

Capítulo 4 – Otimização Dinâmica sob incerteza

Decisões de investimento dependem fortemente da variável tempo. Um investimento hoje retorna um fluxo de caixa futuro que é afetado pela incerteza e também pelas decisões que a empresa e seus competidores tomarão no futuro. Para tomar a sua decisão hoje, a firma precisa levar em conta essas considerações futuras. As ferramentas de modelagem matemática que usamos para modelar a nossa decisão de investimento, devem então ser capazes de lidar com essas contingências futuras. Nesse capítulo estudaremos duas dessas ferramentas matemáticas: Programação Dinâmica e Contingent Claims Analysis. Apesar de terem semelhanças entre si e levarem a resultados idênticos em muitas aplicações, estes dois métodos assumem premissas distintas a respeito dos mercados financeiros e das taxas de desconto dos fluxos futuros.

Programação Dinâmica

É uma ferramenta genérica para otimização dinâmica, utilizada para avaliação de ativos não replicáveis. Essa técnica divide toda a sequência de decisões em apenas duas:

- ♦ a decisão imediata
- ♦ uma função de valoração que engloba as consequências de todas as decisões subsequentes.

Se o horizonte de planejamento for finito, então a última decisão não tem nenhuma outra decisão subsequente, e portanto, pode ser definida utilizando os métodos tradicionais de otimização estática. Essa solução encontrada fornece então a função de valoração apropriada para a penúltima decisão. Continuando de trás para frente desta maneira, chegamos ao instante zero. Essa técnica pode ser usada mesmo quando o número de períodos for infinito, como veremos mais adiante. Pode-se dizer que esta técnica é apropriada quando o mercado é incompleto.

Contingent Claims Analysis – Análise de Direitos Contingenciais

Baseado nos fundamentos da teoria de finanças econômica, é utilizada para avaliação de ativos replicáveis. Observe que um projeto de investimento é definido por um fluxo de custos e benefícios futuros que variam com o tempo e com a incerteza. A firma que detém os direitos a este fluxo, ou a uma oportunidade de investimento, é proprietária de um ativo que tem um valor. Uma economia moderna possui um mercado bem variado de ativos de todos os tipos. Mesmo que o projeto não seja um destes ativos negociados no mercado (se for, o problema está resolvido pois é só observar o seu valor no mercado), podemos calcular o seu valor implícito relacionando-o com outros ativos negociados no mercado.

Para isso, precisamos montar um portfólio de ativos negociados no mercado que replique exatamente os retornos do nosso projeto de investimento agora e no futuro. (Note que a composição deste portfólio não precisa ser fixa: ela pode variar com o tempo). Como o portfólio é composto por ativos que são negociados no mercado e de valor conhecido, o valor do portfólio é simplesmente a soma do valor dos ativos que o compõe. O valor do projeto então deve ser idêntico ao valor deste portfólio, pois como ambos dão o mesmo retorno, qualquer diferença de preço entre um e outro daria margem a um ganho de arbitragem. Pode-se dizer que esta técnica é apropriada quando o mercado é completo.

Resumo:

- ♦ Ativo é negociado no mercado → observe o seu valor de mercado
- ♦ Ativo não é negociado no mercado:
 - Monta uma carteira de ativos negociados que replique as características do ativo (μ e σ)
 - O valor desta carteira é o somatório do valor dos ativos que a compõe, porque se tem o mesmo retorno e o mesmo risco, então o valor também tem que ser o mesmo, senão existirá oportunidades de arbitragem.

1 Programação Dinâmica

1A - O exemplo de dois períodos

Usaremos aqui o mesmo exemplo de dois períodos desenvolvido no capítulo 2. Vamos adotar, no entanto, uma notação mais genérica. Vamos ver que valores resultam de cada uma das decisões: investir agora ou adiar a decisão para $t = 1$.

Seja: $I \rightarrow$ Investimento Inicial, considerado irreversível (Sunk Cost)

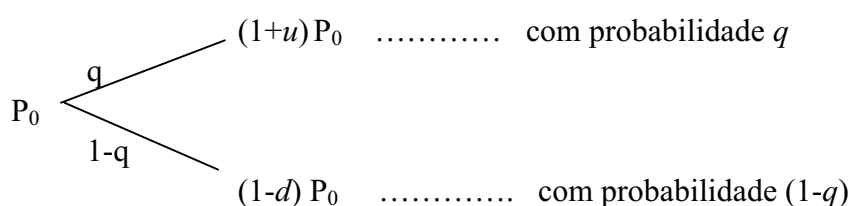
$r \rightarrow$ Taxa de juros

$P_0 \rightarrow$ Preço do produto no tempo $t = 0$

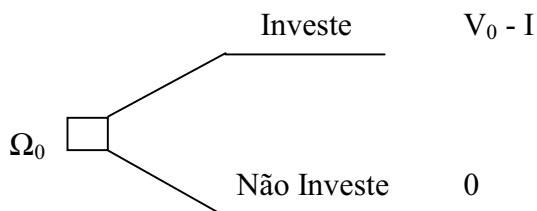
$V_0 \rightarrow$ VP dos fluxos

Fluxo é perpétuo

$\Omega \rightarrow$ Valor do Projeto/Firma



a) Supondo investimento agora ou nunca (sem opção de adiar)



$V_0 \Rightarrow$ valor presente esperado dos fluxos de caixa que a firma recebe se investir

$$V_0 = P_0 + \sum_i^n \frac{P_1}{(1+r)^i} = P_0 + \frac{P_1}{r} \quad \text{onde } E[P_1] = q P_0(1+u) + (1-q) P_0(1-d)$$

$$V_0 = P_0 + [qP_0(1+u) + (1-q)P_0(1-d)]/r$$

$$V_0 = P_0[r + q(1+u) + (1-q)(1-d)]/r$$

$$V_0 = P_0[r + qu + 1 - d + qd]/r$$

$$V_0 = \frac{P_0[1 + r + q(u + d) - d]}{r}$$

Se $V_0 > I \Rightarrow$ o investimento será feito e a firma receberá $V_0 - I$

Se $V_0 < I \Rightarrow$ o investimento não será feito e a firma receberá zero

Se $V_0 = I \Rightarrow$ a firma é indiferente entre investir e não investir, e recebe zero em ambos os casos.

