

## Cap 5: Oportunidade e Timing do Investimento

Premissa de todo este capítulo:

- ♦ Investimento é pelo menos parcialmente irreversível
- ♦ Investimento pode ser adiado

Quando existe a oportunidade de adiar, devemos adicionar ao custo do investimento o custo da oportunidade de esperar que foi perdida. Será analisado aqui o modelo clássico de McDonald e Siegel (1986) de investimento irreversível em tempo contínuo. As premissas deste modelo são as seguintes:

- I → O investimento no projeto é conhecido e fixo no tempo.  
V → O valor do projeto é variável no tempo devido às incertezas sobre o futuro. Considera-se que V é uma variável aleatória que segue uma MGB.

Regra do NPV: Investe se  $V > I$ .

Regra de Opções reais: Como há incerteza sobre os valores futuros de V, existe um custo de oportunidade de se investir hoje. Assim, só investir se  $V > V^* > I$ .

Vamos usar programação dinâmica para achar  $V^*$ :

Em tempo discreto (Cap4, eq5): 
$$F(x) = \max_u \left\{ \pi(x, u) + \frac{1}{1 + \rho} E[F(x') | x, u] \right\}$$

Em tempo contínuo, (Cap 4, eq8): 
$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\}$$

### 1 O modelo básico

O problema de McDonald e Siegel (1986) é achar em que tempo é ótimo pagar um custo irreversível I por um projeto cujo valor é V, dado que V segue uma MGB:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad \text{Equação 1}$$

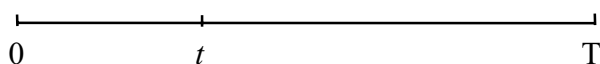
Equação 1 implica no fato de que o valor atual de V é conhecido, mas os seus valores no futuro tem distribuição lognormal com variância que cresce linearmente com o tempo. Assim, embora a empresa esteja sempre recebendo novas informações que fazem com que o valor de V esteja sempre mudando, sempre haverá incerteza quanto ao seu real valor futuro.

Esse modelo é realista? Na verdade não, pois na realidade V provavelmente não segue uma MGB porque:

1. Se custo variável (CV) de operação for positivo e a fábrica pode ser fechada temporariamente ou abandonada inteiramente quando o preço de venda for menor que o seu CV,  $V$  não seguirá uma MGB, pois haverá um piso inferior, mesmo que seu preço siga uma MGB.
2. Se CV for positivo e não existir a opção de fechar a fábrica,  $V$  poderá se tornar negativo, o que conflita com a premissa de distribuição lognormal.
3. O equilíbrio de longo prazo de mercado num mercado competitivo fará com que o valor do projeto tenda a  $VPL=0$ , o que seria mais um processo de reversão à média do que uma MGB. Podem também ocorrer mudanças estocásticas infrequentes mas de alto valor de tempos em tempos, o que sinalizaria um processo de Poisson.

Note que a oportunidade de investimento é equivalente a uma Call perpétua - o direito de comprar o projeto pelo custo  $I$ . Dessa maneira, podemos equiparar a decisão de investir à decisão de quando exercer essa opção, e o problema passa a ser o problema de avaliação de uma opção, e pode ser resolvido então por Contingent Claims. Alternativamente, pode ser visto também como um problema de programação dinâmica. Acharemos a sua solução por ambos os métodos.

Notação:



$V$  = Valor Presente dos fluxos de lucro do projeto

$T$  = Data em que o projeto é executado (ou, a opção é exercida).

$\rho$  = Taxa de desconto exógena

Em tempo discreto

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{FC_t}{(1+r)^t}$$

Em tempo contínuo

$$V = \int_0^T FC_t e^{-\rho t} dt$$

$F(V)$  = Valor hoje da opção de investir no tempo  $t = t$

Em tempo discreto

$$F(V) = \max \left\{ \frac{V_T - I}{(1+r)^T} \right\}$$

Em tempo contínuo

$$F(V) = \max \left\{ E \left[ (V_T - I) e^{-\rho T} \right] \right\} \quad \text{Equação 2}$$

onde a maximização é em relação a MGB de  $V$ . Queremos calcular o tempo  $T$  ideal para o investimento que maximize  $F(V)$ . Assumimos também que  $\alpha < \rho$ .

