Capítulo 8

APÊNDICE 1

Barreira e Distribuição de Longo Prazo

Em aplicações econômica, barreiras aparecem como resultado de mecanismos de equilíbrio do mercado. Por exemplo, suponha que x seja o preço de uma mercadoria, que está sujeita a uma barreira superior $(\bar{x})$, a partir da qual novas firmas entrarão, e uma barreira inferior $(\underline{x})$, abaixo da qual firmas abandonarão o investimento (caso da seção 2 e 3).

Após longo período de tempo, quer dizer, no longo prazo, esse processo de x tenderá à estacionariedade. Se x segue o movimento Browniano geométrico e supondo-se x = log X, sabe-se que, aplicando-se o Lema de Itô, x segue movimento Browniano simples. O que se precisa é achar a densidade de probabilidade da distribuição $\phi(x)$.

1) Hipóteses usadas no desenvolvimento do modelo:

- x começa em x_0
- x segue movimento Browniano simples;

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$

- x tem distribuição normal com média $(x_0 + \alpha t)$ e variância $\sigma^2 t$

Demonstração - Equação (1):

$$dx = xt - x_0 = \alpha dt + \sigma dz$$

$$xt = x_0 + \alpha dt + \sigma dz$$

$$xt = x_0 + \int_0^1 \alpha dt + \int_0^1 \sigma dz(t)$$

$$xt = x_0 + \alpha t\Big|_0^t + \sigma zt\Big|_0^t$$

Sabe-se que, no processo de Wiener padronizado $z(0) = 0$, e, portanto, tem-se que:

$$x_t = x_0 + \alpha t + \sigma z(t) \qquad \textit{(2)}$$

Calculando-se a esperança da equação (2) acima:

$$E\left[\frac{x_t}{x_0} = x_0 + \alpha(t-0) + \sigma\, E(z(t))\right],$$

onde $z(t) \sim N(0,t)$ logo:

$$E\left[\frac{x_t}{x_0} = x_0 + \alpha t\right] \qquad (3)$$

Calculando a variância, usando (2) e (3):

$$\operatorname{var}\left[\frac{x_t}{x_0}\right] = E_t\left[xt - E(x_t)\right]^2 = E\left[x_0 + \alpha t + \sigma z(t) - x_0 - \alpha t\right]^2 =$$

$$= E\left[\sigma\, z(t)\right]^2 = \sigma^2 E\left[z(t)\right]^2 = \sigma^2 \operatorname{var} z(t) = \sigma^2 t$$

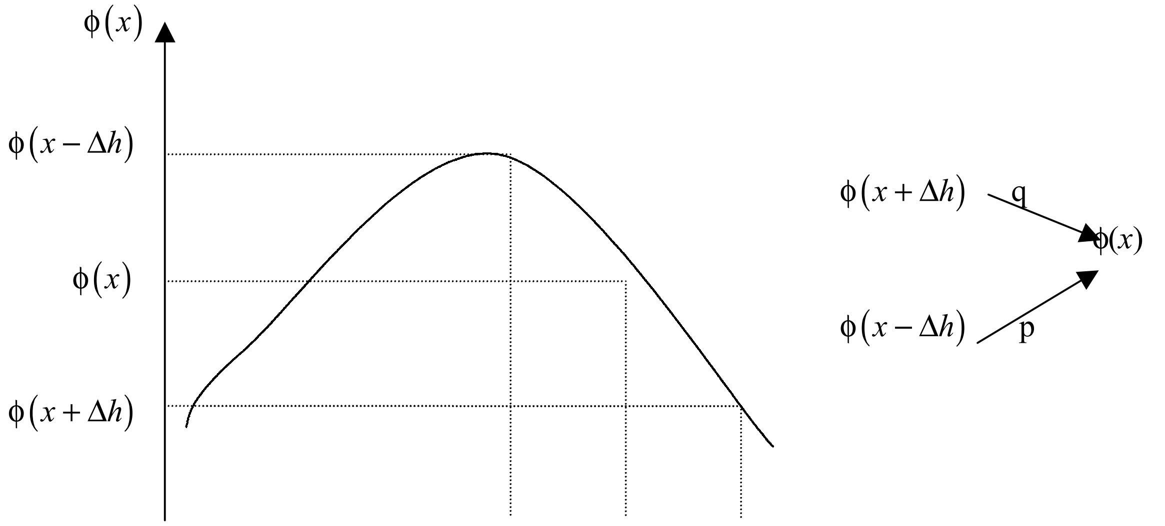
Logo:

$$\operatorname{var}\left[\frac{x_t}{x_0}\right] = \sigma^2 t \qquad (4)$$

Assumindo-se processo *randon walk* considera-se, inicialmente, quaisquer três pontos adjacentes. Seja, por exemplo, $(x-\Delta h)$, x, e $(x+\Delta h)$, onde $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$. Em pequeno intervalo de tempo Δt, pode-se atingir x de duas formas: (i) partindo-se de $x-\Delta h$, cuja densidade de probabilidade é dada por $\phi(x-\Delta h)$, com probabilidade de subida *p*, e (ii) partindo-se de $x+\Delta h$, cuja densidade de probabilidade é dada por $\phi(x+\Delta h)$, com probabilidade de queda *q*. Suponha *p* e *q* conforme definido a seguir:

$$p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\alpha}{\sigma^2}\sqrt{\Delta h}\right] e\; q = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\alpha}{\sigma^2}\sqrt{\Delta h}\right]$$

Desta forma tem-se a seguinte representação:



$$x - \Delta h \qquad x \qquad x + \Delta h$$

Em um segundo momento, o processo é restringido de forma que *x* não possa cruzar a barreira superior x . Usando a mesma representação de *randon walk,* isso significa que, começando em $\bar{x}$, se *x* tentar subir voltará para $\bar{x}$, com probabilidade *p*, enquanto o movimento vindo de $\bar{x} - \Delta h$ ocorrerá normalmente com probabilidade *p*. Similarmente, coloca-se uma barreira inferior em $\underline{x}$.

$$\phi(\bar{x}) \xrightarrow{p} \bar{x}$$

$$\phi(\bar{x} - \Delta h)$$

2) Distribuição de probabilidade em qualquer x:

$$\phi(x) = p\phi(x - \Delta h) + q\phi(x + \Delta h) \tag{35}$$

Expandindo o lado direito da equação (35) pelo Teorema de Taylor e substituindo os valores de *p* e de *q*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\right]\left[\Phi(x) + \Phi(x)(-\Delta h) + \frac{1}{2}\Phi(x)''(x)(-\Delta h)^2 + \cdots\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\right]\left[\Phi(x) + \Phi(x)(\Delta h) + \frac{1}{2}\Phi''(x)(\Delta h)^2 + \cdots\right]$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) - \frac{1}{2}\Phi'(x)\Delta h + \frac{1}{4}\Phi''(x)(\Delta h)^2 + \cdots + \frac{\alpha}{2\sigma^2}\Phi(x)\Delta h -$$

$$-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\Phi'(x)(\Delta h)^2 + \frac{\alpha}{2\sigma^2}\Phi''(x)(\Delta h)^3 + \cdots + \frac{1}{2}\Phi(x) + \Phi'(x)\Delta h +$$

$$+\frac{1}{4}\Phi''(x)(\Delta h)^2 + \cdots - \frac{\alpha}{2\sigma^2}\Phi(x)\Delta h - \frac{\alpha}{2\sigma^2}\Phi'(x)(\Delta h)^2 -$$

$$-\frac{\alpha}{4\sigma^2}\Phi''(x)(\Delta h)^3 + \cdots$$

Agrupando os termos e eliminando aqueles em (Δt) de ordem superior a um, tem-se:

$$\frac{1}{2}\Phi''(x)(\Delta h)^2 - \frac{\alpha}{\sigma^2}\Phi''(x)(\Delta h)^2 = 0$$

Dividindo por $(\Delta h^2$, chega-se à seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{2}\Phi''(x)=\frac{\alpha}{\sigma^2}\Phi'(x)$$

(1) $\quad \Phi''(x)=\gamma\,\Phi''(x)$, onde $\gamma=\dfrac{2\alpha}{\sigma^2}$ (36)

Cuja solução geral pode ser encontrada como segue:

Integrando dos dois lados a equação (36):

$$\int\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\cdot dx\int\gamma\ d\,x$$

$$\int d\,\ell n\Phi'(x)=\int_{\gamma}d\,x$$

$\ell n\Phi'(x)=\gamma\ x+c$, onde c é uma constante

$$\Phi'(x)=e^{\gamma x+c}$$

Integrando novamente para chegar a $\Phi(\bar{x})$, temos:

$$\int\Phi'(x)\cdot dx=\int_{e^{\gamma x+c}}dx$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x+c}+B$$

$\Phi(x)=A\,e^{\gamma x}+B$, onde $A=\dfrac{1}{\gamma}e^{c}$ e B = constante

Logo, a solução geral para a equação diferencial (36) é:

$$\Phi\,(x)=Ae^{\gamma x}+B,\forall^{x}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas.