Seja agora Ω_0 o Valor Presente Líquido (VPL) do projeto, se for uma decisão do tipo agora ou nunca. Vimos que:

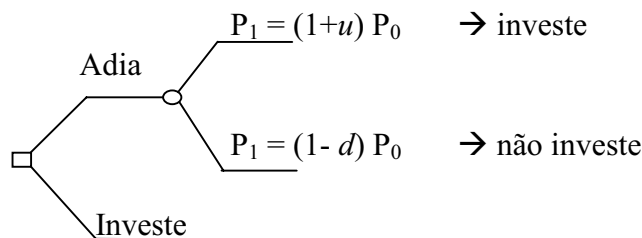
$$\Omega_0 = \max [V_0 - I, 0] \quad \text{equação 1}$$

Como o processo decisório termina no instante zero, Ω_0 também é chamado de *valor terminal*.

b) Supondo agora a possibilidade de adiar por 1 período até $t = 1$. Numa situação real, a oportunidade de investimento pode existir também para os períodos seguintes, caso em que se pode adiar a decisão. No nosso caso do Cap 2, não é preciso ir além do período 1, pois o estado não muda mais a partir daí. No período 1 o preço será:

$$P_1 = \begin{cases} (1+u) P_0 & \text{com probabilidade } q \\ (1-d) P_0 & \text{com probabilidade } 1-q \end{cases}$$

A decisão de investimento será:



O Valor Presente deste fluxo de caixa no período 1 será: (note que V_1 não é estocástico - estamos no tempo $t = 1$ e não existe mais incerteza de preço).

$$V_1 = P_1 + P_1 / r$$

$$V_1 = P_1 (1 + r) / r$$

Se:

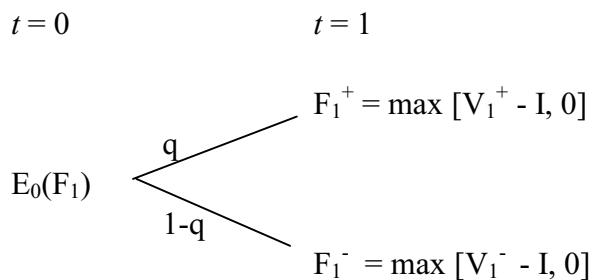
$V_1 > I$	\rightarrow	investe
$V_1 = I$	\rightarrow	indiferente
$V_1 < I$	\rightarrow	não investe

Assim, independentemente do que aconteça com o preço do período zero para o período 1, a firma investirá se $V_1 > I$, realizando um Valor Presente Líquido de:

$$F_1 = \max [V_1 - I, 0]$$

Este valor é chamado também de *continuation value*, ou valor de continuação. Note que mudou a notação do VPL: antes era Ω , agora é F . Os dois representam VPL, mas Dixit reservou Ω_T para representar VPL de valor terminal, quando não há mais a opção de continuar, enquanto que usa F_t para representar VPL de valor de continuação, quando existe a opção de adiar a decisão por mais períodos.

Em $t = 1$, esses valores são fixos e conhecidos. Mas do ponto de vista do investidor que está no instante zero, tanto V_1 quanto F_1 são variáveis aleatórias, conforme visto no gráfico a seguir:



Vistas de $t = 0$, as alternativas existentes em $t = 1$ são:

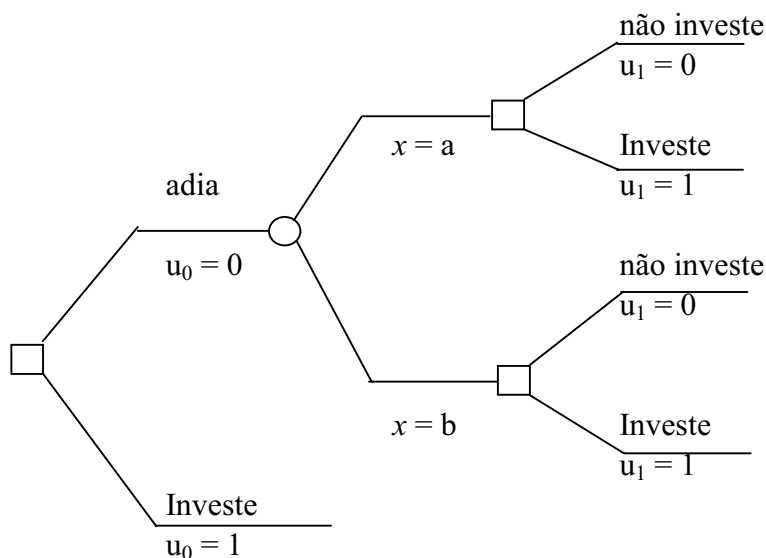
- Se preço subir de P_0 para $P_1^+ = P_0 (1+u)$, teremos $F_1^+ = \max [V_1^+ - I, 0]$
- Se preço subir de P_0 para $P_1^- = P_0 (1-d)$, teremos $F_1^- = \max [V_1^- - I, 0]$

$a, b \rightarrow$ estados da natureza - Um período:

$u_t \rightarrow$ variável de controle

$t = 0$

$t = 1$



Então em $t = 0$ não sabemos ainda se P_0 irá subir ou descer, portanto precisamos calcular todas as possibilidades. Vamos calcular o valor esperado da continuidade do projeto, a partir das informações disponíveis no instante zero. Observe que este **não é** o valor esperado do projeto no instante zero, pois não engloba a alternativa de investir em $t=0$.

