

5B Combined Brownian Motion and Jump Process

Adotamos o modelo básico de MGB, mas permitimos agora que a variável V sofra um salto para baixo, seguindo uma distribuição de Poisson.

Este modelo pode estar descrevendo uma situação em que uma empresa farmacêutica detém uma patente que lhe permite investir num projeto cujo valor é V , mas outras empresas estão também desenvolvendo pesquisas que poderão leva-las a investir em projeto semelhante. Se estas empresas tiverem sucesso nas suas pesquisas, a competição resultante reduzirá os lucros e consequentemente, o valor V do projeto.

O modelo adotado será:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz - V dq \quad (36)$$

onde dq é o investimento de um processo de Poisson $0 \leq \phi \leq 1$

$$dq = \begin{cases} \phi & \text{com probabilidade } \lambda dt \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \end{cases}$$

e dq e dz são independentes ($E(dz dq) = 0$)

Taxa de mudança esperada em V =

$$E\left[\frac{dv}{v}\right] \frac{1}{dt} = E\left[\frac{\alpha V dt + \sigma V dz - V dq}{V}\right] \frac{1}{dt}$$

$$E\left[\frac{dv}{v}\right] \frac{1}{dt} = \alpha - \frac{dq}{dt} + \frac{\sigma V}{dt} E[dz]$$

$$E\left[\frac{dv}{v}\right] \frac{1}{dt} = \alpha - \frac{dq}{dt}$$

mas $dq = \phi \lambda dt$, então

$$E\left[\frac{dv}{v}\right] \frac{1}{dt} = \alpha - \frac{\phi \lambda dt}{dt}$$

$$E\left[\frac{dv}{V}\right] \frac{1}{dt} = \alpha - \lambda \phi$$

Isso significa que um intervalo dt , V crescerá menos do que α^{dt} , pois existe uma probabilidade λdt de que V cairá 100%.

Se o salto não ocorrer, a variância do processo é a variância de MGB, ou seja, $(\sigma dz)^2 = \sigma^2 dt$. Se o salto ocorrer, no entanto, ele causará uma grande variação no valor de V , e consequentemente, não pode ser ignorado.

Usando a aproximação do Random Walk para o MGB, temos:

$$\begin{array}{ll} \text{Random Walk: } \Delta h = \pm \sigma \sqrt{\Delta t} & \text{MAB} \\ \text{“ “ : } \Delta h = \pm \sigma V \sqrt{\Delta t} & \text{MGB} \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned} E[dv] &= -\phi V \lambda dt + \frac{1}{2}(1-\lambda)d + [\sigma V \sqrt{dt} - \sigma V \sqrt{dt}] \\ E[(dV)^2] &= \lambda dt (-\phi V)^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda dt)(\sigma V \sqrt{dt})^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda dt)(-\sigma V \sqrt{dt})^2 \\ E[(dV)^2] &= \lambda dt \phi^2 V^2 + (1-\lambda dt)(\sigma V \sqrt{dt})^2 \\ E[(dV)^2] &= \lambda dt \phi^2 V^2 + \sigma^2 V^2 dt \end{aligned}$$

e

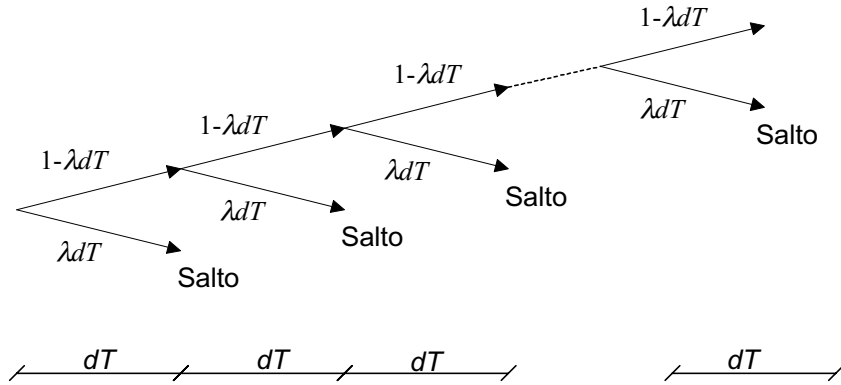
$$\begin{aligned} \text{Var}[dV] &= E[(dV)^2] - E^2[dV] \\ \text{Var}[dV] &= \lambda dt \phi^2 V^2 + \sigma^2 V^2 dt - \underbrace{\phi^2 V^2 \lambda^2 dt^2}_0 \\ \text{Var}[dV] &= \underbrace{\lambda dt \phi^2 V^2}_{\text{Poisson}} + \underbrace{\sigma^2 V^2 dt}_{\text{MGB}} \end{aligned}$$

Outra maneira de calcular a Variância, partindo do processo original, sem usar Random Walk:

$$\begin{aligned} dV &= \alpha V dt + \sigma V dz - V dq \\ E[dV] &= \alpha V dt - \lambda V \phi dt \\ E[dV^2] &= E[\alpha^2 V^2 dt^2 + \sigma^2 V^2 dz^2 + (-V)^2 dq^2] \\ E[dV^2] &= \sigma^2 V^2 E[dz^2] + V^2 E[dq^2] \\ E[dV^2] &= \sigma^2 V^2 dt + V^2 \lambda \phi^2 dt \\ \text{Var}[dV] &= E[(dV)^2] - E^2[dV] \\ \text{Var}[dV] &= \lambda dt \phi^2 V^2 + \sigma^2 V^2 dt - \underbrace{(\alpha V dt - \lambda V \phi dt)^2}_0 \\ \text{Var}[dV] &= \lambda dt \phi^2 V^2 + \sigma^2 V^2 dt \end{aligned}$$

Queremos agora determinar o valor esperado de T , que é o período que V vai flutuar continuamente segundo uma MGB antes de cair. A probabilidade de V sofrer um saldo de Poisson no próximo intervalo pequeno de tempo dT é dado por λdT . Da mesma forma, a probabilidade de V não sofrer um salto por mais um período dT é dado por $1-\lambda dT$. Num intervalo $(0,T)$, essa probabilidade de não ocorrer o salto é dado por $e^{-\lambda T}$.

