

2 Contingent Claims

No problema da parada ótima em programação dinâmica interpretamos $F(x,t)$ como o valor de mercado do ativo que dá ao investidor o direito a um fluxo futuro de lucros $\pi(x,t)$. A equação 8,

$$\rho F(x,t) = \max_u \left\{ \pi(x,t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\}$$

expressa a condição de um investidor que possui o ativo por um curto intervalo de tempo; o lucro imediato e o esperado ganho de capital que juntos, dão uma taxa de retorno ρ .

Isso fica mais claro se dividirmos por $F(x,t)$, obtendo a fórmula de Gordon:

$$\rho = \frac{\pi(x,t)}{F} + \frac{E[dF]/dt}{F} \quad \Rightarrow \quad K_s = \frac{D_1}{P_0} + g$$

Essa taxa de retorno, na prática, é o custo de oportunidade de capital, ou seja, deve ser igual ao retorno que o investidor poderia ganhar em outra oportunidade de investimento com características de risco semelhantes.

Neste capítulo vamos utilizar uma outra maneira de avaliar um ativo, replicando as suas características de risco e retorno num portfólio de ativos já existentes no mercado. O preço deste ativo deve ser igual ao valor de mercado deste portfólio, que chamaremos de portfólio replicante, pois qualquer discrepância seria explorada através de arbitragem. Assim, no equilíbrio, ativos e portfólios equivalentes tem que comandar o mesmo preço.

$F(x,t)$ = valor de mercado de uma empresa que terá um fluxo de lucro futuro de $\pi(x,t)$.

x = variável de estado (aleatória). Ex: preço

μ = retorno do ativo = $\alpha + \delta$ = ganho de capital + dividendos

Para achar $F(x,t)$ de um ativo, vamos construir um portfólio composto de ativos conhecidos no mercado que replique as suas características de retorno e risco. O valor deste portfólio tem que ser o mesmo valor de $F(x,t)$.

2A Portfolio replicante

Suponha que o fluxo de lucros dependa da variável de estado x (o preço de um produto por exemplo). Consideremos que x seja uma variável aleatória que segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), uma vez que estamos usando taxas de retorno proporcionais:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad \text{equação 18}$$

Onde α é o parâmetro de taxa de crescimento (*drift*), σ é o parâmetro de variância proporcional, e $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ o incremento de processo de Wiener.

Assumiremos que a produção da firma pode ser negociada no mercado financeiro. Este é o caso de uma firma que produz petróleo, estanho ou cobre. Então, o risco de x pode ser observado diretamente no mercado através de séries históricas. Como qualquer ativo, o produto será mantido por investidores apenas se ele oferecer um retorno suficientemente atraente. Parte do retorno será dada pela taxa de apreciação do ativo (α), ou ganho de capital, outra parte será na forma de taxa dividendos. Estes dividendos podem ser auferidos de forma direta, como no caso do crescimento do volume de madeira devido ao crescimento das árvores, ou nascimento de mais cabeças de gado, ou indiretamente, pela vantagem de se manter estoques estratégicos de algum insumo (*convenience yield*).

$$\text{Retorno total esperado } (\mu) = \text{dividendo } (\delta) + \text{ganho de capital } (\alpha)$$

Esse retorno esperado deve ser suficiente para compensar os riscos não diversificáveis do ativo.

Pelo CAPM temos:

$$E[R_i] = R_f + \beta[E[R_m] - R_f]$$

$$\begin{aligned} \text{Mas: } E[R_i] &= \mu \\ R_f &= r \end{aligned}$$

$$\text{Então } \mu = r + \beta[E[R_m] - r]$$

$$\text{Mas } \beta = \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_m^2}, \quad \text{onde } \sigma_{xm} = \text{Cov}(R_x, R_m) \text{ e } \sigma_m^2 = \text{Var}(R_m) \text{ e}$$

$$\rho_{xm} = \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_x \sigma_m} \text{ é o coeficiente de correlação entre os retornos do ativo } x \text{ e da carteira de}$$

mercado m . Multiplicando em cima e embaixo por σ_x e rearranjando:

$$\mu = r + \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_m^2} [E[R_m] - r]$$

$$\mu = r + \left[\frac{E[R_m] - r}{\sigma_m} \right] \sigma_x \left[\frac{\sigma_{xm}}{\sigma_x \sigma_m} \right]$$

$$\text{Mas } \Phi = \frac{E[R_m] - r}{\sigma_m} = \text{preço de risco do mercado}$$

Então:

$$\mu = r + \Phi \rho_{xm} \sigma_x \quad \text{equação 19}$$

Montagem do Portfolio

Para achar o valor de $F(x,t)$ para uma firma com fluxo de lucros $\pi(x,t)$, montamos um portfólio que replique o seu retorno e o seu risco. Este portfólio será o seguinte:

- ♦ Investe \$1 em ativo sem risco
- ♦ Compra n unidades do ativo produzido pela empresa ao preço $x \rightarrow (\$nx)$
- ♦ O custo deste portfólio é $\$(1 + nx)$.
- ♦ Mantém por um período dt .

