Capitulo 8

5 Um Modelo Geral

O modelo geral examina o equilíbrio da indústria, incorporando os dois tipos de incerteza: a incerteza específica da firma e a agregada da indústria (segue-se o tratamento de Caballero e Pindyck (1992)). Introduziu-se algumas hipóteses simplificadoras, além daquelas já assumidas nas seções anteriores:

- As firmas são neutras ao risco;
- A demanda é isoelástica
- O custo do estágio de ativação é zero ($I = 0$ e X* = 0)
- Cada firma só produz uma unidade de produto;
- Não há custos de produção ⇒ $\pi = P$ onde π é o lucro;
- O número de firmas ativas é Q

A função inversa de demanda que incorpora os dois choques é do tipo:

$$P = X\, Y\, Q^{-\varepsilon} \qquad (36)$$

onde a elasticidade preço da demanda é $1/\varepsilon$,

X = choque específico da firma
Y = choque agregado da indústria

Os dois choques seguem processos geométricos Browniamos independentes.

O choque específico da firma é dado por:

$$dX = \alpha_x X dt + \sigma_x X dz_x \qquad (37)$$

e o choque agregado da indústria:

$$dY = \alpha_y Y dt + \sigma_y Y dz_y \qquad (38)$$

onde dz_x e dz_y são os incrementos do processo de Wiener, sendo:

$\text{var}(dz_x) = \text{var}(dz_y) = dt$ e $E\left[dz_x dz_y\right] = 0$ Isso significa que eles são independentes, e a correlação ρ entre eles é zero.

Demonstração:

I) $\text{var}(dz_x) = \text{var}(dz_y) = dt$

$$\text{var}(dz) = E[dz - E(dz)]^2 = E\left[dz^2 - 2\,dz\,E(dz) + E^2(dz)\right]$$
$$\text{var}(dz) = E(dz^2) - 2E[dz\,E(dz)] + E^2(dz) = E(dz^2) - E^2(dz)$$

Mas lembrando que $\varepsilon \approx N(0,1)$

$E(\varepsilon) = 0$

$Var(\varepsilon) = E[\varepsilon - E(\varepsilon)]^2 = E(\varepsilon^2) = 1$

$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \quad \Rightarrow \quad E(dz) = E(\varepsilon\sqrt{dt}) = \sqrt{dt}\,E(\varepsilon) = 0$

$\Rightarrow \quad E(dz^2) = E(\varepsilon^2 dt) = dtE(\varepsilon^2) = dt$

Logo,

$\text{var}(dz) = E\left[dz^2\right] = dt \qquad dz \approx N(0, dt)$

II) $Cov(dz_x, dz_y) = E\left[dz_x . dz_y\right] - \underbrace{E\left[dz_x\right]}_{0} . \underbrace{E\left[dz_y\right]}_{0}$

$$\rho_{dz_x dz_y} = \rho = \frac{Cov(dz_x, dz_y)}{\sigma_{dz_x} . \sigma_{dz_y}} = \frac{E\left[dz_x . dz_y\right]}{\sqrt{dt}\sqrt{dt}}$$

$E\left[dz_x . dz_y\right] = \rho\,dt$

Se os dois processos são independentes, a correlação ρ é zero, então $E(dz_x dz_y) = 0$

Outras considerações:

- Cada firma paga o *sunk cost R* e recebe o choque inicial *X*, que tem distribuição conhecida (veja seção 4).
- Seja $\overline{X}$ = valor esperado do choque inicial X.
- Não existem custos adicionais de ativação (I = 0) e π é sempre positivo (π > 0).
- Todos os entrantes se tornam ativos imediatamente.

Na seção 2, referente à incerteza agregada da indústria, o equilíbrio era caracterizado por uma barreira superior no preço ($\overline{P}$). Quando se agrega a incerteza especifica da firma, a generalização é uma barreira nos fatores relativos à indústria na equação (36).

