

## Capítulo 4b – Otimização Dinâmica sob incerteza (cont)

### Appendix C: Value Matching Condition e Smooth Pasting

Seja o problema da parada ótima com horizonte finito e dependência de tempo, quando a variável de estado ( $x$ ) segue um processo de Ito. Veremos a Value Matching Condition (VMC) e o Smooth Pasting Condition (SPC) para as equações (14) e (15) que determinam o contorno limite que separa a região de parada da região de continuação.

Partimos da equação de Bellman (6):

$$F(x) = \max \left\{ \Omega(x), \pi(x) + \frac{1}{1+\rho} E[F(x') | x] \right\}$$

Num intervalo de tempo pequeno  $dt$  e com horizonte finito, temos:

$$F(x, t) = \max \left\{ \Omega(x, t), \pi(x, t)dt + \frac{1}{1+\rho dt} E[F(x+dx, t+dt) | x] \right\}$$

e ficamos com:

$$F(x, t) = \max \left\{ \Omega(x, t), \pi(x, t)dt + \frac{1}{1+\rho dt} [F(x, t) + E[dF(x, t)]] \right\}$$

No livro, Dixit faz uma transformação a mais: Sabendo que  $\frac{1}{1-a} = \sum_{x=0}^{\infty} a^x$ , ele substitui a

expressão  $\frac{1}{1+\rho dt}$  pela série, onde  $a = -\rho dt$ .

$$\frac{1}{1+\rho dt} = \sum_{x=0}^{\infty} (-\rho dt)^x = (-\rho dt)^0 + (-\rho dt)^1 + (-\rho dt)^2 + (-\rho dt)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+\rho dt} = 1 - \rho dt + (\rho dt)^2 - (\rho dt)^3 + \dots$$

Os termos de ordem superior tendem a zero e portanto podem ser ignorados. Dessa forma, a expressão fica:

$$\frac{1}{1+\rho dt} = 1 - \rho dt$$

Substituindo na equação, ficamos com:

$$F(x, t) = \max \left\{ \Omega(x, t), \pi(x, t)dt + (1 - \rho dt) [F(x, t) + E[dF(x, t)]] \right\}$$

Mas lembrando também que:

$$E[dF(x,t)] = \left[ F_t(x,t) + a(x,t)F_x(x,t) + \frac{1}{2}b^2(x,t)F_{xx}(x,t) \right]dt$$

Então

$$(1 - \rho dt) E[dF(x,t)] = E[dF(x,t)] - \rho E[dF(x,t)]dt$$

Note que a segunda parcela ficará multiplicada por  $dt^2$  quando substituirmos o valor de  $E[dF]$  na expressão. Assim, essa parcela pode ser desprezada, restando:

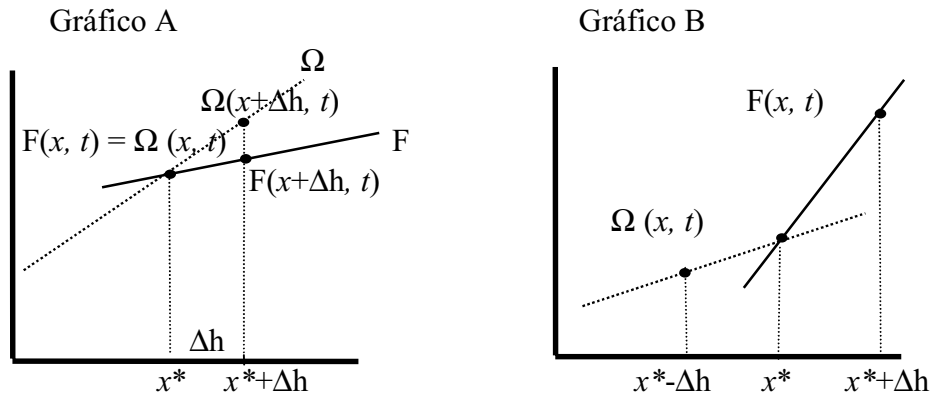
$$(1 - \rho dt) E[dF(x,t)] = E[dF(x,t)]$$

A equação final fica então da seguinte forma:

$$F(x,t) = \max\{\Omega(x,t), \pi(x,t)dt + (1 - \rho dt)F(x,t) + E[dF(x,t)]\}$$

idêntico ao do livro.

Seja o ponto  $x^*$  tal que  $F(x^*, t) = \Omega(x^*, t)$ . Os gráficos possíveis para as evoluções de  $F(x, t)$  e  $\Omega(x, t)$  são:



$x \geq x^*$  continua  $\rightarrow F(x, t)$  é maior

$x < x^*$  para  $\rightarrow \Omega(x, t)$  é maior

A situação do gráfico A não é aceitável pois contraria a hipótese de que  $F(x, t)$  aumenta mais do que  $\Omega(x, t)$  à medida que  $x$  aumenta. Nesse caso, para  $x > x^*$  seria melhor parar, o que contraria a nossa condição inicial. Se  $x_t = x + \Delta h$ , teríamos  $\Omega(x + \Delta h, t) > F(x + \Delta h, t)$  e seriam então melhor parar.

A situação do gráfico B poderia então em princípio ser aceitável, pois para  $x > x^*$ ,  $F(x, t) > \Omega(x, t)$ , então é melhor continuar. Mas se esperarmos por mais um período  $\Delta t$  podemos observar a nova posição de  $x$ . Se  $x$  aumentar escolhemos  $F(x, t)$ , se diminuir escolhemos  $\Omega(x, t)$ . O Valor Esperado destas duas alternativas incertas é maior do que o valor no ponto crítico, o que mostra que se o encontro for em ângulo, é sempre melhor esperar. Nesse caso,  $x^*$  não pode ser o ponto crítico.

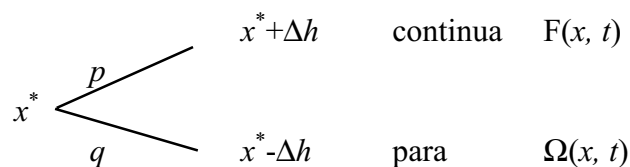
Vamos ver isso em mais detalhe no intervalo  $\Delta t$  após o valor  $x^*$  ser atingido. Note que assumimos que a variável de estado  $x$  segue um processo de Markov com incrementos finitos  $\Delta x = \pm \Delta h$  a cada instante  $t$ . Assim, no instante  $t + 1$  teremos  $x^* + \Delta x$ .

- ♦ Se  $\Delta x = \Delta h$ , o movimento será na direção de  $x^* + \Delta h$  e o valor será dado por  $F(x + \Delta h, t)$ .
- ♦ Se  $\Delta x = -\Delta h$ , o movimento será na direção de  $x^* - \Delta h$  e o valor será dado pela curva  $\Omega(x - \Delta h, t)$ .
- ♦ A média destes dois valores (aritmética ou ponderada) será sempre maior do que o valor de  $F(x^*, t)$  ou  $\Omega(x^*, t)$ , dada a forma das duas curvas.