3) Distribuição de probabilidade na barreira x[1];

$$\Phi(\bar{x})=p\Phi(\bar{x})+p\Phi(\bar{x}-\Delta h)$$

$$(1-p)\Phi(\bar{x})=p\Phi(\bar{x}-\Delta h)$$

$$q\,\Phi(\bar{x})=p\Phi(\bar{x}-\Delta h)$$

Expandindo o lado direito pelo Teorema de Taylor e substituindo os valores de p e q:

$$(q-p)\Phi(\bar{x}) = p\left[\Phi(\bar{x})(-\Delta h) + \frac{1}{2}\Phi''(\bar{x})(-\Delta h)^2 + \cdots\right]$$

$$-\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\Phi(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left[1+\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\right]\left[\Phi'(\bar{x})(-\Delta h) + \frac{1}{2}\Phi''(\bar{x})(-\Delta h)^2 + \cdots\right]$$

$$\frac{\alpha}{\sigma^2} - \Delta h\Phi(\bar{x}) - \frac{1}{2}\Phi'(\bar{x})\Delta h + \frac{1}{4}\Phi''(\bar{x})(\Delta h)^2 - \frac{\alpha}{\sigma^2}\Phi'(\bar{x})(\Delta h)^2 = 0$$

Para que a equação acima tenha solução igual a zero, tem-se que igualar os termos em (Δh) e os termos em $(\Delta h)^2$. Assim, tomando os termos em (Δh):

$$\frac{1}{2}\Phi'(\bar{x})\Delta h = \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\Phi(\bar{x})$$

$\Phi'(\bar{x}) = \gamma\,\Phi(\bar{x})$, onde $\gamma = \dfrac{2\alpha}{\sigma^2}$

Integrando os dois lados para achar a solução geral:

$$\int \frac{\Phi'(\bar{x})}{\Phi(\bar{x})}\,d\,\bar{x} = \int \gamma\; d\;\bar{x}$$

$$\int d\;\ell n\Phi(\bar{x}) = \gamma\int d\,\bar{x}$$

$$\ell n\Phi(x) = \gamma\,x + c$$

$$\Phi(x) = A\,e^{\gamma x + c}$$

Logo a solução geral para a equação diferencial da distribuição de probabilidade em $\bar{x}$ é:

(2) $\quad \Phi(\bar{x}) = Ae^{\gamma\,\bar{x}}$, $\qquad$ onde $A = e^c$

Como (36) vale para qualquer *x* (inclusive na barreira), solução geral de (36) tem que ser igual a solução geral de (2), logo *B = 0*

4) Cálculo da constante A:

A Constante *A* pode ser encontrada partindo-se da condição a seguir:

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}}\Phi(x)dx = 1$$

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} A e^{yx} dx \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} e^{\gamma x} dx = 1$$

$$A \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot e^{yx} \Big|_{\underline{x}}^{\bar{x}} = 1$$

$$A \frac{1}{2} \left[e^{y\bar{x}} - e^{y\underline{x}} \right] = 1$$

Logo (3) $\qquad A = \dfrac{\gamma}{e^{\gamma \bar{x}} - e^{\gamma \bar{x}}}$

Substituindo (3) em (2), chega-se a equação da função de densidade de probabilidade de *x:*

$$\Phi(x) = \frac{\gamma\, e^{yx}}{e^{\gamma \bar{x}} - e^{\gamma \underline{x}}} \qquad (37)$$

Assim, a densidade de probabilidade de longo prazo estacionária é uma equação exponencial simples. Se o processo de x tiver um *drift* positivo ($\alpha > 0$, e portanto $\gamma > 0$), a exponencial vai crescer em direção à barreira superior. Logo, se $\gamma > 0$ podemos, de fato, considerar o processo apenas na barreira superior em x .

APÊNCICE 2

Demonstração da Equação Diferencial Parcial da pág. 279:

Sejam:

$$dx = \alpha_x x dt + \sigma_x x dz_x \qquad (1)$$
$$dy = \alpha_y y dt + \sigma_y y dz_y \qquad (2)$$
$$dw = \underbrace{(\alpha_y + \varepsilon\lambda)}_{=\alpha_w} w dt + \sigma_y w dz_y \qquad (3)$$

os movimentos Brownianos Geométricos de *x, y* e *w*.

