.gov.br/doc/gas/release_BG_TBG.pdf. Acesso em 10/10/04.

ANP (AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO). Caso Enersil vs. TBG Referente ao Termo Aditivo ao Contrato Assinado em 29/09/2000. **Parecer Técnico**, Superintendência de Comercialização e Movimentação de Gás Natural, Rio de Janeiro, 26/01/2001. Disponível em www.anp.gov.br, Gás Natural, Resolução de Conflitos, ou em www.anp.gov.br/doc/gas/release_enersil.TBG.pdf. Acesso em 10/10/04.

ANP (AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO). Considerações sobre a Minuta de Portaria de Livre Acesso às Instalações de Transporte de Gás Natural. **Nota Técnica 037/2002-SCG**, de 01 de agosto de 2002. Em www.anp.gov.br, Notas Técnicas ANP ou diretamente em www.anp.gov.br/doc/gas/Nota_37_2002.pdf. Acesso em 10/10/04.

ARNOLD, B.C.; CASTILLO, E.; SARABIA, J.M. Bivariate Distributions Compatible or Nearly Compatible with Given Conditional Information. In:

Charalambides et al (Ed.). **Probability and Statistical Models with Applications**. Boca Raton (EUA): Chapman & Hall/CRC, 2001, p.225-237

ARNOLD, T.; SHOCKLEY, JR., R.L. Value Creation at Anheuser-Busch: A Real Options Example. **Journal of Applied Corporate Finance**, vol.14(2), Summer 2001, p.52-61

ARROW, K.J. The Value of and Demand for Information. In: McGuire, C.B. & Radner, R. (Ed.), **Decision and Organization – A Volume in Honor of Jacob Marschak**. Amsterdan: North-Holland Pub. Co., 1972, p.131-139

ARROW, K.J. Information and Economic Behavior. In: Arrow (Ed.), **Collected Papers of Kenneth J. Arrow – Volume 4: The Economics of Information**. Cambridge (USA): Belknap Press of Harvard University Press, 1984, p.136-152. Artigo original de 1973, apresentado na Federation of Swedish Industries.

ARROW, K.J. Jacob Marschak's Contributions to the Economics of Decision and Information. **American Economic Review**, vol.68(2), May 1978, p.xii-xiv

ARROW, K. Informational Equivalence of Signals. In: P. Dasgupta, et al. (Ed.), **Economic Analysis of Markets and Games**. Cambridge: MIT Press, 1992, p. 169-183

ARROW, K. J.; BLACKWELL, D.; GIRSHICK, M. A. Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems. **Econometrica**, vol. 17(3/4), Jul.-Oct., 1949, p. 213-244

ARROW, K.J.; FISHER, A.C. Environmental Preservation, Uncertainty, and Irreversibility. **Quarterly Journal of Economics**, vol. 88(1), May, 1974, p.312-319

ARROW, K.J.; HARRIS, T.; MARSCHAK, J. Optimal Inventory Policy. **Econometrica**, vol.19(3), July, 1951, p.250-272

AYLOR, JR., W.K. Measuring the Impact of 3-D Seismic on Business Performance. **SPE paper** 52970. Apresentado no 1999 SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium, Dallas, 20-23 March, 1999, 7 p.

BAKER, M.P.; MAYFIELD, E.S.; PARSONS, J.E. Alternative Models of Uncertain Commodity Prices for Use with Modern Asset Pricing. **Energy Journal**, vol.19(1), January, 1998, p.115-148

BALAKRISHNAN, N.; NEVZOROV, V.B. **A Primer on Statistical Distributions**. Hoboken (EUA): John Wiley & Sons, Inc., 2003, 305 p.

BALDURSSON, F.M.; KARATZAS, I. Irreversible Investment and Industry Equilibrium. **Finance and Stochastic**, vol.1, 1997, p.69-89

BALDWIN, C.Y.; CLARK, K. B. **Design Rules – Volume 1. The Power of Modularity**. Cambridge (EUA): MIT Press, 2000, 471 p.

BASAR, T.; OLSDER, G. J. **Dynamic Non-Cooperative Game Theory**. London: Academic Press Inc., Second Edition, 1995, 519 p.

BATHER, J. **Decision Theory – An Introduction to Dynamic Programming and Sequential Decisions**. New York: John Wiley & Sons, 2000, 191 p.

BELL, C. B. Mutual Information and Maximal Correlation as Measures of Dependence. **Annals of Mathematical Statististics**, vol. 33, 1962, p. 587-595

BELLMAN, R.E. **Dynamic Programming**. Princeton: Princeton University Press, 1957, 340 p.

BENSOUSSAN, A. **Stochastic Control of Partially Observable Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 352 p.

BERK, J.B.; GREEN, R.C.; NAIK, V. Valuation and Return Dynamics of New Ventures. **Review of Financial Studies**, vol.17(1), Spring 2004, p.1-35

BERRARA, T. Valuing Real Options when Time to Maturity Is Uncertain. Wassenaar-Leiden (Holanda): **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, June 1999, 26 p.

BERTSEKAS, D.P.; TSITSIKLIS, J.N. **Neuro-Dynamic Programming**. Belmont (EUA): Athena Scientific, 1996, 491 p.

BERTSEKAS, D.P.; TSITSIKLIS, J.N. **Introduction to Probability**. Belmont (EUA): Athena Scientific, 2002, 416 p.

BESSEMBINDER, H.; COUGHENOUR, J.F.; SEGUIN, P.J.; SMOLLER, M.M. Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the Futures Term Structure. **Journal of Finance**, vol.50(1), March, 1995, p.361-375

BINGHAM, N.H.; KIESEL, R. **Risk-Neutral Valuation**. London: Springer Verlag London, 1998, 296 p.

BINMORE, K. **Game Theory and the Social Contract Volume 2 – Just Playing**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1998, 642 p.

BINMORE, K. **Fun and Games – A Text on Game Theory**. Lexinston (EUA): D.C. Heath and Co., 1992, 642 p.

BINMORE, K. Nash Bargaining Theory II. In: Binmore, K.; Dasgupta, P. (Ed.). **The Economics of Bargaining**. Oxford: Basil Blackwell Ltd., 1987, p.61-76

BINMORE, K.; RUBINSTEIN, A.; WOLINSKY, A. The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling. **Rand Journal of Economics**, vol.17(2), Summer, 1986, p.176-188

BIRGE, J.R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. New York: Springer Verlag, New York, 1997, 448 p.

BJERKSUND, P.; EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: from Last Chance to Wait and See Strategies. **Financial Management**, vol. 19(3), autumn, 1990, p. 65-83

BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, vol. 81, 1973, p.637-659

BLACKWELL, D. Comparison of Experiments. Los Angeles: **Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**, University of California Press, 1951, p.93-102

BLACKWELL, D. Equivalent Comparison of Experiments. **Annals of Mathematical Statistics**, vol.24, 1953, p.265-272

BLACKWELL, D.; GIRSHICK, M.A. **Theory of Games and Statistical Decisions**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954. Reimpressão como Dover Ed., 1979, 355 p.

BOER, F.P. **The Real Options Solution – Finding Total Value in a High-Risk World**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002, 406 p.

BOLT, W.; HOUBA, H. Strategic Bargaining in the Variable Threat Game. **Economic Theory**, vol.11, 1998, p.57-77

BORDER, K.C. **Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1985, 129 p.

BOULDING, K.E. The Economics of Knowledge and the Knowledge of Economics. **American Economic Review**, vol. 56(1/2), March, 1966, p. 1-13

BOWMAN, E.H.; MOSKOWITZ, G.T. Real Options Analysis and Strategic Decision Making. **Organization Science**, vol.12(6), Nov/Dec 2001, p. 772-777

BRACH, M.A. **Real Options in Practice**. Hoboken (EUA): John Wiley & Sons, Inc., 2003, 370 p.

BRANDENBURGER, A.M.; NALEBUFF, B. **Co-opetition**. New York: Doubleday Eds., 1996, 290 p.

BREALEY, R.A.; MYERS, S.C. **Principles of Corporate Finance**. Boston: McGraw-Hill, Inc., sixth ed., 1999, 1093 p.

BREIMAN, L. **Probability and Stochastic Processes – With a View Toward Applications**. Boston: Houghton Mifflin Co., 1969, 324 p.

BRENNAN, M.J. The Supply of Storage. **American Economic Review**, vol.48, March, 1958, p.50-72

BRENNAN, M.J.; SCHWARTZ, E.S. Evaluating Natural Resource Investment. **Journal of Business**, vol. 58(2), 1985, p.135-157

BRENNAN, M.J.; TRIGEORGIS, L. (Ed.). **Project Flexibility, Agency, and Competition – New Developments in the Theory and Applications of Real Options**. Oxford: Oxford University Press, 2000, 357 p.

BRIYS, E.; BELLALAH, M.; MAI, H.M.; VARENNE, F. **Options, Futures and Exotic Derivatives – Theory, Application and Practice**. Chichester (UK): John Wiley & Sons Ltd., 1998, 449 p.

BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. Pricing American-Style Securities Using Simulation. **Journal of Economic Dynamics and Control**, vol.21(8-9), June, 1997, p.1323-1352

BROYLES, J. **Financial Management and Real Options**. Chichester (Reino Unido): John Wiley & Sons, Ltd., 2003, 444 p.

BRZEZNIAK, Z.; ZASTAWNIAK, T. **Basic Stochastic Processes**. London: Springer-Verlag London Ltd., 1999, 225 p.

BUCKLEY, A. **International Investment – Value Creation and Appraisal – A Real Option Approach**. Copenhagen: Copenhagen Business School Press, 1998, 321 p.

BYRD, J.; PARRINO, R.; ORITSCH, G. Stockholder-Manager Conflicts and Firm Value. **Financial Analysts Journal**, May/June, 1998, p.14-30

CAMPBELL, J.Y.; LO, A.W.; MACKINLAY, A.C. **The Econometrics of Financial Markets**. Princeton: Princeton University Press, 1997, 611 p.

CAPEN, E.C.; CLAPP, R.V.; CAMPBELL, W.M. Competitive Bidding in High-Risk Situations. **Journal of Petroleum Technology**, vol.23, June, 1971, p.641-653

CAPOZZA, D.R.; LI, Y. The Intensity and Timing of Investment: The Case of Land. **American Economic Review**, vol.84(4), September, 1994, p.889-904

CARVALHINHO FILHO, J.C.L.; DIAS, M.A.G. Formação de Preços de Serviços de Transporte de Gás Natural Sem Cláusula 'Ship-or-Pay' – Uma Aplicação da Teoria de Opções Reais. **Documento de Trabalho**, Universidade de São Paulo (USP), 12/04/2001, 27 p.