Neste tempo, o retorno deste portfólio será:

- ♦ valor \$1 investido a taxa livre de risco r durante $dt \rightarrow r dt$
- ♦ valor $\$nx$ investido nos produtos durante dt renderá dividendos mais um ganho de capital:
 - Dividendos $\rightarrow nx \delta dt$
 - Ganho de capital $\rightarrow ndx$, onde $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$. Então, $ndx = n\alpha x dt + n\sigma x dz$ pois o preço x do ativo varia aleatoriamente de acordo com um MGB $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$

Assim o retorno total será o retorno do investimento em ativo sem risco mais o retorno sobre o investimento nos produtos da empresa:

$$\begin{aligned}\text{Retorno Total} &= r dt + nx \delta dt + ndx \\ &= r dt + nx \delta dt + n\alpha x dt + n\sigma x dz \\ &= (r + n(\alpha + \delta)x)dt + n\sigma x dz\end{aligned}$$

Dividindo pelo investimento inicial, temos a taxa de retorno do portfólio:

$$\text{Taxa de Retorno} = \underbrace{\frac{r + nx(\alpha + \delta)}{1 + nx} dt}_{\text{sem risco}} + \underbrace{\frac{\sigma nx}{1 + nx} dz}_{\text{estocástico}}$$

Vamos comparar isso a um investimento na empresa. Temos:

Custo do investimento: $\$F(x,t)$

Retorno do investimento:

Dividendo de um período dt : $\pi(x,t) dt$	sem risco (determinístico) pois x é conhecido no instante do investimento
Ganho de Capital: $dF(x,t)$	com risco (estocástico)

Pelo Lema de Ito, temos que, para uma MGB:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \alpha x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial x} \sigma x dz$$

O retorno total do investimento na firma por unidade investida é:

$$\text{Retorno} = \frac{\text{Dividendo} + \text{Ganho de Capital}}{F(x,t)}$$

$$\text{Retorno} = \frac{\pi(x,t)dt + dF(x,t)}{F(x,t)}$$

$$\text{Retorno} = \frac{\pi(x,t)dt + \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \alpha x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial x} \sigma x dz}{F(x,t)}$$

Separando a parcela sem risco da parcela com risco (estocástica) e mudando a notação:

$$\text{Retorno} = \underbrace{\frac{\pi(x,t) + F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2}{F(x,t)} dt}_{\text{sem risco}} + \underbrace{\frac{F_x \sigma x}{F(x,t)} dz}_{\text{com risco}}$$

Um portfólio replicante deve apresentar o mesmo risco e o mesmo retorno que o ativo que queremos valorar. Nesse caso, para que ambos investimentos tenham o mesmo risco, a parcela com risco tem que ser igual nos dois casos.

$$\frac{n\sigma x}{1+nx} dz = \frac{F_x \sigma x}{F(x,t)} dz$$

$$(A) \quad \boxed{\frac{nx}{1+nx} = \frac{F_x x}{F(x,t)}}$$

Da mesma forma, dois ativos que tem o mesmo risco devem comandar o mesmo retorno, e então podemos igualar as parcelas referentes ao retornos sem risco.

$$(B) \quad \boxed{\frac{r + nx(\alpha + \delta)}{1+nx} dt = \frac{\pi(x,t) + F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2}{F(x,t)} dt}$$

Mas:

$$\begin{aligned}\frac{r + nx(\alpha + \delta)}{1 + nx} &= \frac{r(1 + nx - nx) + nx(\alpha + \delta)}{1 + nx} = \frac{r(1 + nx) - rnx}{1 + nx} + \frac{nx(\alpha + \delta)}{1 + nx} \\ \frac{r(1 + nx)}{1 + nx} - \frac{rnx}{1 + nx} + \frac{nx(\alpha + \delta)}{1 + nx} &= r\left(1 - \frac{nx}{1 + nx}\right) + \frac{(\alpha + \delta)nx}{1 + nx}\end{aligned}$$

Substituindo a igualdade (A) na expressão acima, ficamos com:

$$r\left(1 - \frac{nx}{1 + nx}\right) + \frac{(\alpha + \delta)nx}{1 + nx} = r\left(1 - \frac{F_x x}{F(x, t)}\right) + (\alpha + \delta) \frac{F_x x}{F(x, t)}$$

Substituindo na igualdade (B) dos termos sem risco, temos:

$$\frac{r + nx(\alpha + \delta)}{1 + nx} = r\left(1 - \frac{F_x x}{F(x, t)}\right) + (\alpha + \delta) \frac{F_x x}{F(x, t)} = \frac{\pi(x, t) + F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2}{F(x, t)}$$

$$r\left(1 - \frac{F_x x}{F(x, t)}\right) + (\alpha + \delta) \frac{F_x x}{F(x, t)} = \frac{\pi(x, t) + F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2}{F(x, t)}$$

$$rF(x, t) - rF_x x + (\alpha + \delta)F_x x = \pi(x, t) + F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx} + (r - \delta)x F_x(x, t) + F_t(x, t) - rF(x, t) + \pi(x, t) = 0 \quad \text{Equação 20.}$$

$$\text{onde } dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$

Observe que esta equação é muito semelhante à equação 13, já vista anteriormente, que obtivemos por programação dinâmica.

$$\frac{1}{2} b^2(x, t) F_{xx}(x, t) + a(x, t) F_x(x, t) + F_t(x, t) - \rho F(x, t) + \pi(x, t) = 0 \quad \text{Equação 13}$$

$$\text{onde } dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz$$

A analogia será quase exata, se fizermos $a(x, t) = \alpha x$ e $b(x, t) = \sigma x$. A única diferença que permanece é que a taxa livre de risco r é utilizada no lugar da taxa de desconto ρ , e o coeficiente do termo F_x tem $(r - \delta)$ no lugar de α .

Se a firma tiver uma vida útil infinita, podemos desprezar a variável tempo, e a equação 20, que é uma equação diferencial parcial (EDP) de $F(x,t)$ se simplifica para uma equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx} + (r - \delta)x F_x - rF(x) + \pi(x) = 0$$

Se trata de uma EDO com MGB ($dx = \alpha x dt + \sigma x dz$). Teremos uma solução analítica apenas se o termo $\pi(x)$ for uma constante, ou no máximo uma função linear de x .