$$E_0[F_1] = qE[F_1^+] + (1-q)E[F_1^-]$$

$$E_0[F_1] = q \max[V_1^+ - I, 0] + (1-q) \max[V_1^- - I, 0]$$

onde $V_1^+ = P_1^+ (1+r) / r = (1+u)P_0 (1+r) / r$

e $V_1^- = P_1^- (1+r) / r = (1-d)P_0 (1+r) / r$

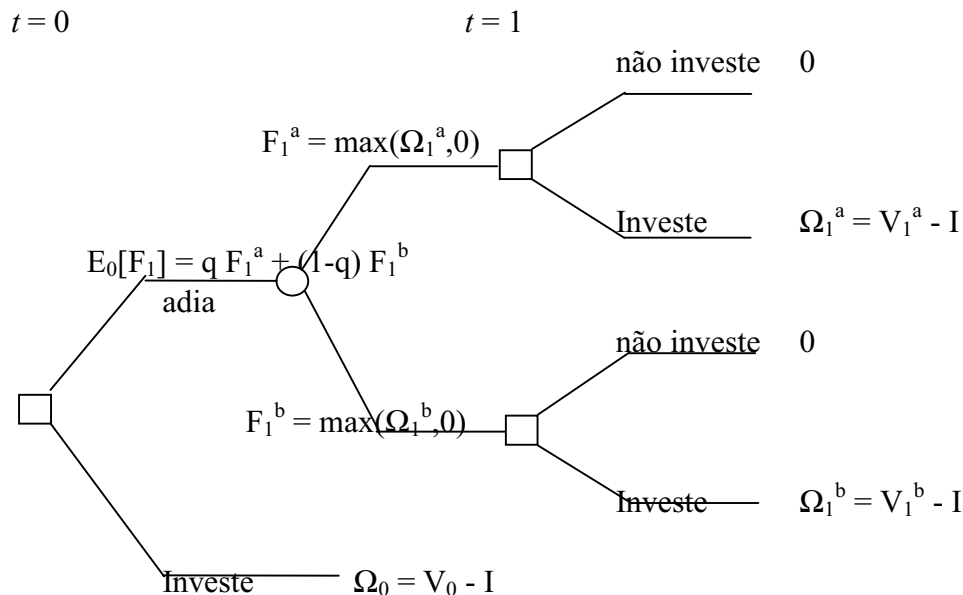
$$E_0[F_1] = q \max\left[\frac{(1+u)P_0(1+r)}{r} - I, 0\right] + (1-q) \max\left[\frac{(1-d)P_0(1+r)}{r} - I, 0\right] \quad \text{equação 2}$$

Este valor é o valor de continuação usando **a informação** disponível no instante zero. Vemos então que a firma tem duas escolhas no período zero:

- Se ela investir imediatamente, receberá $V_0 - I$
- Se não investir, receberá $E_0 [F_1]$ calculado acima, descontado do instante 1 para o instante zero através do fator $1/(1+r)$

A decisão ótima é, obviamente, aquela que tiver maior valor. Assim, o VPL de todas as oportunidades ótimas de investimento, F_0 , será:

$$F_0 = \max \left\{ V_0 - I, \frac{1}{1+r} E_0(F_1) \right\} \quad \text{equação 3}$$



Como vimos, utilizando a técnica da programação dinâmica dividimos o problema em duas partes:

- 1- A decisão imediata
- 2- As demais decisões, cujos efeitos estavam refletidos no valor de continuação do projeto.

Para achar a sequência ótima de decisões, começamos resolvendo de trás para frente.

A diferença $(F_0 - \Omega_0)$ é o valor da flexibilidade adicional, ou seja, a opção de adiamento da decisão. Examinando os fatores que afetam o valor da opção de esperar, teremos:

- ♦ adiar a decisão representa abrir mão da renda do primeiro período \Rightarrow favorece a decisão imediata
- ♦ adiar a decisão significa adiar também o custo do investimento \Rightarrow favorece a decisão de esperar já que a taxa de juros é positiva
- ♦ adiar a decisão permite a otimização para queda e subida de preço, enquanto uma ação imediata é baseada somente na média ponderada das duas.

Fazendo isso através de árvore de decisão: exemplo do Cap. 2 de investir agora ou adiar por um período apenas.

Variável de estado	$x(a,b)$	\rightarrow	x (preço sobe, preço desce)
Variável de controle	$u(0,1)$	\rightarrow	u (adia decisão, investe agora)

1B - Multiperíodo

Vamos considerar agora que a opção de investimento perdura por mais de dois períodos. Desenvolveremos a teoria de programação dinâmica num contexto em que a incerteza é modelada utilizando-se o processo de Markov de tempo discreto, onde apenas o valor corrente de uma variável e as opções disponíveis para o futuro são relevantes para se determinar o seu valor futuro.

Sejam:

$x_t \Rightarrow$ Variável de estado que descreve o status atual da firma no que se refere as suas operações e oportunidades de expansão no período t . Em qualquer período t , o valor corrente de x_t é conhecido, mas os valores futuros x_{t+1} , x_{t+2} , são variáveis aleatórias. Supomos também que x segue um processo de Markov. Um exemplo é o preço do petróleo, que varia com o tempo. Outro é a demanda por um produto, como energia elétrica, exemplares de um jornal, que também variam com o tempo.

$u_t \Rightarrow$ variável de controle que representa, a cada período t , as escolhas disponíveis para a firma. O valor u_t do controle no instante t deve ser escolhido usando apenas as informações disponíveis no tempo t , ou seja, x_t .

Ex. Discreto: $u = 0 \rightarrow$ adia, espera até $t=1$
 $u = 1 \rightarrow$ investe agora em $t = 0$

Ex. Contínuo: u pode ser a escala do investimento, ou a decisão sobre o número de exemplares de uma revista/jornal ou item que serão produzidos naquele período.

$\pi_t(x_t, u_t) \Rightarrow$ fluxo de lucro da firma no período t , que depende das variáveis de estado x_t e de controle u_t .

$\Phi_t(x_{t+1} | x_t, u_t) \Rightarrow$ função de distribuição de probabilidade **cumulativa** do estado do período seguinte, condicionada a informação existente hoje dada pelas variáveis de estado e de controle do período atual x_t e u_t . Observe que x_t e u_t do período t afetam não só o lucro futuro, mas também a distribuição de probabilidade dos estados futuros. No exemplo binário anterior, era a probabilidade q .

$\rho \Rightarrow$ taxa de desconto

O objetivo aqui é escolher a seqüência de controles u_t que maximiza o VPL esperado dos *payoffs*. Às vezes, forçaremos o processo decisório a acabar em algum período T , com um *payoff* final que dependerá do estado alcançado. A função de valoração desse *payoff* final é chamada de função de *payoff* terminal, $\Omega_T(x_T)$.

$\Omega_T(x_T) \Rightarrow$ termination *payoff* function (só depende de x_T)

$F_t(x_t) \Rightarrow$ VPL esperado de todos os fluxos de caixa da firma, quando a firma toma decisões ótimas desse ponto em diante.

Agora, estamos prontos para aplicar a técnica da Programação Dinâmica. Suponha que a data atual é t e o estado é x_t .

Quando a firma escolhe a variável de controle u_t , ela recebe o lucro imediato $\pi_t(x_t, u_t)$. No período $t+1$ o estado será x_{t+1} . Decisões ótimas a partir daí darão, na notação estabelecida, $F_{t+1}(x_{t+1})$, que é uma variável aleatória, vista do instante t . Descontando para o período t , a soma do lucro imediato e do valor de continuidade, $F_{t+1}(x_{t+1})$, teremos:

$$\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$$

Podemos assemelhar esta analogia ao valor de uma ação, que depende do dividendo imediato (conhecido) e do valor esperado do seu valor no futuro.

