3. Processos Estocásticos e o Lema de Ito

3.1. Processos Estocásticos

3.1.1. Definição (I)

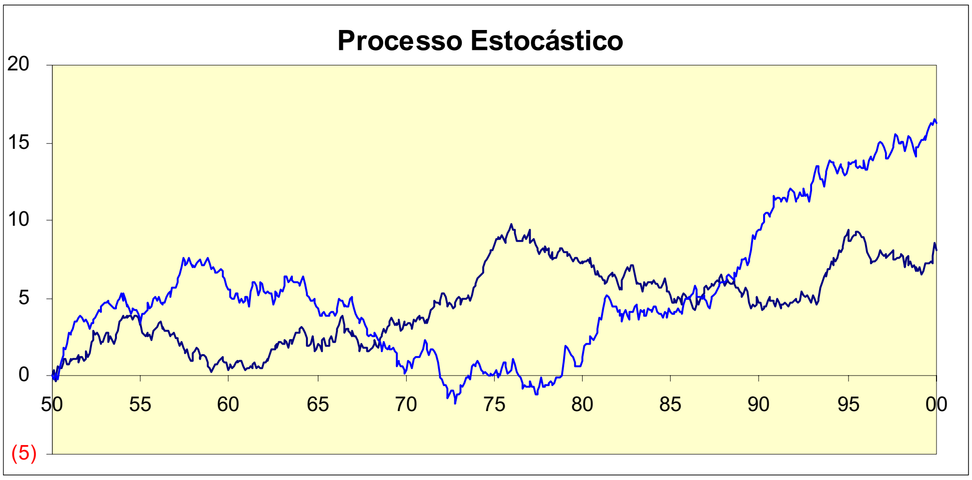
Um processo estocástico é uma variável que se desenvolve no tempo de uma maneira que é pelo menos parcialmente aleatória e imprevisível. De uma maneira mais formal, um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade para a evolução de uma variável *x* durante um tempo *t*. Ex. Ação da IBM => flutua aleatoriamente, mas ao longo do percurso tem uma taxa de crescimento esperado positiva que compensa investidores pelo risco de manter a ação.

3.1.2. Definição (II)

Seja W um conjunto, onde w ∈ W denota um estado da natureza. Seja também uma função f tal que

$$f: R \times W \rightarrow R \qquad ou \qquad f(x,w),\ x \in R \text{ e } w \in W$$

tem a seguinte propriedade: *Dado um* w ∈ W, $f(\circ, w)$ *torna-se função de x. Valores diferentes de w temos valores diferentes de x.* Assim podemos ter duas funções como na figura:



Quando x representa o tempo então $f(x,w_1)$ e $f(x,w_2)$ representam duas trajetórias diferentes que dependem de estados do mundo. W representa a randomicidade e a função $f(x,w)$ é uma função aleatória ou um processo estocástico.

3.1.3. Classificação de Processos Estocásticos

Os processos estocásticos podem ser classificados da seguinte maneira:

- Processos Estacionários: as propriedade estatísticas (média e variância) desta variável são constantes no tempo. Ex: temperatura o Rio. Num processo estritamente estacionário, alem da media e variância, todos os seus demais momentos também devem ser necessariamente constantes.
- Processos não-estacionários: o valor esperado da variável aleatória pode crescer sem limite e sua variância, T anos a frente, aumenta com T;
- Processos de Tempo Discreto: *t* é uma variável que assume apenas valores discretos. O valor da variável objeto somente pode mudar apenas nestes pontos.
- Processos de Tempo Contínuo: *t* é uma variável contínua;
- Processos de Estado Discreto: A variável objeto pode assumir somente alguns valores discretos.
- Processos Estado Contínuo: A variável objeto pode assumir qualquer valor.

