

## Capítulo 5 (cont)

### 2B. Relação com a teoria Neoclássica

Seja  $\pi$  o fluxo de Caixa do projeto (Fluxo de lucros líquidos). Vamos assumir que  $\pi$  segue um MGB  $d\pi = \alpha \pi dt + \sigma \pi dz$  onde  $\alpha$  é a taxa de crescimento de  $\pi$ . O valor do projeto pela teoria clássica, em tempo discreto é o valor esperado dos fluxos de caixa ou de lucros futuros:

$$V_t = E \left\{ \sum_{T=t}^{\infty} \frac{\pi_T}{(1+\rho)^T} \right\}$$

onde

$$\begin{aligned}\pi_{T+1} &= \pi_T + d\pi_T \\ \pi_{T+1} &= \pi_T + \alpha \pi_T dt + \sigma \pi_T dz\end{aligned}$$

Se o fluxo  $\pi$  tem crescimento constante ( $\alpha$ ), e há fluxo já no instante zero, o Valor Esperado da parte estocástica é nulo e a fórmula fica:

$$\begin{aligned}E[\pi_{T+1}] &= E[\pi_T + \alpha \pi_T dt + \sigma \pi_T dz] \\ E[\pi_{T+1}] &= E[\pi_T] + E[\alpha \pi_T dt] + E[\sigma \pi_T dz] \\ E[\pi_{T+1}] &= \pi_T + \alpha \pi_T dt + \sigma \pi_T E[dz] \\ E[\pi_{T+1}] &= \pi_T + \alpha \pi_T dt + 0 \\ E[\pi_{T+1}] &= \pi_T (1 + \alpha dt)\end{aligned}$$

Em tempo discreto, se  $dt = 1$ , temos  $E[\pi_{T+1}] = \pi_T (1 + \alpha)$

$$\begin{aligned}V_t &= E \left\{ \sum_{T=t}^{\infty} \frac{\pi_T}{(1+\rho)^T} \right\} = \sum_{T=t}^{\infty} \frac{E[\pi_T]}{(1+\rho)^T} \\ E[\pi_0] &= \pi_0 \\ E[\pi_1] &= \pi_0 (1 + \alpha) \\ E[\pi_2] &= \pi_0 (1 + \alpha)(1 + \alpha) = \pi_0 (1 + \alpha)^2 \\ &\dots \\ E[\pi_n] &= \pi_0 (1 + \alpha)^n\end{aligned}$$

$$(1) \quad V_t = \pi_t + \frac{\pi_t(1+\alpha)}{(1+\rho)} + \frac{\pi_t(1+\alpha)^2}{(1+\rho)^2} + \frac{\pi_t(1+\alpha)^3}{(1+\rho)^3} + \dots + \frac{\pi_t(1+\alpha)^n}{(1+\rho)^n}$$

Multiplicando por:  $\frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)}$

$$V_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} = \pi_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} + \frac{\pi_t(1+\alpha)}{(1+\rho)} \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} + \dots + \frac{\pi_t(1+\alpha)^n}{(1+\rho)^n} \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)}$$

$$(2) \quad V_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} = \pi_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} + \pi_t + \frac{\pi_t(1+\alpha)}{(1+\rho)} + \dots + \frac{\pi_t(1+\alpha)^n}{(1+\rho)^n}$$

Subtraindo (2) - (1), temos:

$$V_t \left[ \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} - 1 \right] = \pi_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)}$$

$$V_t = \frac{\pi_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)}}{\left[ \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)} - 1 \right]} = \frac{\pi_t \frac{(1+\rho)}{(1+\alpha)}}{\left[ \frac{(1+\rho) - (1+\alpha)}{(1+\alpha)} \right]} = \frac{\pi_t (1+\rho)}{\left[ \frac{(\rho - \alpha)}{(1+\alpha)} \right]}$$

$$V_t = \frac{\pi_t (1+\rho)}{(\rho - \alpha)}$$

Note que esta fórmula foi obtida para tempo discreto. Dixit, pg. 144, desconsidera o termo  $(1 + \rho)$  do numerador pois em tempo contínuo,  $t$  e  $t+1$  são muito próximos e  $\pi_0 = \pi_1$ , ficando com:

$$V_t = \frac{\pi_t}{(\rho - \alpha)}$$

Dedução da fórmula para tempo contínuo:

$$V_t = E \left\{ \int_{s=t}^{\infty} \pi_s e^{-\rho(s-t)} ds \right\} = \int_{s=t}^{\infty} E\{\pi_s\} e^{-\rho(s-t)} ds$$