Obs:

$$\Phi_t(x_{t+1}|x_t, u_t) = \int g(x) dx$$

$$d\Phi_t(x_{t+1}|x_t, u_t)/dx = g(x)$$

Note que $E(x) = \int x g(x) dx$
onde $x = F_{t+1}(x_{t+1})$

$$\text{Então } E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] = \int F_{t+1}(x_{t+1}) d\Phi_t(x_{t+1}|x_t, u_t)$$

Φ = função de distribuição cumulativa

$d\Phi$ = função de distribuição

A firma escolherá u_t de modo a maximizar a expressão acima, e o resultado será o valor $F_t(x_t)$

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad \text{equação 4}$$

payoff imediato + valor de continuação

Essa equação é conhecida como Equação Geral de Bellman. A primeira parcela é o *payoff* imediato, a segunda é o valor de continuação. A melhor decisão é aquela que maximiza a soma destas duas parcelas.

No exemplo anterior de dois períodos, tínhamos duas escolhas possíveis: investir agora ou adiar, e maximizar $F_t(x_t)$. Significava escolher a melhor das duas opções.

$$F_0 = \max \left\{ V_0 - I, \frac{1}{1+r} E_0(F_1) \right\} \quad \text{equação 3}$$

O investimento nos dava $V_0 - I$, e adiar o projeto não dava fluxo de lucros $\pi_t(x_t, u_t)$ algum e apenas um valor de continuação $E_0[F_1]$ descontado para o tempo zero. O máximo desta escolha binária nos dava a solução ótima. Maximizar em u significava escolher a melhor das duas alternativas. Podemos ver que este é um caso particular da equação de Bellman. Note que a representação de Bellman é mais abrangente pois admite n escolhas e não apenas duas. Maximizar em u no caso de Bellman significa escolher entre n alternativas, que estão implicitamente representadas pela expressão dentro dos parênteses.

Se o caso multiperíodo tem um horizonte finito de tempo T , podemos começar do final e caminhar em direção ao instante zero. No instante final T do horizonte, a firma recebe o *payoff* terminal $\Omega_T(x_T)$. Então em T , temos:

$$F_T(x_T) = \Omega_T(x_T)$$

Assim, no período imediatamente anterior o valor residual do investimento será:

$$F_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left\{ \pi_{T-1}(x_{T-1}, u_{T-1}) + \frac{1}{1+\rho} E_{T-1}[\Omega_T(x_T)] \right\}$$

Dessa forma, ficamos conhecendo a função de valoração em $T-1$, e podemos resolver o problema de maximização para u_{T-1} . Feito isso, substituímos essa solução na equação de $F_{T-2}(x_{T-2})$, e teremos a função de valoração F_{T-2} . Resolvendo a maximização para u_{T-2} , substituímos novamente, etc.

$$\begin{aligned} F_{T-2}(x_{T-2}) &= \max_{u_{T-2}} \left\{ \pi_{T-2}(x_{T-2}, u_{T-2}) + \frac{1}{1+\rho} E_{T-2}[F_{T-1}(x_{T-1})] \right\} \\ F_{T-3}(x_{T-3}) &= \max_{u_{T-3}} \left\{ \pi_{T-3}(x_{T-3}, u_{T-3}) + \frac{1}{1+\rho} E_{T-3}[F_{T-2}(x_{T-2})] \right\} \\ &\dots\dots\dots \\ F_0(x_0) &= \max_{u_0} \left\{ \pi_0(x_0, u_0) + \frac{1}{1+\rho} E_0[F_1(x_1)] \right\} \end{aligned}$$

Ex: Seja a função a seguir.

$$F_T = \pi_T + \frac{1}{1+\rho} E[F_{T+1}] \quad \text{onde } F_{T+1} = \Omega_{T+1} = 100$$

$$\pi_t = \text{constante}$$

$$F_T = 2 + \frac{1}{1+0.1} E[100]$$

$$F_{T-1} = \pi_{T-1} + \frac{1}{1+\rho} E[F_T] = \pi_{T-1} + \frac{1}{1+\rho} \left[2 + \frac{1}{1+\rho} E(100) \right]$$

$$F_{T-2} = \pi_{T-2} + \frac{1}{1+\rho} E[F_{T-1}] = \pi_{T-2} + \frac{1}{1+\rho} \left[\pi_{T-1} + \frac{1}{1+\rho} \left[2 + \frac{100}{1+\rho} \right] \right]$$

$$F_{T-3} = \pi_{T-3} + \frac{1}{1+\rho} E[F_{T-2}] = \pi_{T-3} + \frac{1}{1+\rho} \left[\pi_{T-2} + \frac{1}{1+\rho} \left[\pi_{T-1} + \frac{1}{1+\rho} \left[2 + \frac{100}{1+\rho} \right] \right] \right]$$

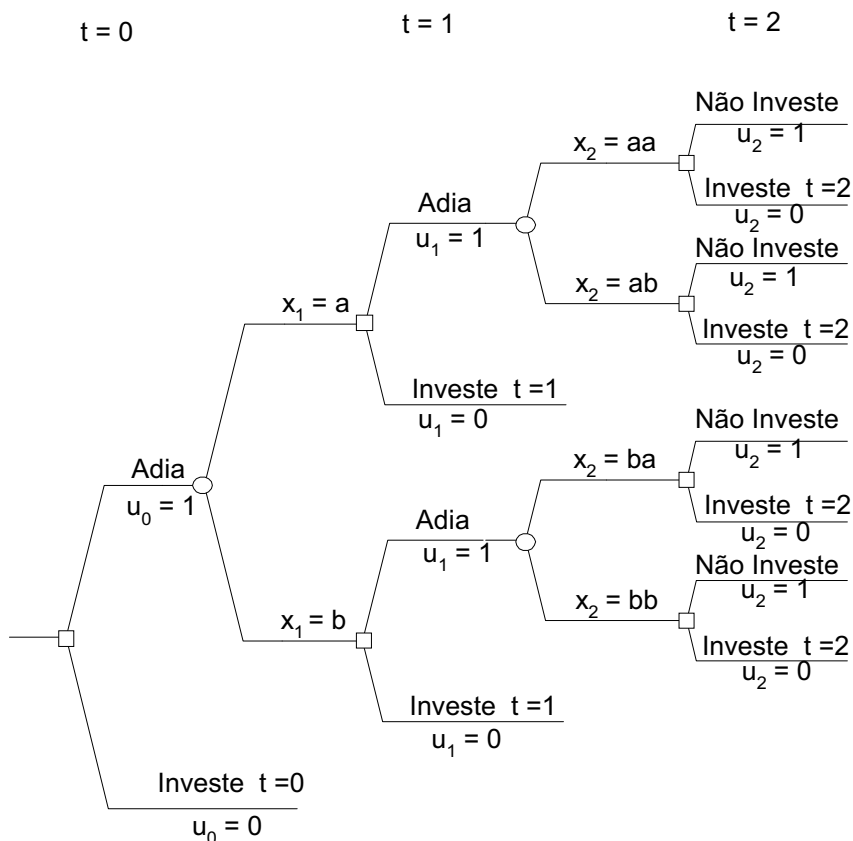
$$F_{T-3} = \pi_{T-3} + \frac{\pi_{T-2}}{1+\rho} \left[+ \frac{\pi_{T-1}}{1+\rho} \left[+ \frac{\pi_T}{1+\rho} \left[\frac{100}{1+\rho} \right] \right] \right]$$