- Suponha um portfólio sem risco $\phi(w) = V(w) - nP(x,w)$ (4)
  onde w = P/x → P = xw
- Remuneração esperada do portfólio: ganho de capital + dividendos - custos
- Ganho de capital: $d\phi = dV(x,w) - ndP(x,w)$ (5)
  $d\phi = dV(x,w) - nd(xw)$
- Dividendos: $P(x,w)\,dt = xw\,dt$ (6)
- Custos: $n(r+\lambda)\,P\,dt = n(r+\lambda)\,xw\,dt$ (7)
- Remuneração livre de risco: $(r+\lambda)\,\phi(x,w)\,dt$ (8)

Logo, de (5), (6), (7) e (8):

$$retorno\ livre\ de\ risco = ganho\ de\ capital + dividendos - custos$$
$$(r+\lambda)\,\phi(x,w)\,dt = d\phi + xwdt - n(r+\lambda)\,xw\,dt \qquad (9)$$
$$(r+\lambda)\,\phi(x,w)\,dt = \left[\underbrace{dV(x,w) - nd(xw)}_{a}\right] + \left[\underbrace{xw - n(r+\lambda)\,xw}_{b}\right]dt$$

Desenvolvendo (9) por partes:

$$\alpha \Rightarrow \underbrace{dV(x,w)}_{\alpha_1} - \underbrace{nd(xw)}_{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 \Rightarrow dV(x,w) = V_x dx + V_w dw + \frac{1}{2}V_{xx}(dw)^2 + \frac{1}{2}V_{xw}(dx)(dw) \qquad (10)$$

$$\alpha_2 \Rightarrow nd(xw) = n(wdx + xdw) \qquad (11)$$

De (α_1):

Substituindo (1) e (3) em (10):

$$
\begin{aligned}
dV = {} & V_x\alpha_x xdt + V_w\alpha_w wdt + V_w\sigma_y wdz_y + \frac{1}{2}V_{ww}\alpha_x^2 x^2 dt^2 + \\
& + \frac{1}{2}V_{xx}\alpha_x\sigma_x dtdz_x + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2 x^2 dz_x^2 + \frac{1}{2}V_{xx}\alpha_w^2 w^2 dt^2 + \frac{1}{2}V_{ww}\alpha_w\sigma_y w^2 dtdz_y + \\
& + \frac{1}{2}V_{ww}\sigma_y^2\; w^2 dz_y^2 + \frac{1}{2}V_{xw}\alpha_x\alpha_w xwdt^2 + \frac{1}{2}V_{xw}\sigma_{xw}\sigma w^2 dt^2 + \frac{1}{2}V_{ww}\alpha_w\sigma_y xwdtdz_y + \\
& + \frac{1}{2}V_{xw}\alpha_x\sigma_x xwdtdz_x + \frac{1}{2}V_{xw}\sigma_x\sigma_y xwdz_x dz_x
\end{aligned}
$$

Os termos dt^2, *dtdz* vão para zero mais rápido do que *dt*: $dt\cdot dz = dt\cdot\varepsilon\sqrt{dt} = \varepsilon\cdot dt^{3/2}$. Mas, sei que $E\left[dz_x dz_y\right] = 0$ e $\operatorname{var}(dz) = d\left(z^2\right) = dt$. Então:

$$dV = V_x\alpha_x xdt + V_x\sigma_x xdz_x + V_w\alpha_w wdt + V_w\sigma_y wdz_y + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma_x^2 x^2 dt + \frac{1}{2}V_{ww}\sigma_y^2 w^2 dt \qquad (12)$$

De (a_2):

$$\alpha_2 \Rightarrow nd(xw) = n(wdx + xdw) \qquad (11)$$

De (l) e (3) em (11):

$$-nd(xw) = -n\alpha_x xw\,dt - n\sigma_x xw\,dz_x - n\alpha_w xw\,dt - n\sigma_y xw\,dz_y \qquad (13)$$

Fazendo (12) + (13):

$$
\begin{aligned}
dV(x,w) - nd(xw) = {} & V_x\alpha_x xdt + V_x\sigma_x xdz_x + V_w\alpha_w wdt + V_w\sigma_y wdz_y + \\
& + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma_x^2 x^2 dt + \frac{1}{2}V_{ww}\sigma_y^2 w^2 dt - n\alpha_x xw\,dt - n\sigma_x xw\,dz_x - n\alpha_w xw\,dt - \\
& - n\sigma_y xw\,dz_y
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Tomando todos os termos em dz_x e dz_y, em (13) e igualando a zero para termos um portfólio sem risco, obtém-se o número de contratos de venda a descoberto *(n),* necessários para replicar um portfólio sem risco.