CHADE, H.; SCHLEE, E.E. Another Look at the Radner–Stiglitz Nonconcavity in the Value of Information. **Journal of Economic Theory**, vol.107, 2002, p.421–452

CHAMLEY, C.; GALE, D. Information Revelation and Strategic Delay in a Model of Investment. **Econometrica**, vol. 62(5), September, 1994, p.1065-1085

CHAMPION, M. CEOs Study How To Plan for Risk. **Wall Street Journal Europe**. February 1-2, 2002, p.6

CHEAP OIL: The next shock? **The Economist**, vol. 350(8109), March 6, 1999, p.23-25

CHEN, A.H.; CONOVER, J.A.; KENSINGER, J.W. Evaluating Virtual Options. Los Angeles: **Proceedings of the 5th Annual International Conference on Real Options**, julho de 2001, 38 p. Disponível em http://www.realoptions.org/

CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. **Copula Methods in Finance**. Chichester (UK): John Wiley & Sons Ltd., 2004, 293 p.

CHILDS, P.D.; OTT, S.H.; RIDDIOUGH, T.J. Valuation and Information Acquisition Policy for Claims Written on Noisy Real Assets. **Financial Management**, vol.30(2), Summer, 2001, p.45-75

CHILDS, P.D.; OTT, S.H.; RIDDIOUGH, T.J. Optimal Valuation of Noisy Real Assets. **Real Estate Economics**, vol.30(3), 2002a, p. 385-414

CHILDS, P.D.; OTT, S.H.; RIDDIOUGH, T.J. Optimal Valuation of Claims on Noisy Real Assets: Theory and an Application. **Real Estate Economics**, vol.30(3), 2002b, p.415-443

CHORN, L.G.; CARR, P.P. The Value of Purchasing Information to Reduce Risk in Capital Investment Projects. SPE paper nº 37948. Dallas: **Proceedings of the 1997 SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium**, p. 123-134. 16-18 March, 1997.

CHORN, L.G.; CROFT, M. Resolving Reservoir Uncertainty to Create Value. **Journal of Petroleum Technology**, August, 2000, p.52-59

COHEN, J. Eta-Squared and Partial Eta-Squared in Fixed Factor ANOVA Designs. **Educational and Psychological Measurement**, vol.33, 1973, p.107-112

COHEN, J. **Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences**. Hillsdale (EUA): Lawrence Erlbaum Associates, Pub., 2nd ed., 1988, 567 p.

COPELAND, T.; ANTIKAROV, V. **Real Options – A Practitioner's Guide**. New York: Texere LLC Publishing, 2001, 372 p.

CORMAN, L. To Wait or Not To Wait? **CFO Magazine**, vol.13(5), May, 1997, p.91-94

CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E.S. Monte Carlo Evaluation Model of an Undeveloped Oil Field. **Journal of Energy Finance & Development**, vol.3(1), 1998, pp.73-84

CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E.S.; CASASSUS, J. Optimal Exploration Investments under Price and Geological-Technical Uncertainty: A Real Options Model. **R&D Management**, vol.31(2), 2001, p. 181-189

COVER, T.M. & J.A. THOMAS **Elements of Information Theory**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991, 542 p.

COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach. **Journal of Financial Economics**, vol. 7, 1979, p.229-263

COY, P. Exploiting Uncertainty. **Business Week, USA Ed.**, June 7, 1999, p.118-124

CREDIT SUISSE FIRST BOSTON. **Global Integrated Oils – Order of Merit 2004**. New York: Sector Review Report, October, 2004, 104 p.

CRESSMAN, R. **Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games**. Cambridge (USA): MIT Press, 2003, 316 p.

DAS, S.R. Poisson-Gaussian Processes and the Bond Markets. **National Bureau of Economic Research**. NBER WP# 6631, July, 1998, 33 p.

DAVIS, L.D. (Ed.) **Handbook of Genetic Algorithms**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991, 385 p.

DÉCAMPS, J.-P.; MARIOTTI, T. Investment Timing and Learning Externalities. **Journal of Economic Theory**, vol.118, 2004, p.80-102

DÉCAMPS, J-P.; MARIOTTI, T.; VILLENEUVE, S. Irreversible Investment in Alternative Projects. Montreal: **Proceedings of the 8th Annual International Conference on Real Options**, June 2004. Primeira versão: Working Paper, Université de Toulouse and London School of Economics and Political Science, June 2003, 19 p.

DEGROOT, M.H. Uncertainty, Information, and Sequential Experiments. **Annals of Mathematical Statistics**, vol.33, 1962, p.404-419

DEGROOT, M.H. **Optimal Statistical Decisions**. Hoboken (EUA): John Wiley & Sons, Inc., 1970, 489 p.

DEGROOT, M.H.; SCHERVISH, M.J. **Probability and Statistics**. Boston: Addison-Wesley, 3rd Edition, 2002, 816 p.

DELFIM NETTO, A. Prazos nas Concessões de Petróleo. **Folha de São Paulo**, 14 de abril de 1999, p.2. Disponível em www.an.com.br/1999/abr/14/0opi.htm e em www.puc-rio.br/marco.ind/imagens/coluna-delfim.jpg

DELFINER, P. Modeling Dependencies Between Geologic Risks in Multiple Targets. **SPE paper** nº 63200. 2000 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, 1-4 October, 2000, 9 p.

DEMIRMEN, F. Use of 'Value of Information' Concept in Justification and Ranking of Subsurface Appraisal. SPE paper nº 36631. Denver: **Proceedings of the 1996 SPE Annual Technical Conference and Exhibition**, 1996, p. 565-579

DIAS, M.A.G. **Investimento sob Incerteza em Exploração e Produção de Petróleo**. Rio de Janeiro, agosto de 1996. Dissertação de Mestrado, 470 p. Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio.

DIAS, M.A.G. The Timing of Investment in E&P: Uncertainty, Irreversibility, Learning, and Strategic Consideration. SPE paper nº 37949. Dallas: **Proceedings of the 1997 SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium**, p.135-148. 16-18 March, 1997.

DIAS, M.A.G. A Note on Bibliographical Evolution of Real Options. In: Trigeorgis, L. (Ed.). **Real Options and Business Strategy: Applications to Decision Making**. London: Risk Books, 1999, p. 357-362.

DIAS, M.A.G. Real Options Evaluation: Optimization under Uncertainty with Genetic Algorithms and Monte Carlo Simulation. **Documento de trabalho**, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, julho, 2000, 23 p.

DIAS, M.A.G. Nota Técnica de Orientação ao Projeto PUC-Petrobras – Análise de Alternativas com Opção de Expansão. **Comunicação Privada**, Pravap-14. Rio de Janeiro, 15 de janeiro de 2001, (2001a), 5 p.

DIAS, M.A.G. Selection of Alternatives of Investment in Information for Oilfield Development Using Evolutionary Real Options Approach. Los Angeles: **Proceedings of the 5th Annual International Conference on Real Options**, julho de 2001, (2001b). Disponível em http://www.realoptions.org/.

DIAS, M.A.G. Investment in Information in Petroleum: Real Options and Revelation. Coral Beach (Cyprus): **Proceedings of the 6th Annual International Conference on Real Options**, julho de 2002, 48 p. Disponível em http://www.realoptions.org/. Apresentando antes em Cambridge (EUA): MIT Seminar Real Options in Real Life, maio 2002.

DIAS, M.A.G. Information Revelation Processes, Learning Measures, and Real Options. **Documento de trabalho**, Petrobras e Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, março, 2003 (trabalho em progresso), 20 p.

DIAS, M.A.G. Valuation of Exploration & Production Assets: An Overview of Real Options Models. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, vol. 44(1-2), October, 2004, p.93-114

DIAS, M.A.G.; ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. Wassenaar-Leiden (Holanda): **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, June 1999. Primeira versão apresentada em *Workshop on Real Options*, Stavanger (Noruega), Maio de 1998. Disponível em http://www.puc-rio.br/marco.ind/extend.html

DIAS, M.A.G.; ROCHA, K.M.C.; TEIXEIRA, J.P. The Optimal Investment Scale and Timing: A Real Option Approach to Oilfield Development. Montreal: **Proceedings of the 8th Annual International Conference on Real Options**, June 2004. Disponível em http://www.realoptions.org/. Primeira versão: junho de 2003, documento de trabalho, PUC-Rio/Petrobras.

DIAS, M.A.G.; TEIXEIRA, J.P. Continuous-Time Option Games: Review of Models and Extensions – Duopoly under Uncertainty. Washington: **Proceedings of the 7th Annual International Conference on Real Options**, Julho de 2003. Versão revisada submetida para publicação.

DIAS, M.A.G.; TEIXEIRA, J.P. Continuous-Time Option Games – Oligopoly, War of Attrition and Bargaining under Uncertainty. Montreal: **Proceedings of the 8th Annual International Conference on Real Options**, June 2004. Versão revisada a ser submetida para publicação.

DIXIT, A.K. Entry and Exit Decisions under Uncertainty. **Journal of Political Economy**, vol.97(3), 1989a, p.620-638

DIXIT, A. Hysteresis, Import Penetration, and Exchange Rate Pass-Through. **Quarterly Journal of Economics**, vol.104(2), May, 1989b, p.205-228

DIXIT, A.K. Irreversible Investment with Price Ceilings. **Journal of Political Economy**, vol.99(3), June, 1991, p.541-557

DIXIT, A.K. Investment and Hysteresis. **Journal of Economic Perspectives**, vol.6(1), Winter, 1992, p.107-132

DIXIT, A.K. **The Art of Smooth Pasting**. Chur (Suíça): Harwood Academic Publishers, Fundamentals of Pure and Applied Economics, 1993a, 72 p.

DIXIT, A.K. Choosing Among Alternative Discrete Investment Projects Under Uncertainty. **Economic Letters**, vol. 41, 1993b, p.265-288

DIXIT, A.K.; NALEBUFF, B.J. **Thinking Strategically – The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life**. New York: W.W. Norton & Co., 1991, 393 p.