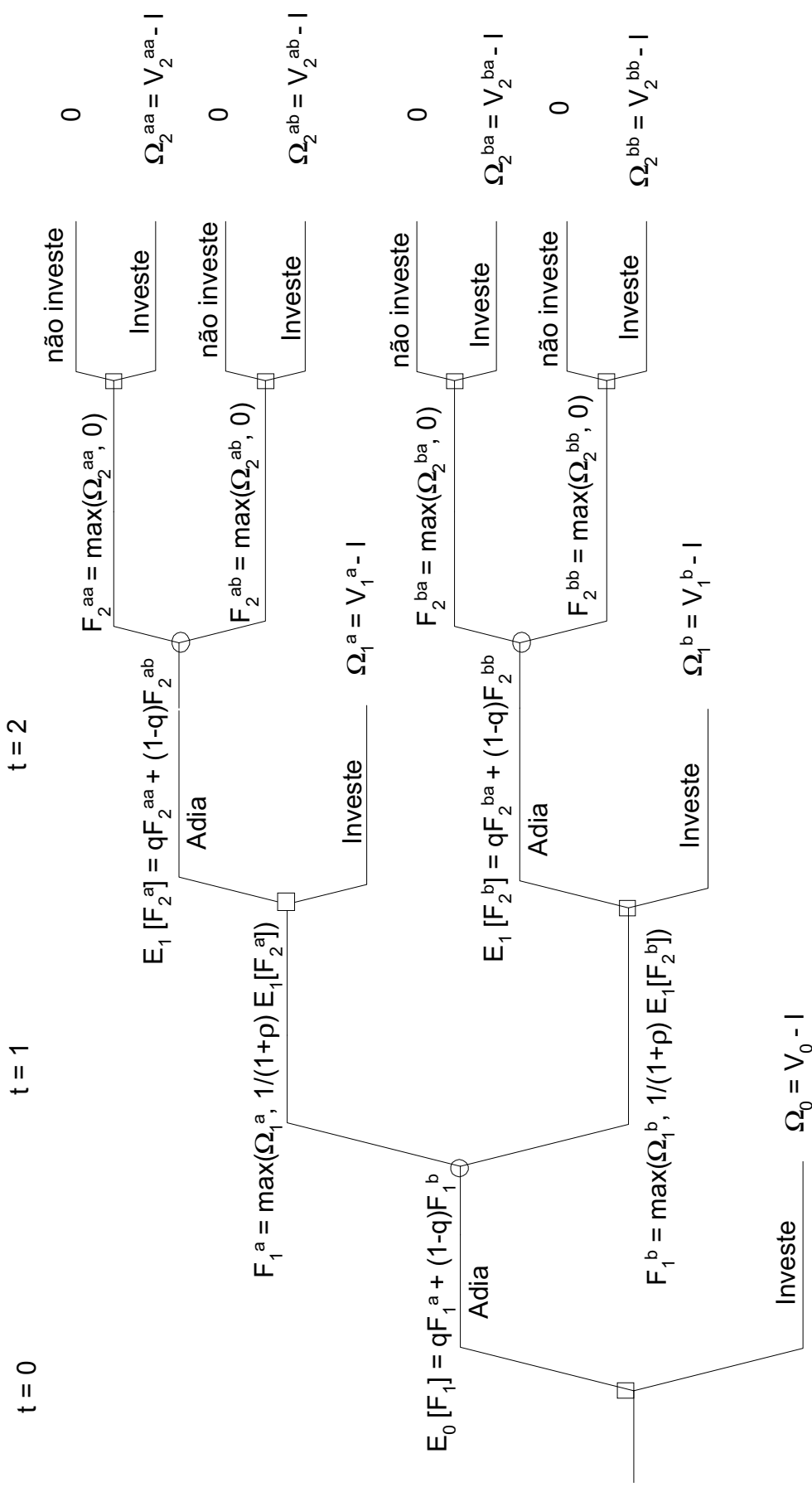
$$F_{T-3} = \pi_{T-3} + \frac{\pi_{T-2}}{(1+\rho)} + \frac{\pi_{T-1}}{(1+\rho)^2} + \frac{\pi_T}{(1+\rho)^3} + \frac{100}{(1+\rho)^4}$$

Como os π são iguais:

$$F_{T-N} = \pi + \frac{\pi}{(1+\rho)} + \frac{\pi}{(1+\rho)^2} + \frac{\pi}{(1+\rho)^3} + \dots + \frac{100}{(1+\rho)^N}$$

$$F_0 = \pi + \frac{\pi}{\rho}$$

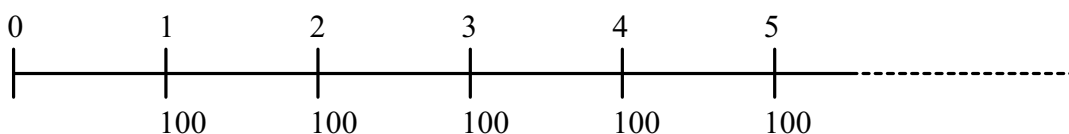




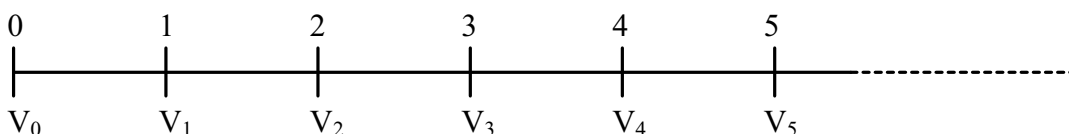
1C Horizonte Infinito:

Quando o horizonte é infinito, não há um valor final do qual podemos começar de trás para frente. O problema torna-se recursivo, o que facilita a obtenção da solução.