Mas esta média ocorrerá no instante  $t + \Delta t$ , e portanto, precisa ser descontada por um período, o que reduzirá o seu valor. Veremos que isso não alterará a nossa conclusão pois no movimento Browniano o passo  $\Delta h = b(x, t) \sqrt{\Delta t}$  é proporcional a  $\sqrt{\Delta t}$  e o seu efeito sobre o valor também, enquanto que o fator de desconto é dado por  $1/(1 + \rho \Delta t)$ . Assim, como  $\Delta t < 1 \rightarrow \sqrt{\Delta t} / \Delta t > 1$ , e aumenta à medida que  $\Delta t$  diminui.

Algebricamente, começando pela equação de Bellman (equação 6):

$$F(x, t) = \max \left\{ \Omega(x, t), \pi(x, t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} E[F(x + dx, t + dt) | x] \right\}$$



No ponto  $x^*$ :

$$F(x^*, t) = \max \left\{ \Omega(x^*, t), \pi(x^*, t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} E[F(x^* + dx, t + dt) | x] \right\}$$

Substituindo o Valor Esperado:

$$F(x^*, t) = \max \left\{ \Omega(x^*, t), \pi(x^*, t)\Delta t + \frac{1}{1 + \rho\Delta t} \left[ pF(x^* + \Delta h, t + \Delta t) + q\Omega(x^* - \Delta h, t + \Delta t) \right] \right\}$$

Se subir é  $F(x, t)$       Se cair é  $\Omega(x, t)$

Expandindo por Taylor:

$$\begin{aligned} F(x^* + \Delta h, t + \Delta t) &= F(x^*, t) + F_x \Delta h + F_t \Delta t + \frac{1}{2} F_{xx} \Delta h^2 \\ \Omega(x^* - \Delta h, t + \Delta t) &= \Omega(x^*, t) - \Omega_x \Delta h + \Omega_t \Delta t + \frac{1}{2} \Omega_{xx} \Delta h^2 \end{aligned}$$

Substituindo:

$$F(x^*, t) = \max \left\{ \Omega(x^*, t), \pi(x^*, t)\Delta t + \frac{1}{1 + \rho\Delta t} \left[ p \left( F(x^*, t) + F_x \Delta h + F_t \Delta t + \frac{1}{2} F_{xx} \Delta h^2 \right) + q \left( \Omega(x^*, t) - \Omega_x \Delta h + \Omega_t \Delta t + \frac{1}{2} \Omega_{xx} \Delta h^2 \right) \right] \right\}$$

Do capítulo 3, vimos que podemos modelar o processo de  $x$  como random walk binomial, com passos do tamanho de  $\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t}$  para cima ou para baixo, em que as probabilidades associadas são:

$$p = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right] \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right]$$

No nosso caso, como  $x$  segue um processo de Ito, temos que:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad \text{onde } a(x, t) = \alpha \quad \text{e} \quad b(x, t) = \sigma$$

Assim, ficamos com:  $\Delta h = b(x, t) \sqrt{\Delta t}$  e

$$p = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{a(x, t)}{b(x, t)} \sqrt{\Delta t} \right] \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{a(x, t)}{b(x, t)} \sqrt{\Delta t} \right]$$

Substituindo  $p$  e  $q$  na equação, lembrando que pela VMC temos  $F(x^*, t) = \Omega(x^*, t)$ , e substituindo  $\frac{1}{1 + \rho dt} = 1 - \rho dt$ , ficamos com:

$$F(x^*, t) = \max \left\{ \Omega(x^*, t), \pi(x^*, t)\Delta t + \frac{(1 - \rho\Delta t)}{2} \left[ \left[ 1 + \frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t} \right] \left( F(x^*, t) + F_x\Delta h + F_t\Delta t + \frac{1}{2}F_{xx}\Delta h^2 \right) + \left[ 1 - \frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t} \right] \left( F(x^*, t) - \Omega_x\Delta h + \Omega_t\Delta t + \frac{1}{2}\Omega_{xx}\Delta h^2 \right) \right] \right\}$$

Trabalhando apenas com o termo mais à direita da função, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 - \rho\Delta t) \left[ F(x^*, t) + F_x\Delta h + F_t\Delta t + \frac{1}{2}F_{xx}\Delta h^2 + F(x^*, t)\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t} + F_x\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta h + F_t\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta t + \frac{1}{2}F_{xx}\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta h^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2}(1 - \rho\Delta t) \left[ F(x^*, t) - \Omega_x\Delta h + \Omega_t\Delta t + \frac{1}{2}\Omega_{xx}\Delta h^2 - F(x^*, t)\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t} - \Omega_x\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta h - \Omega_t\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta t - \frac{1}{2}\Omega_{xx}\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta h^2 \right] \end{aligned}$$

Como  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos eliminar todos os termos  $\Delta t$  com expoente maior do que 1 dentro do parêntese, lembrando que  $\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t}$ , ou seja,  $\Delta h^2 = \sigma^2 \Delta t$ . Multiplicamos ainda por  $(1 + \rho\Delta t)$  e eliminamos novamente:

$$\frac{1}{2} \left[ F(x^*, t) + F_x\Delta h + F_t\Delta t + \frac{1}{2}F_{xx}\Delta h^2 + F_x\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta h + F(x^*, t)\rho\Delta t + F(x^*, t) - \Omega_x\Delta h + \Omega_t\Delta t + \frac{1}{2}\Omega_{xx}\Delta h^2 - \Omega_x\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\sqrt{\Delta t}\Delta h + F(x^*, t)\rho\Delta t \right]$$

Como  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos eliminar todos os termos em  $\Delta t$ , ficando com:

$$F(x^*, t) = \Omega(x^*, t) = \frac{1}{2} [F(x^*, t) + F_x\Delta h + F(x^*, t) - \Omega_x\Delta h]$$

$$F(x^*, t) = \Omega(x^*, t) = F(x^*, t) + \frac{1}{2} [F_x(x^*, t) - \Omega_x(x^*, t)]\Delta h$$

Para que esta equação seja verdadeira, o termo dentro do parênteses tem que ser zero, o que ocorrerá quando  $F_x(x^*, t) = \Omega_x(x^*, t)$ , que é exatamente o SPC.

## 1H Exemplo - Abandono ótimo de uma máquina

Suponha que o ativo é uma máquina de produz durante uma vida útil de  $T$  anos. Sua lucratividade diminui ao longo de sua vida útil (produz menos, requer mais manutenção e fica menos competitiva). Seja  $x$  o fluxo de lucro atual e suponha que  $x$  segue um MAB:

$$dx = a dt + b dz, \quad a < 0 \text{ de modo que o drift de } x \text{ é negativo, refletindo esse declínio.}$$

A qualquer momento a firma pode abandonar a máquina, com valor terminal  $\Omega = 0$ . Se o fluxo de lucro  $x$  tornar-se negativo, essa opção torna-se atrativa. Entretanto, uma vez abandonada, a máquina deteriora rapidamente, de modo que consideramos esta decisão como irreversível. Para a firma, valerá então a pena manter a máquina operando mesmo com prejuízo, se houver uma esperança de voltar a ter lucros novamente no futuro.