DIXIT, A.K.; PINDYCK, R.S. **Investment under Uncertainty**. Princeton: Princeton University Press, 1994. 468 p.

DIXIT, A.K.; PINDYCK, R.S.; SØDAL, S. A Markup Interpretation of Optimal Investment Rules. **Economic Journal**, April, 1999, p. 179-189

DIXIT, A.K.; SKEATH, S. **Games of Strategy**. New York: W.W. Norton & Co., Inc., 1999, 600 p.

DOCKNER, E.; JORGENSEN, S.; VAN LONG, N.; SORGER, G. **Differential Games in Economics and Management Science**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 382 p.

DOOB, J.L. **Stochastic Processes**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1953, 654 p.

DRAZEN, A.; SAKELLARIS, P. Revelation Uncertainty and Irreversible Investment. **Working Paper**, University of Maryland, November, 1995, 26 p.

DUFFIE, D. **Dynamic Asset Pricing Theory**. Princeton: Princeton University Press, Third Edition, 2001, 465 p.

DUTTA, J.; MORRIS, S. Revelation of Information and Self-Fulfilling Beliefs. **Journal of Economic Theory**, vol.73, 1997, p.231-244

DUTTA, P.K. **Strategies and Games**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1999, 476 p.

DUTTA, P.K.; RUSTICHINI, A. (s, S) Equilibria in Stochastic Games. **Journal of Economic Theory**, vol.67, 1995, p.1-39

EKERN, S. An Option Pricing Approach to Evaluating Petroleum Projects. **Energy Economics**, vol.10(2), April, 1988, p.91-99

ENGELBRECHT-WIGGANS, R.; MILGROM, P.R.; WEBER, R.J. Competitive Bidding and Proprietary Information. **Journal of Mathematical Economics**, vol.11(2), April, 1983, p. 161-169

EVANS, M.; HASTINGS, N.; PEACOCK, B. **Statistical Distributions**. Hoboken (EUA): John Wiley & Sons, Inc., 3rd ed., 2000, 221 p.

FAULKNER, T.W. Applying 'Options Thinking' to R&D Valuation. **Research Technology Management**, May-June, 1996, p.50-56

FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications – Vol. I**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 3rd ed., 1968, 509 p.

FORBES, K.F.; ZAMPELLI, E.M. Technology and the Exploratory Success Rate in the U.S. Offshore. **Energy Journal**, vol.21(1), 2000, p.109-120

FRÉCHET, M. **Les Probabilités Associées a un Système D'Événements Compatibles et Dépendants – Seconde Partie: Cas Particuliers et Applications**. Paris: Hermann & Cie, Éditeurs, 1943, 211 p.

FRENCH, S.; INSUA, D.R. **Statistical Decision Theory**. London: Kendall's Library of Statistics 9, Arnold Publishers, 2000, 301 p.

FRISTEDT, B.; GRAY, L. **A Modern Approach to Probability Theory**. Boston: Birkhäuser Boston, 1997, 756 p.

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. Pre-emption and Rent Equalisation in the Adoption of New Technology. **Review of Economic Studies**, vol.52, 1985, p.383-401

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. A Theory of Exit in Duopoly. **Econometrica**, vol.54(4), July, 1986, p.943-960

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game Theory**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1991, 580 p.

GALLANT, A.R. **An Introduction to Econometric Theory – Measure Theoretic Probability with Applications to Economics**. Princeton: Princeton University Press, 1997, 202 p.

GALLANT, L.; KIEFFEL, H.; CHATWIN, R. Using Learning Models to Capture Dynamic Complexity in Petroleum Exploration. Dallas: **Proceedings of the 1999 SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium**, 20-23 March, 1999, p.115-121. SPE paper nº 52954.

GALLI, A.; ARMSTRONG, M.; DIAS, M.A.G. The Value of Information: A Bayesian Real Option Approach. **SPE paper** nº 90418. 2004 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, 26-29 September 2004, 7 p.

GALLI, A.; ARMSTRONG, M.; JEHL, B. Comparison of Three Methods for Evaluating Oil Projects. **Journal of Petroleum Technology**, October, 1999, p.44-49

GHEMAWAT, P.; NALEBUFF, B. Exit. **Rand Journal of Economics**, vol.16(2), Summer, 1985, p.184-194

GIBBONS, R. **Game Theory for Applied Economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992, 267 p.

GIBSON, R.; SCHWARTZ, E. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. **Journal of Finance**, vol.45(3), July, 1990, p.959-976

GINTIS, H. **Game Theory Evolving**. Princeton: Princeton University Press, 2000, 531 p.

GOLDBERG, D.E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning**. Reading (EUA): Addison Wesley Longsman, Inc., 1989, 412 p.

GOLDBERGER, A.S. **A Course in Econometrics**. Cambridge (EUA): Harvard University Press, 1991, 405 p.

GONÇALVES, F. DE O.; MEDEIROS, P.Y. Opções Reais e Regulação: O Caso das Telecomunicações no Brasil. **Artigo de trabalho**. In: II Conferência da SBE, Rio de Janeiro, maio, 2002, 18 p.

GOODMAN, L.; KRUSKAL, W.H. Measures of Asssociation for Cross Classifications. **Journal of the American Statistical Association**, vol.49, December, 1954, p.732-764

GRAHAM, J.R.; HARVEY, C.R. The Theory and Practice of Corporate Finance: Evidence from the Field. **Journal of Financial Economics**, vol. 60, 2001, p.187-243

GRENADIER, S.R. Information Revelation Through Option Exercise. **Review of Financial Studies**, Spring, 1999, vol.12(1), p.95-129

GRENADIER, S.R., (Ed.) **Game Choices – The Intersection of Real Options and Game Theory**. London: Risk Books, 2000a, 395 p.

GRENADIER, S.R. Equilibrium with Time-to-Build: A Real Options Approach. In: Brennan, M.; Trigeorgis, L. (Ed.). **Project Flexibility, Agency, and Competition**. Oxford: Oxford University Press, 2000b, p.275-296

GRENADIER, S.R. Option Exercise Games: An Application to the Equilibrium Investment Strategies of Firms. **Review of Financial Studies**, vol.15, Summer 2002, p.691-72

GRUY, H.J.; GARB, F.A.; WOOD, J.W. Determining the Value of Oil and Gas in the Ground. **World Oil**, March, 1982, p.105-108

GÜLEN, S.G. Efficiency in the Crude Oil Futures Market. **Journal of Energy Finance & Development**, vol. 3(1), 1998, p. 13-21

GUT, A. **An Intermediate Course in Probability**. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1995, 278 p.

HALL, W.J. On Characterizing Dependence in Joint Distributions. In: Bose, R.C. et al (ed.), **Essays in Probability and Statistics**. Chapel Hill (EUA): University of North Carolina Press, 1970, p.339-376.

HAMMERSTEIN, P.; SELTEN, R. Game Theory and Evolutionary Biology. In: Aumann; Hart (Ed.), **Handbook of Game Theory with Economic Applications – Volume 2**. Amsterdam: North-Holland, Elsevier Science Pub., 1994, p. 929-993

HAN, J.T. There Is Value in Operational Flexibility: An Intelligent Well Application. SPE paper nº 82018. Dallas: **Proceedings of the 2003 SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium**, 5-8 April 2003, 8 p.

HARCHAOUI, T.M.; LASSERRE, P. Testing the Option Value Theory of Irreversible Investment. **International Economic Review**, vol.42(1), February 2001, p.141-166

HARSANYI, J.C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, Parts I-III. **Management Science**, vol.14(3), November 1967, p.159-182; vol.14(5), January 1968, p.320-334, vol.14(7), March 1968, p.486-502

HARSANYI, J.C. **Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1977, 314 p.

HAUG, E.G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. New York: McGraw-Hill, 1998, 232 p.

HAYEK, F.A. VON. The Use of Knowledge in Society. **American Economic Review**, vol.35, 1945, p.519-530

HENDERSON, V.; HOBSON, D.G. Real Options with Constant Relative Risk Aversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**, vol 27(2), 2002, p.329-355

HENDRICKS, K.; KOVENOCK, D. Asymmetric Information, Information Externalities, and Efficiency: The Case of Oil Exploration. **Rand Journal of Economics**, vol.20(2), Summer, 1989, p.164-182

HENDRICKS, K.; PORTER, R.H. The Timing and Incidence of Exploratory Drilling on Offshore Wildcat Tracts. **American Economic Review**, vol.86(3), June, 1996, p. 388-407

HENDRICKS, K.; PORTER, R.H.; WILSON, C.A. Auctions for Oil and Gas Leases with an Informed Bidder and a Random Reservation Price. **Econometrica** vol. 62(6), November 1994, p. 1415-144

HENDRICKS, K.; WEISS, A.; WILSON, C. The War of Attrition in Continuous Time with Complete Information. **International Economic Review**, vol.29(4), p. 663-680

HENDRICKS, K.; WILSON, C. The War of Attrition in Discrete-Time. **C.V. Starr Center Working Paper** 85-32, New York University, September, 1985, 73 p.

HENRY, C. Investments Decisions under Uncertainty: The Irreversibility Effect. **American Economic Review**, vol.64(6), December, 1974a, p. 1006-1012

HENRY, C. Option Values in the Economics of Irreplaceable Assets. **Review of Economic Studies**, Symposium Issue, 1974b, p.89-104

HERTZ, D.B. Risk Analysis in Capital Investment. **Harvard Business Review**, vol.42, January-February, 1964, p.95-106

HILTON, R.W. Determinants of Information Value: Synthesizing Some General Results. **Management Science**, vol.27, January, 1981, p.57-64

HOEFFDING, W. Masstabinvariante Korrelationstheorie (Scale-Invariant Correlation Theory). In: Fisher, N.I.; P.K. Sen (Ed.). **The Collected Works of**

Wassily Hoeffding. New York : Springer-Verlag, 1994, p.57-107. Tradução do alemão para o inglês. Originalmente publicado em *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte*, vol.5(3), 1940, p.181-233.

HOEFFDING, W. Masstabinvariante Korrelationsmasse für Diskontinuierliche Verteilungen. (Scale-Invariant Correlation Measures for Discontinuous Distributions). In: Fisher, N.I.; P.K. Sen (Ed.). **The Collected Works of Wassily Hoeffding**. New York : Springer-Verlag, 1994, p.109-133. Tradução do alemão para o inglês. Originalmente publicado em *Archiv für Mathematische Wirtschafts – und Sozialforschung*, vol.7, 1941, p.49-70.