Defina $W = \dfrac{P}{X}$ Então $W = YQ^{-\varepsilon}$ (39)

e $\overline{W} = \dfrac{\overline{P}}{\overline{X}}$

sendo $\overline{P}$ $\Rightarrow$ barreira superior da seção 2 e $\overline{X}$ = valor esperado do choque inicial X.

Se $W < \overline{W}$ $\Rightarrow$ não haverá entrada de novas firmas, exceto se ocorrer um choque agregado em Y. Mas as firmas continuarão a sofrer morte de Poisson, então $dQ = -\lambda Q dt$.

Se $W > \overline{W}$ $\Rightarrow$ novas firmas irão entrar, induzindo um processo semelhante ao descrito na seção 2, fazendo $\overline{W}$ uma barreira superior no processo Browniano geométrico de W.

O movimento Browniano geométrico de Y e o processo de morte de Poisson de Q induzirá um processo Browniano geométrico em W:

$$dW = (\alpha_y + \varepsilon\lambda)Wdt + \sigma W dz_y \qquad (40)$$

Demonstração - Equação (40)

$$W = YQ^{-\varepsilon} \qquad (39)$$

$$dY = \alpha_y Y dt + \sigma_y Y dz_y \qquad (38)$$

e $dQ = -\lambda Q dt$

Desenvolvendo (39) por Taylor, temos:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial Y}dY + \frac{\partial W}{\partial Q}dQ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}dY^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2}dQ^2 + \ldots$$

$$dW = Q^{-\varepsilon}dY + Y(-\varepsilon)Q^{-\varepsilon-1}dQ + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}}_{0}dY^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2}\underbrace{dQ^2}_{0}$$

$$dW = Q^{-\varepsilon}\left(\alpha_y Y dt + \sigma_y Y dz_y\right) + Y(-\varepsilon)Q^{-\varepsilon-1}(-\lambda)Q dt$$

Mas $W = YQ^{-\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $Y = WQ^{\varepsilon}$

Substituindo:

$$dW = Q^{-\varepsilon}\left(\alpha_y WQ^{\varepsilon}dt + \sigma_y WQ^{\varepsilon}dz_y\right) + WQ^{\varepsilon}\varepsilon\lambda Q^{-\varepsilon-1}Qdt$$

$$dW = \left(\alpha_y Wdt + \sigma_y Wdz_y\right) + W\varepsilon\lambda dt$$

$$dW = \left(\alpha_y + \varepsilon\lambda\right)dt + \sigma_y Wdz_y \qquad (40)$$

$\overline{W}$ será determinado endogenamente como parte do sistema de equações de equilíbrio, como será demonstrado a seguir. O valor da firma ativa é dado por:

$$V(X,W)=E\int_0^\infty X_t W_t\, e^{-(r+\lambda)t}dt$$

lembrando que $W=\dfrac{P}{X}$ $\Rightarrow$ $P=XW$ $\therefore$ $P=X_tW_t=\pi_t$

Isso eqüivale ao valor presente do fluxo de lucros em tempo contínuo, onde a taxa de desconto *(r + λ)* está acrescida de λ, que representa a probabilidade de morte de Poisson.

Isso satisfaz à seguinte equação diferencial[1]:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 X^2 V_{xx}+\sigma_y^2 W^2 V_{ww}\right)+\left(\alpha_x X V_x+\alpha_w W V_w\right)-(r+\lambda)V+XW=0$$

onde $\alpha_w=(\alpha_y+\varepsilon\lambda)$ da equação (40).

No que se refere à função valor (*V*), tem-se:

- É homogênea de grau 1 em *X*: se *X* aumenta, *P* aumenta na mesma proporção e, consequentemente, o valor da função (*V)* aumenta no mesmo nível. Ou seja, um choque específico da firma é apropriado integralmente pela firma;

- No entanto, não é homogênea de grau 1 em *Y*: um choque agregado da indústria, eleva os preços mas, dada a reação das firmas concorrentes, o período de lucros proporcionalmente maiores é muito curto (efeito barreira superior de preços).