A simplificação crucial que um horizonte infinito traz à equação 4, é a independência do tempo t . Para entender isso vamos examinar um exemplo muito simples, onde não existe incerteza. Suponha um título perpétuo e sem risco, isto é, que nunca será resgatado, que paga uma renda fixa. Qual é o valor deste título? Seja \$100 o valor desta renda fixa anual, e 10% a taxa livre de risco.



A função de valor (V_0) deste título em cada tempo t será o valor presente dos seus fluxos futuros, que é um fluxo infinito de dividendos, descontado a taxa livre de risco. Numa perpetuidade, essa função é Div / r , ou seja $100/0,10 = 1.000$ neste caso.



E qual o valor no instante $t = 1$? Também será o valor presente de um fluxo infinito de dividendos, e novamente, a função de valor será Div / r . Podemos ver então que a função de valor será sempre a mesma, independente do período em que o calculamos, portanto, a função é independente do tempo.

No caso acima onde não existe incerteza, como os dividendos e a taxa livre de risco são constantes, o próprio valor do ativo também é constante e igual a \$1.000. Num caso onde exista incerteza, a função de valor será constante, mas o valor calculado a cada tempo t poderá ser diferente, pois dependerá do estado x que ocorreu no instante t .

Assim, o estado corrente x_t importa, mas a data do calendário t , por sua vez, não tem nenhum efeito. Assim $F_{t+1}(x_t) = F_t(x_t) = F(x_t)$, o que significa que a função de valor é a mesma para qualquer t . A nossa premissa aqui também é que a função lucro π , a função distribuição de probabilidade Φ , e a taxa de desconto ρ são independentes do tempo, (não mudam com o tempo) situação que é satisfeita ou presumida na maioria das aplicações econômicas.

Neste cenário, o problema daqui a um período é idêntico ao problema agora, exceto pelo novo estado inicial. Assim, a *função de valoração* é comum a todos os períodos, embora o seu valor a cada valor x_t possa ser diferente. A equação de Bellman se simplifica para:

$$F(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F(x_{t+1})] \right\}$$

Como x_t e x_{t+1} podem assumir qualquer um dos estados possíveis, serão representados apenas como x e x' . A equação se torna, então:

$$F(x) = \max_{u_t} \left\{ \pi(x, u) + \frac{1}{1+\rho} E[F(x')|x, u] \right\} \quad \text{equação 5}$$

Note que agora representamos o Valor Esperado como condicionado ao valor corrente de x e u .

Para resolver essa equação, deve-se utilizar um procedimento iterativo:

- ◆ Comece com qualquer estimativa para $F(x)$, digamos, $F^{(1)}(x)$ e use essa estimativa no lado direito da equação 5.

$$F(x) = \max_{u_t} \left\{ \pi(x, u) + \frac{1}{1+\rho} E[F^{(1)}(x')|x, u] \right\}$$

- ◆ Encontre agora a regra de escolha ótima correspondente u^1 , que agora pode ser expresso como uma função de x apenas. Note que o lado direito agora é totalmente conhecido, de modo que podemos determinar o seu valor para qualquer x , e podemos escolher então o u que maximiza este valor. Substituindo de volta na equação 5, o lado direito maximizado agora torna-se uma nova função de x , $F^{(2)}(x)$.

$$F^{(2)}(x) = \pi(x) + \frac{1}{1+\rho} E[F^{(1)}(x)]$$

- ◆ Agora, use esse valor como a nova estimativa para o valor da função $F(x)$ e repita o procedimento.

$$F^{(3)}(x) = \pi(x) + \frac{1}{1+\rho} E[F^{(2)}(x)]$$

- ◆ As estimativas sucessivas $F^{(3)}(x)$, $F^{(4)}(x)$, irão convergir para o valor verdadeiro da função.

A convergência é garantida, independente da estimativa inicial, dado que o problema tem uma solução única. A chave da questão é o fator $1/(1+\rho)$ do lado direito da equação. Como ρ é positivo, $1/(1+\rho) < 1$, o que faz com que eventuais erros na estimativa se reduzam a cada período, até que reste apenas a solução correta. Se os lucros (π) são bounded, quaisquer erros na escolha de u não "explodem".

Ex: Exemplo sem incerteza. Escolha um valor terminal qualquer. (no caso escolheremos 100). Veremos que o resultado independe do valor terminal que foi escolhido.

$$F(x) = \pi + \frac{1}{1+\rho} E[F(x')] \quad \text{Seja } F^{(1)}(x) = 100$$

$$F^{(2)}(x) = \pi + \frac{1}{1+\rho} E[100]$$

$$F^{(3)}(x) = \pi + \frac{1}{1+\rho} E[F^{(2)}(x)] = \pi + \frac{1}{1+\rho} E\left[\pi + \frac{1}{1+\rho} E[100]\right]$$

$$F^{(4)}(x) = \pi + \frac{1}{1+\rho} E[F^{(3)}(x)] = \pi + \frac{1}{1+\rho} E\left[\pi + \frac{1}{1+\rho} E\left[\pi + \frac{1}{1+\rho} E[100]\right]\right]$$

$$F^{(5)}(x) = \pi + \frac{1}{1+\rho} E[F^{(4)}(x)] = \pi + \frac{1}{1+\rho} E\left[\pi + \frac{1}{1+\rho} E\left[\pi + \frac{1}{1+\rho} E\left[\pi + \frac{1}{1+\rho} E[100]\right]\right]\right]$$

$$F^{(n)}(x) = \pi + \frac{\pi}{1+\rho} + \frac{\pi}{(1+\rho)^2} + \frac{\pi}{(1+\rho)^3} + \frac{\pi}{(1+\rho)^4} + \dots + \frac{100}{(1+\rho)^n}$$

$$\boxed{F(x) = \pi + \frac{\pi}{\rho}}$$

Apêndice A:

Prova da existência e de unicidade da solução da equação de Bellman para horizonte infinito.

Queremos achar $F(x)$. Note que o lado direito da equação é uma função de uma função. Seguindo a seqüência descrita anteriormente, que escolhemos o valor correto para $F^{(1)}(x)$ que substituímos na equação acima. Substituindo seguidamente, achamos $F^{(2)}(x)$, $F^{(3)}(x)$, etc. O que ocorre com essa seqüência de funções $F^{(m)}(x)$ quando m tende para infinito?