1º caso: $\pi(x)$ é constante e igual a π .

Forma geral: $ax^2 F_{xx} + bx F_x + cF = xd + e$ onde $f: F(x)$

A solução geral é: $f(x) = A_1 x^{\gamma_1} + A_2 x^{\gamma_2} + \frac{xd}{b+c} + \frac{e}{c}$

$$\text{onde } \gamma_{1,2} = \frac{a-b \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a} \quad \gamma_1 > \gamma_2$$

$$\text{No caso: } a = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad b = r - \delta \quad c = -r \quad d = 0 \quad e = -\pi$$

$$f(x) = A_1 x^{\gamma_1} + A_2 x^{\gamma_2} + \frac{\pi}{r}$$

$$\gamma_1 = \frac{a-b + \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha + \sqrt{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 4\frac{1}{2}\sigma^2 r}}{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2(\frac{\sigma^2}{4} + 2r - \alpha)}}{\sigma^2}$$

Analisando apenas o termo dentro da raiz:

$$\alpha^2 + \sigma^2(\frac{\sigma^2}{4} + 2r - \alpha) = \alpha^2 + \sigma^2(\frac{\sigma^2}{4} + (r - \alpha) + r) = \alpha^2 + \sigma^2(\frac{\sigma^2}{4} + \delta + r)$$

Note que este termo é sempre positivo, pois a variância, a taxa livre de risco e o dividendos são sempre positivos. Assim, o termo embaixo da raiz será sempre maior do que α^2 , e assim, podemos afirmar que γ_1 será sempre positivo.

$$\gamma_2 = \frac{a-b - \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2(\frac{1}{4} + \delta + r)}}{\sigma^2}$$

O que podemos dizer sobre o sinal de γ_2 ? Será negativo se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha &< \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2(\frac{1}{4} + \delta + r)} \\ \frac{1}{4}\sigma^4 - \alpha\sigma + \alpha^2 &< \alpha^2 + \sigma^2(\frac{1}{4} + 2r - \alpha) \\ \frac{1}{4}\sigma^4 &< \sigma^2(\frac{1}{4} + 2r) \\ \sigma^2 &< 1 + 8r \end{aligned}$$

o que é razoável de se supor

Condição de contorno 1 (VMC): $F(x^*) = \Omega(x^*)$

$$f(x^*) = A_1(x^*)^{\gamma_1} + A_2(x^*)^{\gamma_2} + \frac{\pi}{r} = \Omega(x^*)$$

Condição de contorno 2 (SPC): $F_x(x^*) = \Omega_x(x^*)$

$$f_x(x^*) = \gamma_1 A_1(x^*)^{\gamma_1-1} + \gamma_2 A_2(x^*)^{\gamma_2-1} = \Omega_x(x^*)$$

Temos duas equações, mas três incógnitas (γ_1 , γ_2 e x^*). Precisamos de mais uma condição de contorno. Vamos examinar o que acontece quando $x^* \rightarrow \infty$. Vamos mostrar que

$$\lim_{x^* \rightarrow \infty} F'(x^*) < \infty.$$

Observe que um aumento em x^* significa um aumento no fluxo de lucros da empresa, o que acarreta um aumento no valor do projeto $F(x^*)$. Mas por mais que se aumente a previsão do lucro, a taxa de aumento do valor do projeto nunca será infinito, portanto $F'(x^*)$ não pode ser infinito.

Dessa forma, como vimos que γ_1 é positivo e que γ_2 é negativo, segue que A_1 necessariamente é zero, pois do contrário, $F'(x^*) \rightarrow \infty$ quando $x^* \rightarrow \infty$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= A_2(x^*)^{\gamma_2} + \frac{\pi}{r} = \Omega(x^*) \\ f_x(x^*) &= \gamma_2 A_2(x^*)^{\gamma_2-1} = \Omega_x(x^*) \end{aligned}$$

onde $\Omega(x^*)$ e $\Omega_x(x^*)$ são funções com valores conhecidos.

2º caso: $\pi(x)$ é função linear de $x = \pi x$

Forma geral: $ax^2 F_{xx} + bx F_x + cF = xd + e$ onde $f: F(x)$

A solução geral é: $f(x) = A_1 x^{\gamma_1} + A_2 x^{\gamma_2} + \frac{xd}{b+c} + \frac{e}{c}$

$$\text{onde} \quad \gamma_{1,2} = \frac{a-b \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a} \quad \gamma_1 > \gamma_2$$

No caso: $a = \frac{1}{2} \sigma^2$ $b = r - \delta$ $c = -r$ $d = -\pi$ $e = 0$

$$f(x) = A_1 x^{\gamma_1} + A_2 x^{\gamma_2} - \frac{\pi x}{\delta}$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{2} \sigma^2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2 (\frac{\sigma^2}{4} + 2r - \alpha)}}{\sigma^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2(\frac{\sigma^2}{4} + \delta + r)}}{\sigma^2}$$

Condição de contorno 1 (VMC): $F(x^*) = \Omega(x^*)$

$$f(x^*) = A_1(x^*)^{\gamma_1} + A_2(x^*)^{\gamma_2} - \frac{\pi x^*}{\delta} = \Omega(x^*)$$

Condição de contorno 2 (SPC): $F_x(x^*) = \Omega_x(x^*)$

$$f_x(x^*) = \gamma_1 A_1(x^*)^{\gamma_1-1} + \gamma_2 A_2(x^*)^{\gamma_2-1} - \frac{\pi}{\delta} = \Omega_x(x^*)$$

Temos duas equações, mas três incógnitas (γ_1 , γ_2 e x^*). Precisamos de mais uma condição de contorno. Examinando o que acontece quando $x^* \rightarrow \infty$, concluímos que a taxa de aumento do valor do projeto não pode ser infinito, portanto segue que A_1 necessariamente é zero, pois do contrário, $F'(x^*) \rightarrow \infty$ quando $x^* \rightarrow \infty$. Assim, temos:

$$f(x^*) = A_2(x^*)^{\gamma_2} - \frac{\pi x^*}{\delta} = \Omega(x^*)$$

$$f_x(x^*) = \gamma_2 A_2(x^*)^{\gamma_2-1} - \frac{\pi}{\delta} = \Omega_x(x^*)$$

Resolvendo este sistema achamos os valores de A_2 e x^* e resolvemos a EDO.

