Capitulo 8

4C A Distribuição das Firmas

- Considere uma empresa que pagou o custo de entrada *R*.
- Com isso, a firma passa a conhecer a distribuição de probabilidade da variável aleatória X. A seguir, ela verifica qual o valor do seu *draw* inicial de X.

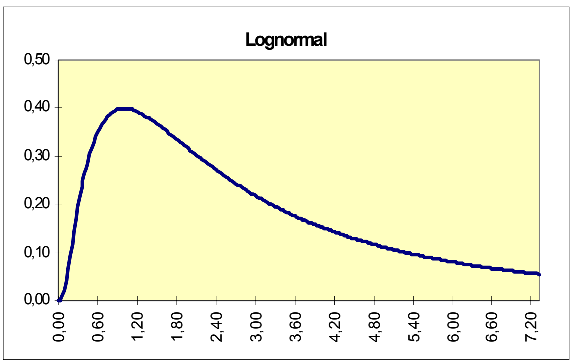
Se: $X > X^*$ → a firma paga *I* e se torna ativa

Se: $X < X^*$ → a firma entra em estado de espera, com o seu X evoluindo segundo uma MGB a cada período, e se tornará ativa somente quando $X > X^*$.

Durante todo esse processo, a firma está sujeita a uma taxa de mortalidade λ.

- Novos entrantes que pagam R chegam a um ritmo N. Para determinarmos o equilíbrio da indústria, precisamos saber qual o número total de firmas em cada estado (quantas estão ativas (Q) e quantas estão esperando) e qual o valor de X de cada uma das empresas que estão em espera.
- No equilíbrio de longo prazo, a taxa de morte de Poisson (λQ) e a taxa de ativação (M) terão que ser iguais, para que Q permaneça constante.
- Da mesma forma, o número de firmas com cada valor de X também é constante no tempo. (Ex.: Se os valores possíveis de X forem 2,4,6 e 8, no equilíbrio poderíamos ter 30% das empresas com X=2, 20% com X=4, 10% com X=6 e 40% com X=8).
- Obviamente, não sabemos qual firma em particular está com que valor de X, pois elas estão em constante transição, ora é uma, ora é outra. Mas para nós, isso é irrelevante, uma vez que adotamos a premissa de que todas as firmas são idênticas.
- Assim, ora empresa A tem X=2, no instante seguinte tem X=6, mas empresa B que tinha X=8 passa a ter agora X=2, de forma que o número de empresas com X=2 seja constante.

Pela equação (25) vimos que X segue uma MGB. Do capitulo 3 sabemos que uma variável que segue uma MGB tem uma distribuição lognormal. Isso significa que $0 \leq X < \infty$.



Se fizermos $x = \ln$ X, transformamos a MGB de X, com distribuição lognormal, numa MAB de x, com distribuição normal. Proof:

$$dX = \alpha\, X\, dt + \sigma\, X\, dz \qquad\qquad (dX)^2 = \sigma^2 X^2 dt$$

$$x = \ln X$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} dX^2$$

$$dx = 0 + \frac{\partial \ln X}{\partial X} dX + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln X}{\partial X^2} dX^2 = \frac{1}{X} dX - \frac{1}{2X^2} dX^2$$

$$dx = \frac{1}{X}\left(\alpha\, X\, dt + \sigma\, X\, dz\right) - \frac{1}{2X^2}\left(\sigma^2 X^2 dt\right)$$

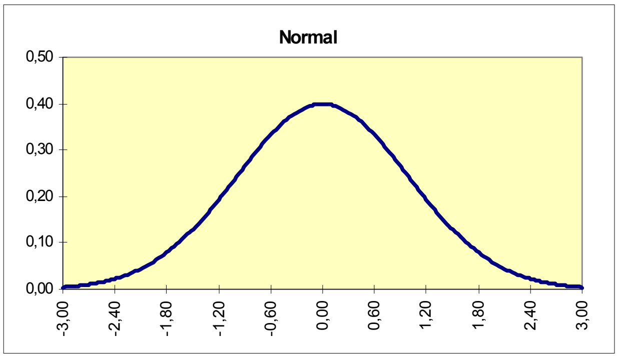
$$dx = \alpha\ dt + \sigma\ dz - \tfrac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dx = \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\ dz$$

ou

$$dx = v\, dt + \sigma\, dz \tag{31}$$

onde $x = \ln X$ $\quad e \quad$ $v = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$



Cada nova firma que paga R verifica qual o seu x inicial. A partir dessas N amostras de x, podemos definir qual a função de densidade do draw inicial das empresas entrantes. Chamaremos esta função de $g(x)$. Seja:

$g\ (x)$ ~ função de densidade do *draw* inicial

G(x) => função de densidade acumulada do *draw* inicial

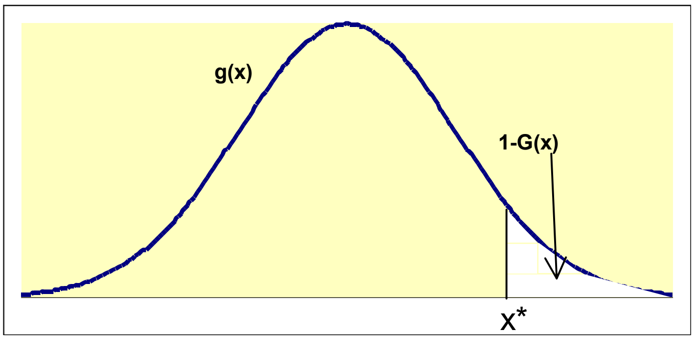
Note que como x tem distribuição normal (por ser uma MAB), pode assumir qualquer valor entre -∞ e +∞.

Definirmos $x^* = \ln X^*$ como o valor crítico necessário para ativação de uma firma. Das novas empresas entrantes (as que pagaram R), $N\left[1 - G(x^*)\right]$ se tornam ativas imediatamente, pois

$x^*> x$ no momento em que essas firmas pagam R, enquanto que as restantes $N\ G(x^*)$ se somam ao resto da massa de firmas que ficam esperando até que $x^* > x$.

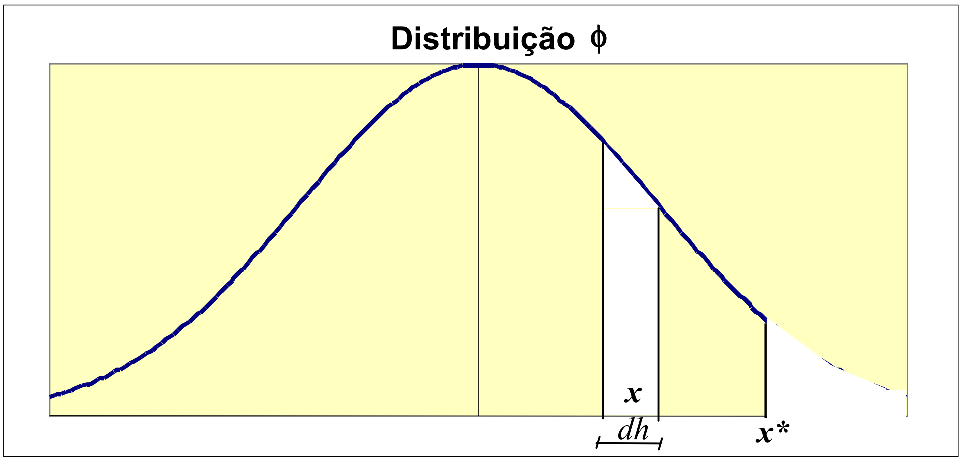
$$\begin{cases} x^* = \log X^* \\ G(x^*) = \int_{-\infty}^{x^*} g(x)\,dx \end{cases}$$

$$G(x > x^*) = \int_{x^*}^{\infty} g(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{x^*} g(x)dx = 1 - G(x^*)$$



Vamos analisar primeiramente o grupo das empresas que estão em espera. Para estas firmas, o intervalo de x será $(-\infty, x^*)$, pois se $x > x^*$, ela não estará mais em espera, estará ativa. Agora, estas empresas já tiraram o seu x inicial, e cada uma delas está observando o seu x evoluindo de acordo com a sua MAB. Temos então um grande número de empresas em espera observando o seu x, o que significa que a cada instante temos um grande número de x diferentes. Definimos ϕ como sendo a distribuição do conjunto destes x observados pelas firmas a cada instante.

Ex.: Sejam 100 empresas em espera. Cada uma observa um x no instante 1. Temos então 100 valores de x, de onde podemos tirar média e variância e construir a distribuição ϕ.



$N\ \phi(x)\ dh$

Se $\phi(x)$ é a densidade de x, é também a densidade das empresas que esperam, pois cada uma tem um único x e a cada x observado corresponde uma empresa. Por conveniência, multiplicamos esta densidade pela taxa N de entrada de novas firmas.

$N\,\phi\,(x)$ = densidade das firmas em espera que tem um valor arbitrário $x = x$.