Isso pode ser verificado da seguinte forma:



A probabilidade de não ocorrerem saltos durante n períodos até o período T é $(1 - \lambda dT)^n$. Lembrando que $e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n)^n$, podemos fazer $a = -\lambda n dT$ e ficamos com $e^{-\lambda n dT} = (1 - \lambda dT)^n$. Então $(1 - \lambda dT)^n = e^{-\lambda n dT} = e^{-\lambda T}$.

Assim a probabilidade que o 1º salto ocorra no intervalo $(T, T+dt)$ é $e^{-\lambda T} \cdot \lambda dt$. O tempo esperado até que V tenha um salto de Poisson é:

$$E(x) = \int x \cdot f(x) dx$$

$$E[T] = \int_0^{\infty} T \cdot e^{-\lambda T} \lambda dt$$

Integrando por partes, temos:

$$E[T] = \lambda \int_0^{\infty} T \cdot e^{-\lambda T} dt = \lambda \left\{ \left[T \cdot \frac{e^{-\lambda T}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}}{-\lambda} dt \right\}$$

$$E[T] = \left\{ [0 - 0] - \frac{e^{-\lambda T}}{-\lambda^2} \Big|_0^{\infty} \right\} = -\lambda \left(0 - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} \quad (37)$$

Qual é a regra ótima de investimento agora? Resolvemos por programação dinâmica, uma vez que o processo de Poisson não é contínuo, e portanto, não diferenciável. Assumimos que a firma é neutra a risco, portanto a taxa de desconto $\rho = r$.

A equação de Belmam é:

$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, t, u) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\}$$

No nosso caso, estamos avaliando uma oportunidade de investimento, portanto não existe ainda fluxo de lucros uma vez que o investimento ainda não foi realizado. Assim $\pi(x, t, u) = 0$. A maximização a fazer é escolher o tempo ótimo para o investimento, portanto podemos ignorar o termo de máximo. E finalmente, $F = F(V)$, e não é função do tempo.

Então ficamos com:

$$\rho F dt = E[dF]$$

Para calcularmos $E[dF]$, expandimos dF usando versão do lemma de Ito para MGB combinada com Poisson, separando a parte contínua da parte discreta. Assim

$$F = F(V)$$

$$dV_{Contínuo} = \alpha V dt + \sigma V dz$$

$$E[dV_{Contínuo}] = \alpha V dt$$

$$E[dV_C^2] = \sigma^2 V^2 dt$$

$$dF_C = F'(V) dV_C + \frac{1}{2} F''(V) dV_C^2$$

$$dF_D = F(V - \phi V) - F(V)$$

$$dF_D = F((1 - \phi)V) - F(V)$$

$$E[dF] = (1 - \lambda dt)[dF_{Contínuo}] + \lambda dt[dF_{Discreto}]$$

$$E[dF] = (1 - \lambda dt) \left[F' E(dV_C) + \frac{1}{2} F'' E(dV_C^2) \right] + \lambda dt [F(V - \phi V) - F(V)]$$

$$E[dF] = (1 - \lambda dt) \left[F'(\alpha V dt) + \frac{1}{2} F''(\sigma^2 V^2 dt) \right] - \lambda dt [F(V) - F(V(1 - \phi))]$$

$$E[dF] = F'(\alpha V dt) + \frac{1}{2} F''(\sigma^2 V^2 dt) - \lambda dt [F(V) - F(V(1 - \phi))]$$

Substituindo o valor de $E[dF]$ na equação de Bellman, e substituindo α por $r - \delta$, temos:

$$\begin{aligned} rF dt &= F'(\alpha V dt) + \frac{1}{2} F''(\sigma^2 V^2 dt) - \lambda dt [F(V) - F(V(1 - \phi))] \\ \frac{1}{2} F'' \sigma^2 V^2 + (r - \delta) F' V - (r + \lambda) F + \lambda F(V(1 - \phi)) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Aplicamos as mesmas condições de contorno: 10, 11 e 12 a solução da equação 39 é da forma $F(V) = AV^{\beta_1}$, onde β_1 é a solução de uma quadrática não linear agora:

$$\begin{aligned} \text{Solução Geral: } F(V) &= AV^{\beta} \\ F'(V) &= \beta AV^{\beta-1} \end{aligned}$$

$$F''(V) = \beta(\beta-1)AV^{\beta-2}$$

Substituindo na equação 39:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \beta(\beta-1)AV^{\beta-2} + \alpha V \beta AV^{\beta-1} - (r+\lambda)AV^\beta + \lambda A(1-\phi)^\beta V^\beta &= 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + \alpha \beta - (r+\lambda) + \lambda(1-\phi)^\beta &= 0 \end{aligned}$$

Equação 40

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - (r-\lambda) + \lambda(1-\phi)^\beta = 0 \quad (40)$$

O valor de β pode ser achado numericamente e daí podemos achar as demais constantes V^* e A , usando as condições de contorno.