HOEFFDING, W. Stochastische Abhängigkeit und Funktionaler Zusammenhang (Stochastic Dependence and Functional Relationships). In: Fisher, N.I.; P.K. Sen (Ed.). **The Collected Works of Wassily Hoeffding**. New York : Springer-Verlag, 1994, p.135-155. Tradução do alemão para o inglês. Originalmente publicado em *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, vol.25, 1942, p.200-227.

HOFER, E. Sensitivity Analysis in the Context of Uncertainty Analysis for Computationally Intensive Models. **Computer Physics Communications**, vol.117, 1999, p.21-34

HOLLAND, J.H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Cambridge (EUA): MIT Press ed., 1992, edição original de 1975, 211 p.

HOWARD, R.A. Information Value Theory. **IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics**, vol.SSC-2(1), August, 1966, p.22-26

HOWELL, S.; STARK, A.; NEWTON, D.; PAXSON, D.; CAVUS, M. **Real Options – An Introduction for Executives**. London: Financial Times – Prentice Hall, 2001, 146 p.

HUANG, C.; LITZEMBERG, R.H. **Foundations for Financial Economics**. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1988, 365 p.

HUISMAN, K.J.M. **Technology Investment: A Game Theoretic Real Options Approach**. Boston: Kluwer Academic Pub., 2001, 259 p.

HUISMAN, K. J. M.; KORT, P. M. Effects of Strategic Interactions on the Option Value of Waiting. **Working Paper**, Tilburg University, September, 1999, 41 p.

IBÁÑEZ, A. Valuation by Simulation of Contingent Claims with Multiple Early Exercises Opportunities. **Mathematical Finance**, vol.14(2), 2004, p.223-248

IMAI, J.; NAKAJIMA, M. A Real Options Analysis of an Oil Refinery Project. **Financial Practice and Education**, Fall/Winter, 2000, p.78-91

INGERSOLL, JR., J.E. **Theory of Financial Decision Making**. Savage (USA): Rowman & Littlefield Publishers, Inc., 1987, 474 p.

INGERSOLL JR., J.E.; ROSS, S.A. Waiting to Invest: Investment and Uncertainty. **Journal of Business**, vol.65(1), 1992, p.1-29

IZETTI, R.G. **Avaliação Econômica de Projetos de Inovação Tecnológica**. Rio de Janeiro, março de 2000. Dissertação de Mestrado, 110 p. Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio.

JACOD, J.; PROTTER, P. **Probability Essentials**. Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2000, 250 p.

JAMES, B.R. **Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário**. Rio de Janeiro: IMPA Eds., Projeto Euclides, 2ª ed., 1996, 299 p.

JAMMERNEGG, W. **Sequential Binary Investment Decisions - A Bayesian Approach**. Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems nº 313, 1988, 156 p.

JANSEN, M.J.W. Analysis of Variance Designs for Model Output. **Computer Physics Communications**, vol.117, 1999, p.35-43

JAYNES, E.T. Prior Probabilities. **IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics**, vol.ssc-4(3), September, 1968, p.227-241

JAYNES, E.T. (editado por G.L. Bretthorst) **Probability Theory – The Logic of Science**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 727 p.

JAZWINSKI, A.H. **Stochastic Processes and Filtering Theory**. San Diego: Academic Press, 1970, 376 p.

JOAQUIN, D.C.; BUTLER, K.C. Competitive Investment Decisions: A Synthesis. In Brennan, M.J.; Trigeorgis, L. (Ed.). **Project Flexibility, Agency, and Competition - New Developments in the Theory and Applications of Real Options**. Oxford: Oxford University Press, 2000, p.324-339

JOE, H. **Multivariate Models and Dependence Concepts**. London: Chapman & Hall/CRC, 1997, 399 p.

JOHNSTON, D. Different Fiscal Systems Complicate Reserves Values. **Oil & Gas Journal**, vol.93(22), May 29, 1995, p.39-42

JONES, D.R.; SMITH, M. Ranking South Louisiana Trends by Probability of Economic Success. **Oil & Gas Journal**, October 24, 1983, p.149-156

JORION, P. **Value at Risk**. New York: McGraw-Hill Co., 2nd Ed., 2001, 544 p.

JU, N. Pricing an American Option by Approximating Its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function. **Review of Financial Studies**, vol.11(3), Fall, 1998, p.627-646

KABE, D.G.; GUPTA, A.K. On a Multiple Correlation Ratio. **Statistics & Probability Letters**, vol. 9(5), May, 1990, p. 449-451

KAGEL, J.H.; LEVIN, D. **Common Value Auctions and the Winner's Course**. Princeton: Princeton University Press, 2002, 401 p.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica**, vol. 47(2), March 1979, p. 263-292

KALAI, E.; SMORODINSKY, M. Other Solutions to Nash's Bargaining Problem. **Econometrica**, vol.43, 1975, p.513-518

KAPUR, S. Markov Perfect Equilibria in an N-Player War of Attrition. **Economic Letters**, vol.45, 1995, p.149-154

KARATZAS, I.; SHREVE, S.E. **Brownian Motion and Stochastic Calculus**. New York: Springer-Verlag. 2nd edition, 1991, 470 p.

KARLIN, S. & H.M. TAYLOR **A First Course in Stochastic Processes**. San Diego: Academic Press Limited, second edition, 1975, 557 p.

KASANEN, E.; TRIGEORGIS, L. Merging Finance Theory and Decision Analysis. In: Trigeorgis, L. (Ed.): **Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Aplications**. Westport (EUA): Praeger Publisher, 1995, p.47-68

KASLOW, T.; PINDYCK, R.S. Valuing Flexibility in Utility Planning. **The Electricity Journal**, vol.7, March, 1994, p.60-65

KAUFMAN, G.M.; BALCER, Y.; KRUYT, D. A Probabilistic Model of Oil and Gas Discovery. In: Haun, J.D., (ed.). **Methods of Estimating the Volume of Undiscovered Oil and Gas Resources**. American Association of Petroleum Geologists Studies in Geology, n° 1, 1975, p. 113-142

KELLERHALS, B.P. **Asset Pricing – Modeling and Estimation**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd ed., 2004, 243 p.

KELLEY, T. L. An Unbiased Correlation Ratio Measure. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, vol. 21, 1935, p. 554-559

KEMNA, A.G.Z. Case Studies on Real Options. **Financial Management**, Autumn, 1993, p.259-270

KENDALL, M.G. **Rank Correlation Methods**. London: Charles Griffin & Co. Ltd, 3rd ed., 1962, 199 p.

KENNEDY, J.J. The Eta Coefficient in Complex ANOVA Designs. **Educational and Psychological Measurement**, vol.30, 1970, p.885-889

KENYON, C.M.; TOMPAIDIS, S. Real Options in Leasing: The Effect of Idle Time. **Operation Research**, vol.49(5), September-October, 2001, p.675-689

KENYON, C.M.; TOMPAIDIS, S. Real Options in Leasing Semi-Submersible Rigs in the North Sea. **Proceedings of the IEEE/IAFE 1999 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering**, March 28-30, 1999, New York, p.218-239

KESTER, W.C. Today's Options for Tomorrow's Growth. **Harvard Business Review**, n° 62, March-April, 1984, p.153-160

KHOLODNYI, V.A. **Beliefs-Preferences Gauge Symmetry Group and Replication of Contingent Claims in a General Market Environment**. Fairfield (USA): IES Press, 1998, p.436

KIHLSTROM, R. A Bayesian Exposition of Blackwell's Theorem on the Comparison of Experiments. In: M. Boyer; R. Kihlstrom, (Ed.), **Bayesian Models in Economic Theory**. New York: Elsevier Science Pub., 1984a, pp.13-31.

KIHLSTROM, R. A Simple Example of the Radner-Stiglitz Nonconcavity in the Value of Information. In: M. Boyer; R. Kihlstrom, (Ed.), **Bayesian Models in Economic Theory**. New York: Elsevier Science Pub., 1984b, p.53-61

KIM, Y-G. Evolutionary Stability in the Asymmetric War of Attrition. **Journal of Theoretical Biology**, vol.161, 1993, p.13-21

KHINCHIN, A.I. The Entropy Concept in Probability Theory. **Uspekhi Matematicheskikh Nauk**, vol.VIII(3), 1953, p.3-20. Traduzido do russo para o inglês em: Mathematical Foundations of Information Theory. New York: Dover Pub., Inc., 1957, 120 p.

KLEMPERER, P. **Auctions: Theory and Practice**. Princeton: Princeton University Press, 2004, 246 p.

KOCHERLAKOTA, S.; KOCHERLAKOTA, K. **Bivariate Discrete Distributions**. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992, 361 p.

KOGUT, B. & KULATILAKA, N. Options Thinking and Platform Investments: Investing in Opportunity. **California Management Review**, Winter, 1994, p.52-71

KOGUT, B. & KULATILAKA, N. Strategy, Heuristics, and Real Options. In: Faulkner, D.O.; Campbell, A. (Ed.): **The Oxford Handbook of Strategy – Volume II: Corporate Strategy**. Oxford: Oxford University Press, 2003, p. 416-446

KOLMOGOROV, A.N. **Foundations of the Theory of Probability**. Providence (EUA): American Mathematical Society, Chelsea Publ., 1956, 2nd English ed. (original em alemão: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, 1933), 84 p.

KOTZ, S. Foreword. In: Dall'Aglio, G.; Kotz, S.; Salinetti, G. (Ed.), **Advances in Probability Distributions with Given Marginals – Beyond the Copulas**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

KOWALSKI, C.J. Non-Normal Bivariate Distributions with Normal Marginals. **American Statistician**, June 1978, vol.27(3), p.103-106

KREPS, D.M.; SCHEINKMAN, J.A. Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes. **Bell Journal of Economics**, vol.14, 1983, p.326-338

KRISHNA, V. **Auction Theory**. San Diego: Academic Press, 2002, 303 p.

KRUSKAL, W.H. Ordinal Measures of Association. **Journal of the American Statistical Association**, vol.53, 1958, p.814-861

KULATILAKA, N. & MARKS, S. The Strategic Value of Flexibility: Reducing the Ability to Compromise. **American Economic Review**, June, 1988, p.574-580

KULLBACK, S. **Information Theory and Statistics**. Dover Pub., Inc., 1968. Original: New York: John Wiley & Sons, 1959, 399 p.