Mas em tempo contínuo, o valor esperado de um ativo sujeito a uma taxa de crescimento  $\alpha$  num tempo futuro  $(s - t)$  é:

$$E(\pi_s) = \pi_t e^{\alpha(s-t)}$$

$$\text{Então: } V_t = \int_{s=t}^{\infty} \pi_t e^{\alpha(s-t)} e^{-\rho(s-t)} ds = \int_{s=t}^{\infty} \pi_t e^{(\alpha-\rho)(s-t)} ds$$

$$V_t = \pi_t e^{-(\alpha-\rho)t} \int_{s=t}^{\infty} e^{(\alpha-\rho)s} ds$$

$$V_t = \pi_t e^{-(\alpha-\rho)t} \frac{e^{(\alpha-\rho)s}}{\alpha - \rho} \Big|_{s=t}^{s=\infty} = \pi_t e^{-(\alpha-\rho)t} \left[ 0 - \frac{e^{(\alpha-\rho)t}}{\alpha - \rho} \right]$$

$$V_t = - \frac{\pi_t e^{-(\alpha-\rho)t} e^{(\alpha-\rho)t}}{\alpha - \rho}$$

$$\boxed{V_t = \frac{\pi_t}{\rho - \alpha}}$$

De outra forma, por analogia ao desenvolvimento discreto:

$$V_0 = \int_{T=0}^{T=\infty} \pi_T e^{\alpha T} e^{-\rho T} dT = \int_{T=0}^{T=\infty} \pi_T e^{(\alpha-\rho)T} dT = \int_{T=0}^{T=\infty} \pi_T e^{-(\rho-\alpha)T} dT$$

$$V_0 = \left. \frac{\pi_T e^{-(\rho-\alpha)T}}{-(\rho-\alpha)} \right|_0^\infty = 0 - \frac{\pi_0 e^{-(\rho-\alpha)0}}{-(\rho-\alpha)} = \frac{\pi_0}{(\rho-\alpha)}$$

Por analogia, temos:

$$\boxed{V_t = \frac{\pi_t}{\rho - \alpha}}$$

Regra Marshaliana: investir se  $VPL > 0$ , ou seja se  $V > I$

$$V \geq I$$

$$\frac{\pi_t}{\rho - \alpha} \geq I$$

$$\pi_t \geq I(\rho - \alpha)$$

Entretanto a equação 14,  $V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$  nos diz que o threshold é bem maior:

$$V^* = \frac{\pi^*}{\rho - \alpha} \Rightarrow \pi^* = V^*(\rho - \alpha)$$

$$\pi^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I(\rho - \alpha)$$

Devemos investir então apenas se  $\pi_t \geq \pi^*$ :

$$\pi_t \geq \pi^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I(\rho - \alpha) > (\rho - \alpha)I \quad \text{equação 17}$$

Jorgesonian approach:

Sem incerteza, devemos investir quando o lucro incremental para uma unidade extra de capital for maior do que o custo desta unidade extra de capital.

$$\text{Partindo de: } \frac{1}{2} \beta (\beta - 1) \sigma^2 + \beta (\rho - \delta) - \rho = 0 \quad \text{equação 16}$$

Substituindo  $\alpha = \rho - \delta$

$$\frac{1}{2} \beta (\beta - 1) \sigma^2 + \beta \alpha - \rho = 0$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta + \frac{\beta \alpha}{(\beta - 1)} - \frac{\rho}{(\beta - 1)} = 0 \quad \div (\beta - 1)$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta = \frac{\rho}{(\beta - 1)} - \frac{\beta \alpha}{(\beta - 1)} = \frac{\rho - \beta \alpha}{(\beta - 1)}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta = \frac{\rho - \beta \alpha}{(\beta - 1)}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta + \rho = \frac{\rho}{(\beta - 1)} - \frac{\beta \alpha}{(\beta - 1)} + \rho \left[ \frac{(\beta - 1)}{(\beta - 1)} \right]$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta + \rho = \frac{\rho - \beta \alpha + \rho (\beta - 1)}{(\beta - 1)} = \frac{\rho - \beta \alpha + \rho \beta - \rho}{(\beta - 1)} = \frac{\rho \beta - \beta \alpha}{(\beta - 1)}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta + \rho = \frac{(\rho - \alpha) \beta}{(\beta - 1)} \quad \text{ou na forma do livro, pg 145}$$

$$\boxed{\frac{\beta}{(\beta - 1)} (\rho - \alpha) = \rho + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta}$$

O nível crítico do lucro que dispara o investimento é:

$$\pi^* = \left[ \frac{\beta}{(\beta - 1)} (\rho - \alpha) \right] I = \left[ \rho + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta \right] I > \rho I$$

Lembrando da equação 17,

$$\pi^* = \frac{\beta}{(\beta - 1)} (\rho - \alpha) I \geq I(\rho - \alpha)$$

$$\pi^* = \left( \rho + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta \right) I \geq \rho I \quad \text{equação 18}$$

Dado que não existe depreciação,  $\rho I$  é o custo de capital

Sem Incerteza: Investir quando  $\pi = \rho I$

Com Incerteza: Investir quando  $\pi = \frac{1}{2} \sigma^2 \beta + \rho$

Novamente queremos maximizar o retorno. O melhor tempo para investir é:

$$VPL = V - I > 0$$

$$VPL = \pi / (\rho - \alpha) - I > 0$$

Sendo que  $\pi$  apresenta crescimento  $\alpha$  e taxa de desconto  $\rho$ , partindo de  $\pi_0$  inicial, o melhor tempo para investir será dado por:

$$\max_T \left[ \frac{\pi_0 e^{\alpha T}}{\rho - \alpha} - I \right] e^{-\rho T} = \frac{\pi_0 e^{-(\rho - \alpha)T}}{\rho - \alpha} - I e^{-\rho T} \quad \text{equação 19}$$