Seja N $\phi(x)$ a densidade destas empresas no ponto arbitrário x. Para que a densidade em x seja constante, é preciso que o número de firmas que chegam a x seja igual ao número de firmas que saem de x. Há três maneiras de uma firma chegar em x:

1) Pagou R e após um tempo estava em $x + dh$ e recebeu um choque negativo que a levou para x num instante dt seguinte.
2) Pagou R e após um tempo estava em $x - dh$ e recebeu um choque positivo que a levou para x num instante dt seguinte.
3) Pagou R e o seu *draw* inicial foi x.

Da mesma forma, há duas maneiras possíveis para que as firmas saiam de x:

1) Qualquer choque, positivo ou negativo, derivada da MAB de x.
2) Morte Poisson.

Para que o número de firmas com valor x seja constante, ou seja, para que a densidade de empresas em x seja constante, é necessário que o número de firmas que chegam a x seja igual ao número de firmas que saem. Note também, que todas as firmas que estão em x saem no instante dt seguinte - nenhuma fica em x mais do que um dt. Portanto, podemos dizer a densidade de firmas em x ($N\,\phi(x)\,dh$) é igual a densidade das que entram.

Para que essa densidade permaneça constante, o fluxo de entrada em x deve ser igual ao de saída ("fluxo balanceado"). Dividindo-se t em pequenos intervalos de duração dt, escolhendo-se dh tal que $dh = \sigma\sqrt{dt}$ e as probabilidades de entrada e saída de x da seguinte forma:

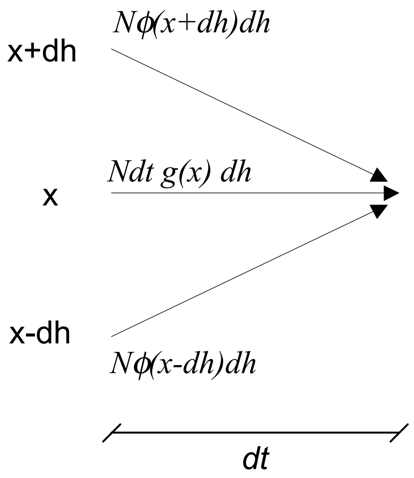
$$p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right] \qquad q = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right]$$

Observação:

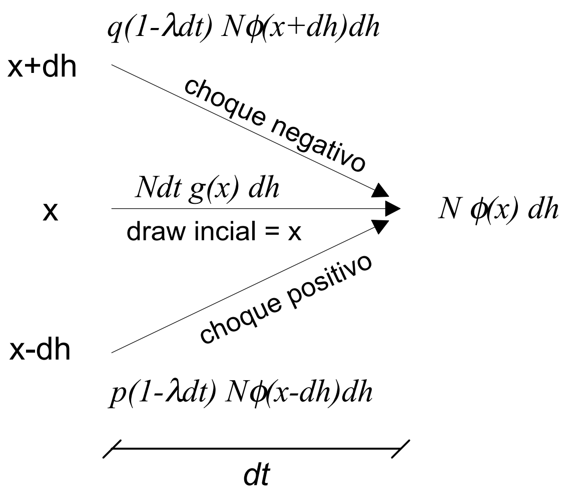
$g(x)$ = função densidade do *draw* <u>inicial</u> (firmas que pagam R).
$\phi(x)$ = função densidade das firmas que já tiraram o seu draw inicial e agora estão em x (firmas esperando, se $x < x^*$). É a função densidade das firmas que estão aptas a receber choque.

- Considerando-se o segmento dh centrado em x
- Temos $N\,\phi(x)\,dh$ firmas com este valor de x
- Num instante dt seguinte, todas $N\,\phi(x)\,dh$ firmas saem deste ponto x, seja através de choques Brownianos (positivos ou negativos), seja através de morte Poisson.

- Para que a densidade em x não mude, estas $N\ \phi(x)\ dh$ firmas tem que ser substituídas por outras, que podem ser novos entrantes que tiraram x no seu draw inicial, firmas que estavam em x-dh e sofreram um choque positivo, ou ainda, firmas que estavam em $x+dh$ e sofreram um choque negativo.
- A cada instante, de todas empresas entrantes, Ndt $g(x)dh$ delas tem draw inicial igual a x.