Para analisar essa situação acompanhamos a evolução das variáveis de lucro,  $x$ , e de idade da máquina,  $t$ . Existirá uma curva limite  $x^*(t)$  na qual, se o lucro atual  $x$  cair abaixo dessa curva, a máquina será abandonada. Se ficar acima, continuaremos com a máquina, mesmo que assumindo prejuízos.

Os parâmetros utilizados nos cálculos serão:

$$T = 10 \text{ anos}$$

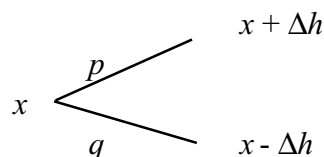
$$\rho = 10\% \text{ a.a.}$$

$$a = -0,1 \text{ a.a.}$$

$$b = 0,2 \text{ a.a.} \Rightarrow \sigma^2 = 0,04 \text{ a.a.}$$

$$\Omega(x, t) = 0 \rightarrow \text{o valor terminal, em qualquer tempo, é sempre zero}$$

Para obtermos a solução numérica, utilizamos inicialmente uma aproximação discreta para o Movimento Browniano, com  $\Delta t = 1$  ou 1 ano. Dessa forma, cada incremento discreto da variável lucro  $x$  é  $\Delta h = b \sqrt{\Delta t} = 0,20$ .



As probabilidades  $p$  e  $q$  são as mesmas já definidas anteriormente no capítulo 3 e são dadas pela fórmula:

$$p = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{a}{b} \sqrt{\Delta t} \right] \quad q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{a}{b} \sqrt{\Delta t} \right] \quad \text{Equação 10, Cap 3}$$

No caso, temos:

$$p = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{-0,1}{0,2} \sqrt{1} \right] = 0,25 \quad q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{-0,1}{0,2} \sqrt{1} \right] = 0,75$$

Note que, coerente com as premissas do problema, a probabilidade do lucro cair ( $q$ ) é bem maior do que a probabilidade dele subir ( $p$ ).

Representação do Random Walk, assumindo que o valor inicial de  $\pi(x,0) = 0$ , e  $N = 10$ :

	<b>t = 0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
10											<b>2,00</b>
9										<b>1,80</b>	
8									1,60		<b>1,60</b>
7								1,40		<b>1,40</b>	
6							1,20		1,20		<b>1,20</b>
5						1,00		1,00		1,00	
4					0,80		0,80		0,80		0,80
3				0,60		0,60		0,60		0,60	
2			0,40		0,40		0,40		0,40		0,40
1		0,20		0,20		0,20		0,20		0,20	
0	<b>0</b>		<b>0</b>		<b>0</b>		<b>0</b>		<b>0</b>		<b>0</b>
-1		(0,20)		(0,20)		(0,20)		(0,20)		(0,20)	
-2			(0,40)		(0,40)		(0,40)		(0,40)		(0,40)
-3				(0,60)		(0,60)		(0,60)		(0,60)	
-4					(0,80)		(0,80)		(0,80)		(0,80)
-5						(1,00)		(1,00)		(1,00)	
-6							(1,20)		(1,20)		(1,20)
-7								(1,40)		(1,40)	
-8									(1,60)		<b>(1,60)</b>
-9										<b>(1,80)</b>	
-10											<b>(2,00)</b>

Após montarmos a árvore dos valores possíveis de  $\pi(x, t)$ , ou simplesmente,  $x$ , para a solução, utilizamos a equação de Bellman e resolvemos por programação dinâmica.

$$F(x, t) = \max \left\{ \Omega(x, t), \pi(x, t) dt + \frac{1}{1 + \rho dt} E[F(x + dx, t + dt) | x] \right\}$$

O fluxo de lucro  $\pi(x, t)$  é a  $x$ , e  $\Omega(x, t) = 0$ . Discretizando, ficamos então com:

$$F(x, t) = \max \left\{ 0, x\Delta t + \frac{1}{1 + \rho\Delta t} E[F(x + \Delta x, t + \Delta t) | x, t] \right\}$$

$$F(x, t) = \max \left\{ 0, x\Delta t + \frac{1}{1 + \rho\Delta t} [pF(x + \Delta x, t + \Delta t) + qF(x - \Delta x, t + \Delta t)] \right\}$$

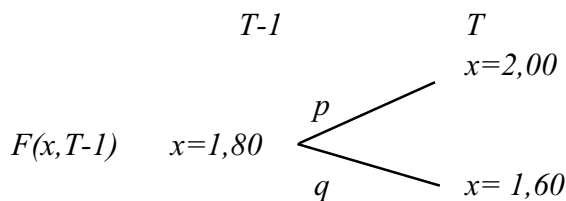
A partir desta equação, começamos a resolver o problema a partir do último período. onde sabemos que o valor  $F(x, T)$  do projeto será simplesmente  $\pi(x, T)$ , pois a vida útil da máquina terminará no instante seguinte, e portanto, não há nenhum Valor Futuro adicional dado que ( $E[F(x + \Delta x, t + \Delta t)] = 0$ ). Assumindo que  $\Delta t = 1$  ano, em  $t = T$  teremos:

$$F(x, t) = \max \left\{ 0, x + \frac{1}{1 + \rho} [pF(x + \Delta x, t + 1) + qF(x - \Delta x, t + 1)] \right\}$$

$$F(x, T) = \max (0, x + 0)$$

$$F(x, T) = \max (0, x)$$

No instante anterior, em  $(T-1)$  teremos:



Onde 
$$F(x, t) = \max \left\{ 0, 1,80 + \frac{1}{1 + 0,10} [2,0p + 1,8q] \right\}$$

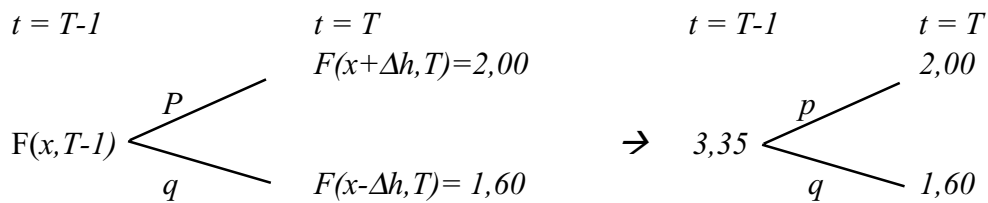
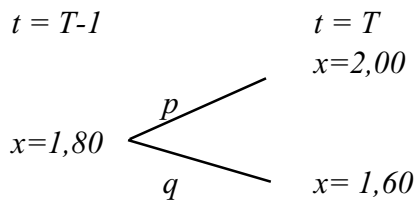
Sabendo então o valor de  $F(x, T)$ , então, no instante imediatamente anterior, podemos calcular  $F(x, t)$  em função do fluxo de lucro  $\pi(x, t)$  naquele instante, somado ao Valor Esperado do projeto  $F(x, T)$  no instante final. Resolvendo de traz para frente, chegamos ao instante inicial zero. Lembramos que a programação dinâmica considera que são sempre tomadas decisões ótimas a cada intervalo de tempo  $\Delta t$ . Assim, se em qualquer momento o valor de  $F(x, t)$  for negativo, a máquina será abandonada pelo seu valor residual, que é zero.