Maximizando em relação a T: Condição de 1ª ordem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\pi_0 e^{-(\rho - \alpha)T}}{\rho - \alpha} - I e^{-\rho T} \right] &= 0 \\ \frac{-(\rho - \alpha)\pi_0 e^{-(\rho - \alpha)T}}{\rho - \alpha} - (-\rho)I e^{-\rho T} &= 0 \\ -\pi_0 e^{-(\rho - \alpha)T} + \rho I e^{-\rho T} &= 0 \\ \pi_0 e^{\alpha T} &= \rho I \end{aligned}$$

A solução é investir no tempo T em que

$$\pi_T = \pi_0 e^{\alpha T} = \rho I \quad \text{equação 20}$$

Verificando a condição de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\pi_0 e^{-(\rho - \alpha)T}}{\rho - \alpha} - I e^{-\rho T} \right] &< 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [-\pi_0 e^{\alpha T} + \rho I] &< 0 \\ -\alpha \pi_0 e^{\alpha T} &< 0 \end{aligned}$$

Como  $\pi_0 e^{\alpha T} \geq 0$ , a expressão será verdadeira se  $\alpha > 0$ .

Resumo:

Marshall:  $V_t > I$

Dixit:  $V_t > V^*$  onde  $V^* = \frac{\beta}{\beta-1} > 1$

ou em termos de  $\pi$ :

Marshall:  $\pi_t > (\rho - \alpha) I$

Dixit:  $\pi_t > \pi_t^*$  onde  $\pi_t^* = \frac{\beta}{\beta-1}(\rho - \alpha)I$

## 2C Relação com Tobin's Q.

Tobin em 1969 introduziu a magnitude "q", definida como sendo a relação entre o valor dos existentes bens de capital ao seus custos correntes de reprodução. A idéia é que se a relação "q" ultrapassar a unidade, a firma pode aumentar seu valor de mercado incrementando seu estoque de capital.

Comentário: Se o custo de um bem de capital é menor do que o seu valor como bem de capital devemos investir neste bem.

Conclusão: Se o valor de "q" é maior ou igual a 1 a firma deve investir. Podemos também calcular o "q" agregado baseado na media da industria ou da economia toda.

Suponha um projeto de uma firma cujo valor seja V, com a existência de opção de investir a qual valha F(V), o valor da firma de aumentar em  $V - F(V)$ . Desta forma "q" deve ser definido como a relação  $[V - F(V)] / I$

Pelo exemplo do capítulo 2, em  $t=0$ :  $V_0 = 2200$ ,  $F(V_0) = 773$ ,  $I = 1600$

$$q = [2200 - 773] / 1600 = 0,8919$$

Ou seja não devemos investir em  $t=0$

Devemos investir quando:  $1 = [V_0 - F(V_0)] / I$

$$I = V_0 - F(V_0)$$

$$F(V_0) = V_0 - I \quad \text{equação 11}$$

Usando o valor de um ativo (projeto) já existente, para o qual a opção de investir não existe posto já ter sido exercida, definimos "q" como  $q = V / I$ .

Pela equação 14:  $V^* = \beta_1 I / (\beta_1 - 1)$

$$q^* = [\beta_1 I / (\beta_1 - 1)] / I$$

$$q^* = \beta_1 / (\beta_1 - 1) \quad \text{equação 21}$$

### 3- Solução por análise de Contingents Claims

Um dos problema da solução por programação dinâmica é obter-se a taxa exógena  $p$ . De onde vem essa taxa? Será que ela é constante no tempo? Uma alternativa é usar o método do Contingent Claims, ou seja, o método de valoração de opções.

#### 3A Reinterpretando o modelo

O uso de Contingent Claims exige a premissa de que existem ativos na economia que replicam as mudanças estocásticas em  $V$ . Isso significa que os mercados de capitais devem ser suficientemente completos de tal forma que possamos achar um ativo ou construir um portfólio dinâmico de ativos, cujo preço seja perfeitamente correlacionado com  $V$ . Via de regra é possível obter-se tais ativos para a maioria das commodities, as quais são usualmente negociadas em mercados spot e mercados futuros, e também para produtos manufaturados cujos preços são correlacionados com o valor das ações ou carteira de ações. Entretanto quando se tratar de produtos novos não relacionados com outros existentes não é possível obter-se o ativo replicante.

Dessa forma, assumimos agora a premissa de que a incerteza a respeito dos valores futuros de  $V$  podem ser replicados por ativos existentes no mercado. Essa premissa nos permitirá determinar a regra de investimento ótimo que maximiza o valor da firma, sem ter que fazer nenhuma premissa a respeito da taxa de desconto ou preferencia de risco dos investidores.

Seja:

$V$  = Valor do Projeto

$x$  = Preço de um ativo (ou portfólio dinâmico de ativos) perfeitamente correlacionado com  $V$ . Supomos que  $x$  segue uma MGB e não paga dividendos, de forma que seu retorno será dado somente por ganhos de capital, e assim:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz \quad \text{equação 22}$$

$\rho_{xm}$  = A correlação de  $x$  com o portfólio de mercado.