Suponha que a nossa escolha inicial contivesse um erro k constante. Seja $Z^{(1)}(x) = F^{(1)}(x) + k$, onde k é o erro da nossa estimativa inicial. Substituindo na equação de Bellman conforme acima, temos:

Note que o erro k não altera a maximização u , pois é uma constante que se soma a todas as alternativas possíveis, nem ela afeta nenhum outro termo da função. Podemos escrever a equação acima também como:

Continuando para os demais termos, chegamos a

Isso mostra que o erro inicial de estimativa decresce geometricamente a cada iteração até se tornar desprezível. Dessa forma, podemos garantir que a função final $F^{(m)}(x)$ não contém erro, independente da escolha inicial para $F^{(1)}(x)$.

1D Optimal Stopping:

Vimos que podemos ter o caso em que a nossa escolha em cada período é binária, onde uma alternativa corresponde a *parar* ou interromper o processo e receber o *payoff* terminal, enquanto que a outra significa *continuar* o processo por mais um período, onde então outra decisão binária ocorrerá.

No exemplo anterior em questão analisamos uma oportunidade de adiar um investimento:

- ♦ *Parar* corresponde a realizar o investimento e receber o *payoff* terminal Ω_0
- ♦ *Continuar* significava adiar a decisão de investir e continuar esperando. *Continuar* não gerava fluxos de lucro dentro do período.

Um caso particular de programação dinâmica que é muito importante para a nossa aplicação é o caso em que o projeto já está em operação e existe opção de abandonar projeto e encerrar as suas operações. Nesses casos, *continuar* pode gerar um fluxo de lucro positivo ou negativo, como, por exemplo, uma fábrica em operação que esteja passando por dificuldades econômicas. *Parar* (abandonar), por outro lado, pode gerar um valor residual da planta e de equipamentos menos as obrigações trabalhistas, contratuais, etc. Passaremos agora então a considerar não mais o caso da opção de adiar um projeto, mas a opção de abandonar um projeto que esteja em andamento.

Seja $\pi(x)$ o fluxo de lucro da firma na continuação e $\Omega(x)$, o *payoff* decorrente da parada ou abandono. A equação de Bellman fica então:

equação 6

$$F(x) = \max \{ \text{parar}, \text{continuar} \}$$

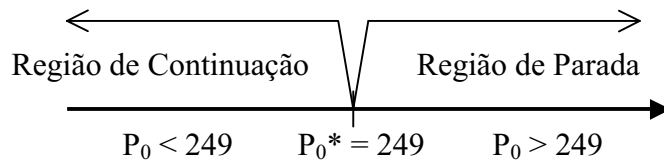
onde

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= \text{Valor de parada ou abandono} \\ \pi(x) &= \text{lucro instantâneo da firma na continuação} \\ &= \text{Valor Esperado dos Lucros Futuros} \\ x' &= x \text{ futuro} \\ x' | x &= x \text{ futuro dado } x \text{ atual}\end{aligned}$$

Para alguns valores de x , o máximo da equação será obtida optando-se por parar o projeto, enquanto que para outros valores de x isso será obtido com a continuação da operação do projeto. Teoricamente essa divisão poderia ser arbitrária, mas a maioria das aplicações econômicas são mais bem comportadas \rightarrow de um modo geral, existirá um único ponto de inflexão x^* , com parada ótima de um lado e continuação ótima no outro.

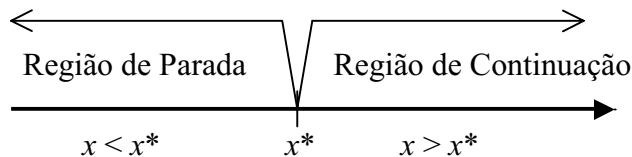
No exemplo do Cap 2, pg. 37, fig. 2.4, o x^* crítico era $P_0 = 249$, tal que investir (parada ótima) era ótimo para valores de $P_0 > 249$ (à direita), e esperar (continuação ótima) era ótimo para valores (à esquerda).

$P_0 > 249 \rightarrow$ continuação é ótima
 $P_0 < 249 \rightarrow$ parada é ótima



No caso agora estudaremos a seguinte situação:

$x > x^* \rightarrow$ continuação é ótima
 $x < x^* \rightarrow$ parada é ótima



Vamos examinar as forças que fazem com que continuar seja mais interessante para valores mais altos de x^* :

- Primeiramente, o *payoff* de continuar deve se tornar maior relativamente ao *payoff* de parar.

$$\begin{aligned} \text{Payoff de continuar} &= \text{lucro imediato} + \text{Valor Esperado dos lucros Futuros} \\ &= \end{aligned}$$

$$\text{Payoff de parar} =$$

Assim,

Equação 7

deve ser crescente quando x é crescente. Note que $x' | x$ representa o x futuro dado o x atual.

Nota: a expressão do payoff adotada por Dixit de continuar presume que vai parar no período seguinte, pois usa o Ω terminal do próximo período, o que não é necessariamente o caso. Uma notação mais correta seria usar $F(x')$.

- Segundo, nenhuma vantagem corrente deve ser revertida num futuro próximo. Para isso, precisamos que haja dominância estocástica de 1ª ordem.

Ambas condições serão satisfeitas para todos os exemplos e aplicações utilizadas no livro, assim com ocorre com a maioria das aplicações econômicas conhecidas.

IE Tempo Contínuo

Na seção 1B vimos o caso de projeto multiperíodo em tempo discreto. Queremos ver agora o que ocorre quando o intervalo de tempo Δt tende a zero e o tempo é contínuo. Sejam:

Δt	\rightarrow	intervalo de tempo de cada período
$\pi(x, u, t)$	\rightarrow	taxa do fluxo de lucro
$\pi(x, u, t) \Delta t$	\rightarrow	lucro no período Δt
ρ	\rightarrow	taxa de desconto por unidade de tempo
$1/(1 + \rho \Delta t)$	\rightarrow	desconto total no intervalo de tempo Δt
x	\rightarrow	variável de estado
u	\rightarrow	variável de controle ou de decisão

A equação de Bellman, se torna:

Multiplicando por $(1 + \rho \Delta t)$, temos:

Dividindo por Δt , no limite de $\Delta t \Rightarrow$ zero, temos:

equação 8

Essa forma da equação explicita a idéia que o direito ao fluxo de lucro é um ativo, e que $F(x, t)$ é o seu valor. Do lado esquerdo representa o retorno normal por unidade de tempo que um tomador de decisões, usando ρ como taxa de desconto, exigiria para manter esse ativo.

Do lado direito, o primeiro termo é o payout imediato ou dividendo do ativo, enquanto o segundo termo é a taxa esperada de ganho de capital. O limite do lado direito depende da expectativa correspondente a variável aleatória x' , um tempo Δt mais tarde.

Há duas classes de processos estocásticos em tempo contínuo que permitem a análise e solução da função $F(x, t)$ com tais limites: Ito e Poisson.