Exemplo:  $N = 10$

$$\begin{aligned} \Delta t &= T/N = 1 \text{ ano} & p &= 1/2 [1 + a/b \cdot \sqrt{\Delta t}] = 0,2500 \\ r \Delta t &= 10,0\% & q &= 1/2 [1 - a/b \cdot \sqrt{\Delta t}] = 0,7500 \\ \Delta h &= b \sqrt{\Delta t} = 0,20 \end{aligned}$$

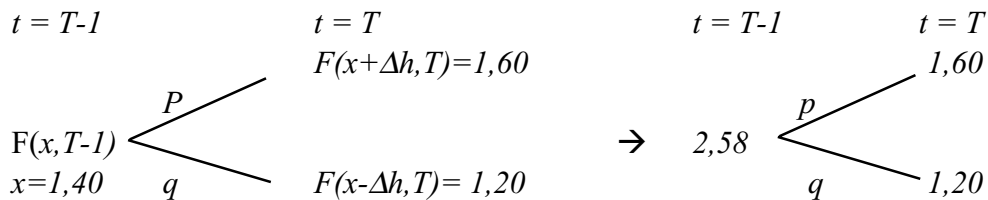


Começamos considerando que  $x_0 = 0$ . Nosso objetivo é determinar qual o valor crítico  $x^*$  no tempo  $t = 0$ .



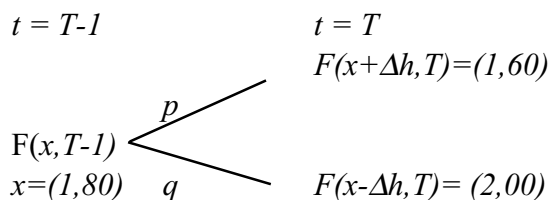
$$F(x, T-1) = \max \left\{ 0, 1,80 + \frac{1}{1+0,10} [2,00p + 1,60q] \right\} = 3,35$$

Repetindo o mesmo cálculo para o par de valores terminais imediatamente abaixo, temos:



$$F(x, T-1) = \max \left\{ 0, 1,40 + \frac{1}{1+0,10} [1,60p + 1,20q] \right\} = 2,58$$

Repetindo o mesmo cálculo até o par de pontos da árvore com o menor valor de  $x$ :



$$F(x, T-1) = \max \left\{ 0, -1,80 + \frac{1}{1+0,10} [-1,60p - 2,00q] \right\} = \max \{ 0, -3,53 \} = 0$$

Agora temos uma coluna completa com todos os valores possíveis de  $F(x, t)$  no ano 9. Partindo desses valores, podemos agora calcular todos os valores possíveis de  $F(x, t)$  no ano 8 usando a mesma equação de Bellman. Feito isso, passamos para o ano 7, 6, ... até chegarmos ao instante inicial zero, que nos dará o valor  $F(x_0, 0)$  da máquina hoje, considerando  $x_0 = 0$  e  $N = 10$ , conforme tabela a seguir:

	$t = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10											2,00
9										3,35	
8									4,12		1,60
7								4,40		2,58	
6							4,25		3,03		1,20
5						3,73		3,01		1,82	
4					2,95		2,58		1,93		0,80
3				2,08		1,91		1,61		1,05	
2			1,25		1,18		1,06		0,84		0,40
1		0,57		0,55		0,51		0,44		0,29	
0	0,129		0,12		0,12		0,10		0,07		0,00
-1		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
-2			0,00		0,00		0,00		0,00		0,00
-3				0,00		0,00		0,00		0,00	
-4					0,00		0,00		0,00		0,00
-5						0,00		0,00		0,00	
-6							0,00		0,00		0,00
-7								0,00		0,00	
-8									0,00		0,00
-9										0,00	
-10											0,00

Note que mesmo se o lucro corrente da máquina for zero, mesmo assim a máquina terá valor (0,129 no caso), pois pode ocorrer dos lucros subirem no futuro. E se caírem, sempre existe a opção de abandonar a máquina a custo zero. Fica claro então que o valor crítico  $x^*$  no instante zero será negativo.

Passamos a seguir para um valor  $x_0 = -0,20$ , e repetimos os cálculos acima. Para esse valor inicial de  $x_0$ , verificamos que o valor da máquina será 0, conforme podemos observar na árvore a seguir. Podemos dizer então que o valor crítico  $x^*$  no instante zero, que faz o investidor ser indiferente entre continuar operando a máquina ou parar, está contido no intervalo  $(0, -0,20)$ .

A árvore dos valores possíveis de  $F(x, t)$ , considerando  $x_0 = -0,20$  e  $N = 10$ , é:

$t=0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10											1,80
9										2,96	
8									3,57		1,40
7								3,70		2,20	
6							3,42		2,48		1,00
5						2,81		2,31		1,44	
4					2,02		1,81		1,39		0,60
3				1,23		1,15		1,01		0,67	
2			0,56		0,54		0,49		0,43		0,20
1		0,13		0,12		0,11		0,10		0,11	
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00
-1		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
-2			0,00		0,00		0,00		0,00		0,00
-3				0,00		0,00		0,00		0,00	
-4					0,00		0,00		0,00		0,00
-5						0,00		0,00		0,00	
-6							0,00		0,00		0,00
-7								0,00		0,00	
-8									0,00		0,00
-9										0,00	
-10											0,00

Para podermos ter mais precisão nos nossos resultados, precisamos reduzir o intervalo de tempo  $\Delta t$ , que até agora consideramos como sendo de 1 ano. ( $N=10$ ). Por exemplo, com  $N=100$ , temos  $\Delta t = 10/100 = 0,1$  ano. Assim, para o caso de  $x_0 = 0,0$ , temos:

$$\begin{aligned} \Delta t &= T/N = 0,1 \text{ ano} & p &= 1/2 [1 + a/b \cdot \sqrt{\Delta t}] = 0,4209 \\ (1+rf)^{\Delta t} - 1 &= 1,10^{0,1} - 1 = 0,0096 & q &= 1/2 [1 - a/b \cdot \sqrt{\Delta t}] = 0,5791 \\ \Delta h &= b \sqrt{\Delta t} = 0,20 \sqrt{0,1} = 0,0632 \end{aligned}$$

Recalculando agora com  $N=100$ , encontramos os seguintes valores para  $F(x, t)$ , considerando  $x_0 = 0$ :