KYLE, A.S. ; OU-YANG, H. ; XIONG, W. Prospect Theory and Liquidation Decisions. **Duke University and Princeton University Working Paper**, September 2004, 18 p.

LAFFONT, J.-J. **The Economics of Uncertainty and Information**. Tradução para o inglês pela MIT Press, 1989. Original de Paris: Economica, 1986, 289 p.

LAMBRECHT, B. The Impact of Debt Financing on Entry and Exit in a Duopoly. **Review of Financial Studies**, vol.14(3), Fall, 2001, p.765-804

LAMBRECHT, B.; PERRAUDIN, W. Option Games. **Working Paper**. Cambridge University e CEPR (UK), August, 1994, 17 p.

LANCASTER, H.O. Correlation and Complete Dependence of Random Variables. **Annals of Mathematical Statistics**, vol.34, 1963, p.1315-1321

LAUGHTON, D.G. The Management of Flexibility in the Upstream Petroleum Industry. **Energy Journal**, vol.19(1), January, 1998, p.83-114

LAWRENCE, D.B. **The Economic Value of Information**. New York: Springer Verlag, 1999, 393 p.

LAZO, J.G.L. **Determinação do Valor de Opções Reais por Simulação Monte Carlo com Aproximação por Números Fuzzy e Algoritmos Genéticos**. Rio de Janeiro, Agosto, 2004. Tese de doutorado. Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio. 190 p.

LEAHY, J.V. Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behavior. **Quarterly Journal of Economics**, 1993, p.1105-1133

LEE, S-H; GLYNN, P.W. Computing the Distribution Function of a Conditional Expectation via Monte Carlo: Discrete Conditioning Spaces. Farrington, H.B. et al., ed. **Proceedings of the 1999 Winter Simulation Conference**, 1999, p. 1654-1663

LEPPARD, S.; CANNIZZO, F. Diagrammatic Approach to Real Options. In: E. I. Ronn (Ed.), **Real Options and Energy Management - Using Options Methodology to Enhance Capital Budgeting Decisions**. London: Risk Books, 2002, p.115-158

LERCHE, I.; MACKAY, J.A. **Economic Risk in Hydrocarborn Exploration**. San Diego: Academic Press, 1999, 404 p.

LESLIE, K.J.; MICHAELS, M.P. The Real Power of Real Options. **McKinsey Quarterly**, nº 3, 1997, p.5-23

LEVINE, T.R.; HULLET, C.R. Eta Squared, Partial Eta Squared, and Misreporting of Effect Size in Communication Research. **Human Communications Research**, vol.28(4), October, 2002, p.612-625

LIEBETRAU, A.M. **Measures of Association**. Newbury Park (EUA): Sage Publications, Inc., 1983, 95 p.

LIMA, E.L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª ed., 1996, 113 p.

LIMA, G.A.C.; SUSLICK, S.B.; NEPOMUCENO FILHO, F. A Decision Model for E&P Petroleum Projects Using Real Options and Preference Theory. **Artigo de trabalho IBP nº 08504**, Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás, apresentado em Rio Oil & Gas Expo Conference 2004, 4-7 October 2004, Rio de Janeiro, 8 p.

LINDLEY, D.V. **Making Decisions**. London: John Wiley & Sons Ltd, 2nd ed., 1985, 207 p.

LINDSTÄDT, H. More Nonconcavities in Information Processing Functions. **Theory and Decision**, vol.51, 2001, p.351-365

LINT, O.; PENNINGS, E. An Options Approach to the New Product Development Process: a Case Study at Philips Electronics. **R & D Management**, vol. 31(2), 2001, p. 163-172

LIST, J.A. Neoclassical Theory Versus Prospect Theory: Evidence From The Marketplace. **Econometrica**, vol.72(2), March, 2004, p.615-625

LONGSTAFF, F.A. Pricing Options with Extendible Maturities: Analysis and Applications. **Journal of Finance**, vol. XLV(3), July, 1990, p.935-957

LONGSTAFF, F.A.; SCHWARTZ, E.S. Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Square Approach. **Review of Financial Studies**, vol.14(1), Spring, 2001, p.113-147

LOPES, E.P. **Opções Reais – A Nova Análise de Investimentos**. Lisboa: Edições Sílabo, Lda., 2ª ed., 2001, 181 p.

LUCAS, R.E. JR.; PRESCOTT, E.C. Investment under Uncertainty. **Econometrica**, vol.39(5), September, 1971, p.659-681

LUND, D.; ∅KSENDAL, B. (Ed.). **Stochastic Models and Options Values**. New York: North-Holland, 1991, 301 p.

MADDALA, G.S.; KIM, I-M. **Unit Roots, Cointegration, and Structural Change**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998, 505 p.

MAELAND, J. Valuation of an Irreversible Investment Involving Agents with Private Information about Stochastic Costs. **Working Paper**, Norwegian School of Economics and Business Administration. Presented at the 5th Annual International Conference on Real Options, UCLA, July, 2001, 30 p.

MAJD, S.; PINDYCK, R.S. Time to Build, Option Value, and Investment Decisions. **Journal of Financial Economics**, vol.18, 1987, p.7-27

MARGOLIN, B.H.; LIGHT, R.J. An Analysis of Variance for Categorical Data, II: Small Sample Comparisons with Chi Square and Other Competitors. **Journal of the American Statistical Association**, vol.69(347), September, 1974, p.755-764

MARI, D.D.; S. KOTZ. **Correlation and Dependence**. London: Imperial College Press, 2001, 219 p.

MARSCHAK, J. Towards an Economic Theory of Organization and Information. In: R.M. Thrall et al. (Ed.), **Decision Processes**. New York: John Wiley & Sons, 1954, p.187-220. Disponível em cepa.newschool.edu/het/profiles/marschak.htm.

MARSCHAK, J. Remarks on the Economics of Information. In: Editores não especificados (Ed.), **Contributions to Scientific Research in Management**. Los Angeles: Western Data Processing Center, UCLA, 1959, p.79-100. Disponível em cepa.newschool.edu/het/profiles/marschak.htm.

MARSCHAK, J. **Economic Information, Decision, and Prediction – Selected Essays: Volume II**. Dorderecht (Holland): D. Reidel Pub. Co., 1974, 362 p.

MARSCHAK, J.; MIYASAWA, K. Economic Comparability of Information Systems. **International Economic Review**, vol.9(2), June 1968, p.137-174

MARSCHAK, J.; RADNER, R. **Economic Theory of Teams**. New Haven and London: Yale University Press, Cowles Foundation Monograph 22, 1972, 345 p.

MARSHALL, A.W.; OLKIN, I. A Family of Bivariate Distributions Generated by the Bivariate Bernoulli Distribution. **Journal of the American Statistical Association**, vol.80, n.390, June 1985, p.332-338

MARTZOUKOS, S.H.; TRIGEORGIS, L. Resolving a Real Options Paradox with Incomplete Information: After All, Why Learn? Los Angeles: **Proceedings of the 5th Annual International Conference on Real Options**, julho de 2001, 27 p. Disponível em http://www.realoptions.org/.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.D.; GREEN, J.R. **Microeconomic Theory**. Oxford: Oxford University Press, 1995, 981 p.

MATHEWS, S. Valuing Real Options at Boeing. **Proceedings of Real Options Valuation in the New Economy**, Montreal, June 16-17, 2004.

MAXWELL, S.E.; ARVEY, R.D.; CAMP, C.J. Measures of Strenght of Association: A Comparative Examination. **Journal of Applied Psychology**, vol. 66(5), October 1981, p.525-534

MAYNARD SMITH, J. The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflicts. **Journal of Theoretical Biology**, vol.47, 1974, p. 209-221

MAYNARD SMITH, J. **Evolution and the Theory of Games**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982, 224 p.

MAYNARD SMITH, J.; PRICE, G.R. The Logic of Animal Conflict. **Nature**, London, vol. 246, November 2, 1973, p.15-18

MAYOR, N.; SCHONBUCHER, P.; WILMOTT, P.; WHALLEY, A.E.; EPSTEIN, D. The Value of Market Research When a Firm is Learning: Real Option Pricing and Optimal Filtering. In: L. Trigeorgis (Ed.), **Real Options and Business Strategy**. London: Risk Publications, 1999, p. 295-319

MCCARDLE, K.F. Information Acquisition and the Adoption of New Technology. **Management Science**, vol.31(11), November, 1985, p.1372-1389

MCCARDLE, K.F.; SMITH, J.E. Valuing Oil Properties: Integrating Option Pricing and Decision Analysis. **Operations Research**, vol.46(2), February 1998, p.198-217

MCCORMACK, J.; LEBLANC, R.; HEISER, C. Turning Risk into Shareholder Wealth in the Petroleum Industry. **Journal of Applied Corporate Finance**, vol.15(2), Winter 2003, p.67-73

MCCORMACK, J.; SICK, G. Valuing PUD Reserves: A Practical Application of Real Options Techniques. **Journal of Applied Corporate Finance**, vol.13 (4), winter, 2001, p.110-115

MCCRAY, A.W. **Petroleum Evaluations and Economic Decisions**. Englewood Cliffs (EUA): Prentice-Hall, Inc., 1975, 448 p.

MCDONALD, R.; SCHRODER, M.D. A Parity Result for American Options. **Journal of Computational Finance**, vol.1(3), Spring, 1998, p.5-13 (artigo de trabalho original data de dezembro de 1990)

MCDONALD, R.; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. **Quarterly Journal of Economics**, November, 1986, p.707-727

MCELIECE, R.J. **The Theory of Information and Coding**. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2nd Ed., 2002, 397 p.

MCGRATH, R.G.; MACMILLAN, I.C. **The Entrepreneurial Mindset**. Boston: Harvard Business School Press, 2000, 380 p.

MCKAY, M.D.; MORRISON, J.D.; UPTON, S.C. Evaluating Prediction Uncertainty in Simulation Models. **Computer Physics Communications**, vol.117, 1999, p.44-51

MCMULLEN, JR., T.B. **Introduction to the Theory of Constraints (TOC) Management System**. Boca Raton (EUA): CRC Press LLC, 1998, 293 p.