## 1A O Caso Determinístico.

Neste caso,  $\sigma = 0$  e a equação 1 fica:  $dV = \alpha V dt$ . Assim, dado que o projeto tem um valor presente  $V_0 = V(0)$ , o valor hoje da oportunidade de investir no projeto  $F(V)$  se o investimento for feito hoje será:

$$F(V) = V_0 - I$$

O valor do projeto num tempo  $t$  qualquer será  $V_t = V(t) = V_0 e^{\alpha t}$ . Assim, dado que o projeto tem um valor  $V_0$  hoje, o valor hoje  $F(V)$  de se investir no projeto se o investimento for feito em algum tempo futuro  $T$  será:

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T} \quad \text{Equação 3}$$

onde  $\alpha$  é a taxa de crescimento  
 $\rho$  é a taxa de desconto

Se  $\alpha \leq 0$       Investir logo. Tempo ótimo é zero  
 $0 < \alpha < \rho$     Existe um tempo ótimo para investir  
 $\alpha > \rho$         Não investir nunca. Tempo ótimo é  $+\infty$

Suponha que  $\alpha \leq 0$ . Nesse caso o drift é negativo ou zero, e o valor de  $V$  será menor ou zero no futuro, de modo que é ótimo investir agora se  $V > I$ , ou não investir nunca, se  $V < I$ . Nesse caso,  $F(V) = \max(V - I, 0)$

Se  $0 < \alpha < \rho$ , então  $F(V) > 0$  mesmo se no momento  $V < I$ , pois o valor de  $V$  irá crescer no futuro enquanto o valor de  $I$  é sempre constante, e eventualmente  $V$  será maior do que  $I$ . Por outro lado, mesmo que  $V > I$  agora, talvez ainda seja melhor esperar.

Mas se  $\alpha > \rho$ , então nunca será ótimo investir, pois  $F(V)$  sempre cresce com o tempo, e tende a infinito.

**Exemplo: Considerando  $V_0 > I$**

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T}$$

$$\rho = 10\%$$

$$V(0) = 1000$$

$$I = 500$$

$$\text{Valor em } T = 0 \rightarrow V_0 - I = 500$$

$\alpha$	$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T}$	$T = 1$	$T = 5$	Decisão
0%	$(1000 - 500) e^{-0,1} =$	452	303	Investir já, pois valor diminui com o tempo
4%	$(1041 - 500) e^{-0,1} =$	489	438	Investir já pois valor diminui com o tempo
8%	$(1083 - 500) e^{-0,1} =$	528	602	Esperar, pois valor aumenta com o tempo
12%	$(1127 - 500) e^{-0,1} =$	568	802	Esperar eternamente, pois valor aumentará sempre no futuro

Exemplo: Considerando  $V_0 < I$

$$\rho = 10\%$$

$$V(0) = 470$$

$$I = 500$$

$$\text{Valor em } T = 0 \rightarrow V_0 - I = -30$$

$\alpha$	$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T}$	$T = 1$	$T = 5$	Decisão
0%	$(470 - 500) e^{-0,1} =$	-27	-18	Nunca Investir
4%	$(489 - 500) e^{-0,1} =$	-10	45	Esperar
8%	$(509 - 500) e^{-0,1} =$	-8	122	Esperar
12%	$(530 - 500) e^{-0,1} =$	27	216	Esperar eternamente

Para verificar isso, vamos maximizar a equação 3 em relação a  $T$ , derivando em relação a  $T$ . A condição de primeira ordem é:

$$F_T(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T}$$

$$\frac{dF(V)}{dT} = \frac{d(Ve^{\alpha T} e^{-\rho T} - Ie^{-\rho T})}{dT} = -(\rho - \alpha)Ve^{-(\rho - \alpha)T} + \rho Ie^{-\rho T} = 0$$

$$(\rho - \alpha)Ve^{-(\rho - \alpha)T} = \rho Ie^{-\rho T}$$

$$(\rho - \alpha)Ve^{-\rho T} e^{\alpha T} = \rho Ie^{-\rho T}$$

$$(\rho - \alpha)Ve^{\alpha T} = \rho I$$

$$e^{\alpha T} = \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}$$

$$\alpha T \ln e = \ln \left[ \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} \right] \quad \rightarrow \quad T^* = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} \right]$$