- As empresas em espera também estão sujeitas a morte Poisson a uma taxa (λ) durante um intervalo de tempo dt (λdt). Sobram então, a cada instante dt, (1-λdt) firmas.
- Também, a probabilidade de choques positivos e negativos é p e q, respectivamente.
- Para haver equilíbrio balanceado, estes fluxos tem que ser iguais:



$$\underbrace{N\phi(x)\,dh}_{1} = \underbrace{N\,dt\,g(x)\,dh}_{2} + \underbrace{p(1-\lambda dt)\cdot N\phi(x-dh)\,dh}_{3} + \underbrace{q(1-\lambda dt)\cdot N\phi(x+dh)\,dh}_{4} \quad (32)$$

onde:

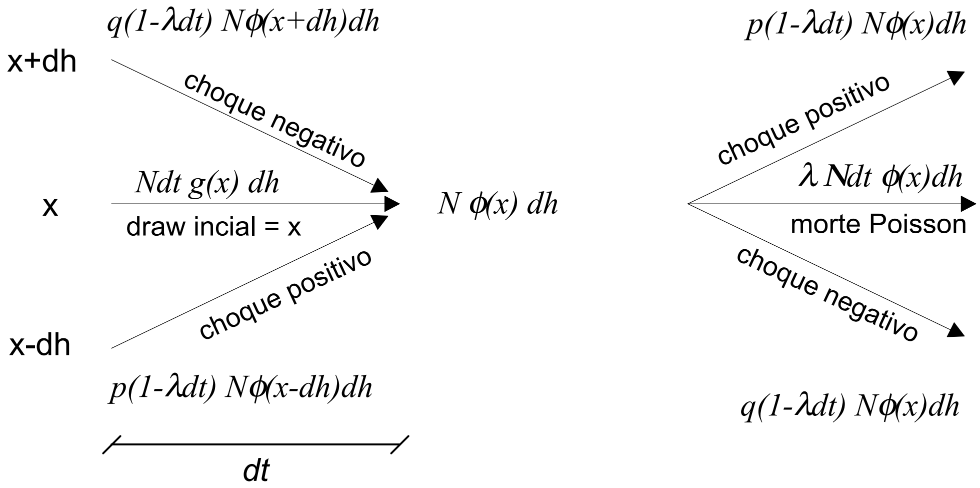
(1) = densidade das firmas que estavam em x e saíram por morte Poisson ou choque positivo ou negativo. É também a densidade de firmas que estão chegando a x.

(2) = novas firmas entrando em x;

(3) = firmas que estavam esperando em x - dh e receberam choque positivo e passaram para x;

(4) = firmas que estavam esperando em x + dh e receberam choque negativo e passaram para x;

Da mesma forma, o fluxo das firmas que saem de x é também $N\phi(x)dh$.



Voltando a equação 32:

$$N\phi(x)\,dh = N\,dt\,g(x)\,dh + p(1-\lambda dt)\cdot N\phi(x-dh)\,dh + q(1-\lambda dt)\cdot N\phi(x+dh)\,dh$$

Cancelando $N\,dh$ e expandindo $\phi\,(x \pm dh)$ pelo Teorema de Taylor, temos:

$$\phi\,(x+dh) = \phi\,(x) + \phi'\,(x)dh + \tfrac{1}{2}\,\phi''\,(x)dh^2 + \ldots \qquad \text{(a)}$$
$$\phi\,(x-dh) = \phi\,(x) - \phi'\,(x)dh + \tfrac{1}{2}\,\phi''\,(x)dh^2 - \ldots \qquad \text{(b)}$$

De (a) e (b) em (32):

$$\phi(x) = dt\,g(x) + p(1-\lambda dt)\cdot\phi(x-dh) + q(1-\lambda dt)\cdot\phi(x+dh)$$
$$\phi(x) = g(x)\,dt + p(1-\lambda dt)\cdot\left[\phi(x) - \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2\right]$$
$$+\,q(1-\lambda dt)\cdot\left[\phi(x) + \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2\right]$$
$$\phi(x) = g(x)\,dt + (p+q)(1-\lambda dt)\,\phi(x) + \cdot(q-p)(1-\lambda dt)\,\phi'(x)dh$$
$$+\,(p+q)(1-\lambda dt)\tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2$$

mas sabemos que $p + q = 1$

$$0 = -\phi(x) + (1-\lambda dt)\,\phi(x) + \cdot(q-p)(1-\lambda dt)\,\phi'(x)dh$$
$$+ (1-\lambda dt)\tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2 + g(x)\,dt$$

$$0 = -\lambda dt\,\phi(x) + \cdot(q-p)(1-\lambda dt)\,\phi'(x)dh + (1-\lambda dt)\tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2 + g(x)\,dt \qquad \text{(c)}$$

Seja $dh = \sigma\sqrt{dt}$ (d)

e

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right] \\ q &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow (q-p) = -\frac{v}{\sigma}\sqrt{dt} \qquad \text{(e)}$$