MEDIN, J.A.F.; RODRIGUEZ, J.L.; RODRIGUEZ, J.L. Information Exchanges in Cournot Duopoly. **Revista Brasileira de Economia**, vol.57, n. 1, Parte II, Jan/Mar 2003, p. 191-208

MERTON, R.C. Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, vol.4, spring, 1973, p.141-183

MERTON, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous. **Journal of Financial Economics**, vol.3, 1976, p. 125-144

MERTON, R.C. A Simple Model of Capital Market Equilibrium with Incomplete Information. **Journal of Finance**, vol. 42(3), July, 1987, p.483-510

MERTON, R.C. Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later. **American Economic Review**, June, 1998, p.323-349

MICALIZZI, A. Timing to Invest and Value of Managerial Flexibility. Schering Plough Case Study. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, June 1999, Wassenaar-Leiden (Holanda).

MICALIZZI, A. The Flexibility for Discontinuing Product Development Expansion: The Glaxo-Wellcome Case. In: L. Trigeorgis (Ed.), **Real Options and Business Strategy - Applications to Decision Making**. London: Risk Books, 1999, p. 85-116

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. Berlin: Springer-Verlag, Third Edition, 1996, 387 p.

MIKOSCH, T. **Elementary Stochastic Calculus with Finance in View**. Singapore: World Scientific Publishing, 1998, 212 p.

MILES, J.; SHEVLIN, M. **Applying Regression & Correlation – A Guide to Students and Researchers**. London: Sage Public. Ltd., 2001, 253 p.

MILGROM, P. **Putting Auction Theory to Work**. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2004, 368 p.

MINARDI, A.M.A.F. **Teoria de Opções Aplicada a Projetos de Investimento**. São Paulo: Ed. Atlas S.A., 2004, 135 p.

MOEL, A.; TUFANO, P. Bidding for the Antamina Mine: Valuation and Incentives In a Real Options Context. Wassenaar (Holanda): **Proceedings da 3rd Annual International Conference on Real Options**, 1999, Publicado depois em Brennan, M.; Trigeorgis, L. (Ed.), *Project Flexibility, Agency and Competition*, Oxford: Oxford University Press, 2000, p.128 -150.

MOEL, A.; TUFANO, P. When Are Real Options Exercised? An Empirical Study of Mine Closings. **Review of Financial Studies**, Spring 2002, vol.15(1), p.35-64

MOORE, W.T. **Real Options & Option-Embedded Securities**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001, 294 p.

MOSCARINI, G.; SMITH, L. The Law of Large Demand for Information. **Econometrica**, vol.70(6), November, 2002, p.2351-2366

MOSZKOWICZ, V.N. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais**. Rio de Janeiro, 157 p. Dissertação de Mestrado, Dept. Eng. Industrial, PUC-Rio, Fevereiro de 2003.

MOTWANI, R.; RAGHAVAN, P. **Randomized Algorithms**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 476 p.

MÜLLER, A.; STOYAN, D. **Comparison Methods for Stochastic Models and Risks**. Chichester (UK): John Wiley & Sons Ltd., 2002, 330 p.

MUN, J. **Real Options Analysis – Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions**. Hoboken (EUA): John Wiley & Sons, Inc., 2002, 386 p.

MURTO, P. Exit in Duopoly under Uncertainty. **Working Paper**, Helsinki University of Technology, August 2002, 42 p.

MURTO, P. Valuing Options to Learn: Optimal Timing of Information Acquisition. Montreal: **Proceedings of the 8th Annual International Conference on Real Options**, June 2004, 27 pp. Disponível em http://www.realoptions.org/.

MUSIELA, M.; RUTKOWSKI, M. **Martingale Methods in Financial Modelling**. Berlin: Springer Verlag, Applications of Mathematics nº 36, 1997, 512 p.

MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. **Journal of Financial Economics**, November 1977, p.147-175

MYERS, S.C.; MAJD, S. Abandonment Value and Project Life. **Advances in Futures and Options Research**, vol.4, 1990, pp.1-21

MYERS, S.C.; MAJLUF, N. Corporate Financing and Investment Decisions when Firms Have Information that Investors Do Not Have. **Journal of Financial Economics**, vol.13, 1984, p.187-221

NAPEL, S. **Bilateral Bargaining – Theory and Applications**. Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002, 188 p.

NASH, JR., J.F. The Bargaining Problem. **Econometrica**, vol.18, 1950, p.155-162

NASH, JR., J.F. Two-Person Cooperative Games. **Econometrica**, vol.21, 1953, p.128-140

NEFTCI, S.N. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives**. San Diego: Academic Press, 2nd ed., 2000, 527 p.

NELSEN, R.B. **An Introduction to Copulas**. New York: Springer Verlag, Lectures Notes in Statistics v.139, 1999, 216 p.

NICHOLS, N.A. Scientific Management at Merck: An Interview with CFO Judy Lewent. **Harvard Business Review**, January-February 1994, p.89-99

O'HAGAN, A. **Kendall's Advanced Theory of Statistics – Volume 2B: Bayesian Inference**. London: Arnold Publishers and Oxford University Press, 1994, 332 p.

OLIVEIRA, C.A.P. **Avaliação e Gerência de Jazidas de Petróleo - Uma Abordagem pela Teoria das Opções**. Rio de Janeiro, julho 1990, 96 pgs. Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Dissertação de Mestrado.

ORDOVER, J.; RUBINSTEIN, A. A Sequential Concession Game with Asymmetric Information. **Quarterly Journal of Economics**, vol. 101(4), 1986, p.879-888

O'REILLY, D. Chevron and Texaco Merger Analysts Meeting Transcript. Oct. 16, 2000. **ChevronTexaco Corporation**. Disponível em www.chevrontexaco.com/news/spotlight/merger_analysts_meeting_transcript.asp Acesso em 17/10/2004.

OSBORNE, M.J.; RUBINSTEIN, A. **A Course in Game Theory**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1994, 352 p.

OTTOO, R.E. **Valuation of Corporate Growth Opportunities – A Real Options Approach**. New York: Garland Publishing, Inc., 2000, 167 pp.

PADDOCK, J.L.; SIEGEL, D.R.; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**, August 1988, p. 479-508.

PAKES, A. Patents as Options: Some Estimates of the Value of Holding European Patent Stocks. **Econometrica**, vol.54(4), July 1986, p.755-784

PANJER, H.H. On the Decomposition of Moments by Conditional Moments. **American Statiscian**, vol.27(4), 1973, pp.170-171

PAXSON, D.A. (Ed.). **Real R&D Options**. Burlington (EUA): Butterworth-Heinemann, 2003, 333 p.

PEARL, J. **Causality – Models, Reasoning, and Inference**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 384 p.

PEARSON, K. On a Correction to Be Made to the Correlation Ratio η. **Biometrika**, vol.8, 1911, p.254-256

PEDHAZUR, E.J. **Multiple Regression in Behavioral Research – Explanation and Prediction**. New York: Thomson Learning, Inc., 3rd ed., 1997, 1058 p.

PENNEC, X.; ROCHE, A.; CATHIER, P.; AYACHE, N. Non-Rigid MR/US Registration for Tracking Brain Deformations. A aparecer in: Blum, R.S.; Liu, Z. (Ed.). **Multi-Sensor Image Fusion and Its Applications**. New York: Marcel Dekker Inc., 2005.

PERRON, P. The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis. **Econometrica**, vol.57(6), November, 1989, p.1361-1401

PICKLES, E.; SMITH, J.L. Petroleum Property Evaluation: A Binomial Lattice Implementation of Option Pricing Theory. **Energy Journal**, vol.14(2), 1993, p.1-26

PILIPOVIC, D. **Energy Risk – Valuing and Managing Energy Derivatives**. New York: McGraw Hill Co., 1998, 248 p.

PINDYCK, R.S. Irreversible Investment, Capacity Choice, and Value of the Firm. **American Economic Review**, vol.78(5), December, 1988, p.969-985

PINDYCK, R.S. Investments of Uncertain Cost. **Journal of Financial Economics**, vol. 34, August, 1993, p.53-76

PINDYCK, R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices. **Energy Journal**, vol. 20(2), 1999, p. 1-27

PINDYCK, R.S. The Dynamics of Commodity Spot and Futures Markets: A Primer. **Energy Journal**, vol.22(3), 2001, p.1-29

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Econometric Models and Economic Forecasts**. New York: McGraw-Hill, Inc., third edition, 1991, 596 p.

PONSATI, C. The Deadline Effect: A Theoretical Note. **Economic Letters**, vol.48, 1995, p.281-285

POSTERNAK, D. **Inferência da Expressão Analítica de uma Fronteira de Investimento Ótimo para um Ativo que Segue o Processo de Reversão à Média por Programação Genética**. Rio de Janeiro, Fevereiro, 2004. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio. 77 p.

PRATT, J.W.; RAIFFA, H.; SCHLAIFER, R.O. **Introduction to Statistical Decision Theory**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1995, 875 p.

PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.H.; FLANNERY, B.P. **Numerical Recipes in C++ – The Art of Scientif Computation**. Cambridge: Cambridge University Press, Second Edition, 2002, 1002 p.

QUIGG, L. Empirical Testing of Real Option-Pricing Models. **Journal of Finance**, vol.48(2), June, 1993, p.621-640

RADNER, R.; STIGLITZ, J.C. A Nonconcavity in the Value of Information. In: M. Boyer; R. Kihlstrom, (Ed.), **Bayesian Models in Economic Theory**. New York: Elsevier Science Pub., 1984, p.33-52

RAIFFA, H. **Decision Analysis**. New York: McGraw-Hill Co., 1968 (impressão de 1997), 310 p.

RAIFFA, H.; SCHLAIFER, R. **Applied Statistical Decision Theory**. Boston: Harvard Business School (Press), 1961, 356 p.

RAO, M.M. **Conditional Measures and Applications**. New York: Marcel Dekker, Inc., 1993, 417 p.

RAZGAITIS, R. **Dealmaking Using Real Options and Monte Carlo Analysis**. Hoboken (EUA): John Wiley & Sons, Inc., 2003, 288 p.

RÉNYI, A. On Measures of Dependence. **Acta Mathematica Academiae Scientarium Hungaricae**, vol.10, 1959, p. 441-451

RÉNYI, A. **Probability Theory**. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1970, 670 p.