Podemos conferir a premissa de que  $0 < \alpha < \rho$  observando que a expressão do  $\ln$  não pode ser negativa. Como todos os termos são positivos, temos que necessariamente  $(\rho - \alpha > 0)$ , e então,  $\alpha < \rho$ . Dado que a variável tempo  $T$  também não pode ser negativa, temos:

$$T^* = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}, 0 \right\} \quad \text{Equação 4.}$$

Se  $T^*$  é o máximo da função, então a condição de segunda ordem é:

$$\frac{d^2 F(V)}{dT^2} = \frac{d}{dT} [-(\rho - \alpha)Ve^{-(\rho - \alpha)T} + \rho Ie^{-\rho T}] < 0$$

$$(\rho - \alpha)^2 Ve^{-(\rho - \alpha)T} - \rho^2 Ie^{-\rho T} < 0$$

$$(\rho - \alpha)^2 Ve^{-\rho T} e^{\alpha T} - \rho^2 Ie^{-\rho T} < 0$$

$$(\rho - \alpha)^2 V e^{\alpha T} - \rho^2 I < 0$$

Avaliando esta expressão no ponto  $T^*$ , substituindo o valor de  $e^{\alpha T} = \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}$ .

$$(\rho - \alpha)^2 V \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} - \rho^2 I < 0$$

$$(\rho - \alpha) \rho I - \rho^2 I < 0$$

$$(\rho - \alpha) - \rho < 0$$

$$\alpha > 0$$

Como assumimos a premissa de que  $\alpha > 0$ , a condição de segunda ordem está verificada.

Para que valores de  $V$  será melhor investir imediatamente? Podemos calcular isso fazendo  $T^* = 0$ :

$$T^* = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V^*}, 0 \right\} = 0$$

$$T^* = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V^*} = 0 \quad \rightarrow \quad e^0 = \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V^*} = 1$$

$$\boxed{V^* = \frac{\rho}{(\rho - \alpha)} I}$$

Equação 5

Dessa forma, no instante zero, investiremos sempre que  $V_0 > V^*$ , onde  $V^*$  é dado pela fórmula acima. Dizemos então que  $V^*$  é o nosso valor crítico para o qual se é indiferente entre investir agora ou adiar.

Vamos agora calcular o valor crítico  $V^*$  para um tempo  $t$  qualquer, e não apenas para  $t = 0$ . Assim, substituindo na equação de  $T$ :

$$t\alpha = \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}$$

$$e^{t\alpha} = \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} \quad \rightarrow \quad \boxed{V^* = \frac{\rho}{(\rho - \alpha) e^{t\alpha}} I}$$

Vemos que quanto  $t = 0$ , a expressão acima fica idêntica ao valor crítico da equação 5 encontrada anteriormente.

Achando a solução para  $F(V)$ , substituímos a equação 4 na equação 3:

$$T^* = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}, 0 \right\} \quad \text{Equação 4}$$

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T} \quad \text{Equação 3}$$

$$F(V) = \left\{ \left( V e^{\frac{\alpha}{\rho} \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}} - I \right) e^{-\frac{\rho}{\alpha} \ln \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V}} \right\}$$

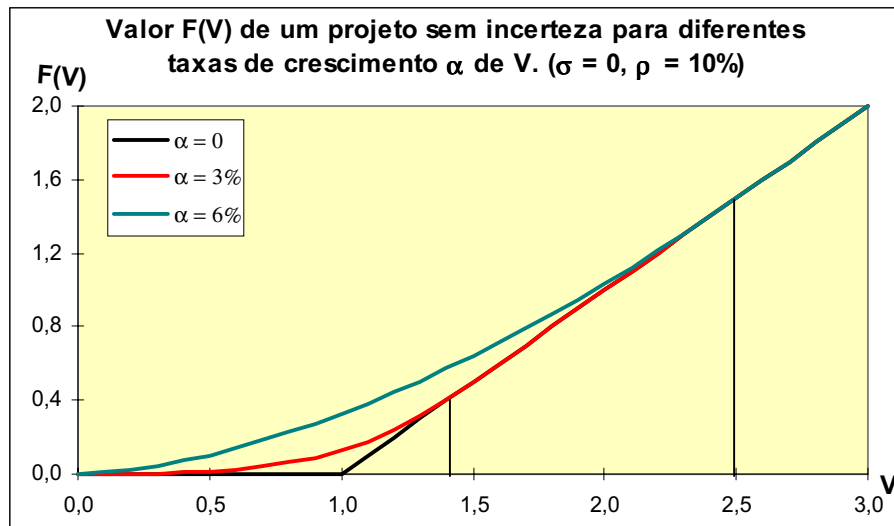
$$F(V) = \left\{ \left( V \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} - I \right) \left( \frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} \right)^{-\frac{\rho}{\alpha}} \right\}$$