2 A1 Portfólio livre de risco

Uma outra maneira de fazer é com portfólio livre de risco, composto da firma e na venda a curto de n unidades do ativo produzido pela empresa, e que tem um preço x . A premissa é de que o ativo x produzido pela empresa é negociado diretamente no mercado, e portanto, tem um preço de mercado. Escolhemos n de forma a obrigar este portfólio a não ter risco.

$$\begin{aligned}\phi_0 = F - nx & \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - nx_1^+ \\ \phi_1^- = F_1^- - nx_1^- \end{cases} \\ d\phi = dF - n dx\end{aligned}$$

Lembre-se que x segue um MGB, e portanto $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$. Pelo Lema de Ito, temos que, para uma MGB:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \alpha x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial x} \sigma x dz$$

Usando a notação equivalente, mais compacta:

$$dF = \left[F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 \right] dt + F_x \sigma x dz$$

Substituindo na equação de $d\phi$, ficamos com:

$$\begin{aligned}d\phi &= \left[F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 \right] dt + F_x \sigma x dz - n(\alpha x dt + \sigma x dz) \\ d\phi &= \underbrace{\left[F_t + F_x \alpha x + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 - n \alpha x \right] dt}_{\text{sem risco - determinístico}} + \underbrace{(F_x - n) \sigma x dz}_{\text{com risco - estocástico}}\end{aligned}$$

A parcela estocástica em dz , com risco, tem que ser igual a zero, para que o portfólio seja livre de risco. Assim,

$$F_x - n = 0 \qquad n = F_x$$

Substituindo o valor de n na equação de $d\phi$:

$$\begin{aligned}d\phi &= \left[F_t + \cancel{F_x \alpha x} + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 - \cancel{F_x \alpha x} \right] dt \\ d\phi &= \left[F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 \right] dt\end{aligned}$$

Como este portfólio é livre de risco, o seu retorno livre de risco tem que ser igual ao seu retorno total.

$$\text{Retorno livre de risco} = \text{Retorno Total}$$

Retorno livre de risco do portfólio ϕ num espaço de tempo $dt = rf \phi dt$

Retorno total do portfólio ϕ num espaço de tempo dt :

$$\begin{aligned} \text{Ganho de capital} &= \phi_1 - \phi \\ \text{Ganho de dividendos} &= \pi(x, t) dt \\ \text{Custo incorridos} &= \delta \text{ posição curta} = \delta n x dt = \delta F_x x dt \end{aligned}$$

Então:

$$rf \phi dt = (\phi_1 - \phi) + \pi(x, t) dt - \delta F_x x dt$$

Mas:

$$\begin{aligned} \phi &= F - nx = F - xF_x \\ \phi_1 - \phi &= d\phi = [F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2] dt \\ rf &= r \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} r [F - xF_x] dt &= [F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2] dt + \pi(x, t) dt - \delta F_x x dt \\ r F - r x F_x &= F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 + \pi(x, t) - \delta F_x x \end{aligned}$$

$$rF - rxF_x = F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 + \pi(x, t) - \delta x F_x$$

$$\frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 x^2 + (r - \delta) x F_x + F_t - rF + \pi(x, t) = 0$$

Verificamos que é a mesma equação (20).

2 B Spanning assets.

No caso do portfólio replicante, assumimos que o ativo x era negociado diretamente no mercado. Nem sempre este é o caso. Se não for, mostraremos que podemos substituí-lo por outro ativo negociado cujo risco siga, ou mapeie, a incerteza de x .

Este ativo pode ser um commodity, uma ação, um contrato futuro ou um portfólio dinâmico de ativos. (Um portfólio dinâmico é aquele cujos ativos são ajustados continuamente para garantir que o seu valor seja perfeitamente correlacionado com o processo de x). Para lembrar que este ativo negociado no mercado está seguindo o risco de x , denominamos este ativo de ativo mapeador ou ativo replicante, e indicamos o seu preço de mercado por X .

Ex: x = projeto de exploração de petróleo X = ação da empresa de petróleo
 x = projeto da empresa X = Empresa

Adotaremos agora uma premissa mais geral para o comportamento de x , permitindo que ele siga um processo de Ito arbitrário, conforme a equação 12: (MAB)

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz$$

Assim, o processo estocástico de X será:

$$dX = A(x,t) X dt + B(x,t) X dz$$

Nota:

- Os coeficientes $A(x,t)$ e $B(x,t)$ são funções da variável de estado x , e não do preço do ativo replicante X .
- Os coeficientes $A(x,t)$ e $B(x,t)$ não precisam ter nenhuma relação com os coeficientes $a(x,t)$ e $b(x,t)$ do processo de x .
- O incremento dz do processo de Wiener tem que ser o mesmo tanto para x como para X .