Substituindo-se (d) e (e) em (c):

$$0 = -\lambda dt\,\phi(x) + -\frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}(1-\lambda dt)\,\phi'(x)\sigma\sqrt{dt} + (1-\lambda dt)\tfrac{1}{2}\phi''(x)\sigma^2 dt + g(x)\,dt$$
$$0 = -\lambda dt\,\phi(x) + -v\,\phi'(x)dt + \tfrac{1}{2}\phi''(x)\sigma^2 dt + g(x)\,dt$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\sigma^2\phi''(x) - v\phi'(x) - \lambda\phi(x) + g(x) = 0} \qquad \text{Equação 33}$$

A equação diferencial (33) está associada a variável *x* que segue Movimento Aritmético Browniano (MAB) e cuja solução geral tem a seguinte forma[1]:

$$\phi(x) = C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x} + \phi_0(x)$$

onde $C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x}$ → solução homogênea
$\phi_0(x)$ → solução particular

e γ_1 e γ_2 são as raízes da equação quadrática calculada a seguir:

Suponha que $\phi(x) = Ce^{\gamma x} + \phi_0(x)$ (i)

Então: $\phi'(x) = C\gamma\, e^{\gamma x} + \phi_0'(x)$ (ii)

$\phi''(x) = C\gamma^2\, e^{\gamma x} + \phi_0''(x)$ (iii)

Substituindo (*i*), (ii) e (iii) na equação (33), chega-se a:

---

[1] Vide Shimko, pag. 35.

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\left(C\gamma^2 e^{\gamma x} + \phi_0''(x)\right) - v\left(C\gamma e^{\gamma x} + \phi_0'(x)\right) - \lambda\left(Ce^{\gamma x} + \phi_0(x)\right) + g(x) = 0$$

Rearrumando os termos da equação acima, tem-se:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\sigma^2\phi_0''(x) - v\phi_0'(x) - \lambda\phi_0(x) + g(x)}_{Equação\ 33} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 C\gamma^2 e^{\gamma x} - vC\gamma e^{\gamma x} + \lambda Ce^{\gamma x} = 0$$

Pela equação 33, sabemos que os primeiros quatro termos da equação acima são nulos. Então, basta zerarmos os demais termos:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 Ce^{\gamma x} - v\gamma Ce^{\gamma x} + \lambda Ce^{\gamma x} = 0$$

Eliminando-se o termo $Ce^{\gamma x}$ da equação acima, temos

$$Q \equiv \tfrac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 + v\gamma - \lambda = 0 \qquad \text{Equação 33B}$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2, há duas condições:

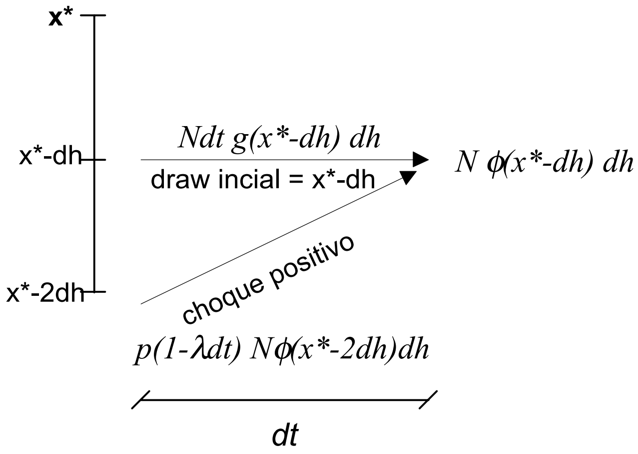
1) A massa total de firmas esperando é finita, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{x^*} \phi(x)dx < \infty$$

Como $\gamma_2 < 0$ na solução homogênea, tem-se que $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-\infty}} = \infty$, o que não é compatível com a afirmação acima. Assim, fazemos $C_2 = 0$ e a equação (33) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\phi(x) = Ce^{\gamma x} + \phi_0(x)$$

2) Quando as firmas atingem x^*, se tornam ativas e deixam de pertencer a distribuição $\phi(x)$. Vamos analisar o que ocorre no ponto $x^*- dh$, imediatamente à esquerda de x^*. Só há dois modos da firma chegar a $x^* - dh$: tirando $x^*- dh$ como draw inicial, ou vindo de $x^*- 2dh$ através de um choque positivo.



a) a firma estava em $x = x^*$ - $2dh$ e recebe choque positivo, ou
b) a firma paga R, entra no mercado e tem um draw inicial de x^* - dh.