$$F(V) = \left\{ \left( \frac{\rho I - I\rho + I\alpha}{(\rho - \alpha)} \right) \left( \frac{(\rho - \alpha)V}{\rho I} \right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \right\}$$

$$F(V) = \left\{ \left( \frac{I\alpha}{(\rho - \alpha)} \right) \left( \frac{(\rho - \alpha)V}{\rho I} \right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \right\}$$

$$F(V) = \begin{cases} \left( \frac{\alpha I}{(\rho - \alpha)} \right) \left( \frac{(\rho - \alpha)V}{\rho I} \right)^{\frac{\rho}{\alpha}} & \text{para } V \leq V^* \\ V - I & \text{para } V > V^* \end{cases} \quad \text{Equação 6}$$

A figura 5.1 mostra  $F(V)$  em função de  $V$  para  $I = 1$ ,  $\rho = 10\%$ , e diversos valores de  $\alpha$ . O valor crítico é o ponto de tangência de  $F(V)$  com  $V-I$ , que também é dado pela fórmula  $V^* = \frac{\rho}{(\rho - \alpha)} I$ . Tanto  $F(V)$  como  $V^*$  aumentam com  $\alpha$ , e o crescimento do cria um valor de espera. Gráfico do valor do projeto com opção de adiar:



## 1B O Caso estocástico

Voltamos agora para o caso mais geral, em que  $\sigma > 0$ . O problema é determinar em que ponto será ótimo investir  $I$  para obter um ativo que vale  $V$ . O critério adotado será descobrir o valor crítico  $V^*$  que será ótimo investir quando  $V \geq V^*$ .

Adotaremos primeiro a solução por Programação Dinâmica, e depois resolveremos o mesmo problema via Contingent Claims.

## 2 Solução por Programação Dinâmica

A equação de Bellman (pg. 105, equação 8, cap 4) é:

$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\}$$

Como a oportunidade de investimento  $F(V)$  não gera nenhum fluxo de caixa ( $\pi(x, t) = 0$ ) até o tempo  $T$  em que o investimento é feito, o único retorno existente é o do seu ganho de capital. Dessa forma, e assumindo também que o tempo é infinito, isto é, a opção pode ser exercida a qualquer momento no futuro sem restrições, podemos abandonar a variável  $t$  e a equação de Bellman na região limite fica:

$$\rho F = \frac{1}{dt} E[dF] \quad \text{onde } F = F(V)$$

$$\boxed{\rho F dt = E[dF]} \quad \text{Equação 7}$$

Expandindo por Taylor e usando a notação:

$$F' = \frac{dF}{dV} \quad F'' = \frac{d^2 F}{dV^2}$$

$$dF = \frac{dF}{dV} dV + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dV^2} dV^2 = F'(V) dV + \frac{1}{2} F''(V) dV^2$$

Lembrando que  $V$  segue uma MGB:  $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$

$$dF = F'(V) \{ \alpha V dt + \sigma V dz \} + \frac{1}{2} F''(V) \{ \alpha V dt + \sigma V dz \}^2$$

$$E[dF] = E\left[F'(V)\{\alpha Vdt + \sigma Vdz\} + \frac{1}{2}F''(V)\{\alpha^2 V^2 dt^2 + 2\alpha Vdt\sigma Vdz + \sigma^2 V^2 dz^2\}\right]$$