Como  $x$  é perfeitamente correlacionado com  $V$ , temos que:

$$\rho_{xV} = 1$$

$$\rho_{xm} = \rho_{Vm}$$

De acordo com a regra do CAPM, a taxa  $\mu$  deve remunerar o risco sistemático (não diversificável). Como explicado no cap 4, sabemos que  $\mu$  é dado por:  $\mu = r + \phi \rho_{xm} \sigma_x$

Relembrando:

Sabemos que

$$\sigma_{ab} = \text{cov}(a, b) = \text{covariância}$$

$$\rho_{ab} = \text{corr}(a,b) = \frac{\text{cov}(a,b)}{\sigma_a \sigma_b} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \sigma_b} = \text{correlação}$$

$$\beta = \frac{\text{cov}(a,b)}{\text{cov}(b,b)} = \frac{\text{cov}(a,b)}{\text{Var}(b)} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_b^2}$$

Obs: Note que  $\sigma_{bb} = \sigma_b \cdot \sigma_b = \sigma_b^2$  mas  $\sigma_{ab} \neq \sigma_a \cdot \sigma_b$

Podemos escrever a covariância também na forma:

$$\sigma_{ab} = \rho_{ab} \sigma_a \sigma_b$$

E então: 
$$\beta = \frac{\rho_{ab} \sigma_a \sigma_b}{\sigma_b^2} = \frac{\rho_{ab} \sigma_a}{\sigma_b}$$

Pelo CAPM temos:

$$\mu = E[R_x] = r_f + \beta (E[R_m] - r_f)$$

$$\mu = r_f + \frac{\rho_{xm} \sigma_x}{\sigma_m} (E[R_m] - r_f)$$

$$\mu = r_f + \rho_{xm} \sigma_x \frac{E[R_m] - r_f}{\sigma_m}$$

Definindo  $\phi = \frac{E[R_m] - r_f}{\sigma_m}$

$$\mu = r_f + \rho_{xm} \sigma_x \phi \quad \text{e}$$

$$\boxed{\mu = r_f + \phi \rho_{xm} \sigma_x}$$

Mas se  $\alpha > \mu$ , o crescimento de V será maior do que a sua taxa de desconto, e neste caso, será sempre melhor esperar mais antes de investir, e o investimento nunca será realizado. Então, seja  $\delta = \mu - \alpha$ , onde  $\delta > 0$ . Se V for o preço de uma ação,  $\delta$  seria o dividendo pago. O retorno total da ação seria  $\mu = \alpha + \delta$ . Se  $\delta = 0$ , uma opção de compra nunca seria exercida antes do seu vencimento, pois neste caso não há custo de oportunidade de dividendos perdidos por esperar para exercer. Mas se tiver dividendos ( $\delta > 0$ ), este custo de oportunidade existe, e quanto maior  $\delta$ , melhor será exercer a opção antecipadamente.

Se V for um projeto,  $\delta$  é o custo de oportunidade de se manter a opção sem exercê-la, ou seja, o custo de oportunidade de se adiar o investimento no projeto.

Então  $\delta$  é o custo de oportunidade de manter-se a opção e não investir ainda. Se você pode ganhar mais do que  $\delta$  aplicando em outro investimento com risco semelhante você não vai investir no projeto, e manterá a opção para talvez investir no futuro. Se  $\delta = 0$ , não existe custo de oportunidade em manter a opção.



### 3.B Obtendo uma solução

Vamos agora calcular o valor da oportunidade de investimento  $F(V)$ , montando um portfólio livre de risco, determinando a sua taxa de retorno esperado, e equacionando essa taxa esperada à taxa livre de risco. O portfólio é composto da oportunidade de investimento  $F(V)$  e a venda a descoberto de  $n$  unidades do projeto. Sabemos que se este portfólio é livre de risco, necessariamente  $n = F'(V)$ .

$$\phi_0 = F(V) - n V_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n V_1^+ \\ \phi_1^- = F_1^- - n V_1^- \end{cases}$$

Vimos anteriormente que  $n = F'(V)$ . Relembrando:

$$d\phi = dF - n dV \quad \text{onde} \quad dV = \alpha V dt + \sigma V dz$$

$$\text{e} \quad dF = \frac{dF}{dV} dV + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dV^2} dV^2 = F'(V) dV + \frac{1}{2} F''(V) dV^2$$

$$\text{Mas} \quad dV^2 = (\alpha V dt)^2 + 2\alpha\sigma V^2 dt dz + (\sigma V dz)^2$$

$$\text{Mas} \quad dz^2 = dt$$

$$dt^2 = 0$$

$$dV^2 = \sigma^2 V^2 dt$$

$$dF = F'(V) [\alpha V dt + \sigma V dz] + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt$$

$$dF = F'(V) \alpha V dt + F'(V) \sigma V dz + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt$$

$$dF = \left[ F'(V) \alpha V + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 \right] dt + F'(V) \sigma V dz$$

Então, substituindo  $dF$  e  $dV$  em  $d\phi$ , temos:

$$d\phi = dF - n dV$$

$$d\phi = \left[ F'(V) \alpha V + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 \right] dt + F'(V) \sigma V dz - n [\alpha V dt + \sigma V dz]$$

Para que este portfólio seja sem risco, a parte estocástica tem que ser zero:

$$F'(V) \sigma V dz - n \sigma V dz = 0$$

$$n = F'(V)$$

O valor deste portfólio é:  $\phi = \underset{\text{Valor da Opção}}{F(V)} - \underset{\text{N. Ações} \times \text{Valor Ação}}{F'(V) V}$

A mudança instantânea no valor do portfólio é dada por:

$$d\phi = dF(V) - F'(V) dV$$

Conforme  $V$  muda,  $F'(V)$  também muda, e  $n$  também. Porém nossas considerações são para pequenos intervalos de tempo  $dt$ , e nestas considerações podemos assumir  $n$  como sendo constante.