Podemos então, escrever um formato para a função valor como:

$$V(X,W)=X\,v(W)$$

Substituindo *V* na equação diferencial acima obtemos uma equação diferencial ordinária em *v*:

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2 W^2 v''(W)+\alpha_w W v'(W)-(r+\lambda-\alpha_x)v(W)+W=0 \qquad (41)$$

Demonstração - Equação (41)

Se $V(X,W)=X\,v(W)$

$V_x=v(W)$ $\qquad V_w=X\,v'(W)$

$V_{xx}=0$ $\qquad V_{ww}=X\,v''(W)$

Substituindo na EDP acima:

[1] Vide demonstração similar no apêndice deste resumo

$$\frac{1}{2}\Big(\ 0 \quad +\sigma_y^2 W^2 X v''(W)\Big)+\big(\alpha_x X\, v(W)+\alpha_w W X v'(W)\big)-\big(r+\lambda\big)X\, v(W)+XW=0$$

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2 W^2 v''(W)+\alpha_x\, v(W)+\alpha_w W v'(W)-\big(r+\lambda\big)v(W)+W=0$$

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2 W^2 v''(W)+\alpha_w W v'(W)-\big(r+\lambda-\alpha_x\ \big)v(W)+W=0 \qquad (41)$$

A solução geral para a equação acima é:

$$v(W)=\frac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}-AW^{\beta_1}$$

Onde A é uma constante a ser determinada.

Análise da Solução Geral

Como a equação diferencial acima é não-homogênea de 2ª ordem de coeficientes variáveis, sua solução geral deve incluir duas partes, uma referente à solução particular e a outra à solução homogênea. Neste caso, o *guess* mais apropriado seria do tipo:

$$v(W)=A_1 W^{\beta_1}+A_2 W^{\beta_2}+\frac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}$$

onde $\left(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w\right)>0$, para ter sentido econômico.

Analisando os termos do lado direito de *v(W)*, tem-se:

1° termo - relativo à raiz positiva, β_1(onde $\beta_1>1$): $A_1 W^{\beta_1}$ representa redução no valor *v(W),* decorrente do fato de a possibilidade de entrada livre estabelecer um teto no processo de *W*. Quanto maior W, mais próximo da barreira $\overline{W}$ e, portanto, maior será o desconto no valor presente do projeto, portanto o termo A_1 tem que ser negativo.

2° termo - relativo à raiz negativa β_2: $se\, W\to 0 \quad \Rightarrow \quad v(W)\to\infty$, o que é inconsistente. Logo deve-se fazer $A_2 = 0$, eliminando o termo relativo à raiz negativa;

3° termo - relativo à solução particular: representa o valor presente esperado do fluxo de lucro, caso não houvesse risco de novos entrantes. A taxa de desconto $\left(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_y\right)$.

Seja $\beta_1=\beta$, que representa a raiz positiva da equação quadrática (*Q*):

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2\beta(\beta-1)+\alpha_w\beta-\left(r+\lambda-\alpha_x\right)=0$$

Demonstração:

De $\quad v(W)=\dfrac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}-AW^{\beta_1}$ $\quad$ temos:

$$v'(W)=\frac{1}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}-\beta_1 AW^{\beta_1-1}$$

$$v''(W)=-\beta_1(\beta_1-1)AW^{\beta_1-1}$$

Substituindo na equação diferencial ordinária (41), tem-se:

$$-\frac{1}{2}\sigma_y^2 W^2\beta_1(\beta_1-1)AW^{\beta_1-2}+\alpha_w\left(\frac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}\right)-\alpha_w W\beta_1 AW^{\beta_1-1}-$$
$$-(r+\lambda-\alpha_x)\left(\frac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}\right)+(r+\lambda-\alpha_x)AW^{\beta_1}+W=0$$