Mas  $\frac{dz^2}{dt^2} = dt$   
 $\frac{dt^2}{dt^2} = 0$

$$E[dz] = 0$$

$$E[dF] = F'(V)\{\alpha Vdt + \sigma V\cancel{E[dz]}\} + \frac{1}{2}F''(V)E[\alpha^2 V^2 \cancel{dt^2} + 2\alpha V^2 \sigma \cancel{Vdzdt} + \sigma^2 V^2 dt]$$

$$E[dF] = F'(V)\alpha Vdt + \frac{1}{2}F''(V)\sigma^2 V^2 dt$$

Substituindo na equação 7:

$$\rho Fdt = \left(F'\alpha V + \frac{1}{2}F''\sigma^2 V^2\right)dt$$

$$\rho F\cancel{dt} = \left(F'\alpha V + \frac{1}{2}F''\sigma^2 V^2\right)\cancel{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}F''\sigma^2 V^2 + F'\alpha V - \rho F = 0}$$

Equação 8

Para facilitar a comparação com Contingente Claims depois, adotaremos  $\rho = \alpha + \delta \rightarrow \alpha = \rho - \delta$ , assumindo que  $\alpha < \rho$  e  $\delta > 0$ . Com isso a equação 8 se torna:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + (\rho - \delta)VF'(V) - \rho F = 0 \quad \text{Equação 9}$$

Observações:

- Se V chegar a zero, ele não sairá mais deste valor, como podemos ver pela MGB de V. Note que como  $dV = \alpha Vdt + \sigma Vdz$ , se  $V=0$  implica em  $dV=0$ . Então, se  $V=0$  segue que a opção de investir quando  $V = 0$  é zero também ( $F(0) = 0$ ).
- Como  $V^*$  é o valor em que é ótimo investir, então  $V^*$  pertence a região de contorno de continuação. Então vale o VMC onde  $F(V^*) = \Omega(V^*)$  e  $F(V^*) = V^* - I$ .
- Vale também o SPC  $F'(V^*) = \Omega'(V^*)$  onde  $\Omega(V^*) = V^* - I$ . Teremos então  $F'(V^*) = 1$ .

Note que a equação 9 é uma EDO de segunda ordem, mas serão necessários 3 condições de contorno pois não conhecemos  $V^*$ . Trata-se de uma EDO com MGB. Esta é uma equação diferencial linear homogênea (todos os componentes são em F ou suas derivadas, não existe solução particular) de segunda ordem.



Forma Geral:  $aV^2F'' + bVF' + cF = Vd + e$

A solução desta equação diferencial é:

$$F(V) = A_1V^{\beta_1} + A_2V^{\beta_2} + \frac{Vd}{b+c} + \frac{e}{c}$$

No caso, a equação que temos é:

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V) + (\rho - \delta)VF'(V) - \rho F = 0$$

onde  $a = \frac{1}{2}\sigma^2$        $b = \rho - \delta$        $c = \rho$        $d = 0$        $e = 0$

A solução então se reduz a:

$$F(V) = A_1V^{\beta_1} + A_2V^{\beta_2}$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes a serem determinadas e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes conhecidas que depende dos parâmetros  $\sigma$ ,  $\delta$  e  $\rho$  da equação diferencial. Veremos mais adiante que  $\beta_1 > 1$  e  $\beta_2 < 0$ .

Note que temos 3 incógnitas ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $V^*$ ) a serem determinadas para completarmos a solução. Precisamos então de três condições de contorno.

Condição de Contorno n.º 1:

O comportamento limite de  $F(V)$  em torno de zero nos fornece a primeira condição de contorno. Como vimos que  $F(0) = 0$  (equação 10). Quando  $V$  é muito pequeno, as chances dele crescer e chegar ao valor crítico  $V^*$  são mínimas. Assim, é razoável supor que a opção deve valer muito pouco nesta situação. Para garantir que  $F(V) \rightarrow 0$  quando  $V \rightarrow 0$ , e como  $\beta_2 < 0$ , o coeficiente  $A_2$  tem que ser zero, pois se não for,  $F(V) \rightarrow \infty$  quando  $V \rightarrow 0$ . Então podemos garantir que  $A_2 = 0$ , e a solução será da forma:

$$F(V) = A_1V^{\beta_1} \quad (\text{Equação 13})$$

Condição de Contorno n.º 2:

Para a segunda condição de contorno, analisamos o comportamento de  $F(V)$  no ponto crítico  $V^*$ . Neste ponto limite, a decisão ótima é exercer a opção e investir no projeto de valor  $V$ , incorrendo no preço de exercício  $I$  (irreversível). Nesse ponto temos duas condições que devem ser observadas: o valor da opção  $F(V)$  deve ser igual ao valor obtido com o seu exercício, que é o valor do projeto menos o investimento necessário  $V^* - I$ . Este valor é o seu valor terminal  $\Omega$ . Esta é a condição do VMC.