A posição curta em  $n = F'(V)$  unidades requer um pagamento de:  $\delta n V$ , ou  $\delta V F'(V)$  por cada  $dt$ . Isso pode ser mostrado da seguinte forma: Um investidor racional que tenha investido na posição longa deve requerer um retorno ajustado ao risco  $\mu V$  por  $dt$ , onde  $\mu = \delta + \alpha$ .

$$\mu V = \underbrace{\delta V}_{\text{Ganhos com dividendos}} + \underbrace{\alpha V}_{\text{Ganhos de capital}}$$

Como temos  $n$  posições short do produto, o custo de manter o portfólio por um tempo  $dt$  é  $n \delta V dt$ . Com  $n = F'(V)$ , ficamos com  $n \delta V F'(V) dt$ .

O retorno total deste portfólio a cada  $dt$  será a variação no valor do portfólio menos o custo de mante-lo, que é o pagamento do custo da posição curta:

$$\begin{aligned} \text{retorno total} &= d\phi - \delta V F'(V) dt \\ \text{retorno RF: } &rf \phi dt \end{aligned}$$

Sendo o portfólio sem risco, retorno  $rf$  deve ser igual ao retorno total do portfólio. Igualando os dois, temos:

$$\begin{aligned} \text{Retorno Total} &= \text{Retorno RF} \\ d\phi - \delta V F'(V) dt &= rf \phi dt \end{aligned}$$

Para desenvolver o retorno por $dt$	Retorno	$= d\phi - \delta V F'(V) dt$
Precisamos desenvolver	$d\phi$	$= dF(V) - F'(V) dV$
Onde sabemos que	$dV$	$= \alpha V dt + \sigma V dz$
Onde por Lema de Ito	$dF(V)$	$= F'(V) dV + \frac{1}{2} F''(V) (dV)^2$
Onde	$dV^2$	$= \sigma^2 V^2 dt$

Substituindo teremos

$$\begin{aligned} d\phi &= dF(V) - F'(V) dV \\ d\phi &= [F'(V) dV + \frac{1}{2} F''(V) (dV)^2] - F'(V) dV \\ d\phi &= \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{O retorno do portfólio} &= d\phi - \delta V F'(V) dt \\ &= \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - \delta V F'(V) dt \end{aligned}$$

Igualando o retorno do portfólio ao retorno de uma aplicação em  $rf$ :

$$\begin{aligned} \text{Retorno Total} &= \text{Retorno RF} \\ \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - \delta V F'(V) dt &= rf \phi dt \end{aligned}$$

Dividindo tudo por  $dt$  e substituindo  $\phi$  por  $F(V) - F'(V) V$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 - \delta V F'(V) &= rf [F(V) - F'(V) V] \\ \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 - \delta V F'(V) &= rf F(V) - rf F'(V) V \\ \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 - \delta V F'(V) - rf F(V) + rf F'(V) V &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + (r - \delta) V F'(V) - r F = 0 \quad \text{equação 23}$$

Observe que esta equação é idêntica a eq.9:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + (\rho - \delta) V F'(V) - \rho F = 0$$

A única diferença é que  $rf$  substitui  $\rho$ . As mesmas condições de contorno se aplicam, e portanto a solução será da mesma forma:  $F(V) = A V^{\beta_1}$

Substituindo  $\rho$  por  $r$ ,  $\beta_1$  será então:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad \text{equação 24}$$

O valor crítico  $V^*$  e a constante  $A$  são dadas por:

$$V^* = \frac{\beta}{\beta - 1} I \quad \text{equação 14}$$

$$A = \frac{V^* - I}{V^{*\beta}} = \frac{(\beta - 1)^{\beta - 1}}{\beta^\beta I^{\beta - 1}} \quad \text{equação 15}$$

**Conclusão:** A solução por Contingent Claims é equivalente a solução por Programação Dinâmica, sob o pressuposto de neutralidade ao risco, isto é a taxa para desconto  $\rho$  é a taxa  $rf$ . Desta forma com ou sem spanning assets podemos obter uma solução para o problema. Porém é importante observar que sem ativos que repliquem o ativo sob avaliação, a solução estará sujeita a uma taxa de desconto assumida. Não há como determinar a correta taxa " $\rho$ " de desconto (a menos que partamos do suposto de considerar restrições sobre as funções utilidade dos investidores), O CAPM não é capaz de determinar a taxa neste cenário.