ROBERTS, K.; WEITZMAN, M. Funding Criteria for Research, Development, and Exploration Projects. **Econometrica**, vol. 49, September, 1981, p.1261-1288

ROCHE, A.; PENNEC, X.; MALANDAIN, G.; AYACHE, N. Rigid Registration of 3-D Ultrasound With MR Images: A New Approach Combining Intensity and Gradient Information. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, vol. 20(10), October, 2001, p. 1038-1049

ROCHMAN, R. The Use of Real Options in the Valuation of Companies Run by the Theory of Constraints. In: 6TH ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL OPTIONS, Coral Beach, Cyprus, julho de 2002, **Proceedings in CD-Rom**, 16 p.

ROGERS, J. **Strategy, Value and Risk – The Real Options Approach**. New York: Palgrave Pub., 2002, 141 p.

RONN, E.I. (Ed.). **Real Options and Energy Management – Using Options Methodology to Enhance Capital Budgeting Decisions**. London: Risk Books, 2002, 712 p.

ROSE, P.R. **Risk Analysis and Management of Petroleum Exploration Ventures**. Tulsa (EUA): American Association of Petroleum Geologists. AAPG Methods in Exploration Series nº 12, 2001, 164 p.

ROSS, S.M. **Stochastic Processes**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2nd ed., 1996, 510 p.

ROSS, S.M. **A First Course in Probability**. 5th ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 1998, 514 p.

ROTAR, V. **Probability Theory**. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1997, 414 p.

RUBINSTEIN, A. Perfect Equilibrium in a Bargaining Model. **Econometrica**, vol.50, 1982, p.97-109

RUBINSTEIN, A.; SAFRA, Z.; THOMSON, W. On the Interpretation of the Nash Bargaining Solution and Its Extension to Non-Expected Utility Preferences. **Econometrica**, vol.60(5), September, 1992, p.1171-1186

SAITO, R.; DE CASTRO, G.N.; MEZZOMO, C.; SCHIOZER, D.J. Value Assessment for Reservoir Recovery Optimization. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, vol.32, 2001, p.151-158

SALANIÉ, B. **The Economics of Contracts – A Primer**. Cambridge: MIT Press, 1997 (versão em inglês do original francês de 1994), 223 p.

SALTELLI, A. Sensitivity Analysis for Importance Assessment. **Risk Analysis**, vol.22(3), 2002, p.579-590

SALTELLI, A.; TARANTOLA, S.; CAMPOLONGO, F.; RATTO, M. (Ed.) **Sensitivity Analysis in Practice – A Guide to Assessing Scientific Models**. Chichester (UK): John Wiley & Sons Ltd., 2004, 219 p.

SAMPSON, A.R. A Multivariate Correlation Ratio. **Statistics & Probability Letters**, vol. 2(2), March, 1984, p. 77-81

SAMUELSON, L. **Evolutionary Games and Equilibrium Selection**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1997, 309 p.

SAMUELSON, P.A. Rational Theory of Warrant Price. **Industrial Management Review**, Spring, 1965a, p.13-39

SAMUELSON, P.A. Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. **Industrial Management Review**, Spring, 1965b, p. 41-49

SANTOS, A.H.M.; GUERRA, H.N.; NUNES, H.R.A. Opções Reais como Instrumento para Regulação de Mercados de Energia Elétrica. Artigo de trabalho, **Ministério das Minas e Energia e ANEEL**, 2001, 12 p.

SAPORTA, G. **Probabilités Analyse des Données et Statistique**. Paris: Editions Technip, 1990, 493 p.

SAVAGE, L.J. **The Foundations of Statistics**. Dover Eds., 2nd Revised Ed., 1972. Edição original, New York: John Wiley & Sons, 1954, 310 p.

SCARSINI, M. On Measures of Concordance. **Stochastica**, vol. 8(3), 1984, p. 201–218

SCHÄFFER, M.V.F. **Confirmação da Geração de Valor na Análise de Viabilidade do Desenvolvimento de um Campo de Petróleo Através do Uso do Modelo de Opções Reais Seguindo um Processo Estocástico de Reversão à Média**. Rio de Janeiro, 97 p. Dissertação de Mestrado, Dept. Eng. Industrial, PUC-Rio, Fevereiro de 2003.

SCHELLING, T.C. An Essay on Bargaining. **American Economic Review**, vol. 46(3), June, 1956, p. 281-306

SCHELLING, T.C. **The Strategy of Conflict**. Cambridge (EUA): Harvard University Press, Reprint Edition 1980 (original de 1960), 309 p.

SCHWARTZ, E.S. Book Review: Investment under Uncertainty. **Journal of Finance**, vol.51(5), December, 1996, p.1924-1928

SCHWARTZ, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **Journal of Finance**, vol.52(3), July, 1997, p.923-973

SCHWARTZ, E.; SMITH, J.E. Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices. **Management Science**, vol.46(7), July, 2000, p.893-9

SCHWARTZ, E.S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and Investment under Uncertainty – Classical Readings and Recent Contributions**. Cambridge (EUA): MIT Press, 2001, 871 p.

SCHWARTZ, E.S.; ZOZAYA-GOROSTIZA, C. Valuation of Information Technology Investments as Real Options. In H. Geman et al. (Ed.), **Mathematical Finance – Bachelier Congress 2000**. Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002, Proceeding of Bachelier Congress 2000, p.463-486

SCHWEIZER, B. Thirty Years of Copulas. In: Dall'Aglio, G.; Kotz, S.; Salinetti, G. (Ed.), **Advances in Probability Distributions with Given Marginals – Beyond the Copulas**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p.13-50.

SCHWEIZER, B.; WOLFF, E.F. On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables. **Annals of Statistics**, vol.9(4), 1981, p.879-885

SHAFFER, J.P.; GILLO, M.W. A Multivariate Extension of the Correlation Ratio. **Educational and Psychological Measurement**, vol.34, 1974, p. 521-524

SHANNON, C.E.; WEAVER, W. **The Mathematical Theory of Communication**. Urbana and Chicago: University of Illinois Press, 1949, 125 p.

SHARMA, A.K.; CHORN, L.G.; HAN, J.; RAJAGOPALAN, S. Quantifying Value Creation from Intelligent Completion Technology Implementation. **SPE paper** nº 78277, presented at the SPE 13th European Petroleum Conference, Aberdeen (UK), 29-31 October 2002, 13 p.

SHIRYAEV, A.N. **Probability**. New York: Springer-Verlag New York, 2nd ed., 1996, 621 p.

SHORACK, G.R. **Probability for Statisticians**. New York: Springer Verlag New York, Inc., 2000, 585 p.

SHREVE, S.E. **Stochastic Calculus for Finance II – Continuous-Time Models**. New York: Springer-Verlag New York, 2004, 550 p.

SICK, G. Real options in the Aerospace Industry. In: Micalizzi & Trigeorgis, (Ed.), **Real Options Applications – Proceedings of the First Milan International Workshop on Real Options**. Milano: E.G.E.A., Università Bocconi, 1999, p.127-158

SICK, G.A. Capital Budgeting with Real Options. **Salomon Brothers' Monograph Series in Finance & Economics**, nº 3, 1989, 78 p.

SIEGEL, D.R.; SMITH, J.L. & PADDOCK, J.L. Valuing Offshore Oil Properties With Option Pricing Models. **Midland Corporate Finance Journal**, vol.5, Spring, 1987, p.22-30

SMETS, F.R. **Essays on Foreign Direct Investment**. New Haven (EUA): Doctoral Thesis, Yale University, 1993, 219 p.

SMIT, H.T.J.; ANKUM, L.A. A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy under Competition. **Financial Management**, Autumn, 1993, p.241-250

SMIT, H.T.J.; TRIGEORGIS, L. **Strategic Investment – Real Options and Games**. Princeton: Princeton University Press, 2004, 471 p.

SMITH, J.E.; NAU, R.F. Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis. **Management Science**, vol.14(5), May, 1995, p.795-816

SMITH, J.L. The Option to Drill Again: Valuing a Sequence of Dependent Trials. **Working Paper**, Southern Methodist University, Dallas, January 20, 2004, 21 p. Disponível em http://faculty.cox.smu.edu/jsmith.html. Acesso em 10/10/2004.

SMITH, J.L.; THOMPSON, R. Managing a Portfolio of Real Options: Sequential Exploration of Dependent Prospects. **Working Paper**, Southern Methodist University, Dallas, January 31, 2004, 26 p. Disponível em http://faculty.cox.smu.edu/jsmith.html. Acesso em 10/10/2004.

SOMERS, R.H. A New Asymmetric Measure of Association for Ordinal Variables. **American Sociological Review**, vol.27, 1962, p.799-811

SOUZA JR., O.G.; DIAS, M.A.G.; MACIEL, W.B. The Value of Information to Model Reservoir Uncertainty in Deep-Water Turbiditic Oil Field, Campos Basin Offshore Brazil. **Apresentação em Powerpoint**. Chiba (Japão): SPE/JAPT/JNOC - ATW, 24-27 February, 2002

SPANOS, A. **Probability Theory and Statistical Inference – Econometric Modeling with Observational Data**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 815 p.

STECKLEY, S.G.; HENDERSON, S.G. A Kernel Approach to Estimating the Density of a Conditional Expectation. Chick, S. et al., ed. **Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference**, 2003, p. 383-391

STONIER, J.E. What Is an Aircraft Purchase Option Worth? Quantifying Asset Flexibility Created through Manufacturer Lead-Time Reductions and Product Commonality. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, June 1999, Wassenaar-Leiden (Holanda). Previamente publicado em *Handbook of Airline Finance*.

STUART, A.; ORD, K.; ARNOLD, S. **Kendall's Advanced Theory of Statistics – Volume 2A: Classical Inference & the Linear Model**. London: Arnold Publishers and Oxford University Press, 6th ed., 1999, 885 p.

STULZ, R.M. Options on the Minimum or Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications. **Journal of Financial Economics**, vol.10(2), July, 1982, p.161-185

SYDSAETER, K.; STRØM, A.; BERCK, P. **Economists' Mathematical Manual**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd ed., 2000, 206 p.

TAJAR, A.; DENUIT, M.; LAMBERT, P. Copula-Type Representation for Random Couples with Bernoulli Margins. Université Catholique de Louvain, **Discussion Paper 0118**, June 2001, 11 p.

TAUDES, A.; NATTER, M.; TRCKA, M. Real Option Valuation with Neural Networks. **International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management**. vol. 7(1), March, 1998, p. 43-52

TAVELLA, D. **Quantitative Methods in Derivatives Pricing – An Introduction to Computational Finance**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002, 285 p.

