

5 Incerteza de Preço e Custo

Até agora a única variável aleatória era o preço P , com as demais variáveis mantidas constantes. Vamos incluir agora incerteza sobre o investimento I necessário para o projeto. Assim, o valor V do projeto passa a ser função de I também, $V = V(P,I)$, e $F = F(P,I)$. Vamos assumir que ambos P e I seguem MGB.

$$dP = \alpha_p P dt + \sigma_p P dz_p$$

$$dI = \alpha_I I dt + \sigma_I I dz_I$$

onde $E[dz_p^2] = dt$ e $E[dz_I^2] = dt$

$$Cov(dz_p, dz_I) = E[dz_p \cdot dz_I] - \underbrace{E[dz_p]}_0 \cdot \underbrace{E[dz_I]}_0$$

$$\rho_{dz_p, dz_I} = \rho = \frac{Cov(dz_p, dz_I)}{\sigma_{dz_p} \cdot \sigma_{dz_I}} = \frac{E[dz_p \cdot dz_I]}{\sqrt{dt} \sqrt{dt}}$$

$$E[dz_p \cdot dz_I] = \rho dt$$

lembrando que $Var(dz) = Var(\varepsilon \sqrt{dt}) = dt \cdot Var(\varepsilon) = dt$

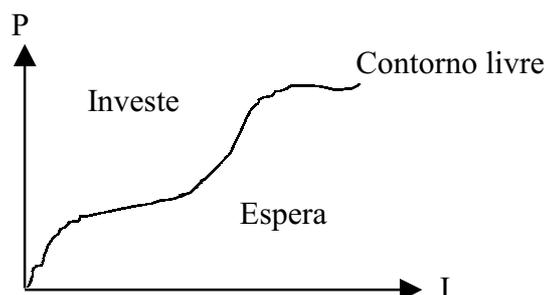
Uma vez investido no projeto, a evolução futura de I é irrelevante, pois nunca mais se investirá novamente. Assim, o valor de um projeto já implantado e em andamento independe de I , e assim $V(P,I) = V(P)$. No caso, $V(P) = \frac{P}{\mu_p - \alpha_p} = \frac{P}{\delta_p}$, onde

$$\mu_p = r + \phi \rho_{Pm} \sigma_p$$

$$\delta_p = \text{Convenience Yield de } P$$

O valor da opção de investir, no entanto, este sim depende de P e I e $F = F(P,I)$. Intuitivamente podemos imaginar que o investimento será adiado se I for alto e P for baixo. O problema do contorno livre agora é um problema em duas dimensões.

O nosso problema agora é em duas dimensões, e ao invés de termos um ponto P^* na reta como threshold dividindo dois segmentos, teremos um contorno livre P^* dividindo duas áreas.



Precisamos montar agora o nosso portfólio livre de risco ϕ , mas agora com duas posições short, uma para cada variável aleatória. Seja $F(P,I)$ o valor da opção de investir no projeto.

$$\begin{aligned}\phi &= F - mP - nI \\ d\phi &= dF - mdP - ndI\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}dF &= \frac{\partial F}{\partial P} dP + \frac{\partial F}{\partial I} dI + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} dP^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} dI^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial I} dPdI \\ dF &= F_P dP + F_I dI + \frac{1}{2} F_{PP} dP^2 + \frac{1}{2} F_{II} dI^2 + F_{PI} dPdI\end{aligned}$$

Substituindo em $d\phi$:

$$d\phi = F_P dP + F_I dI + \frac{1}{2} F_{PP} dP^2 + \frac{1}{2} F_{II} dI^2 + F_{PI} dPdI - mdP - ndI$$

Mas sabemos que

$$\begin{aligned}dP^2 &= \sigma_P^2 P^2 dt \quad \text{e} \quad dI^2 = \sigma_I^2 I^2 dt \\ dPdI &= (\alpha_P P dt + \sigma_P P dz_P)(\alpha_I I dt + \sigma_I I dz_I) \\ dPdI &= \underbrace{\alpha_P \alpha_I P I dt^2}_0 + \underbrace{\alpha_P \sigma_I P I dz_I dt}_0 + \underbrace{\alpha_I \sigma_P P I dz_P dt}_0 + \sigma_P \sigma_I P I dz_P dz_I \\ dPdI &= \sigma_P \sigma_I P I dz_P dz_I \\ dPdI &= \sigma_P \sigma_I P I \rho dt\end{aligned}$$

Note que os termos dP e dI são estocásticos. Como queremos que este portfólio seja sem risco, escolhemos $m = F_P$ e $n = F_I$ para eliminar a incerteza da equação. Assim,

$$\begin{aligned}d\phi &= (F_P - m)dP + (F_I - n)dI + \frac{1}{2} F_{PP} \sigma_P^2 P^2 dt + \frac{1}{2} F_{II} \sigma_I^2 I^2 dt + F_{PI} \sigma_P \sigma_I P I \rho dt \\ d\phi &= \frac{1}{2} F_{PP} \sigma_P^2 P^2 dt + \frac{1}{2} F_{II} \sigma_I^2 I^2 dt + F_{PI} \sigma_P \sigma_I P I \rho dt\end{aligned}$$

Note que não precisamos nos preocupar com a variável tempo, uma vez que a opção é perpétua.

