

5 – Processos Estocásticos Alternativos

O uso do MGB para modelar o valor V de um projeto em alguns casos não é realista. Iremos analisar o valor de uma oportunidade de investimento, e a regra ótima de investimento quando V segue processos estocásticos alternativos: reversão e média e jump.

5A – Processo de reversão à média

Suponha que V seja um processo de reversão à média do tipo:

$$dV = \eta(\bar{V} - V)Vdt + \sigma Vdz \quad \text{Equação 26}$$

Onde η = velocidade da reversão

\bar{V} = nível “normal” de V

Obs.: se $V > \bar{V} \rightarrow dV$ tem maior probabilidade de ser negativo.
 $V < \bar{V} \rightarrow dV$ tem maior probabilidade de ser positivo.

A **taxa** de mudança esperada em V é:

$$\begin{aligned} \alpha &= E\left[\frac{dV}{V}\right] \frac{1}{dt} = E\left[\frac{\eta(\bar{V} - V)Vdt + \sigma Vdz}{V}\right] \frac{1}{dt} \\ &= \eta(\bar{V} - V) \frac{Vdt}{Vdt} + \frac{\delta VE(dt)}{Vdt} \\ \alpha &= E\left[\frac{dV}{V}\right] \frac{1}{dt} = \eta(\bar{V} - V) \end{aligned}$$

Taxa de mudança esperada em V :

$$E[du] \frac{1}{dt} = \eta(\bar{V} - V)V = \eta\bar{V}V - \eta V^2$$

Note que as raízes de $\eta\bar{V}V - \eta V^2$ são $V = 0$ e $V = \bar{V}$. Também o ponto máximo é $\frac{d}{dv} = \eta\bar{V} - 2\eta V = 0 \therefore V = \bar{V}/2$

$$\frac{d^2}{dv^2} = 2\eta < 0$$

Regra ótima de investimento:

Usando Contingent Claims

μ = taxa de desconto ajustado ao risco;

μ = crescimento + dividendos

$$\mu = \alpha + \delta$$

Note que a taxa esperada de crescimento (α) de V é função de V , pois $\alpha = \eta (\bar{V} - V)$. Então δ também será função de V .

$$\delta = \mu - \alpha$$

$$\delta(V) = \mu - \eta (\bar{V} - V) \quad \text{Equação 27}$$

Usaremos a mesma equação (23), mas com $\delta(V)$ no lugar de δ .

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + (r - \delta(V)) V F'(V) - rF = 0 \quad \text{Equação 23}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + (r - \mu + \eta(\bar{V} - V)) V F'(V) - rF = 0 \quad \text{Equação 28}$$

$F(V)$ deve satisfazer as mesmas condições de contorno vistas anteriormente em (10), (11) e (12), ou seja:

$$F(0) = 0 \quad (10)$$

$$F(V^*) = \Omega(V^*) = V^* - I \quad (11)$$

$$F'(V^*) = \Omega'(V^*) = V^* - 1 \quad (12)$$

Achando a solução para a equação (28).

Definimos uma nova função $h(V)$ tal que

$$F(V) = AV^\theta h(V) \quad \text{Equação 29}$$

onde A e θ são constantes escolhidas de tal forma a fazer $h(V)$ satisfazer uma equação diferencial de solução conhecida.

$$F'(V) = A\theta V^{\theta-1} \cdot h(V) + AV^\theta \cdot h'(V)$$

$$F'(V) = AV^\theta [\theta V^{-1} h(V) + h'(V)]$$

$$F''(V) = A\theta(\theta-1)V^{\theta-2} \cdot h(V) + A\theta V^{\theta-1} h'(V) + A\theta V^{\theta-1} h'(V) + AV^\theta h''(V)$$

$$F''(V) = AV^\theta [\theta(\theta-1)V^{-2} \cdot h(V) + 2\theta V^{-1} h'(V) + h''(V)]$$