A equação (32) agora fica:

$$N\phi(x^*-dh)\,dh = N\,dt\,g(x^*-dh)\,dh + p(1-\lambda dt)\cdot N\phi(x^*-2dh)\,dh$$

Para simplificar a notação, daremos um shift fazendo $x = x^* - dh$, para podermos usar a mesma notação da equação 32 anterior. Assim, podemos rescrever a equação 32, sabendo que não há firmas esperando em x^* ou em qualquer posição acima desta ($x > x^*$) e, portanto, elimina-se a parte associada a probabilidade de queda q, ou seja:

$$N\phi(x)\,dh = N\,dt\,g(x)\,dh + p(1-\lambda dt)\cdot N\phi(x-dh)\,dh$$

onde:

$N\,\phi(x)\,dh$	→	densidade das firmas em $x = x^*$ - dh
$N\,g(x)\,dt\,dh$	→	firmas que nasceram em x^* - dh
$p(1-\lambda dt)N\,\phi(x-dh)dh$	→	firmas que estavam em x^* - $2dh$ e receberam choque positivo.

Aplicando-se expansão de Taylor ao termo ϕ (x - dh) e substituindo-se os valores de $dh = \sqrt{dt}$ e de $p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right]$, chega-se a $\phi(x) = 0$ em $x = x^*$ - dh. Fazendo-se $dh \to 0$, encontra-se a condição $\phi(x^*) = 0$.

Proof:

$$\phi(x) = g(x)\,dt + p(1-\lambda dt)\,\phi(x-dh)$$

Substituindo o valor de p, tem-se:

$$\phi(x) = g(x)dt + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right](1 - \lambda dt)\cdot\phi(x - dh)$$

$$\phi(x) = g(x)dt + \frac{1}{2}\left[1 - \lambda dt + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt} - \underbrace{\frac{\lambda v}{\sigma}\sqrt{dt^3}}_{=0}\right]\cdot\phi(x - dh)$$

Expandindo $\phi(x)$ pelo Teorema de Taylor:

$$\phi(x) = g(x)dt + \frac{1}{2}\left[1 - \lambda dt + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right]\cdot\left[\phi(x) - \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2\right]$$

$$\phi(x) = g(x)dt + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\phi(x) - \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2 - \lambda dt\left(\phi(x) - \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2\right)\\ +\dfrac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\left(\phi(x) - \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2\right)\end{array}\right]$$

Eliminando os termos com expoente > 1 em dt. (lembre que $dh = \sqrt{dt}$)

$$\phi(x) = g(x)dt + \frac{1}{2}\left[\phi(x) - \phi'(x)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x)dh^2 - \lambda dt\phi(x) + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\left(\phi(x) - \phi'(x)dh\right)\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\phi(x) - g(x)dt - \frac{1}{2}\left[-\phi'(x)\sigma\sqrt{dt} + \tfrac{1}{2}\phi''(x)\sigma^2 dt - \lambda dt\phi(x) + \frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\left(\phi(x) - \phi'(x)\sigma\sqrt{dt}\right)\right] = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\phi(x) - g(x)dt - \tfrac{1}{2}\phi'(x)\sigma\sqrt{dt} - \tfrac{1}{4}\phi''(x)\sigma^2 dt + \tfrac{1}{2}\lambda dt\phi(x) - \frac{v}{2\sigma}\sqrt{dt}\phi(x) + \frac{v}{2\sigma}\phi'(x)\sigma dt = 0$$

Separando os termos em dt e $\sqrt{dt}$:

$$\tfrac{1}{2}\phi(x) - \left[g(x) - \tfrac{1}{4}\phi''(x)\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\lambda\phi(x) + \frac{v}{2\sigma}\phi'(x)\sigma\right]dt - \left[\tfrac{1}{2}\phi'(x)\sigma - \frac{v}{2\sigma}\phi(x)\right]\sqrt{dt} = 0$$

Multiplicando-se a equação acima por *dt,* chega-se a:

$$\tfrac{1}{2}\phi(x)dt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x) = 0$$

??????????????

Outra forma???

Para que esta expressão seja zero, cada um dos termos tem que ser zero. Então temos $\tfrac{1}{2}\phi(x) = 0$. *Mas fazendo isso para os demais termos, no último teremos ϕ'(x) =0, o que não é verdade.*

Substituindo-se x por x^* - dh, tem-se:

$$\phi(x^* - dh) = \phi(x^*) - \phi'(x^*)dh + \tfrac{1}{2}\phi''(x^*)dh^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x^*) = 0$$