TEISBERG, E.O. **Capital Investment Strategies under Regulation: A Binomial Option Pricing Approach**. Doctoral Dissertation, Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, June, 1988, 285 p.

TEISBERG, E.O. Capital Investment Strategies under Uncertain Regulation. **Rand Journal of Economics**, vol.24(4), Winter, 1993, p.591-604

TEISBERG, E.O. An Option Valuation Analysis of Investment Choices by a Regulated Firm. **Management Science**, vol.40(4), April, 1994, p.535-548

TEISBERG, E.O. Methods for Evaluating Capital Investment Decisions under Uncertainty. In Trigeorgis, L. (Ed.): **Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Aplications**. Westport (EUA): Praeger Publisher, 1995, p.31-46

THIJSSEN, J.J.J. **Investment under Uncertainty, Coalition Spillovers and Market Evolution in a Game Theoretic Perspective**. Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2004, 251 p.

THOMSON, W. Cooperative Models of Bargaining. In: Aumann, R.J.; Hart, S. (Ed.). **Handbook of Game Theory with Economic Applications – Volume 2**. Amsterdam: North-Holland, Elsevier Science Pub., 1994, p.1237-1284

TIROLE, J. **The Theory of Industrial Organization**. Cambridge (USA): MIT Press, 1988, 479 p.

TITMAN, S. Urban Land Prices Under Uncertainty. **American Economic Review**, June, 1985, p.505-514

TJØSTHEIM, D. Measures of Dependence and Tests of Independence. **Statistics**, vol.28, 1996, p.249-284

TORGERSEN, E. **Comparison of Statistical Experiments**. Cambridge: Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 1991, 675 p.

TOURINHO, O.A.F. **The Valuation of Reserves of Natural Resources: An Option Pricing Approach**. Berkeley, 1979. 103 p. Tese de Ph.D., University of California, Berkeley.

TRIANTIS, A.J.; BORISON, A. Real Options: State of the Practice. **Journal of Applied Corporate Finance**, summer, 2001, p.8-24

TRIANTIS, A.J.; HODDER, J.E. Valuing Flexibility as a Complex Option. **Journal of Finance**, vol.45(2), June, 1990, p.549-565

TRIGEORGIS, L.G. **Valuing Real Investment Opportunities: An Options Approach to Strategic Capital Budgeting**. Cambridge (EUA): Doctoral Dissertation, Harvard University, Graduate School of Business Administration, 1986, 314 p.

TRIGEORGIS, L. Anticipated Competitive Entry and Early Preemptive Investment in Deferrable Projects. **Journal of Economics and Business**, vol.43(2), May, 1991, p.143-156

TRIGEORGIS, L. The Nature of Options Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, vol.28(1), March, 1993, p.1-20

TRIGEORGIS, L. (Ed.). **Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Aplications**. Westport (EUA): Praeger Publisher, 1995, 361 p.

TRIGEORGIS, L. **Real Options – Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. Cambridge (EUA): MIT Press, 1996, 427 p.

TRIGEORGIS, L. (Ed.). **Real Options and Business Strategy – Applications to Decision Making**. London: Risk Books, 1999, 372 p.

TRIGEORGIS, L. & MASON, S.P. Valuing Managerial Flexibility. **Midland Corporate Finance Journal**, Spring, 1987, p.14-21

TROTTINI, M. **Decision Models for Data Disclosure Limitation**. Doctoral Thesis, Carnegie Mellon University, Dept. of Statistics, December, 2003, 268 p.

TROTTINI, M. A Decision-Theoretic Approach to Data Disclosure Problems. **Research in Official Statistics**, vol.4, 2001, p.7-22

TVEDT, J. Crude Oil Dynamics: A Leader-Follower Game Between the OPEC Cartel and Non-OPEC Producers. Wassenaar-Leiden (Holanda): **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, June, 1999, 13 p.

UHLENBECK, G.E.; ORNSTEIN, L.S. On the Theory of Brownian Motion. **Physical Review**, vol.36, September, 1930. Reimpresso em: N. Wax (Ed.), Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Pub., 1954, p.93-111

VALDMANIS, T. Corporate Execs Examine Strategic Tool – A New Way to Assess Risk Arrives. **USA Today**. Money. May 12, 1999.

VARIAN, H.R. The Arbitrage Principle in Financial Economics. **Journal of Economic Perspectives**, vol.1(2), Fall, 1987, p.55-72

VARIAN, H.R. **Microeconomics Analysis**. New York: W.W. Norton & Co., Inc., 3rd Edition, 1992, 548 p.

VEGA-REDONDO, F. **Evolution, Games, and Economic Behaviour**. Oxford: Oxford University Press, 1996, 209 p.

VICKERS, J. Signalling in a Model of Monetary Policy with Incomplete Information. **Oxford Economic Papers**, vol.38, 1986, p.443-455

VICKREY, W. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. **Journal of Finance**, vol.16, March, 1961, p.8-37

VILLENEUVE, S. Exercise Regions of American Options on Several Assets. **Finance and Stochastics**, vol.3, 1999, p. 295-322

VIND, K. **Independence, Additivity, Uncertainty**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, 277 p.

VOLLERT, A. **A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation**. Boston: Birkhäuser, 2003, 266 p.

WACKERLY, D.D.; MENDENHALL III, W.; SCHEAFFER, R.L. **Mathematical Statistics with Applications**. Pacific Grove (EUA): Duxbury, Thomson Learning, 6th ed., 2002, 853 p.

WALD, A. **Sequential Analysis**. Dover Ed., 1973. Original: New York: John Wiley & Sons, Inc., 1947, 212 p.

WANG, B.; KOKOLIS, G.P.; RAPP, W.J.; LITVAK, B.L. Dependent Risk Calculations in Multiple-Prospect Exploration Evaluations. **SPE paper** nº 63198. 2000 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas (EUA), 1–4 October, 2000, 14 p.

WHITE, D.A. Selecting and Assessing Plays. In: Steinmetz, R. (Ed.). **The Business of Petroleum Exploration**. Tulsa (EUA): American Association of Petroleum Geologists, 1992. Chapter 8, p.87-94

WHITESIDE, M.W.; DROWN, C.; LEVY, G. General Solution for Option Analysis and Valuation Using a Branching Monte Carlo Method. **SPE paper** nº 71412. 2001 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, 30 September–3 October, 2001, 10 p.

WHITTLE, P. **Probability via Expectation**. New York: Springer Verlag New York, Inc., 4th ed., 2000, 352 p.

WILLIAMS, D. **Probability with Martingales**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 251 p.

WILLIAMS, D. **Weighing the Odds – A Course in Probability and Statistics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 547 p.

WILSON, R.B. Competitive Bidding with Asymmetric Information. **Management Science**, vol.13(11), July, 1967, p.816-820

WILSON, R.B. Competitive Bidding with Disparate Information. **Management Science**, vol.15(7), March 1969, p.446-448

WILSON, R.B. Informational Economies of Scale. **Bell Journal of Economics**, vol.6, 1975, p.184-195

WILSON, R.B. A Bidding Model of Perfect Competition. **Review of Economic Studies**, vol.44, 1977, p.511-518

WINSTON, W.L. **Decision Making Under Uncertainty – with RiskOptimizer**. Newfield (EUA): Palisade Co., Ed., 1999, 244 p.

WISHART, J. A Note on the Distribution of the Correlation Ratio. **Biometrika**, vol.24, 1932, p.441-456

YOKOTA, F.; THOMPSON, K.M. Value of Information Analysis in Environmental Health Risk Management Decisions: Past, Present, and Future. **Risk Analysis**, vol.24(3), 2004, p.635-650

ZEIRA, J. Investment as a Process of Search. **Journal of Political Economy**, vol. 95, February, 1987, p.204-210

ZIEGLER, A. **A Game Theory Analysis of Options – Contributions to the Theory of Financial Intermediation in Continuous Time**. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 145 p.

ZMESKAL, Z. Application of the Fuzzy-Stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option. **European Journal of Operational Research**, vol.135, 2001, p.303-310

9
Apêndices e Anexos

9.1.
Demonstrações do Capítulo 2

Proposição 1: Se o preço do petróleo segue um movimento geométrico Browniano, com parâmetros α, δ, e σ, e se V(P) é definido pela eq. (23) (modelo de negócios), então V também segue um movimento geométrico Browniano e com os mesmo com parâmetros α, δ, e σ.

Prova: Disponível na internet, no endereço:

http://www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html#business_model □

Proposição 2: Considere o problema clássico de escolha do momento ótimo de investimento (opção real de espera) para o desenvolvimento de um campo de petróleo com tempo de expiração finito. Se o preço do petróleo segue um movimento geométrico Browniano, então a equação diferencial parcial estocástica que rege o valor da opção real F(P, t) é exatamente a mesma tanto no modelo de negócios como no modelo do fluxo de caixa rígido e é dada pela eq (26). A diferença se dá apenas nas condições de contorno (cc.), as quais são mostradas na Tabela 4.

Prova: Disponível na internet, no endereço (ver item "Contingent Claims Deduction of the Partial Differential Equation for the Real Option F(P, t)"):

http://www.puc-rio.br/marco.ind/payoff_model.html#rigid_cf_model □

9.2.
Tempo de Toque, Fator de Desconto Esperado e Método Integral

O tempo para uma variável estocástica alcançar uma barreira pela primeira vez, conhecido por "first hitting time" (ou "first exit time") na literatura de processos estocásticos tem importantes aplicações em teoria dos jogos de opções e em opções reais. As equações relevantes relacionadas para o caso da variável estocástica seguir um movimento aritmético ou geométrico Browniano, inclusive

com panilha de simulação, assim como uma discussão detalhada sobre aplicações desse conceito, pode ser vista na seguinte página da internet:

http://www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html

Nessa página também se verá uma detalhada discussão do valor esperado do fator de desconto com tempo estocástico, além de detalhes de otimização sob incerteza usando novos métodos. Esse conjunto de ferramentas forma o arsenal para poder aplicar o método integral visto no cap. 4.

9.3. Demonstração das Equações do Fator de Desconto Estocástico

A prova do fator de desconto estocástico, eq. (281) e do valor esperado da eq. (282), úteis para a análise de jogos de opções reais (mas não somente), podem ser vistas nos seguintes endereços da internet:

http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly.html#first_expectation

http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly.html#second_expectation