Custo deste portfólio durante dt :	$(m \delta_P P + n \delta_I I) dt$
Ganho de capital durante dt :	$d\phi$
Retorno da aplicação sem risco:	$r \phi dt$

Igualando os dois retornos:

$$\begin{aligned}r\phi dt &= d\phi - mP\delta_P dt - nI\delta_I dt \\ r(F - mP - nI)dt &= d\phi - mP\delta_P dt - nI\delta_I dt \\ r(F - F_P P - F_I I) &= \frac{d\phi}{dt} - F_P P \delta_P - F_I I \delta_I\end{aligned}$$

$$r(F - F_P P - F_I I) = \frac{1}{2} F_{PP} \sigma_P^2 P^2 dt + \frac{1}{2} F_{II} \sigma_I^2 I^2 dt + F_{PI} \sigma_P \sigma_I P I \rho - F_P P \delta_P - F_I I \delta_I$$

$$\frac{1}{2} F_{PP} \sigma_P^2 P^2 + \frac{1}{2} F_{II} \sigma_I^2 I^2 + F_{PI} \sigma_P \sigma_I P I \rho + (r - \delta_P) F_P P + (r - \delta_I) F_I I - rF = 0 \text{ Equação 28}$$

Como existem duas variáveis independentes, (P e I), esta é uma equação diferencial parcial. As condições de contorno são:

Usando VMC e SPC, temos:

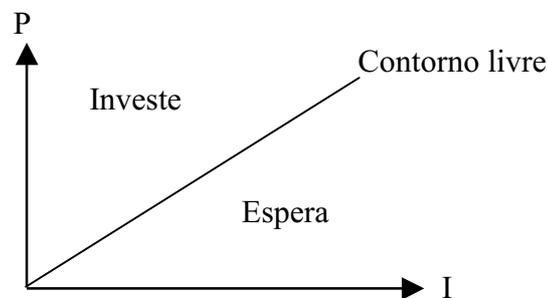
$$F(P^*, I) = V(P^*) - I = \frac{P^*}{\delta_P} - I$$

$$F_P(P^*, I) = V'(P^*) = \frac{1}{\delta_P}$$

$$F_I(P^*, I) = -1$$

A solução de uma equação diferencial parcial é complicada, e na maioria das vezes só existe solução numérica. Neste caso, no entanto, existe uma homogeneidade natural que simplifica a nossa tarefa, reduzindo a equação para um problema unidimensional.

Observe que se dobrarmos os valores de P e I, dobramos também o valor do projeto e o custo do investimento. A decisão ótima depende apenas da relação P/I, e assim é linear. A fronteira de P* é linear e passa pela origem.



Podemos escrever então:

$$F(KP, KI) = Kf(P, I)$$

$$F(P, I) = \frac{1}{K} f(KP, KI)$$

Fazendo $k = 1 / I$, temos:

$$F(P, I) = \frac{1}{1/I} f\left(\frac{P}{I}, 1\right) = I \cdot f\left(\frac{P}{I}, 1\right)$$

$$F(P, I) = I \cdot f\left(\frac{P}{I}\right)$$

Calculando as parcelas:

$$F_P(P, I) = I \cdot f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \frac{1}{I} = f'\left(\frac{P}{I}\right)$$

$$F_P = f'\left(\frac{P}{I}\right)$$

$$F_I(P, I) = f\left(\frac{P}{I}\right) + I \cdot f'\left(\frac{P}{I}\right) \left(-\frac{P}{I^2}\right) = f\left(\frac{P}{I}\right) - f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \frac{P}{I}$$

$$F_I = f\left(\frac{P}{I}\right) - f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \frac{P}{I}$$

$$F_{PP}(P, I) = f''\left(\frac{P}{I}\right) \frac{1}{I}$$

$$F_{II}(P, I) = f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(-\frac{P}{I^2}\right) - \left[f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(-\frac{P}{I^2}\right) \cdot \left(\frac{P}{I}\right) + f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(-\frac{P}{I^2}\right) \right]$$

$$F_{II}(P, I) = -f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(\frac{P}{I^2}\right) + f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(\frac{P}{I^2}\right) \cdot \left(\frac{P}{I}\right) + f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(\frac{P}{I^2}\right)$$

$$F_{II}(P, I) = f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(\frac{P^2}{I^3}\right)$$

$$F_{II} = f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(\frac{P^2}{I^3}\right)$$

$$F_{PI}(P, I) = \frac{\partial}{\partial I} \left[\frac{\partial}{\partial P} \left[I \cdot f\left(\frac{P}{I}\right) \right] \right]$$

$$F_{PI}(P, I) = \frac{\partial}{\partial I} \left[f'\left(\frac{P}{I}\right) \right] = f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(-\frac{P}{I^2}\right)$$

$$F_{PI} = -f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \frac{P}{I^2}$$