3.1.4. Caminho Aleatório Estado Discreto e Tempo Discreto (Random Walk)

Um dos processos estocásticos mais simples em tempo discreto e estado discreto é o random walk, onde x_t é uma variável aleatória e x_0 é conhecida em $t = 0$. Em $t = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow x_t$ assume saltos de tamanho 1 para cima ou para baixo, sempre com probabilidade ½. Como os saltos são independentes entre si, podemos descrever a dinâmica de xt como:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{Eq. 1}$$

onde ε_t é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade

$$prob(\varepsilon_t = 1) = prob(\varepsilon_t = -1) = \frac{1}{2} \quad (t = 1,2,3,...)$$

Distribuição de Probabilidade de x_t pode ser encontrada da distribuição binomial. Para *t* passos, a probabilidade de se terem *n* saltos negativos e, consequentemente, *t* - *n* saltos positivos será:

$$\binom{t}{n}(\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{2})^{t-n} = \binom{t}{n}(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^{t-n} = \binom{t}{n}(\frac{1}{2})^{n+t-n} = \binom{t}{n}\cdot 2^{-t} \qquad \text{Eq. 2}$$

Assim, se houver *n* saltos negativos e *t* - *n* saltos positivos num espaço de tempo *t*, o valor de *x* será - *n* + (*t* - *n*) = *t* - 2n. A probabilidade de *x* assumir o valor *t* - 2n no tempo *t* é dado por:

$$prob(x = t - 2n) = \binom{t}{n}\cdot 2^{-t}$$

x_t é um processo não-estacionário, pois sua variância aumenta com t, embora o seu valor esperado seja zero, pois a probabilidade de subir ou descer é a mesma ($p = q = ½$). Assim, temos que $E_0(x_t) = 0 \quad \forall \quad t$.

Uma generalização deste processo é alterar os valores de p e q, onde $q = 1\text{-}p$. Se $p > q$, teremos um random walk com drift, e $E_0(x_t) > 0 \quad \forall \quad t > 0$

Outra maneira de generalizar o processo é fazer com que o tamanho do salto em cada t seja uma variável aleatória contínua. Podemos, por exemplo, fazer com que o tamanho de cada salto tenha uma distribuição normal, com média zero e desvio padrão σ. Esta processo é conhecido como *processo estocástico em tempo contínuo e estado discreto*.

Outro exemplo de processo estocástico em tempo discreto e com variável contínua é o Processo Autoregressivo de Primeira Ordem (AR(1)). Esse processo é estacionário, e é um processo de reversão à média, isto é, no longo prazo x tende a um valor constante.

$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \xi_t \qquad \text{Eq. 3}$$

onde δ e ρ são constantes e $-1<\rho<1$ e $\xi \sim N(0,1)$

$$E(x_t) = E(\delta + \rho x_{t-1} + \xi_t)$$
$$E(x_t) = E(\delta + \rho x_{t-1}) + E(\xi_t)$$
$$E(x_t) = \delta + \rho x_{t-1}$$

Podemos encontrar o Valor Esperado de Longo Prazo da seguinte forma:

$$E_0(x_n) = E_1[E_2[\cdots E_{n-2}[E_{n-1}(x_n)]...]]$$

Substituindo o valor de $x_n = \delta + \rho x_{n-1} + \xi_n$, e eliminando os parênteses para maior clareza, temos:

$$E_0(x_n) = E_1[E_2[\cdots E_{n-2}[E_{n-1}(x_n)]...]]$$
$$E_0(x_n) = E_1 E_2 \cdots E_{n-2} E_{n-1}(\delta + \rho x_{n-1} + \xi_n)$$

Mas em $t = n\text{-}1$, δ, ρ e x_{n-1} são conhecidos, e sabemos que $\xi_n \cong N(0,1)$. Então

$$E_{n-1}(\delta + \rho x_{n-1} + \xi_n) = \delta + \rho x_{n-1}$$

Substituindo

$$E_0(x_n) = E_1 E_2 \cdots E_{n-2} E_{n-1}(\delta + \rho x_{n-1} + \xi_n)$$
$$E_0(x_n) = E_1 E_2 \cdots E_{n-2}(\delta + \rho x_{n-1})$$

Substituindo o valor de $x_{n-1} = \delta + \rho x_{n-2} + \xi_{n-1}$

$$E_0(x_n) = E_1E_2E_3 \cdots E_{n-3}E_{n-2}[\delta + \rho(\delta + \rho x_{n-2} + \xi_{n-1})]$$
$$E_0(x_n) = E_1E_2E_3 \cdots E_{n-3}E_{n-2}(\delta + \rho\delta + \rho^2 x_{n-2} + \rho\xi_{n-1})$$
$$E_0(x_n) = E_1E_2E_3 \cdots E_{n-3}\,(\delta + \rho\delta + \rho^2 x_{n-2})$$