Podemos também calcular a que taxa as firmas que estão esperando atingem x^*. Essa taxa é dada por:

$$p(1-\lambda dt)N\phi(x^*-dh)dh$$

Aplicando-se novamente o Teorema de Taylor, chega-se a:

$$p(1-\lambda dt)N\left[\underbrace{\phi(x^*)}_{=0}-\phi'(x^*)dh+\tfrac{1}{2}\phi''(x^*)dh^2\right]dh$$

$$p(1-\lambda dt)\left[\underbrace{\tfrac{1}{2}N\phi''(x^*)dh^3}_{=0}-N\phi'(x^*)dh^2\right]$$

$$p(1-\lambda dt)\left[-N\phi'(x^*)\sigma^2 dt\right]$$

$$-pN\phi'(x^*)\sigma^2 dt$$

Lembrando que $p=\frac{1}{2}\left[1+\frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right]$, temos $-\frac{1}{2}\left[1+\frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right]N\phi'(x^*)\sigma^2 dt$

Então, podemos dizer que a taxa de ativação num intervalo *dt* é:

$$\boxed{-\frac{1}{2}N\phi'(x^*)\sigma^2 dt}$$

Vale observar que, nas passagens acima, usou-se: primeiro o fato de que $\phi(x^*)=0$ e, posteriormente, $dh = \sqrt{dt}$, e também que $p=\frac{1}{2}\left[1+\frac{v}{\sigma}\sqrt{dt}\right]$.

Solução Analítica

Suponha que a distribuição de X seja uniforme ao longo do intervalo $(0,\hat{X})$. Logo, $x = \ln X$ tem distribuição exponencial ao longo do intervalo $(-\infty,\hat{x})$, onde:

$$\hat{x}=\ln\hat{X} \qquad e \qquad g(x)=e^{x-\hat{x}}$$

proof ?????????????

Voltando para a equação 33:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\phi''(x)-v\phi'(x)-\lambda\phi(x)+g(x)=0$$

No caso em questão, a equação fica:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\phi''(x) - v\phi'(x) - \lambda\phi(x) + e^{x-\hat{x}} = 0$$

Considerando-se o intervalo $x^* < \hat{x}$, uma das soluções particulares da Equação 33 é:

$$\phi_0(x) = Ke^{x-\hat{x}}$$
$$\phi_0^{'}(x) = Ke^{x-\hat{x}}$$
$$\phi_0^{''}(x) = Ke^{x-\hat{x}}$$

Substituindo na equação diferencial, temos:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 Ke^{x-\hat{x}} - vKe^{x-\hat{x}} - \lambda Ke^{x-\hat{x}} + e^{x-\hat{x}} = 0$$
$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 K - vK - \lambda K + 1 = 0$$
$$K = \frac{1}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Então $\phi_0(x) = \dfrac{e^{x-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}$ onde $\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2 = -Q \quad em \quad \gamma = 1$

Para fazer sentido econômico, o denominador da equação acima deve ser positivo e, portanto, a equação quadrática Q deve ser negativa quando avaliada em $\gamma = 1$. Assim, a raiz positiva γ_1 deve ser > 1. Assumindo-se que $\gamma_1 = \gamma > 1$, a solução para a equação (33) será:

$$\phi(x) = Ce^{\gamma x} + \phi_0(x)$$

onde a constante C pode ser determinada da condição $\phi(x^*) = 0$. Seja

$$\phi(x) = Ce^{\gamma x} + \frac{e^{x-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

Sabe-se que, em x^*, teremos $\phi(x^*) = 0$. Logo,

$$\phi(x^*) = Ce^{\gamma x^*} + \frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} = 0$$

$$C = -\frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} e^{-\gamma x^*} \qquad \text{(ii)}$$

De (ii) em (i), chega-se a:

$$\phi(x) = Ce^{\gamma x} + \frac{e^{x-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} = -\frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} e^{-\gamma x^*}.e^{\gamma x} + \frac{e^{x-\hat{x}}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\left[-e^{x^*-\hat{x}}e^{-\gamma x^*}e^{\gamma x} + e^{x-\hat{x}}\right]$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\left[e^{x-\hat{x}} - e^{\gamma(x-x^*)}e^{x^*-\hat{x}}\right] \qquad \text{Equação 34}$$

Agora podemos calcular alguns valores agregados das firmas que estão esperando para investir. O número total de firmas em espera é dado por:

$$M \equiv N\int_{-\infty}^{x^*}\phi(x)dx$$

$$M \equiv \frac{N}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\cdot\int_{-\infty}^{x^*}\left[e^{x-\hat{x}} - e^{\gamma(x-x^*)}e^{x^*-\hat{x}}\right]dx \qquad \text{(i)}$$

Desenvolvendo-se a integral acima, temos:

$$\int_{-\infty}^{x^*}e^{x-\hat{x}}dx - e^{x^*-\hat{x}}\int_{-\infty}^{x^*}e^{\gamma(x-x^*)}dx =$$

$$e^{x-\hat{x}}\Big|_{-\infty}^{x^*} - e^{x^*-\hat{x}}\frac{e^{\gamma(x-x^*)}}{\gamma}\Bigg|_{-\infty}^{x^*} = e^{x-\hat{x}}\left[1 - \frac{1}{\gamma}\right]$$

$$= e^{x-\hat{x}}\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right] \qquad \text{(ii)}$$