Substituindo na equação 28:

$$\frac{1}{2} F_{PP} \sigma_P^2 P^2 + \frac{1}{2} F_{II} \sigma_I^2 I^2 + F_{PI} \sigma_P \sigma_I P I \rho + (r - \delta_P) F_P P + (r - \delta_I) F_I I - rF = 0 \text{ Equação 28}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''\left(\frac{P}{I}\right) \frac{1}{I} \sigma_p^2 P^2 + \frac{1}{2} f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \left(\frac{P^2}{I^3}\right) \sigma_I^2 I^2 - f''\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \frac{P}{I^2} \sigma_p \sigma_I \rho \\ + (r - \delta_p) f'\left(\frac{P}{I}\right) P + (r - \delta_I) \left[f\left(\frac{P}{I}\right) - f'\left(\frac{P}{I}\right) \cdot \frac{P}{I} \right] I - rI \cdot f\left(\frac{P}{I}\right) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $P/I = x$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''(x) \frac{1}{I} \sigma_p^2 P^2 + \frac{1}{2} f''(x) \cdot \left(\frac{P^2}{I}\right) \sigma_I^2 - f''(x) \cdot \frac{P}{I^2} \sigma_p \sigma_I \rho \\ + (r - \delta_p) f'(x) P + (r - \delta_I) \left[f(x) - f'(x) \cdot \frac{P}{I} \right] I - rI \cdot f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''(x) \cdot \sigma_p^2 \frac{P^2}{I} + \frac{1}{2} f''(x) \cdot \sigma_I^2 \frac{P^2}{I} - f''(x) \cdot \sigma_p \sigma_I \rho \cdot \frac{P^2}{I} \\ + (r - \delta_p) f'(x) P + (r - \delta_I) f(x) I - (r - \delta_I) \cdot f'(x) \cdot P - rI \cdot f(x) = 0 \end{aligned}$$

Dividindo tudo por I:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''(x) \cdot \sigma_p^2 \frac{P^2}{I^2} + \frac{1}{2} f''(x) \cdot \sigma_I^2 \frac{P^2}{I^2} - f''(x) \cdot \sigma_p \sigma_I \rho \cdot \frac{P^2}{I^2} \\ + (\delta_I - \delta_p) f'(x) \frac{P}{I} + (r - \delta_I) f(x) - r \cdot f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''(x) \cdot \sigma_p^2 x^2 + \frac{1}{2} f''(x) \cdot \sigma_I^2 x^2 - f''(x) \cdot \sigma_p \sigma_I \rho \cdot x^2 \\ + (\delta_I - \delta_p) f'(x) x - \delta_I f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} [\sigma_p^2 + \sigma_I^2 - 2\sigma_p \sigma_I \rho] x^2 f''(x) + (\delta_I - \delta_p) x f'(x) - \delta_I f(x) = 0 \quad \text{Equação 29}$$

Esta é uma equação diferencial ordinária para a função $f(x)$. A sua solução geral é:

$$f(x) = A_1 x^{\beta_1} + A_2 x^{\beta_2}$$

Podemos verificar que $A_2 = 0$ fazendo $x \rightarrow \infty$. Nesse caso necessariamente temos que ter $f(x) \rightarrow 0$, o que só ocorrerá se $A_2 = 0$. Então:

$$f(x) = A_1 x^{\beta_1}$$

Condições de contorno:

$$F(P^*, I) = V(P^*) - I = \frac{P^*}{\delta_p} - I \quad \text{onde} \quad F(P, I) = I \cdot f(x)$$

Substituindo, temos:

$$I^* \cdot f(x^*) = \frac{P^*}{\delta_p} - I$$

$$f(x^*) = \frac{P^*}{I^*} \cdot \frac{1}{\delta_p} - 1$$

$$\text{VMC} \quad f(x^*) = \frac{x^*}{\delta_p} - 1$$

$$\text{SPC} \quad f'(x^*) = \frac{1}{\delta_p}$$

Substituindo na solucao de $f(x) = A_1 x^{\beta_1}$:

$$\text{VMC} \quad A_1 x^{*\beta_1} = \frac{x^*}{\delta_p} - 1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \left(\frac{x^* - \delta_p}{\delta_p} \right) x^{*-\beta_1}$$

$$\text{SPC} \quad A_1 \beta_1 x^{*\beta_1-1} = \frac{1}{\delta_p} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{\delta_p \beta_1 x^{*\beta_1-1}}$$

Igualando os termos,

$$\left(\frac{x^* - \delta_p}{\delta_p} \right) x^{*-\beta_1} = \frac{1}{\delta_p \beta_1 x^{*\beta_1-1}}$$

$$\frac{x^* - \delta_p}{\delta_p} = \frac{x^{*\beta_1}}{\delta_p \beta_1 x^{*\beta_1-1}}$$

$$(x^* - \delta_p) \beta_1 = x^*$$

$$x^* (\beta_1 - 1) = \beta_1 \delta_p$$

$$\boxed{x^* = \frac{P^*}{I^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta_p}$$