$$V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y - n\sigma_x xwdz_y = 0$$

$$n = \frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} \qquad (15)$$

Substituindo (14) e (15) em (9) teremos:

$$V_x\alpha_x xdt + V_x\sigma_x xdz_x + V_w\alpha_w wdt + V_w\sigma_y wdz_y + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma_x^2x^2dt + \frac{1}{2}V_{ww}\sigma_y^2w^2dt -$$

$$-\alpha_x xwdt\left[\frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y}\right] - \sigma_x xwdz_x\left[\frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y}\right] -$$

$$-\alpha_w xwdt\left[\frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y}\right] - \sigma_y xwdz_y\left[\frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y}\right] +$$

$$+(xw)dt - (r+\lambda)(xw)\left[\frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y}\right]dt =$$

$$= (r+\lambda)\left[V(x,w) - (xw)\left[\frac{V_x\sigma_x xdz_x + V_w\sigma_y wdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y}\right]\right] =$$

$$= V_x\sigma_x xdt + V_x\sigma_x xdz_x + V_w\alpha_w wdt + V_w\sigma_y wdz_y + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma_x^2x^2dt + \frac{1}{2}V_{ww}\sigma_y^2w^2dt -$$

$$-\frac{V_x\sigma_x^2x^2wdz_x^2}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} - \frac{V_w\sigma_x^2xw^2dz_y^2}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} + (xw)dt - (r+\lambda)\frac{(xw)V_{x_\sigma x}xdz_x}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} -$$

$$-(r+\lambda)\frac{(xw)V_w\sigma_y wdz_x}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} = (r+\lambda)V(x,w) - (r+\lambda)\frac{(xw)V_x\sigma_x xdz_x}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} -$$

$$-(r+\lambda)\frac{(xw)V_w\sigma_y xdz_y}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} \qquad (16)$$

Os termos em dz_x, e dz_y, têm que somar zero para garantir o portfólio sem risco. Assim, cortando os termos em dz e igualando a zero para verificar se essa condição é satisfeita:

$$V_x\sigma_x dz_x + V_w\sigma_y wdz_y - \frac{V_x\sigma_x^2x^2wdz_x^2}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} - \frac{V_w\sigma_y^2xw^2dz_y^2}{\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y} = 0$$

$$V_x\sigma_x dz_x\left(\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y\right) + V_w\sigma_y wdz_y\left(\sigma_x xwdz_x + \sigma_y xwdz_y\right) -$$

$$-V_x\sigma_x^2x^2wdz_x^2 - V_w\sigma_y^2xw^2dz_y^2 = 0$$

$$V_x\sigma_x^2x^2wdz_x^2 + V_x\sigma_x\sigma_y xwdz_xdz_y + V_w\sigma_x\sigma_y xw^2dz_xdz_y + V_w\sigma_y^2xw^2dz_y^2 -$$

$$V_x\sigma_x^2 x^2 w dz_x^2 + V_w \sigma_y^2 x w^2 dz_y^2 = 0$$

Sabe-se que $E\left[dz_x dz_y\right] = 0$, logo:

$$V_x\sigma_x^2 x^2 w dz_x^2 + V_w \sigma_y^2 x w^2 dz_y^2 - V_x\sigma_x^2 x^2 w dz_x^2 - V_x x w^2 dz_y^2 = 0 \text{ CDQ}$$

Então, de (16) temos:

$$V_x\alpha_x x dt + V_w \alpha_w w dt + \frac{1}{2} V_{xx}\sigma_x^2 x^2 dt + \frac{1}{2} V_{ww}\sigma_y^2 w^2 dt + (xw)dt = (r+\lambda)V(x\cdot w)dt$$

Dividindo por *(dt)* e rearranjando os termos, chega-se à equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\left(V_{xx}\sigma_x^2 x^2 + V_{ww}\sigma_y^2 w^2\right) + \left(V_x\alpha_x x + V_w\alpha_w w\right) - (r+\lambda)V(x\cdot w) + (xw) = 0$$

onde: $\alpha_w = \alpha_y + \varepsilon\lambda$