Substituindo em 28 temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 A V^\theta [\theta(\theta-1) V^{-2} h(V) + 2\theta V^{-1} h'(V) + h''(V)] + \\
& \quad + [r - \mu + \eta (\bar{V} - V)] V A V^\theta [\theta V^{-1} h(V) + h'(V)] - r A V^\theta h(V) = 0 \\
& \frac{1}{2} \sigma^2 V^\theta [\theta(\theta-1) h(V) + 2\theta V h'(V) + h''(V) V^2] + \\
& \quad + V^\theta [r - \mu + \eta (\bar{V} - V)] [\theta h(V) + h'(V) V] - r V^\theta h(V) = 0 \\
& V^\theta h(V) \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta-1) + (r - \mu + \eta \bar{V}) \theta - r \right] + \\
& \quad + V^{\theta+1} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 V h''(V) + \sigma^2 \theta h'(V) + [r - \mu - \eta (\bar{V} - V)] h'(V) - \eta \theta h(V) \right] = 0 \\
& V^\theta h(V) \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta-1) + (r - \mu + \eta \bar{V}) \theta - r \right] + \tag{30} \\
& \quad + V^{\theta+1} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 V h''(V) + (\sigma^2 \theta + r - \mu - \eta (\bar{V} - V)) h'(V) - \eta \theta h(V) \right] = 0
\end{aligned}$$

A equação 30 vale para todo V, então os termos dentro dos parênteses devem ser igual a zero.

Obs.:

- Seja $Ax + B = 0$
- Esta equação é verdadeira para qualquer A e B se $x = -B/A$
- Mas para que seja verdadeira para qualquer X, só se $A = 0$ e $B = 0$

Escolhemos θ para que o termo do 1º parêntese seja zero:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta-1) + (r - \mu - \eta \bar{V}) \theta - r = 0$$

Esta quadrática tem duas soluções, uma positiva e outra negativa: a condição de contorno $F(0) = 0$ nos leva a usar a solução positiva, pois queremos que o valor de F tenda a zero quando V tende a zero, o que só obteremos se $\theta > 0$.

Então:

$$\theta = \frac{1}{2} + \left(\frac{\mu - r - \eta \bar{V}}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left[\frac{(r - \mu + \eta \bar{V})}{(\sigma^2 - 1/2)} \right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{31}$$

Da segunda linha, temos:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V h''(V) + (\sigma^2 \theta + r - \mu - \eta V) h'(V) - \eta \theta h(V) = 0 \tag{32}$$

Fazendo $x = \frac{2\eta V}{\sigma^2}$, e $h(V) = g(x)$, temos

$$h'(V) = g'(x) \cdot x' = g'(x) \cdot \frac{2\eta}{\sigma^2}$$

$$h''(V) = g''(x) x'' \cdot \frac{2\eta}{\sigma^2} = g''(x) \cdot \left(\frac{2\eta}{\sigma^2}\right)^2$$

Substituindo em (32), temos:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V g''(x) \left(\frac{2\eta}{\sigma^2}\right) + (\sigma^2 \theta + r - \mu - \eta \bar{V} - \eta V) g'(x) \frac{2\eta}{\sigma^2} - \eta \theta g(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V g''(x) \cdot \frac{4^2 \eta^2}{\sigma^2 \sigma^2} + \left(\frac{\sigma^2 \theta + r - \mu - \eta \bar{V} - \eta V}{\sigma^2} \right) 2\eta g'(x) - \eta \theta g(x) = 0$$

$$\underbrace{\frac{2\eta V}{\sigma^2}}_x g''(x) + \left[\underbrace{2\theta + \frac{2(r - \mu - \eta \bar{V})}{\sigma^2}}_b - \underbrace{\frac{2\eta V}{\sigma^2}}_x \right] g'(x) - \theta g(x) = 0$$

$$x g''(x) + (b - x) g'(x) - \theta g(x) = 0 \quad (33)$$

Esta equação é conhecida como a equação de Krummer.

A sua solução é a função hipergeométrica confluyente $g(x; \theta, b(\theta))$, e tem a seguinte representação de série:

$$g(x; \theta, b(\theta)) = 1 + \frac{\theta}{b} x + \frac{\theta(\theta+1)x^2}{b(b+1)2'} + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)x^3}{b(b+1)(b+2)3'} + \dots \quad (34)$$

$$\text{Mas } h(V) = g(x) \Rightarrow h(V) = g(x; \theta, b) = h(V) = \left(\frac{2\eta V}{\sigma^2}; \theta, b \right)$$

Então a solução da equação diferencial em (28) é:

$$F(V) = AV^\theta \left(\frac{2\eta}{\sigma^2} V, \theta, b \right) \quad (35)$$

Onde A é uma constante a ser determinada, que obtemos através das demais condições de contorno. Como a série é infinita, a solução tem que ser numérica.