Simplificando,

$$-\frac{1}{2}\sigma_y^2\beta_1(\beta_1-1)AW^{\beta_1}+\alpha_w\left(\frac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}\right)-\alpha_w\beta_1 AW^{\beta_1}-$$
$$-(r+\lambda-\alpha_x)\left(\frac{W}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}\right)+(r+\lambda-\alpha_x)AW^{\beta_1}+W=0$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_y^2\beta_1(\beta_1-1)AW^{\beta_1}+W\left[\frac{\alpha_w}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}-\frac{r+\lambda-\alpha_x}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}+1\right]-\alpha_w\beta_1 AW^{\beta_1}+$$
$$+(r+\lambda-\alpha_x)AW^{\beta_1}=0$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_y^2\beta_1(\beta_1-1)AW^{\beta_1}+W\left[-\frac{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}+1\right]-\alpha_w\beta_1 AW^{\beta_1}+(r+\lambda-\alpha_x)AW^{\beta_1}=0$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_y^2\beta_1(\beta_1-1)AW^{\beta_1}-\alpha_w\beta_1 AW^{\beta_1}+(r+\lambda-\alpha_x)AW^{\beta_1}=0$$

$(\div)AW^{\beta_1}$

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2\beta_1(\beta_1-1)+\alpha_w\beta_1-(r+\lambda-\alpha_x)=0$$

A constante é determinada de forma similar ao que foi feito na equação (7), a partir da condição de *smooth-pasting* na barreira $\overline{W}:v'(\overline{W})=0$. Desta forma:

$$v(W) = \frac{1}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}\left(W - \frac{W^{\beta_1}\overline{W}^{1-\beta_1}}{\beta_1}\right) \qquad (42)$$

Demonstração - Equação (42)

De $v(W) = \dfrac{\overline{W}}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w} - AW^{\beta_1}$

da condição de *smooth-pasting* na barreira $\overline{W}: v'(\overline{W}) = 0$

$$v'(\overline{W}) = \frac{1}{(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)} - \beta_1 A\overline{W}^{\beta_1-1} = 0$$

$$\beta_1 A\overline{W}^{\beta_1-1} = \frac{1}{(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)}$$

$$A = \frac{1}{\beta_1\overline{W}^{\beta_1-1}(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)}$$

Substituindo *A* em *v (W)*, tem-se:

$$v(W) = \frac{1}{(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)} - \frac{1}{\beta_1\overline{W}^{\beta_1-1}(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)}$$

$$v(W) = \frac{1}{r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w}\left(W - \frac{W^{\beta_1}\overline{W}^{1-\beta_1}}{\beta_1}\right) \qquad (42)$$

O valor da firma é dado pela função valor para um dado $X: V(X,W) = Xv(W)$. O possível entrante só observará W ($X = \overline{X}$, que é o valor esperado do choque). Logo $\overline{W}$ é determinado endogenamente, pela condição de livre entrada, igualando o valor esperado do investimento ao custo de entrada *R* (equivalente a aplicar o critério de *VLP = 0).*

Note que para investir R, a empresa exigirá que o valor do projeto valha pelo menos isto. Neste caso chega-se a:

$$\overline{X}\overline{W} = \frac{\beta_1}{\beta_1-1}(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)R \qquad (43)$$

Demonstração - Equação (43)

$$\overline{X}v(\overline{W}) = R \quad (em\,\overline{W})$$

Usando a equação (42):

$$\overline{X}\left[\frac{1}{(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)}\left(\overline{W}-\frac{\overline{W}^{\beta_1}\overline{W}^{1-\beta_1}}{\beta_1}\right)\right]=R$$

$$\overline{X}\left[\frac{1}{(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)}\left(\overline{W}-\frac{\overline{W}}{\beta_1}\right)\right]=R$$

$$\overline{X}\overline{W}\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1}\right)=R(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)$$

$$\overline{X}\overline{W}=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}(r+\lambda-\alpha_x-\alpha_w)R \qquad (43)$$

Esta é uma generalização natural das equações para o caso da incerteza agregada (equação (10) da seção 2) e para o caso da incerteza específica da firma (equação (27) da seção 4).