Supomos que o ativo replicante paga dividendos a uma taxa de $D(x,t)$ a cada dt . Assim \$1 investidos neste ativo durante um período dt dará o seguinte retorno: ($X=\$1$)

Dividendos:	$D(x,t) dt$
Ganho de Capital:	$dX = A(x,t) dt + B(x,t) dz$
Total:	$[D(x,t) + A(x,t)] dt + B(x,t) dz$

Qual é a taxa que o investidor exigirá para investir neste ativo replicante? Pelo CAPM temos:

$$\mu_x = r + \phi \rho_{xm} \sigma_x$$

$$\mu(x,t) = r + \phi \rho_{xm} B(x,t) \quad \text{Equação 22}$$

Comparando com a fórmula do CAPM para o retorno de x : (equação 19)

- ♦ $\Phi = \frac{E[R_m] - r}{\sigma_m}$ é um parâmetro agregado, sendo o mesmo para os dois casos
- ♦ O desvio padrão para o retorno de X é $B(x,t)$
- ♦ Como dX e dx são perfeitamente correlacionados, o coeficiente de correlação entre as taxas de retorno de X e do mercado é o mesmo que as de x e do mercado ($\rho_{xm} = \rho_{Xm}$)

No equilíbrio, temos também que o retorno = Dividendo + Ganho de capital

$$\frac{dX}{X} = \mu(x,t) = D(x,t) + A(x,t) \quad \text{equação 23}$$

onde A é o drift rate de X .

Considere agora um portfólio composto da firma e mais n unidades de uma posição curta no ativo replicante X , e mantemos este portfólio durante um período curto de tempo dt . Essa posição requer um investimento de:

$$\phi = F(x,t) - nX$$

Faremos com que este portfólio seja livre de risco. Dessa forma, o seu retorno livre de risco num período dt será $rf \phi dt$. Este retorno tem que ser igual ao seu retorno total:

$$\text{Retorno Total} = \text{ganho de capital} + \text{Dividendos} - \text{custos}$$

Durante este tempo, a firma paga dividendo de $\pi(x,t) dt$, e como o ativo replicante X paga um dividendo de $D(x,t) X dt$, o detentor da posição curta tem que pagar isto ao dono do ativo X . Assim o dividendo líquido a ser recebido pelo investidor será:

$$\text{Dividendo líquido} = [\pi(x,t) - D(x,t) nX] dt \quad \text{multiplicado por } n \text{ unidades de } X$$

Também

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz \quad (\text{MAB})$$

$$dF = \left[F_t + aF_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx} \right] dt + bF_x dz$$

$$dX = A(x,t) X dt + B(x,t) X dz$$

O ganho de capital do portfólio é $d\phi$:

$$\phi = F(x,t) - nX$$

$$d\phi = dF(x,t) - ndX$$

$$d\phi = \left[F_t + aF_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx} \right] dt + bF_x dz - n \left[A(x,t) X dt + B(x,t) X dz \right]$$

$$d\phi = \left[F_t + aF_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx} \right] dt + bF_x dz - nAX dt - nBX dz$$

$$d\phi = \left[F_t + aF_x + \frac{1}{2}b^2 F_{xx} - nAX \right] dt + [bF_x - nBX] dz$$

Para tornar este portfólio livre de risco, precisamos eliminar a parcela em dz , o que fazemos escolhendo n que zere esta parcela:

$$bF_x + nBX = 0$$

$$\boxed{n = -\frac{bF_x}{BX}}$$

Substituindo em $d\phi$

$$d\phi = \left[F_t + aF_x + \frac{1}{2}b^2 F_{xx} - \frac{bAF_x}{B} \right] dt$$

Agora igualamos o retorno total deste portfólio ao seu retorno sem risco.

$$\text{Custo total do portfólio:} \quad \phi = F - nX$$

$$\text{Retorno rf do Portfólio sem risco:} \quad rf \phi dt = rf (F - nX) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Retorno } rf &= \text{Retorno Total} \\ \text{Retorno } rf &= \text{Ganho de capital} + \text{Dividendos Líquido} \end{aligned}$$

$$rf (F - nX) dt = d\phi + [\pi(x,t) - D(x,t) nX] dt$$

$$r_f (F - nX) dt = \left[F_t + aF_x + \frac{1}{2}b^2 F_{xx} - \frac{bAF_x}{B} \right] dt + (\pi - DnX) dt$$

Substituindo n e cancelando o termo dt :

$$r \left(F - \frac{bF_x}{B} \right) = F_t + aF_x + \frac{1}{2}b^2 F_{xx} - \frac{bF_x}{B} A + \pi - D \frac{bF_x}{B}$$

$$\frac{1}{2}b^2 F_{xx} + \left[a + r \frac{b}{B} - D \frac{b}{B} - \frac{b}{B} A \right] F_x + F_t + \pi - rF = 0$$

$$\frac{1}{2}b^2 F_{xx} + \left[a - (A + D - r) \frac{b}{B} \right] F_x + F_t + \pi - rF = 0$$

Lembrando que:

$$\mu_X(x,t) = A(x,t) + D(x,t)$$

$$\mu = A + D$$

Então chegamos a EDP de $F(x,t)$:

$$\frac{1}{2} b^2(x,t) F_{xx}(x,t) + \left[a(x,t) - \left(\mu_X(x,t) - r \right) \frac{b(x,t)}{B(x,t)} \right] F_x(x,t) + F(x,t)_t + \pi(x,t) - rF(x,t) = 0$$

Equação 24

Semelhante as equações 13 e 20.

A vantagem do método do Contingent Claims valuation é que todos os coeficientes das equações são conhecidas, seja pela especificação do modelo adotado, como $a(x,t)$ e $b(x,t)$, ou podem ser observadas no mercado, como $\mu_X(x,t)$.