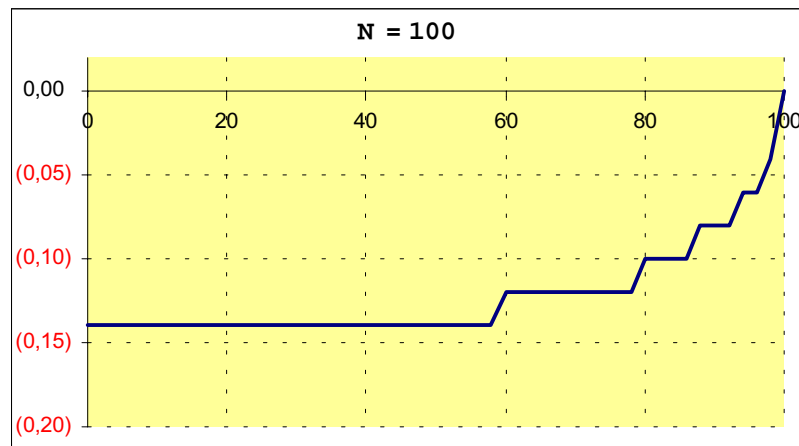
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10											20,95
9										18,17	
8									15,53		15,46
7								13,03		12,98	
6							10,69		10,65		10,61
5						8,54		8,51		8,48	
4					6,59		6,57		6,54		6,52
3				4,85		4,84		4,82		4,80	
2			3,35		3,34		3,33		3,32		3,30
1		2,11		2,10		2,09		2,08		2,07	
0	<b>1,128</b>		<b>1,123</b>		<b>1,118</b>		<b>1,113</b>		<b>1,107</b>		<b>1,101</b>
-1		0,44		0,43		0,43		0,43		0,42	
-2			0,05		0,05		0,05		0,05		0,05
-3				0,00		0,00		0,00		0,00	
-4					0,00		0,00		0,00		0,00
-5						0,00		0,00		0,00	
-6							0,00		0,00		0,00
-7								0,00		0,00	
-8									0,00		0,00
-9										0,00	
-10											0,00

Obviamente,  $x_0 = 0$  não é o valor crítico  $x^*$  no instante zero, pois vimos que mesmo com lucro zero em  $t = 0$ , ainda é ótimo continuar operando a máquina, já que o valor desta operação é positivo (0,129).

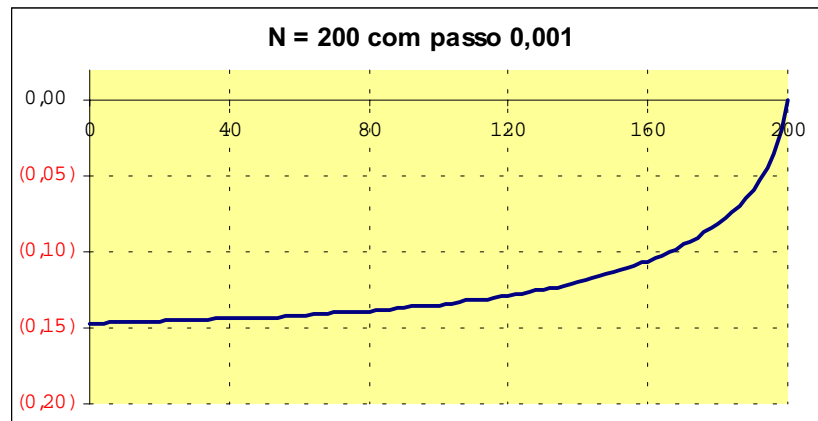
No próximo passo, reduzimos o valor de  $x_0$  em  $t = 0$  de um valor  $\Delta x$  qualquer, que irá depender da precisão desejada. Para o gráfico a seguir, utilizamos  $N=100$  e  $\Delta x = 0,02$  e recalculamos toda a sua evolução Random Walk futura. Partindo dos valores terminais de  $x$  no instante  $T$ , retrocedemos computando o valor da equação de Bellman em cada um dos nós da árvore até chegarmos ao instante zero. Chegamos então ao valor da máquina em  $t = 0$ . Verificamos que ainda assim, o valor de  $F(x,0) > 0$ , o que significa que  $x_0 = -0,02$  não é o valor crítico  $x^*$ . Mesmo operando com prejuízo em  $t = 0$ , ainda é ótimo continuar operando a máquina pois existe a possibilidade do lucro se tornar positivo no futuro.

Continuamos reduzindo o valor inicial de mais um  $\Delta x$ , e recalculando o  $F(x,0)$ , repetindo o processo até encontrarmos um  $F(x,0) = 0$ . O valor de  $x_0$  que originou este  $F(x,0) = 0$  é o valor crítico  $x^*$  no instante zero.

Passamos a seguir para o instante de tempo seguinte  $t = 1$ , e variamos  $x$  até acharmos o valor crítico  $x^*$  para  $t = 1$ . Isso é repetido para todos os 100 instantes de tempo  $t$ , obtendo um vetor  $x^*$  de todos os valores críticos em função do tempo  $t$ , conforme gráfico a seguir:



Fazendo com  $N=200$  e reduzindo o  $\Delta x$  para 0,001, melhoramos a precisão do gráfico, embora a custo de um maior tempo de computação.



O gráfico mostra a curva de limite ótima - fronteira livre -  $x^*(t)$  no espaço  $(x, t)$ . Para cada  $t$ , se o valor atual de  $x$  está acima da curva a máquina é mantida em operação, com  $F(x, t)$  que satisfaz a equação diferencial abaixo:

$$\frac{1}{2}b^2(x,t)F_{xx}(x,t) + a(x,t)F_x(x,t) + F_t(x,t) - \rho F(x,t) + \pi(x,t) = 0 \quad \text{equação 13}$$

onde  $\pi(x, t)$  é simplesmente o lucro  $x$ . Substituindo, a equação fica:

$$\frac{1}{2}b^2(x,t)F_{xx}(x,t) + a(x,t)F_x(x,t) + F_t(x,t) - \rho F(x,t) + x = 0$$

Dedução da equação 13:

Partindo da equação de Bellman

$$F(x,t) = \max \left\{ \underbrace{\Omega(x,t)}_{\text{stop}}, \underbrace{\pi(x,t)dt + \frac{1}{1+\rho dt} E[F(x+dx, t+dt) | x]}_{\text{run}} \right\}$$

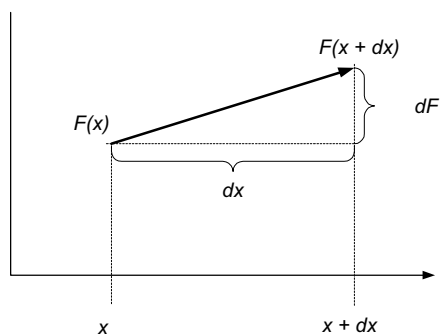
parar

continuar

Na região de continuação, temos:

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} E[F(x + dx, t + dt) | x]$$

Lembrando que:



1 Dim:  $dF = F(x + dx) - F(x)$

2 Dim:  $dF = F(x + dx, t + dt) - F(x, t)$

2 Dim Estocástico:  $E[dF] = E[F(x + dx, t + dt)] - F(x, t)$

$$E[F(x + dx, t + dt)] = E[dF] + F(x, t)$$

Então:

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} [F(x, t) + E[dF(x, t)]]$$

$$(1 + \rho dt)F(x, t) = (1 + \rho dt)\pi(x, t)dt + F(x, t) + E[dF(x, t)]$$

$$\rho dt F(x, t) = \pi(x, t)dt + E[dF(x, t)]$$

$$\boxed{\rho F(x, t) = \pi(x, t) + E\left[\frac{dF(x, t)}{dt}\right]}$$

Por Ito temos:

$$(1 + \rho dt)\pi(x, t)dt$$

$$dx = a dt + b dz$$

$$\text{onde } dz = \epsilon \sqrt{dt}$$

Expandindo  $dF(x, t)$  por Taylor, desprezando os termos com expoente maior que 2:

$$dF(x, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dt^2 + \dots$$

Mas:

$$\begin{aligned} dx^2 &= (a dt + b dz)^2 = a^2 dt^2 + 2 ab dt dz + b^2 dz^2 \\ dx^2 &= 0 + 2 ab dt \epsilon \sqrt{dt} + b^2 \epsilon^2 dt \\ dx^2 &= 0 + 0 + b^2 dt \end{aligned}$$

$$dx dt = (a dt + b dz) dt = a dt^2 + b dz dt = 0 + 0$$

Ficamos então com:

$$dF(x, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 dt$$

Substituindo  $dx$ :

$$\begin{aligned} dF(x, t) &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} (adt + b dz) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 dt \\ dF(x, t) &= \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + a \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b \frac{\partial F}{\partial x} dz \end{aligned}$$

ou

$$dF = \left[ F_t + a F_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx} \right] dt + b F_x dz$$

Tomando Valor Esperado:

$$E[dF] = \left[ F_t + a F_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx} \right] dt \quad \text{pois } E[dz] = E[\epsilon \sqrt{dt}] = \sqrt{dt} E[\epsilon] = 0$$

Substituindo o valor de  $E[dF]$  na expressão:

$$\rho F(x, t) = \pi(x, t) + F_t(x, t) + a F_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx}$$

Rearranjando na forma do livro:

$$\frac{1}{2} b^2 F_{xx} + a F_x + F_t - \rho F(x, t) + \pi(x, t) = 0 \quad \text{equação 13}$$

Em tempo infinito, simplifica para:

$$\frac{1}{2} b^2 F_{xx} + a F_x - \rho F(x) + \pi(x) = 0 \quad \text{cqd}$$

Abaixo da curva a máquina é abandonada por um valor terminal arbitrado como zero. Observe que a curva vai a zero à medida que a idade da máquina aproxima-se de sua vida útil de 10

anos - não faz sentido manter vivo um projeto sem expectativas de lucro na esperança de uma possível mudança futura se a máquina está próxima de ser tirada de uso.

Como esperado, quanto maior  $x$ , maior o valor da máquina. A máquina ainda tem valor mesmo se o fluxo de lucros  $x$  naquele instante for igual a zero, pois, dado o MAB que assumimos para  $x$ , existe a possibilidade de  $x$  aumentar no futuro.

O gráfico seguinte mostra a função  $F(x, t)$  como uma função de  $x$  para alguns valores de  $t$ . Neste caso, cada  $t$  representa um ano de vida da máquina. Assim, variamos o valor do  $x$  inicial  $x_0$  entre  $-0,20$  e  $1,00$ , e calculamos o valor  $F(x, t)$  da máquina em  $t = 1$  ano. Depois, repetimos o processo para  $t = 5$  e  $9$  anos, obtendo o gráfico a seguir:

gráfico 4.1b pg 111

O que acontecerá no caso da máquina tiver uma vida útil infinita? Para o caso de um numero infinito de períodos, podemos desprezar a variável tempo, e a equação diferencial parcial (EDP) de  $F(x, t)$  se simplifica para uma equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}b^2 F_{xx}(x, t) + aF_x(x, t) + F_t(x, t) - \rho F(x, t) + x = 0$$

$$\frac{1}{2}b^2 F_{xx}(x) + aF_x(x) - \rho F(x) + x = 0$$

Se trata de uma EDO com MAB ( $dx = \alpha dt + \sigma dz$ )

Forma geral:  $aF_{xx} + bF_x + cF = xd + e$  onde  $f: F(x)$

A solução geral é: 
$$f(x) = A_1 e^{K_1 x} + A_2 e^{K_2 x} + \frac{xd}{c} + \frac{ec - bd}{c^2}$$

onde 
$$K_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad K_1 > K_2$$

No caso:  $a = \frac{1}{2} b^2(x, t) \quad b = a(x, t) \quad c = -\rho \quad d = -1 \quad e = 0$

$$F = A_1 e^{K_1 x} + A_2 e^{K_2 x} + \frac{-x}{-\rho} + \frac{0(-\rho) - a(-1)}{\rho^2}$$

$$\boxed{F = A_1 e^{K_1 x} + A_2 e^{K_2 x} + \frac{x}{\rho} + \frac{a}{\rho^2}}$$



$$K_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \times \frac{1}{2} b^2 (-\rho)}}{b^2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2 \rho}}{b^2}$$

Como  $a < 0$ , então  $-a > 0 \rightarrow K_1 > 0$

Como  $\sqrt{a^2 + 2b^2 \rho} > a \rightarrow K_2 < 0$

Condição de contorno 1 (VMC):  $F(x^*) = \Omega(x^*) = 0$

$$F(x^*) = A_1 e^{K_1 x^*} + A_2 e^{K_2 x^*} + \frac{x^*}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} = 0$$

Condição de contorno 2 (SPC):  $F_x(x^*) = \Omega_x(x^*) = 0$

$$F_x(x^*) = K_1 A_1 e^{K_1 x^*} + K_2 A_2 e^{K_2 x^*} + \frac{1}{\rho} = 0$$

Temos duas equações, mas três incógnitas ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $x^*$ ). Precisamos de mais uma condição de contorno. Vamos examinar o que acontece quando  $x^* \rightarrow \infty$ . Vamos mostrar que

$$\lim_{x^* \rightarrow \infty} F_x(x^*) < \infty.$$

Observe que um aumento em  $x^*$  significa um aumento no fluxo de lucros da empresa, o que acarreta um aumento no valor do projeto  $F(x^*)$ . Mas por mais que se aumente a previsão do lucro, a taxa de aumento do valor do projeto nunca será infinito, portanto  $F'(x^*)$  não pode ser infinito.

Dessa forma, como sabemos que  $K_1$  é positivo e que  $K_2$  é negativo, segue que  $A_1$  necessariamente é zero, pois do contrário,  $F_x(x^*) \rightarrow \infty$  quando  $x^* \rightarrow \infty$ . Assim, temos:

$$F(x^*) = A_2 e^{K_2 x^*} + \frac{x^*}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} = 0$$

$$F_x(x^*) = K_2 A_2 e^{K_2 x^*} + \frac{1}{\rho} = 0$$

$$-K_2 A_2 e^{K_2 x^*} = \frac{1}{\rho} \quad A_2 = -\frac{1}{\rho K_2 e^{K_2 x^*}}$$

$$K_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2b^2 \rho}}{b^2} = \frac{-(-0,1) - \sqrt{0,01 + 2 \cdot 0,04 \cdot 0,1}}{0,04} = -0,8541$$

$$F(x^*) = -\frac{1}{\cancel{\rho K_2} e^{\cancel{K_2} x^*}} + \frac{x^*}{\cancel{\rho}} + \frac{a}{\cancel{\rho}} = 0$$

$$F(x^*) = -\frac{1}{K_2} + x^* + \frac{a}{\rho} = 0$$

$$x^* = \frac{1}{K_2} - \frac{a}{\rho} = \frac{1}{-0,8541} - \frac{-0,10}{0,10} = -0,1708$$

Esse valor encontrado para  $x^*$  significa que se estendermos o tempo de vida útil da máquina de 10 anos para infinito, o  $x^*$  muda de -0,15 para -0,17. Isso mostra que 10 anos já é quase infinito para o nosso exemplo.