## Resumo:

Derivando uma equação diferencial via C.Claims:

Se  $V$  segue um MGB:  $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$

Seja a função  $F$ :  $F = F(V)$

Por Ito:  $dF = F'(V) dV + \frac{1}{2} F''(V) (dV)^2$

Substituindo:  $dF = F'(V) \alpha V dt + F'(V) \sigma V dz + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt$

Montando um portfólio  $\phi$ , livre de risco:  $\phi = F - n V$

$$d\phi = dF - n dV$$

$$d\phi = dF - n \alpha V dt - n \sigma V dz$$

Substituindo  $dF$  no portfólio:

$$d\phi = F'(V) \alpha V dt + F'(V) \sigma V dz + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - n \alpha V dt - n \sigma V dz$$

Determinando “ $n$ ” de tal forma que o portfólio  $\phi$  seja livre de risco:

$$F'(V) \sigma V dz = n \sigma V dz$$

$$n = F'(V)$$

Substituindo “ $n$ ” na equação do incremento no valor do portfólio  $\phi$ :

$$d\phi = F'(V) \alpha V dt + F'(V) \sigma V dz + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - F'(V) \alpha V dt - F'(V) \sigma V dz$$

$$d\phi = F'(V) \alpha V dt + \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - F'(V) \alpha V dt$$

$$d\phi = \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt$$

O retorno deste obtido do investimento é  $d\phi$  - custos de manter a posição curta

$$\text{Retorno obtido} = \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - \delta F'(V) V dt$$

Sendo o portfólio  $\phi$  livre de risco seu retorno deve ser igual ao retorno livre de risco.

$$d\phi = r_f \phi dt$$

$$d\phi = r_f (F - F'(V) V) dt$$

Igualando: Retorno esperado = Retorno obtido

$$r_f (F - F'(V) V) dt = \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 dt - \delta F'(V) V dt$$

$$r_f F - r_f F'(V) V = \frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 - \delta F'(V) V$$

$$\frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 - \delta F'(V) V - r_f F + r_f F'(V) V = 0$$

$$\frac{1}{2} F''(V) \sigma^2 V^2 + (r_f - \delta) F'(V) V - r_f F = 0$$

Equação 23

## 4 - Características da Regra Ótima de Investimento

Supondo que existam ativos replicantes, vamos examinar as características da regra ótima de investimento e o valor da oportunidade de investimento conforme dado pelas equações 13, 14, 15 e 24. Algumas soluções numéricas ajudarão a ilustrar os resultados e mostrar como eles dependem dos valores dos vários parâmetros. Como veremos, estes resultados são qualitativamente os mesmos daqueles provenientes dos modelos padrões de avaliação de opções.

Para esta análise, consideraremos que o custo do investimento  $I$  é 1,  $r_f = r = 0,04$ ,  $\delta = 0,04$  e  $\sigma = 0,2$  (taxas anuais). Observe que nos não precisamos saber  $\mu$  nem  $\alpha$ , apenas a diferença entre eles  $\delta$ . Como as taxas de retorno dos projetos podem variar muito de um projeto para outro, este valor de 4% para  $\delta$  pode ser razoável, porém não necessariamente representativo. Por outro lado, o desvio padrão da taxa de retorno do mercado tem apresentado um valor de 20% em média.

Usando as fórmulas desenvolvidas anteriormente:

$$F(V) = AV^{\beta_1} \quad \text{equação 13}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad \text{equação 24}$$

$$V^* = \frac{\beta}{\beta - 1} I \quad \text{equação 14}$$

$$A = \frac{V^* - I}{V^{*\beta}} \quad \text{equação 15}$$

Estes valores dão os seguintes resultados: (*Vide planilha Cap5.xls com gráficos*)