2 C Smooth Pasting

As soluções das equações diferenciais obtidas anteriormente requerem condições de contorno e, portanto, devemos analisar o que ocorre em períodos de tempo maiores do que dt .

Se a firma tem um horizonte fixo de tempo T , quando termina a sua vida útil ela é forçada a encerrar a produção e receber o *payoff* terminal $\Omega(x_T, T)$. Podemos resolver a equação diferencial parcial adotando a condição de contorno $F(x, T) = \Omega(x, T)$ para todo x .

Por outro lado, a firma pode ser forçada a decidir pelo *payoff* terminal num tempo $t < T$, se a variável de estado atingir o valor crítico $x^*(t)$. Nesse caso, a condição de contorno é:

$$F(x^*(t), t) = \Omega(x^*(t), t) \quad \text{para todo } t$$

que é o VMC visto na programação dinâmica.

Se a firma pode escolher a sua estratégia ótima conhecendo sua função de *payoff* terminal $\Omega(x,t)$, essa decisão será feita de modo a maximizar o valor da firma. Da programação dinâmica sabemos que essa escolha determina o contorno livre $x^*(t)$ e que a condição adicional é a propriedade smooth pasting:

$$F_x(x^*(t), t) = \Omega_x(x^*(t), t), \text{ para todo } t$$

2 D Processo de Poisson

Como fazemos se a variável de estado x seguir um processo de Poisson da forma da equação 16 $dx = f(x,t) dt + g(x,t) dq$?

Em princípio, podemos achar um ativo que replique a parte estocástica de $x(t)$. Se acreditamos que o preço do petróleo segue um processo de Poisson, o ativo replicador poderia ser um contrato futuro de petróleo de curto prazo.

De um modo geral, no entanto, para replicar $x(t)$ teríamos que montar um portfolio dinâmico de ativos, cujos componentes fossem continuamente ajustados à medida que x flutuasse. No entanto, isso somente será possível se $x(t)$ seguir um processo de difusão, porque sendo o caminho de x contínuo, o portfolio pode se ajustar à medida que x varia de um valor para outro. Mas se x seguir um processo de Poisson, a discontinuidade implícita do processo torna isso impossível.

Dessa forma, ao trabalhar com processos de Poisson, temos que adotar uma das duas premissas a seguir:

- 1) As mudanças estocásticas de x não são correlacionadas com o portfólio de mercado, e assim, não é feito nenhum ajuste para o risco e podemos usar a equação 20 mas assumindo que $\mu = r$, e assim, com $\delta = r - \alpha$ ao invés de $\delta = \mu - \alpha$. Como $\mu = \alpha + \delta$, isto significa que estamos assumindo que $\mu = r$, a taxa livre de risco.
- 2) Adotamos uma taxa de desconto exógena ρ e resolvemos por programação dinâmica.

3 Relação entre Programação Dinâmica e Contingent Claims

A função de valoração da programação dinâmica e o valor do ativo na análise de contingent claims satisfazem equações diferenciais parciais similares. A equação de Belmman para PD é interpretada em termos do desejo do investidor de ter o ativo. As condições de contorno em CC são baseadas na idéia que investidores escolhem a data ótima para exercer sua opção de forma a maximizar o valor de seu ativo.

A principal diferença está na especificação da taxa de desconto utilizada.

- ♦ Na programação dinâmica é especificada uma taxa exógena ρ .
- ♦ No contingent claims, a taxa de retorno exigida do ativo é derivada do equilíbrio do mercado de capitais, e somente a taxa de retorno livre de risco r , é exógena. Assim, contingent claims dá um melhor tratamento à taxa de desconto.

Por isso, contingent claims requer a existência de um conjunto de mercados suficientemente rico em ativos de risco. É preciso que o componente estocástico dz do retorno do ativo que estamos tentando valorar seja exatamente replicado pelo componente estocástico do ativo replicante, - não somente que obedeçam a mesma lei de probabilidade, mas que eles sejam perfeitamente correlacionados e que suas realizações também sejam idênticas. Isso significa que CC parte da premissa de que os mercados são completos, isto é, o número de estados \leq número de ativos.

A programação dinâmica não precisa de ativo replicante. A função objetiva pode simplesmente refletir a avaliação subjetiva de risco ρ do tomador de decisões.

Vemos que ambos os métodos tem vantagens e desvantagens, e juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações. Em aplicações específicas, uma abordagem pode ser mais conveniente na prática que a outra.

3 A Avaliação Neutra ao Risco Equivalente

Vamos explorar mais a relação entre o método da programação dinâmica e o do contingent claims. Seja a firma cujo fluxo de lucros $\pi(x,t)$ depende da variável de estado x . Forçaremos a empresa a encerrar as operações ao término da sua vida útil num espaço de tempo finito T , com payoff terminal de $\Omega(x_T, T)$. Adotaremos também a premissa de que a variável de estado x segue um MGB:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$

Suponha que no tempo t o estado atual seja x , e que $F(x,t)$ seja o valor da firma, isto é, o direito ao fluxo de lucros futuros.

Vamos iniciar com programação dinâmica, adotando uma taxa de desconto exógena ρ . $F(x,t)$ é simplesmente o valor presente esperado:

Finanças clássicas: $F(x, t) = E\left[VP\left(\sum \text{lucros} \pi\right) + VP(\Omega)\right]$

Finanças em Tempo Contínuo:

$$F(x, t) = E_t \left[\int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \pi(x_\tau, \tau) d\tau + e^{-\rho(T-t)} \Omega(x_T, T) \right] \quad \text{equação 25}$$

onde E_t representa a expectativa baseada na informação disponível no tempo t .