$$F(V^*) = \Omega(V^*) = V^* - I \quad \text{equação 11}$$

Condição de Contorno n.º 3:

Se em  $V^*$  ocorre VMC, também obrigatoriamente deverá ocorrer o SPC, que garante que  $F(V)$  e  $V^* - I$  devem se encontrar tangencialmente.

$$F'(V^*) = \Omega'(V^*) = 1 \quad \text{equação 12}$$

Com estas três condições de contorno podemos resolver a equação. Usando as fórmulas para  $F(V^*)$  e  $V^*$ , desenvolvemos a solução:

$$F(V^*) = A_1 V^{*\beta_1} = V^* - I \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{V^* - I}{V^{*\beta_1}}$$

$$F'(V^*) = \beta_1 A_1 V^{*\beta_1-1} = 1$$

$$\beta_1 \frac{V^* - I}{V^{*\beta_1}} V^{*\beta_1-1} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta_1 (V^* - I) = V^* \quad \rightarrow \quad \beta_1 V^* - \beta_1 I - V^* = 0$$

$$V^* (\beta_1 - 1) = \beta_1 I$$

$$\boxed{V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I} \quad \text{Equação 14}$$

Substituindo em  $A_1$ , temos:

$$A_1 = \frac{V^* - I}{V^{*\beta_1}} = \frac{\frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1} - I}{\left[ \frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1} \right]^{\beta_1}} = \left( \frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1} - I \right) \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1}}{(\beta_1 I)^{\beta_1}}$$

$$A_1 = \left( \frac{\beta_1 I - (\beta_1 - 1)I}{\beta_1 - 1} \right) \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1}}{(\beta_1 I)^{\beta_1}} = \frac{(\beta_1 I - \beta_1 I + I)(\beta_1 - 1)^{\beta_1-1}}{(\beta_1 I)^{\beta_1}}$$

$$A_1 = \frac{I(\beta_1 - 1)^{\beta_1-1}}{(\beta_1 I)^{\beta_1}} = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1-1}}{\beta_1^{\beta_1} I^{\beta_1-1}} \quad \text{Equação 15}$$

ou  $A_1 = \frac{V^* - I}{V^{*\beta_1}} = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1-1}}{\beta_1^{\beta_1} I^{\beta_1-1}}$

- Note que como  $\beta_1 > 1$ , segue que  $\beta_1 / (\beta_1 - 1) > 1$  também, e  $V^* > I$ . (Equação 14)
- Isso mostra que a regra do VPL tradicional de investir se  $V - I > 0$  está errada.
- O fator de erro é  $\beta_1 / (\beta_1 - 1)$
- Para sabermos a magnitude deste fator, vamos analisar a solução da equação 13 em mais detalhe.

## 2A Raízes da equação quadrática

A equação 9 é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem que é linear em  $F$  e suas derivadas:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + (\rho - \delta) V F'(V) - \rho F = 0 \quad \text{Equação 9}$$

Assim sua solução geral pode ser expressa como uma combinação linear de quaisquer duas soluções desde que linearmente independentes:

$$\begin{aligned} \text{Solução Geral: } F(V) &= AV^\beta \\ F'(V) &= \beta AV^{\beta-1} \\ F''(V) &= \beta(\beta-1)AV^{\beta-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação 9:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \beta(\beta-1)AV^{\beta-2} + (\rho - \delta) V \beta AV^{\beta-1} - \rho AV^\beta &= 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1)V^\beta + (\rho - \delta) \beta V^\beta - \rho V^\beta &= 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + (\rho - \delta) \beta - \rho &= 0 \quad \text{Equação 16} \\ \frac{1}{2}\sigma^2 \beta^2 + \left( (\rho - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \beta - \rho &= 0 \end{aligned}$$

As duas raízes são:

$$\beta_{1,2} = \frac{-(\rho - \delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 \pm \sqrt{\left( (\rho - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 \rho}}{\sigma^2}$$

onde

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho - \delta) + \sqrt{\left( (\rho - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 \rho}}{\sigma^2}$$

e

$$\beta_2 = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho - \delta) - \sqrt{\left( (\rho - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 \rho}}{\sigma^2}$$