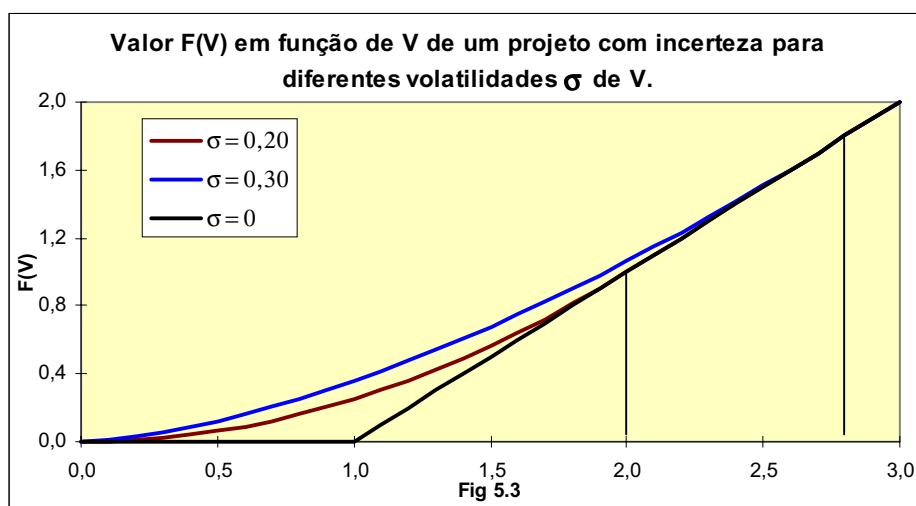
$$\beta_1 = 2$$

$$V^* = 2 \quad I = 1$$

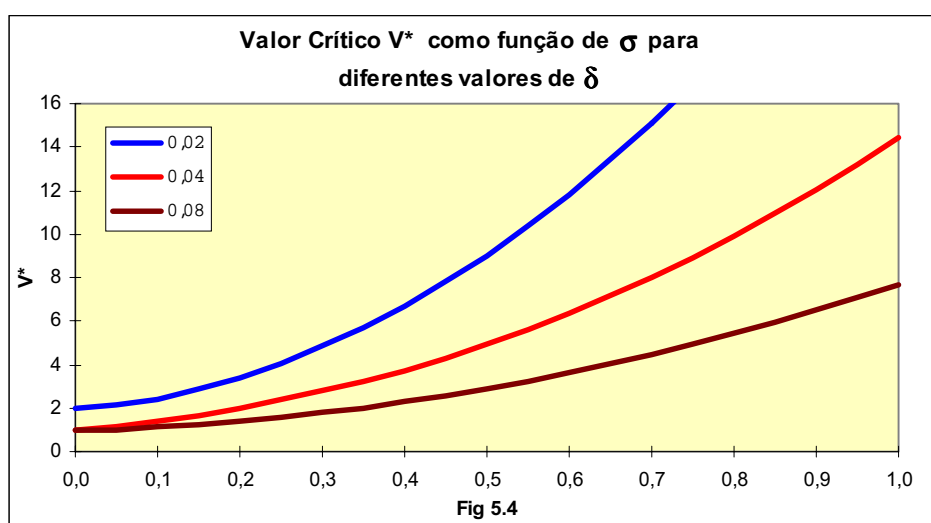
$$A = 1/4$$

A regra tradicional do NPV diz que devemos investir sempre que o valor dos fluxos do projeto forem maiores do que o investimento necessário, ou seja, sempre que  $V > I$ . Vemos que para os valores do caso acima, o valor crítico para se investir é  $V^* = 2I$ , exatamente o dobro. Graficamente, temos:

No gráfico 5.3 podemos observar que o valor do projeto  $F(V)$  aumenta com a volatilidade, assim como o valor crítico  $V^*$ . Isso mostra que se uma maior incerteza futura tende a reduzir o montante de investimentos que a empresa irá fazer, pois cada oportunidade exige um threshold  $V^*$  maior, por outro lado, aumenta o valor da empresa  $F(V)$ , mesmo se ela estiver investindo menos.



No gráfico 5.4 podemos observar mais diretamente a variação de  $V^*$  com a volatilidade  $\sigma$ . Assim, podemos afirmar que o investimento é altamente sensível a volatilidade do valor futuro do projeto, independente das preferências de risco dos gerentes e investidores, e até mesmo da extensão em o risco de  $V$  é correlacionado com o risco de mercado. Mesmo que a empresa seja neutra a risco, e o risco de  $V$  seja totalmente diversificável, um aumento de  $\sigma$  irá aumentar  $V^*$  e por consequência, reduzir os níveis de investimento.



As figuras 5.5 e 5.6 mostram como  $F(V)$  e  $V^*$  variam com  $\delta$ . Fica claro que tanto  $F(V)$  quanto  $V^*$  diminuem quando  $\delta$  aumenta. A razão disso fica clara quando lembramos que  $\delta$  é o convenience yield do projeto, isto é, o seu custo de oportunidade, como se fosse um dividendo. Sabemos que o retorno de um projeto ( $\mu$ ) é a soma de dois componentes: uma taxa de dividendos  $\delta$  mais um ganho de capital  $\alpha$ . Quanto maior  $\delta$ , maior o custo de oportunidade de adiarmos o projeto, pois abrimos mão dos dividendos, ao mesmo tempo que o ganho de capital futuro  $\alpha$  se reduz.

Até agora tratamos  $\sigma$  e  $\delta$  com parâmetros independentes. Se deixarmos  $\delta$  se ajustar à medida que  $\sigma$  varia, então a regra de variação de  $\delta$  será:

$$\begin{aligned} \text{A taxa de retorno:} \quad \mu &= r + \phi \sigma_x \rho_{xm} \\ \mu &= \alpha + \delta \\ \delta &= \mu - \alpha \\ \delta &= r + \phi \sigma_x \rho_{xm} - \alpha \end{aligned}$$

Conforme  $r$  cresce  $F(V)$  cresce (oportunidade de investimento) e  $V^*$  cresce (valor crítico que detona investimento). A razão disso é porque o VP do investimento realizado no tempo  $t$ , ( $I_t$ ) deve ser descontado pela taxa  $r_f$ ,  $VP \text{ de } I_t = I_0 = I_t e^{-r t}$

O VP do projeto que o investidor recebe é:

$$\begin{aligned} \text{Valor do projeto no tempo } t \quad V_t &= V_0 e^{\alpha t} \\ \text{VP do projeto} \quad VP(V_t) &= V_t e^{-\mu t} \\ VP(V_t) &= V_0 e^{\alpha t} e^{-\mu t} = V_0 e^{-(\mu - \alpha) t} \\ VP(V_t) &= V_0 e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Se  $\delta$  é fixo, um incremento em  $r$  reduz o VP do investimento  $I$ , porem não reduz seus payoffs (dividendos).