Se considerarmos a situação depois de um espaço curto de tempo dt , a variável de estado terá mudado para $(x + dx)$, e o valor do ativo terá mudado para $F(x+dx, t+dt)$.

Para expressar isso em valor presente para o tempo t devemos descontar esse valor pelo fator $e^{-\rho dt}$. Além disso, dx é uma variável aleatória do ponto de vista do instante de tempo t , já que é um valor futuro em relação ao tempo t , e portanto, devemos usar valor esperado.

	<u>t</u>	<u>$t + dt$</u>
Variável de estado	x	$x + dx$
Valor da firma	$F(x, t)$	$F(x+dx, t+dt)$
Valor esperado da firma em $t + dt$ descontando ao tempo t :	$e^{-\rho dt} E[F(x + dx, t + dt)]$	

Mais o lucro da firma no período dt : $\pi(x, t)dt$

Teremos então: $F(x, t) = \pi(x, t)dt + e^{-\rho dt} E_t[F(x + dx, t + dt)]$ equação 26

A programação dinâmica faz exatamente esta separação do intervalo entre t e T em duas partes: a parte imediata (lucro no intervalo dt) e toda a continuação após isto. Assim, a equação 26 é uma equação de Bellman em que nenhuma ação ocorre no intervalo dt , e por isso, não há maximização a fazer no lado direito da equação.

Para transformarmos a equação 26 em uma EDP que nos forneça o valor de $F(x, t)$ devemos desenvolver o termo $E[F(x+dx, t+dt)]$ expandindo-o pelo lema de Ito:

$$\begin{aligned} E[F(x+dx, t+dt)] &= F(x, t) + E[dF(x, t)] \\ E[F(x+dx, t+dt)] &= F(x, t) + [F_t + \alpha x F_x + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx}]dt \end{aligned}$$

Nota: Mudando de tempo contínuo para tempo discreto, trocamos $e^{-\rho dt}$ por $\frac{1}{1+\rho dt}$.

Sabemos que $\frac{1}{1-a} = \sum_{x=0}^{\infty} a^x$, então podemos substituir a expressão $\frac{1}{1+\rho dt}$ por esta série, onde $a = -\rho dt$.

$$\frac{1}{1+\rho dt} = \sum_{x=0}^{\infty} (-\rho dt)^x = (-\rho dt)^0 + (-\rho dt)^1 + (-\rho dt)^2 + (-\rho dt)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+\rho dt} = 1 - \rho dt + (\rho dt)^2 - (\rho dt)^3 + \dots$$

Os termos de ordem superior tendem a zero e portanto podem ser ignorados. Dessa forma, a expressão fica:

$$e^{-\rho dt} = \frac{1}{1+\rho dt} = 1 - \rho dt$$

Voltando à equação 26:

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + e^{-\rho dt} E_t[F(x + dx, t + dt)]$$

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + (1 - \rho dt) E_t[F(x + dx, t + dt)]$$

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + (1 - \rho dt) \left\{ F(x, t) + \left(F_t + \alpha x F_x + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx} \right) dt \right\}$$

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + F(x, t) + \left(F_t + \alpha x F_x + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx} \right) dt - \rho dt F(x, t) - \rho \left(F_t + \alpha x F_x + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx} \right) dt^2$$

$$\cancel{F(x, t)} = \cancel{\pi(x, t)dt} + \cancel{F(x, t)} + \left(F_t + \alpha x F_x + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx} \right) dt - \rho dt F(x, t)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx} + \alpha x F_x + F_t - \rho F(x, t) + \pi(x, t) = 0} \quad \text{equação 27}$$

A condição de contorno é que no tempo terminal T, o valor da firma será o seu valor terminal

$$F(x, T) = \Omega(x, T) \quad \forall x \quad \text{equação 28}$$

Falta uma condição adicional.

Note que não precisamos resolver esta EDP - a equação 25 é a sua solução.

Vamos avaliar agora a empresa do ponto de vista de contingent claims valuation. A notação utilizada é:

$$\mu = \alpha + \delta$$

$$\alpha = \mu - \delta$$

Substituímos a taxa de desconto exógena ρ da programação dinâmica pelo retorno μ do ativo. Agora, substituiremos o μ pela taxa livre de risco r_f , e assim, a taxa de crescimento α do MGB de x será:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mu - \delta \\ \alpha' &= r_f - \delta\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx} + (r - \delta)x F_x + F_t - rF(x, t) + \pi(x, t) = 0 \quad \text{Equação 20}$$

Assim podemos avaliar o ativo descontando os fluxos futuros a taxa livre de risco r_f se estabelecermos que x segue um MGB com uma taxa de crescimento (drift) $\alpha' = r_f - \delta$. A solução descontada pela taxa livre de risco, será a equação 25 ajustada para

$$F(x, t) = E'_t \left[\int_t^T e^{-r(\tau-t)} \pi(x'_\tau, \tau) d\tau + e^{-r(T-t)} \Omega(x'_T, T) \right] \quad \text{equação 29}$$

Onde x' é uma variável que começa no mesmo ponto inicial x no tempo t , mas que segue um novo MGB:

$$\begin{aligned}dx' &= \alpha' x' dt + \sigma x' dz \\ &= (r_f - \delta) x' dt + \sigma x' dz\end{aligned} \quad \text{equação 30}$$

3B Exemplos

Em cada um dos exemplos a seguir, estamos interessados em achar o valor inicial do projeto $F(x, 0)$.

Caso 1:

- ♦ Não existe fluxo de lucros $\rightarrow \pi(x, t) = 0$
- ♦ O valor terminal é $\Omega(x) = x$.