De (2) em (l):

$$\boxed{M \equiv \frac{N}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\cdot\frac{\gamma}{\gamma - 1}e^{x^*-\hat{x}}}$$

Vimos anteriormente que a taxa de ativação é dada por $-\frac{1}{2}N\phi'(x^*)\sigma^2 dt$. Desenvolvendo este termo, temos:

$$-\tfrac{1}{2}\sigma^2 N\phi'(x^*) = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 N\left[\gamma Ce^{\gamma x^*} + \underbrace{\phi_0(x^*)}_{0}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sigma^2 N\gamma e^{\gamma x^*}\left[\frac{e^{x^*-\hat{x}}e^{-\gamma x^*}}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{N}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\tfrac{1}{2}\sigma^2\gamma e^{x^*-\hat{x}}$$

$$\boxed{-\tfrac{1}{2}\sigma^2 N\phi'(x^*) = N\,\frac{\tfrac{1}{2}\sigma^2(\gamma-1)}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}\,e^{x^*-\hat{x}}}$$

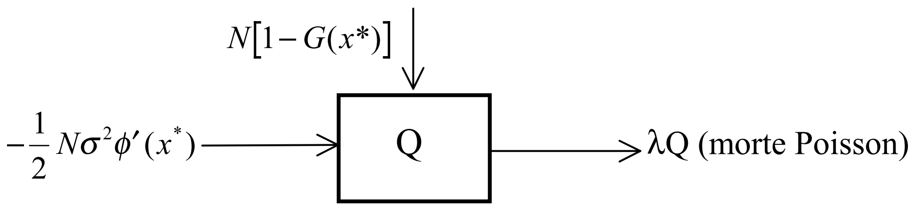
Para que o número de firmas operando na economia permaneça constante é preciso que o total que entra seja igual ao total que sai:

Entram:

- As firmas que recebem *draw* inicial suficientemente grande para justificar ativação imediata, que tem uma taxa $N[1-G(x^*)]$.
- Mais as firmas que estavam esperando e investiram porque seu x superou x^*, que tem uma taxa de ativação $-\dfrac{1}{2}N\sigma^2\phi'(x^*)$.

Saem:

- A proporção λ das firmas que morrem por morte de Poisson, a uma taxa λQ.



Igualando os fluxos, temos:

$$\lambda Q = N\left[1-G(x^*)-\tfrac{1}{2}\sigma^2\phi'(x^*)\right] \qquad \text{equação} \quad (35)$$

No exemplo utilizado na solução analítica, X tem distribuição uniforme e a condição (35) se torna:

$$\lambda Q = N\left[1-e^{x^*-\hat{x}}-\tfrac{1}{2}\sigma^2\left(\gamma\, Ce^{\gamma x^*}+\phi_0(x^*)\right)\right]$$

$$\lambda Q = N\left[1-e^{x^*-\hat{x}}-\tfrac{1}{2}\sigma^2\gamma\, Ce^{\gamma x^*}-\tfrac{1}{2}\sigma^2\phi'_0(x^*)\right]$$

Mas $\phi_0(x^*) = \dfrac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2} \qquad \Rightarrow \qquad \phi'_0(x^*) = \dfrac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}$

e $\quad C = -\dfrac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}\,e^{-\gamma x^*}$.

Substituindo, temos:

$$\lambda Q = N\left[1-e^{x^*-\hat{x}}+\tfrac{1}{2}\sigma^2\gamma\left[\frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}\,e^{-\gamma x^*}\right]e^{\gamma x^*}-\tfrac{1}{2}\sigma^2\,\frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}\right]$$

$$\lambda Q = N\left[1-e^{x^*-\hat{x}}+\tfrac{1}{2}\sigma^2\gamma\,\frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}-\tfrac{1}{2}\sigma^2\,\frac{e^{x^*-\hat{x}}}{\lambda+\nu-\tfrac{1}{2}\sigma^2}\right]$$

$$\lambda Q = N\left[1 - e^{x^* - \hat{x}}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\sigma^2\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\right)\right]$$

$$\lambda Q = N\left[1 - e^{x^* - \hat{x}}\left(\frac{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\right)\right]$$

$$\boxed{\lambda Q = N\left[1 - e^{x^* - \hat{x}}\frac{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2}\right]}$$

Sendo que a massa total de firmas esperando é dada por M + Q.