Substituindo o valor de $x_{n-2} = \delta + \rho x_{n-3} + \xi_{n-2}$ e repetindo todas as operações anteriores até atingirmos E_1, teremos

$$E_0(x_n) = E_1E_2E_3 \cdots E_{n-4}E_{n-3}\,(\delta + \rho\delta + \rho^2(\delta + \rho x_{n-3} + \xi_{n-2}))$$
$$E_0(x_n) = E_1E_2E_3 \cdots E_{n-4}E_{n-3}\,(\delta + \rho\delta + \rho^2\delta + \rho^3 x_{n-3} + \rho^2\xi_{n-2})$$
$$E_0(x_n) = E_1E_2E_3 \cdots E_{n-4}\,(\delta(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 x_{n-3})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_0(x_n) = \delta(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1}) + \rho^n x_0$$
$$E_0(x_n) = \delta\frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \rho^n x_0$$

Note que ρ é um número que está entre -1 e 1, logo quanto maior o valor de n, mais próximo de zero ρ^n estará. Assim a expressão para $E_0(x_n)$ quando $n \rightarrow \infty$ é

$$\boxed{E_0(x_n) = \frac{\delta}{1-\rho}}$$

Uma outra maneira de encontrarmos o Valor Esperado de Longo Prazo é verificar que como este processo é estacionário, o Valor Esperado de Longo Prazo tende a uma constante, que podemos calcular fazendo $x_t = x_{t-1} = x$

$$x = \delta + \rho x + \xi$$
$$x(1-\rho) = \delta + \xi$$
$$x = \frac{\delta + \xi}{1-\rho}$$
$$E(x) = \frac{1}{1-\rho}E(\delta + \xi)$$
$$E(x) = \frac{1}{1-\rho}[E(\delta) + E(\xi)]$$
$$E(x) = \frac{\delta}{1-\rho}$$

AR(1) também é considerado um processo de reversão para a média, pois x_t tende a reverter-se para o seu valor esperado de longo prazo.

3.2. Processo de Markov

Ambos os processos que vimos anteriormente, seja o Random Walk quanto o AR(1), satisfazem a propriedade de Markov, portanto, são chamados de processo de Markov. Processo de Markov é um tipo de processo estocástico onde somente o valor presente de uma variável é relevante para prever o futuro. A vantagem do processo de Markov é que ele simplifica a análise dos processos estocásticos.

Geralmente os preços das ações são modelados usando o *Processo de Markov*. Por exemplo, suponha que o preço de uma ação da IBM hoje custe \$100,00. Se o preço desta ação segue um processo de *Markov*, a nossas previsões sobre a flutuação futura dos preços desta ação não devem levar em conta a flutuação ocorrida semana passada, mês passado ou no ano passado. A única informação importante que temos para avaliar esta ação é seu preço atual, ou seja, \$100,00. Normalmente os preços futuros são expressos em termos de distribuições de probabilidades. A propriedade de *Markov* nos diz que a distribuição de probabilidades dos preços em qualquer tempo no futuro depende única e exclusivamente do preço atual da ação, \$100,00.

A propriedade de *Markov* para o preço das ações é consistente com a *Forma Fraca da Eficiência de Mercado*, que diz que o preço atual de uma ação já reflete plenamente todas as informações que estão contidas na seqüência histórica do preço. Daí segue que não existe nenhum benefício em se prever as movimentações futuras no preço das ações baseados em séries históricas dos preços, ou seja, a propriedade de *Markov* se verifica[1].

Existem também outras duas formas de eficiência de mercado, a *Forma Semi-Forte e a Forma Forte*. A *Forma Semi-Forte* diz que o preço atual da ação não somente refletem todas as informações contidas nos dados históricos, mas também reflete todos os conhecimentos públicos disponíveis. A *Forma Forte* vai além, dizendo que o preço atual reflete também todas as informações, sejam elas insider ou públicas.

[1] Uma boa referência sobre Eficiência de Mercado é o livro *Security Analysis and Portfólio Management*, Donald E. Fischer e Ronald J. Jordan, Prentice Hall, Inc..