O que podemos dizer a respeito dos valores de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ? Desenvolvendo o termo dentro da raiz, temos:

$$\begin{aligned} \left( (\rho - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 \rho &= (\rho - \delta)^2 - 2(\rho - \delta)\frac{1}{2}\sigma^2 + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 \rho \\ (\rho - \delta)^2 - \sigma^2 \rho + \sigma^2 \delta + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 \rho &= (\rho - \delta)^2 + \sigma^2 \rho + \sigma^2 \delta + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \\ (\rho - \delta)^2 + \sigma^2 (\rho + \delta) + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 &= (\rho - \delta)^2 + \sigma^2 (\rho - \delta + 2\delta) + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \end{aligned}$$

$$(\rho - \delta)^2 + \sigma^2(\rho - \delta) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\sigma^2\delta = \left((\rho - \delta) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\sigma^2\delta$$

Assim, transformamos o termo dentro da raiz para uma forma semelhante ao termo fora da raiz. Podemos dizer então que a equação de  $\beta_1$  fica aproximadamente igual a:

$$\beta_1 \approx \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho - \delta) + (\rho - \delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 + \sqrt{2\sigma^2\delta}}{\sigma^2}$$

$$\beta_1 \approx \frac{\sigma^2 + \sqrt{2\sigma^2\delta}}{\sigma^2} \approx 1 + K \quad \text{onde } K > 0$$

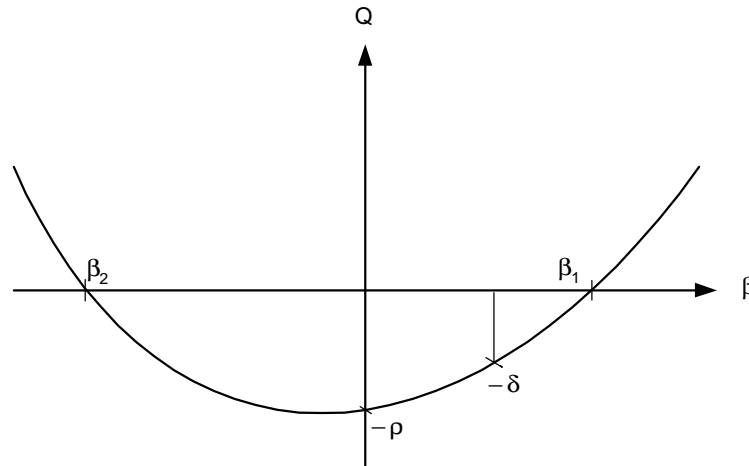
Com isso podemos ver que  $\beta_1$  será sempre positivo e  $> 1$ . No caso de  $\beta_2$ , temos:

$$\beta_2 \approx \frac{-(\rho - \delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2 - \sqrt{2\sigma^2\rho}}{\sigma^2}$$

$$\beta_2 \approx \frac{-2(\rho - \delta) - \sqrt{2\sigma^2\rho}}{\sigma^2} < 0$$

Para analisarmos melhor o fator  $\beta_1 / (\beta_1 - 1)$ , vamos examinar a equação quadrática 16 em mais detalhe, que denominaremos  $Q$ . Queremos fazer uma sensibilidade sobre  $\beta$ , e analisar como os parâmetros  $\rho$ ,  $\sigma$  e  $\delta$  afetam  $\beta$ .

$$Q \equiv \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + (\rho - \delta)\beta - \rho = 0 \quad \text{Equação 16}$$



Na figura 5.2 vemos  $Q$  em função de  $\beta$ . Como o coeficiente de  $\beta_2$  é positivo, o gráfico é convexo, com  $Q \rightarrow \infty$  quando  $\beta \rightarrow \pm \infty$ . Também,  $Q(1) = -\delta$  (assumimos que  $\delta > 0$ ), e  $Q(0) = -\rho$ , e sabemos que  $\beta_2 < 0$  e  $\beta_1 > 1$ .