Então $E_0[x_T]$ é o valor esperado no instante inicial $t = 0$ do valor que x terá no instante T , que será o valor do projeto em $t = T$, já que $x = \Omega(x)$. O valor presente ($t=0$) desta oportunidade de investimento será então:

$$\begin{aligned}E_0[x_T] &= x e^{\alpha T} \\ F(x, 0) &= e^{-\rho T} E_0[x_T]\end{aligned}$$

Na perspectiva de risco neutro equivalente, teremos: $\alpha' = r_f - \delta$ e $\mu = \alpha + \delta$ e $\delta = \mu - \alpha$

ρ = taxa que investidor quer e que pode variar de investidor para investidor
 μ = parâmetro de mercado para este ativo

$$E'_0[x_T] = x e^{\alpha'T} = x e^{(r-\delta)T} \quad \text{e então}$$

$$F(x,0) = e^{-rT} E'_0[x_T]$$

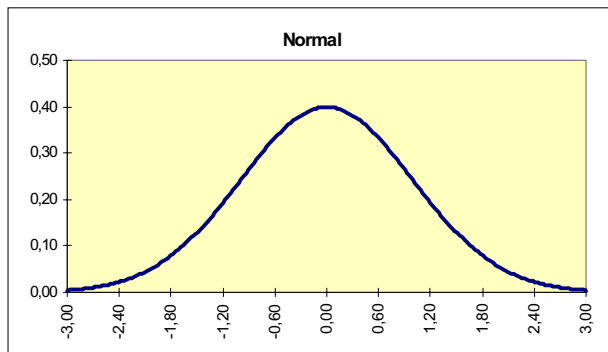
$$F(x,0) = e^{-rT} x e^{(r-\delta)T} = x e^{-\delta T} = x e^{-(\mu-\alpha)T} = e^{-\mu T} x e^{\alpha T}$$

Verificamos que x cresce a taxa α e descontamos o seu valor futuro à taxa ajustada ao risco μ .

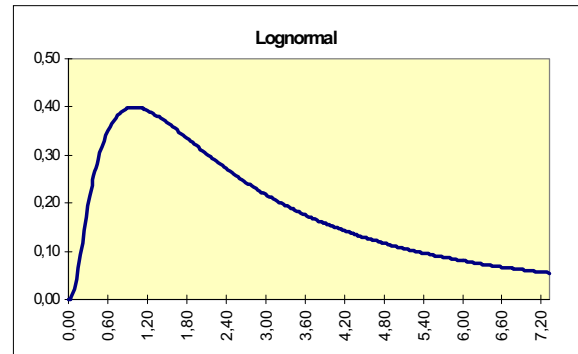
Caso 2:

$$\diamond \quad \Omega(x) = x^\beta \text{ para algum } \beta.$$

Retornos tem distribuição normal



Preços tem distribuição lognormal



$$dx = \mu x dt + \sigma x dz$$

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz$$

Seja $Y = \ln x$. Então,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

Aplicando o Lema de Itô à função Y , temos:

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \mu x + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial x} \sigma x dz$$

$$dY = \left(\frac{1}{x} \mu x + 0 + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{1}{x^2} \right) dt + \frac{1}{x} \sigma x dz$$

$$dY = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Como μ e σ são constantes, essa equação indica que G segue um processo de Wiener Generalizado. Ele tem um Drift rate constante de $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e uma variância constante de σ^2 .

$$E(dY) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt$$

$$Var(dY) = Var \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \right] = Var(\sigma dz)$$

$$Var(dY) = 0 + \sigma^2 Var(dz)$$

$$Var(dY) = \sigma^2 dt$$

Isso significa que a mudança em Y num período $dt = T-t$ é normalmente distribuído com media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)$ e variância $\sigma^2(T-t)$.

$$Y_T - Y \approx N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t); \sigma^2(T-t) \right]$$

Vemos então que x tem uma distribuição lognormal, e então $Y = \ln x$ terá distribuição normal:

$$\ln \frac{dx}{x} \approx \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)(\tau - t); \sigma^2(\tau - t) \right)$$

Fazendo agora $Y = x^\beta$ temos:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \beta x^{\beta-1} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \beta(\beta-1)x^{\beta-2} \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

Aplicando o Lema de Itô à função Y , temos:

$$\begin{aligned} dY &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \alpha x + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial x} \sigma x dz \\ dY &= \left(\beta x^{\beta-1} \alpha x + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \beta(\beta-1)x^{\beta-2} \right) dt + \beta x^{\beta-1} \sigma x dz \\ dY &= \left(\beta \alpha + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta-1) \right) x^\beta dt + \beta \sigma x^\beta dz \\ \frac{dY}{Y} &= \left(\beta \alpha + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta-1) \right) dt + \beta \sigma dz \end{aligned}$$

O valor esperado em $t = 0$ é:

$$E_0'[(x)^\beta] = x e^{\alpha T}$$

$$E_0'[(x)^\beta] = E_0'[Y] = Y e^{\alpha_Y T}$$

$$E_0'[(x)^\beta] = Y \exp\left\{\left(\beta\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)\right)T\right\}$$

$$E_0'[(x)^\beta] = x^\beta \exp\left\{\beta(r-\delta)T + \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)T\right\}$$

e

$$F(x,0) = x^\beta \exp\left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r\right)T\right]$$

Se $\beta = 1$, ficamos com $E_0'[x_T] = x e^{(r-\delta)T}$ e $F(x,0) = x e^{-\delta T}$

Se $\beta = 0$, ficamos com $E_0'[x_T] = x$ e $F(x,0) = x e^{-rT}$

Se β é raiz da equação quadrática $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r = 0$, então temos

$$F(x,0) = x^\beta$$