Usando a solução geral obtida para a EDO, podemos calcular também o valor da máquina em  $t = 0$  quando  $x_0 = 0$  e tempo infinito. Nesse caso,  $x_0 = x$

$$F = A_1 e^{K_1 x} + A_2 e^{K_2 x} + \frac{x}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} \quad K_1 = 5,8541 \quad \text{e} \quad K_2 = -0,8541$$

Condição de Contorno 1:  $F_x(x) = K_1 A_1 e^{K_1 x} + K_2 A_2 e^{K_2 x} + \frac{1}{\rho} < \infty$

Então, necessariamente  $A_1 = 0$  pois do contrário, quando  $x \rightarrow \infty$  teríamos  $F_x \rightarrow \infty$ .

$$F(x) = A_2 e^{K_2 x} + \frac{x}{\rho} + \frac{a}{\rho^2}$$

Condição de Contorno 2: SPC é válida: (mas VMC não)  $F_x(x) = \Omega_x(x) = 0$

$$F_x(x) = K_2 A_2 e^{K_2 x^*} + \frac{1}{\rho} = 0$$

$$A_2 = -\frac{1}{\rho K_2 e^{K_2 x^*}}$$

Condição de Contorno 3:  $x = 0$

$$A_2 = -\frac{1}{\rho K_2 e^{K_2 x^*}} = -\frac{1}{0,10 \cdot (-0,8541) \cdot 1} = 11,7082$$

Então:

$$F(0) = A_2 e^0 + \frac{0}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} = 11,7082 - \frac{0,10}{0,10^2} = 1,7082$$

No caso de períodos finitos, temos que achar uma solução analítica para a equação 13

$$\frac{1}{2} b^2(x, t) F_{xx}(x, t) + a(x, t) F_x(x, t) + F_t(x, t) - \rho F(x, t) + \pi(x, t) = 0$$

com as condições de contorno de VMC e SPC. Esta é uma EDP de uma MAB. A solução é mais complexa porque agora temos duas variáveis,  $x$  e  $t$ . A solução é dada no livro do Shimko - “Finance in Continuous Time”, pag 39, usando transformada de Laplace.

## 11 Processo de Poisson

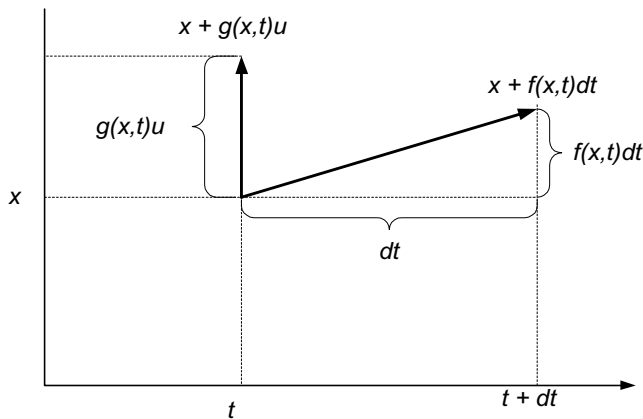
Num processo de Poisson, num intervalo de tempo  $dt$ , a probabilidade de um salto na variável aleatória  $x$  é de  $\lambda dt$ . Se um salto ocorre, ele é de tamanho  $g(x, t)u$ , onde  $g(x, t)$  é uma função conhecida e  $u$  é uma variável aleatória. Então, o valor de  $x$  tem uma probabilidade  $\lambda dt$  de variar de valor aleatório  $g(x, t)u$ . A probabilidade do salto não ocorrer é  $(1-\lambda dt)$ , e neste caso, a variável  $x$  se altera um valor determinístico  $f(x, t) dt$ . Assim temos:

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dq \quad \text{equação 16}$$

Onde  $dq$  é uma variável aleatória:

$$dq = \begin{cases} u & \text{com probabilidade } \lambda dt \\ 0 & \text{com probabilidade } 1-\lambda dt \end{cases}$$

O salto ocorre num tempo considerado instantâneo. Graficamente temos:



No instante  $t$ , pode ocorrer um salto de tamanho  $g(x, t)u$  ou não. Se ocorrer, a variável de estado  $x$  vai para  $x + gu$  instantaneamente. Se não ocorrer, no instante  $dt$  seguinte ela vai para  $x + fdt$ . Embora esses movimentos ocorram em tempos diferentes, eles estão separados no tempo apenas por um  $dt$ , e assim essa diferença pode ser ignorada. Podemos provar isso mostrando que o valor esperado do salto  $\lambda dt (x + gu)$  levado um período à frente, de  $t$  para  $t + dt$ , não se altera.

$$\begin{aligned} (1 + \rho dt) \lambda dt (x+gu) &= \lambda dt (x+gu) + \rho \lambda (x+gu) dt^2 \\ &= \lambda dt (x+gu) + 0 \end{aligned}$$

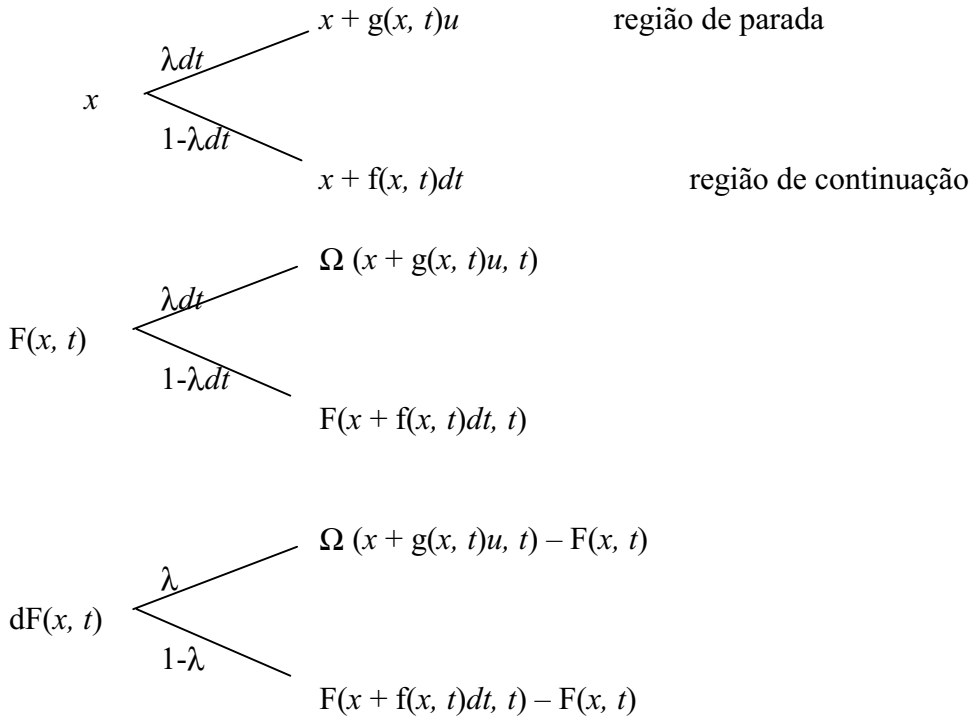
No problema de parada ótima (decisão de parar ou continuar), temos um valor crítico  $x^*$  abaixo do qual é melhor parar e receber um valor  $\Omega(x, t)$  como valor terminal. Acima deste valor, é melhor continuar por pelo menos mais um período recebendo um fluxo  $\pi(x, t)dt$ .