Vamos concentrar na raiz  $\beta_1$ . Como ela irá variar quando  $\sigma$  variar? Para descobrirmos, vamos diferenciar  $Q$  em relação a  $\sigma$  e  $\beta$  e vamos avaliar esta derivada no ponto  $\beta_1$ .

$$Q \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 + \left( (\rho - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \beta - \rho = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \equiv \frac{\partial Q}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{lembrando que } \beta = f(\sigma)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \equiv \sigma \beta^2 - \sigma \beta + \left[ \sigma^2 \beta + (\rho - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = 0$$

$$\left[ \sigma^2 \left( \beta - \frac{1}{2} \right) + (\rho - \delta) \right] \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = \sigma \beta (\beta - 1)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = - \frac{\overbrace{\sigma \beta_1 (\beta_1 - 1)}^{>0}}{\underbrace{\underbrace{\sigma^2 \left( \beta_1 - \frac{1}{2} \right)}_{>0} + \underbrace{(\rho - \delta)}_{>0}}_{>0}}$$

Avaliando essa expressão em  $\beta = \beta_1$ , e sabendo que  $\beta_1 > 1$ , podemos ver que o resultado dos dois primeiros termos da expressão é positivo. Sabendo que  $\rho = \alpha + \delta$ , e portanto,  $\rho > \delta$ , verificamos que este termo também é positivo. No ponto  $\beta_1$ ,  $\sigma \beta (\beta - 1)$  é  $> 0$ , dado que  $\beta_1 > 1$ . Assim, o sinal de  $\partial \beta_1 / \partial \sigma$  será negativo, e  $\partial \beta_1 / \partial \sigma < 0$ , já que todos os demais termos da expressão são positivos.

Desta forma quando  $\sigma$  aumenta,  $\beta_1$  diminui e então  $\beta_1 / (\beta_1 - 1)$  aumenta. Assim sendo quando a incerteza aumenta, aumenta a diferença necessária entre  $V^*$  e  $I$  para que seja realizado um investimento irreversível. Isso faz sentido: quanto maior a incerteza sobre o valor futuro,  $F(V)$  diminui e o investidor exige um threshold  $V^*$  maior para investir.

Podemos verificar também duas outras propriedades:

- ♦ Quando  $\delta$  aumenta  $\beta_1 / (\beta_1 - 1)$  diminui
- ♦ Quando  $\rho$  aumenta  $\beta_1 / (\beta_1 - 1)$  aumenta

Também, pela equação de  $\beta_1$  podemos verificar que:

Quando  $\sigma \rightarrow +\infty$ ,  $\beta_1 \rightarrow 1$  e  $V^* \rightarrow +\infty$ , de modo que nunca será ótimo investir neste caso.

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(\rho - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left( \frac{(\rho - \delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \beta_1 = \frac{1}{2} - 0 + \sqrt{\left( 0 - \frac{1}{2} \right)^2 + 0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Quando  $\sigma \rightarrow 0$  temos dois casos distintos:

Se  $\alpha > 0$  a equação 9 fica:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)}_0 + (\rho - \delta) V F'(V) - \rho F = 0 \quad \text{Equação 9}$$

$$(\rho - \delta) V F'(V) - \rho F = 0$$

A solução pode ser da forma  $F(V) = AV^\beta$  com  $F' = \beta A V^{(\beta-1)}$

Substituindo:

$$(\rho - \delta) V F'(V) - \rho F = 0$$

$$(\rho - \delta) V \beta A V^{\beta-1} - \rho A V^\beta = 0$$

$$(\rho - \delta) \beta A V^\beta = \rho A V^\beta$$

$$(\rho - \delta) \beta = \rho$$

$$\beta = \frac{\rho}{\rho - \delta}$$

Da equação 14  $V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$  concluimos que  $V^* = \frac{\rho}{\delta} I$

Poderíamos também verificar isso mais facilmente através da equação 16:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + \underbrace{(\rho - \delta)}_\alpha \beta - \rho = 0$$

$$\rho = \alpha + \delta$$

$$\alpha = \rho - \delta$$

Com  $\sigma \rightarrow 0$ , temos:

$$(\rho - \delta) \beta - \rho = 0$$

$$\beta = \frac{\rho}{\rho - \delta}$$

$$\text{Se } \alpha > 0 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\rho}{\rho - \delta} \quad \text{????????????????????}$$

$$\text{Se } \alpha \leq 0 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\rho}{-(\rho - \delta)}$$