Observamos que  $r$  aumenta o valor de  $F(V)$  (opção de investir na firma) , também, resulta em menos opções sendo exercidas ( $V^*$  é maior). Desta forma incrementos em  $r_f$  reduzem investimentos por aumentar o valor das opções. Pelo modelo tradicional aumentos em  $r_f$  aumentam o custo de capital.

Essa relação pode ser observada no gráfico 5.7

No gráfico 5.8 podemos ver a relação entre os parâmetros

Partindo das equações 16 e 21:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + (\rho - \delta) \beta - \rho = 0 \quad \text{Equação 16}$$

$$q^* = \beta_1 / (\beta_1 - 1) \quad \text{Equação 21}$$

$$\begin{aligned} q^* (\beta_1 - 1) &= \beta_1 \\ q^* \beta_1 - q^* &= \beta_1 \\ q^* \beta_1 - \beta_1 &= q^* \\ \beta_1 (q^* - 1) &= q^* \\ \beta_1 &= q^* / (q^* - 1) \\ \beta_1^2 &= q^{*2} / (q^* - 1)^2 \end{aligned}$$

Substituindo na Equação 16

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + (r - \delta) \beta - r &= 0 \\
 \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \beta + (r - \delta) \beta - r &= 0 \\
 \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 + (r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2) \beta - r &= 0 \\
 \frac{1}{2} \beta^2 + [(r - \delta)/\sigma^2 - \frac{1}{2}] \beta - r/\sigma^2 &= 0 \\
 \beta^2 + [2(r - \delta)/\sigma^2 - 1] \beta - 2r/\sigma^2 &= 0 \\
 \beta^2 + 2\beta(r - \delta)/\sigma^2 - \beta - 2r/\sigma^2 &= 0 \\
 \beta^2 + 2\beta r/\sigma^2 - 2\beta\delta/\sigma^2 - \beta - 2r/\sigma^2 &= 0 \\
 2r/\sigma^2 = \beta^2 + 2\beta r/\sigma^2 - 2\beta\delta/\sigma^2 - \beta & \\
 2r/\sigma^2 = \{(\sigma^2/2\delta)\beta^2 + 2(\sigma^2/2\delta)\beta r/\sigma^2 - 2(\sigma^2/2\delta)\beta\delta/\sigma^2\} 2\delta/\sigma^2 - \beta & \\
 2r/\sigma^2 = \{\beta^2 \sigma^2 / 2\delta + \beta r/\delta - \beta\} 2\delta/\sigma^2 - \beta & \\
 2r/\sigma^2 = \beta \{\beta \sigma^2 / 2\delta + r/\delta - 1\} 2\delta/\sigma^2 - \beta &
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo:

$$\begin{aligned}
 \beta^2 \sigma^2 / 2\delta + \beta r/\delta - \beta &= q^* = \beta / (\beta - 1) \\
 \beta^2 \sigma^2 / 2\delta + \beta r/\delta - \beta &= \beta / (\beta - 1) \\
 (\beta - 1) \beta^2 \sigma^2 / 2\delta + (\beta - 1) \beta r/\delta - (\beta - 1) \beta &= \beta \\
 (\beta - 1) \beta \sigma^2 / 2\delta + (\beta - 1) r/\delta - (\beta - 1) &= 1 \\
 (\beta - 1) \beta \sigma^2 / 2\delta + 2(\beta - 1) r/2\delta - 2\delta(\beta - 1)/2\delta &= 1 \\
 (\beta - 1) \beta \sigma^2 + 2(\beta - 1) r - 2\delta(\beta - 1) &= 2\delta \\
 (\beta^2 - \beta) \sigma^2 + 2(\beta - 1) r - 2\delta(\beta - 1) &= 2\delta \\
 \beta^2 \sigma^2 - \beta \sigma^2 + 2\beta r - 2r - 2\delta \beta + 2\delta &= 2\delta \\
 \beta^2 \sigma^2 - \beta \sigma^2 + 2\beta r - 2r - 2\delta \beta &= 0 \\
 \beta^2 \sigma^2 + (2r - \sigma^2 - 2\delta) \beta - 2r &= 0 \\
 \frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2 + (r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \delta) \beta - r &= 0 \\
 \frac{1}{2} \beta^2 + (r/\sigma^2 - \frac{1}{2} - \delta/\sigma^2) \beta - r/\sigma^2 &= 0 \\
 \frac{1}{2} \beta^2 + [(r - \delta)/\sigma^2 - \frac{1}{2}] \beta - r/\sigma^2 &= 0
 \end{aligned}$$

OK. Verificando de trás para frente.

$$\begin{aligned}
 2r/\sigma^2 &= \beta \{\beta \sigma^2 / 2\delta + r/\delta - 1\} 2\delta/\sigma^2 - \beta \\
 2r/\sigma^2 &= \{\beta / (\beta - 1)\} 2\delta/\sigma^2 - \beta \\
 2r/\sigma^2 &= q^* 2\delta/\sigma^2 - q^*/(q^* - 1)
 \end{aligned}$$

equação da pg. 157



As figuras 5.9 e 5.10 mostram amostras do caminho para  $V - I$  e  $F(V) = \frac{1}{4} V^2$ .