Como fica a equação 8 neste caso?

$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\} \quad \text{Equação 8}$$

Primeiro, suponhamos que  $u$  é um número conhecido, não aleatório. Então existem duas possibilidades para mudanças no valor de  $dF$ , dependendo se um salto de  $x$  para  $x + g(x, t)u$  nos leva a uma região de parada ou não.

1ª Hipótese: Salto leva  $x$  para a região de parada



Então

$$E[dF] = \lambda dt [\Omega(x + g(x, t)) - F(x, t)] + (1 - \lambda dt) [F(x + f(x, t)dt) - F(x, t)]$$

Desenvolvendo por Taylor temos:

$$F(x + dx) = F(x + f(x, t)dt)$$

$$F(x + f(x, t)dt) = F(x, t) + F_x(x, t)f(x, t)dt + \frac{1}{2} F_{xx}(x, t)[f(x, t)dt]^2$$

Desconsiderando os termos de ordem maior:

$$F(x + f(x, t)dt) = F(x) + F_x(x, t)f(x, t)dt$$

$$F(x + f(x, t)dt) - F(x) = F_x(x, t)f(x, t)dt$$

Substituindo na equação do Valor Esperado

$$E[dF] = \lambda dt [\Omega(x + g(x, t)) - F(x, t)] + (1 - \lambda dt) F_x(x, t)f(x, t)dt$$

Substituímos agora essa expressão na equação 8. Note que já maximizamos a função de valor, ao decidir pela parada.

$$\rho F(x, t) = \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF]$$

$$\rho F(x, t) = \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} [\lambda dt [\Omega(x + g(x, t)) - F(x, t)] + (1 - \lambda dt) F_x(x, t) f(x, t) dt]$$

$$\rho F(x, t) = \pi(x, u, t) + \lambda [\Omega(x + g(x, t)) - F(x, t)] + F_x(x, t) f(x, t) - \lambda F_x(x, t) f(x, t) dt$$

No limite quando  $dt \rightarrow 0$

$$\rho F(x, t) = \pi(x, u, t) + \lambda [\Omega(x + g(x, t)) - F(x, t)] + F_x(x, t) f(x, t) \quad \text{Equação 17}$$

2ª Hipótese: Salto não leva  $x$  para a região de parada

Se  $x + g(t, x)$   $u$  permanece na região de continuação, teremos uma equação similar, com  $\Omega(x + g(t, x) u)$  substituído por  $F(x + g(t, x) u)$ .

$$\rho F(x, t) = \pi(x, u, t) + \lambda [F(x + g(x, t)) - F(x, t)] + F_x(x, t) f(x, t)$$

No caso mais geral, quando  $u$  é aleatório, devemos permitir os dois casos acima, obtendo uma equação combinada que considera o valor esperado da distribuição de  $u$ .

O processo de Poisson é mais difícil, uma vez que existe descontinuidade, ao contrário do que ocorre no caso do processo de Ito. Existem, no entanto, alguns casos simples. Suponha que, se ocorrer um salto, este será sempre para um mesmo ponto conhecido, digamos,  $x_0$ . Se  $x_0$  estiver na região de continuação, teremos:

$$\rho F(x, t) = \pi(x, t) + \lambda [F(x_0, t) - F(x, t)] + F_x(x, t) f(x, t)$$

lembrando que  $f(x, t)$  é o valor determinístico pelo qual  $x$  aumenta quando não há salto, e como estamos considerando apenas a hipótese de um salto, temos que  $f(x, t) = 0$ . Então,

$$\rho F(x, t) = \pi(x, t) + \lambda [F(x_0, t) - F(x, t)]$$

$$(\rho + \lambda) F(x, t) = \pi(x, t) + \lambda F(x_0, t)$$

Se  $x_0$  estiver na região de parada, teremos:

$$(\rho + \lambda) F(x, t) = \pi(x, t) + \lambda \Omega(x_0)$$

Por exemplo, se  $x$  corresponde a uma parada repentina do fluxo de pagamentos, então  $\Omega(x_0, t) = 0$  e  $F(x, t) = \pi(x, t) / (\lambda + \rho)$ . Aqui, a probabilidade Poisson,  $\lambda$ , age simplesmente como uma taxa adicional a  $\rho$ .

## ***Comparação entre a Programação Dinâmica e Contingent Claims***

A função de valoração da programação dinâmica e o valor do ativo na análise de contingent claims satisfazem equações diferenciais parciais similares. A equação de Bellman da programação dinâmica tem uma interpretação em termos do valor do ativo e da disposição dos investidores em manter esse ativo. As condições de contorno na abordagem de contingent claims são baseadas na idéia de que investidores querem escolher a data de exercício ótima da opção, maximizando o valor de seus ativos.

Entretanto, também há diferenças. A abordagem da programação dinâmica começa pela especificação da taxa de desconto  $\rho$ . Na abordagem de contingent claims, a taxa de retorno requerida do ativo foi obtida da implicação do equilíbrio geral do mercado de capitais. Somente a taxa de retorno livre de risco,  $r$ , é exógena. Então, contingent claims dá um melhor tratamento à taxa de desconto.

Avaliando essa consideração, o contingent claims requer a existência de um conjunto de mercados suficientemente rico em ativos de risco. O requisito crucial é que o componente estocástico  $dz$  do retorno do ativo que estamos tentando valorar seja exatamente replicado pelo componente estocástico do retorno de algum ativo negociável. Isso pode ser exigir demais, pois requer não somente que os componentes estocásticos obedeçam a mesma lei de probabilidade, mas também que eles sejam perfeitamente correlacionados. A programação dinâmica não faz tal exigência. Se o risco não pode ser negociado em mercados, a função objetiva pode simplesmente refletir a avaliação subjetiva de risco do tomador de decisões.

Conforme exposto acima, os dois métodos têm vantagens e desvantagens, e juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações. Em aplicações específicas, uma abordagem pode ser mais conveniente na prática que a outra.