1F Processo de Ito

Aqui o processo de Ito dependerá, além de x e t , também da variável de controle u , que incluímos na expressão:

$$dx = a(x,u,t)dt + b(x,u,t)dz$$

Equação 9

onde

$$\begin{aligned} dz &= \varepsilon \sqrt{dt} \\ (dx)^2 &= b^2(x,u,t) dt \end{aligned}$$

e

e substituindo dx :

O valor da firma é $F(x,t)$ e o fluxo de lucros continua sendo $\pi(x,u,t)$. Seja x a posição inicial no tempo t , e $x' = x + dx$ a posição aleatória no final de um pequeno intervalo de tempo Δt . Aplicando o Lema de Ito para a função $F(x,t)$, teremos:

Mas

Então:

OBS: erro de notação no livro.

A equação do retorno de $F(x,t)$ era: (equação 8)

Substituindo $E[dF]$ ficamos com:

Equação 10

Podemos expressar o valor ótimo de u como uma função de $F_t(x,t)$, $F_x(x,t)$, $F_{xx}(x,t)$, tal como de x , t , e os vários parâmetros que governam as formas funcionais de π , a e b .

Substituindo essa expressão para o u ótimo no lado direito da equação acima, conseguimos uma equação diferencial parcial de segunda ordem, com F como a variável dependente e x e t como as variáveis independentes. Em geral, essa equação é muito complicada, mas em muitas aplicações podem ser desenvolvidas soluções analíticas ou numéricas. Essas soluções são semelhantes as soluções para os casos de tempo discreto.

Se existe um limite fixo de tempo T quando o *payoff* terminal $\Omega(x_T, T)$ é determinado, a equação apresenta a condição de contorno:

$$F(x, t) = \Omega(x_T, T) \quad \text{para todo } x$$

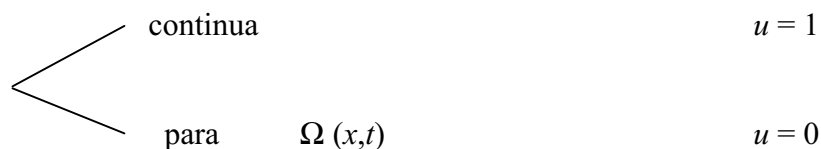
Como antes, a solução pode ser encontrada trabalhando-se de traz para frente.

Num horizonte de tempo infinito, quando as funções π , a e b não dependem explicitamente do tempo, a função de valoração também não depende do tempo, e a equação se torna uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) com x como a única variável independente.

equação 11

1G Parada Ótima e Smooth Pasting

Vamos considerar o caso da empresa que está operando, e a cada instante t quer saber se é melhor continuar operando, isto é, *continuar* na situação corrente e receber um fluxo de lucro $\pi(x, t)$, ou parar e receber o *payoff terminal* $\Omega(x)$.



Ambos valores podem depender da variável de estado x e do tempo t , onde x segue um processo de Ito:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad \text{Equação 12}$$

O exemplo mais óbvio é o da firma decidindo se cessa a operação e vende seu equipamento pelo seu valor de sucata. Decisões de investimento também podem ser vistos como a decisão de *continuar* (adiar o início do projeto, como fluxo de lucro zero) ou *parar* (investir no projeto, com *payoff terminal* de $E(VP - I)$).

A intuição sugere que para cada instante t existe um valor crítico $x^*(t)$, com a *continuação ótima* se $x(t)$ fica de um lado de $x^*(t)$ e *parada ótima* do outro lado. Vimos anteriormente que algumas condições devem ser impostas às funções do fluxo de lucros $\pi(x, t)$ e *payoff terminal* $\Omega(x)$ para garantir isso. Isso ocorrerá se

for crescente em x .

Dadas estas condições, podemos considerar os valores críticos $x^*(t)$ para os diversos t como sendo a curva que divide o espaço (x, t) em duas regiões: a *continuação* será ótima acima da curva e a *parada* será ótima abaixo dela. Precisamos então achar a equação desta curva $x = x^*(t)$.

A equação de Bellman

equação 6

para o caso de parada ótima em tempo contínuo se torna:

$\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{3cm}}$
 parar continuar

Na região de *continuação*, o segundo termo do lado direito da equação é o maior dos dois, por definição, portanto o *payoff* terminal será ignorado e a expressão simplifica para:

Vamos expandir esse termo pelo Lema de Ito. Primeiro, lembramos que:

pois em uma dimensão temos:

$$F = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Em duas dimensões teremos:

Determinístico: $dF = F(x+dx, t+dt) - F(x,t)$

Estocástico: $E[dF] = E[F(x+dx, t+dt)] - F(x,t)$
 $E[F(x+dx, t+dt)] = E[dF] + F(x,t)$

cqd.

Substituindo:

Multiplicando por $(1+\rho dt)$ e rearranjando:

Dividindo por dt e tomando limites:

$$(\rho dt = 0)$$

Lembrando que:

Substituindo,

Rearranjando na forma do livro:

equação 13

Esta é a equação diferencial que satisfaz a Função de Valoração do projeto na região de continuação, onde a segunda parcela da equação de Bellman é maior do que a primeira, $\Omega(x,t)$, e vale para $x > x^*(t)$. Para valores menores que $x^*(t)$, $\Omega(x,t)$ é maior, portanto vale mais a pena parar.

Queremos achar as condições de contorno válidas para $x = x^*(t)$. Pela equação de Bellman sabemos que na região de *parada* (decisão de vender o investimento) teremos $F(x,t) = \Omega(x,t)$, então pela continuidade podemos impor a seguinte condição:

$$F(x^*(t),t) = \Omega(x^*(t),t) \quad \text{para todo } t \quad \textbf{equação 14}$$

Essa condição é chamada de Value Matching Condition (VMC), onde se é indiferente entre Continuar e Parar.

Mas o contorno em si é desconhecido: O contorno dessa região, ou seja, a curva de $x^*(t)$, é conhecido como contorno livre, e o problema de resolver a equação e determinar sua região de validade é chamado um problema de contorno livre.

Precisamos então de uma segunda condição de contorno para achar $x^*(t)$ e a função $F(x,t)$. Veremos que esta condição é que para cada t as funções $F(x,t)$ e $\Omega(x,t)$, se encontrem tangencialmente no contorno $x^*(t)$, ou seja :

$$F_x(x^*(t),t) = \Omega_x(x^*(t),t) \quad \text{para todo } t \qquad \textbf{equação 15}$$

Esta segunda condição é conhecida como a Smooth Pasting Condition.