3.4. Movimento Browniano Generalizado - Processo de Ito

Ao descrevermos o movimento Browniano nos itens anteriores, estabelecemos que os parâmetros *drift* e variância seriam constantes. Mas, se esses parâmetros não fossem constantes, e variassem, por exemplo, com o tempo. Qual processo que a equação estocástica seguiria? Como ficaria a média e variância deste processo? Ainda seria um processo de Markov? Tentaremos responder essas questões agora.

A generalização do Movimento Browniano, conhecida como Processo de Ito, é dada pela seguinte equação

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad \text{Equação 11}$$

onde novamente dz é um incremento do Processo de *Wiener* e a(x,t) e b(x,t) são funções (não aleatórias) conhecidas. As variáveis $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são também conhecidas como parâmetros *drift* e variância, mas agora são funções do tempo e do estado atuais.

Do mesmo modo que fizemos para o Processo de *Markov*, o Processo de *Wiener* e o Processo de *Wiener* Generalizado, iremos calcular a média

$$E(dx) = E[a(x,t)dt + b(x,t)dz]$$
$$E(dx) = a(x,t)dt + b(x,t)E(dz)$$
$$E(dx) = a(x,t)dt$$

e Variância

$$Var(dx) = E\{[dx - E(dx)]^2\}$$
$$Var(dx) = E[(dx)^2] - [E(dx)]^2$$
$$Var(dx) = E\{[a(x,t)dt + b(x,t)dz]^2\} - [a(x,t)dt]^2$$
$$Var(dx) = E\{[a(x,t)dt]^2 + 2a(x,t)b(x,t)dtdz + [b(x,t)dz]^2\} - [a(x,t)dt]^2$$
$$Var(dx) = 2a(x,t)b(x,t)dtE(dz) + E\{[b(x,t)dz]^2\}$$
$$Var(dx) = [b(x,t)]^2 E(\varepsilon^2)dt$$
$$Var(dx) = [b(x,t)]^2 dt$$

Os parâmetros a(x,t) e b(x,t) são conhecidos como taxa de crescimento esperado instantâneo e taxa de variância instantânea, respectivamente, do Processo de Ito.

3.4.1. Movimento Geométrico Browniano

Movimento Geométrico Browniano (MGB) é um caso particular do Processo de Ito. Geralmente é o processo utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeira e econômicas. A restrição que existe ao uso do Movimento Geométrico Browniano, é o fato de que este processo pode divergir levando $x(t)$ para o infinito, e assim alguns modelos que seguem o MGB podem não ser muito realistas.

No MGB os parâmetros *drift* e variância são dados por

$$a(x,t) = \alpha x$$
$$b(x,t) = \sigma x$$

Se substituirmos esses valores na equação do Processo de Ito, teremos

$$dx = \alpha x\, dt + \sigma x\, dz \qquad \text{Equação 12}$$

No caso anterior do Movimento Aritmético Browniano (MAB), onde $dx = \alpha\, dt + \sigma\, dz$, vimos que dx tinha uma distribuição Normal, com parâmetros $N \approx (\alpha, \sigma)$. Agora, no caso do MGB, qual seria a distribuição de dx? Observe que se dividirmos o MGB por x, transformamos o processo num MAB:

$$dx = \alpha x\, dt + \sigma x\, dz$$
$$\frac{dx}{x} = \alpha\, dt + \sigma\, dz$$
$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha\, \Delta t + \sigma\, \Delta z$$

Assim, as variações proporcionais de x, (Δx / x), tem uma distribuição normal, pois Δx / x segue uma MAB. Mas podemos ver que:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$$

Δx / x é o incremento no log de x e tem distribuição normal pois o seu processo é um MAB, portanto, podemos concluir que se log x tem distribuição normal, x terá uma distribuição lognormal.

Qual será a média e variância de uma variável $x(t)$ que segue um processo MGB? Sabemos que $x(t)$ tem uma distribuição lognormal, então podemos dizer que $F(x) = \ln x$ terá uma distribuição normal.

Seja uma função F de uma variável aleatória $x(t)$, $F(x)$, dada por $F(x) = \ln x$, onde $x(t)$ tem distribuição log-normal. Para uma função de duas variáveis, por Taylor temos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2$$

onde os termos com expoente igual ou maior que dois em t são desprezados, assim como os expoentes maior que dois em dx.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$dF = \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}(dx)^2$$

$$dF = \frac{1}{x}(\alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz) - \frac{1}{2x^2}(\alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz)^2$$

$$dF = \alpha\, dt + \sigma\, dz - \frac{1}{2x^2}(\alpha^2 x^2 \underbrace{dt^2}_{0} + 2\alpha\,\sigma \underbrace{dt\, dz}_{0} + \sigma^2 x^2 \underbrace{dz^2}_{1})$$

$$dF = \alpha\, dt + \sigma\, dz - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dF = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\, dz$$

Nota:

$$(dz)^2 = \left(\varepsilon\sqrt{dt}\right)^2 = \varepsilon^2 dt$$

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - \underbrace{E^2(\varepsilon)}_{0} = E(\varepsilon^2) = 1 \quad \text{pois} \quad \varepsilon \approx N(0{,}1)$$

$$E(\varepsilon^2 dt) = dt\, E(\varepsilon^2) = dt$$

$$Var(\varepsilon^2 dt) = \underbrace{dt^2}_{0} Var(\varepsilon^2) = 0$$

Se Var $(dz)^2$ = 0, temos $dz^2 \approx N(dt, 0)$. Vemos então que dz^2 é determinístico e o seu valor é igual ao seu valor esperado E$(dz)^2 = dt$

Então temos:

$$dF = (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\, dz \qquad \text{ou} \qquad dF \sim N[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt]$$

Considerando um intervalo de tempo (0,T), fazendo $x(T) = x_T$, $x(0) = x_0$ e substituindo o valor de $F(x)$, encontraremos

$$F(x_t) - F(x_0) \sim N[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T]$$

$$F(x_t) \sim N[F(x_0) + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T]$$

mas $F(x_t) = \ln x,$ então

$$\ln x_t \quad \sim \quad N[\underbrace{\ln x_0 + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T}_{u}, \underbrace{\sigma^2 T}_{v^2}\ ] \quad \sim \quad N[u, v^2]$$

Fazendo as substituições de variáveis, teremos

$$u = \ln x_0 + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T$$

$$v^2 = \sigma^2 T$$

$$Y = \ln x_T \Leftrightarrow x_T = e^Y$$

teremos

$$Y = \ln x_T \sim N(u, v^2)$$

cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-u}{v}\right)^2}$$

Note que queremos achar E(xT) e Var (xT). Como sabemos que:

$$E(x_T) = E(e^Y)$$

$$Var(x_T) = Var(e^Y) = E(e^{2Y}) - E^2(e^Y)$$

basta então acharmos estes parâmetros de e^Y.

Utilizando o conceito de *função geradora de momentos*, podemos achar o valor esperado e variância de $F(x)$, que é uma função da variável aleatória x_T.

$$M_Y(k) = E(e^{kY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kY} f(Y) dY$$

substituindo o valor de $f(Y)$, teremos:

$$E(e^{kY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kY} [\frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{-\frac{(Y-u)^2}{2v^2}}] dY$$

$$E(e^{kY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{kY - \frac{(Y-u)^2}{2v^2}} dY$$

$$E(e^{kY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{\frac{2v^2 kY - (Y-u)^2}{2v^2}} dY$$

Agora, iremos completar o quadrado do numerador do expoente, $2v^2kY - (Y - u)^2$. O nosso Objetivo aqui é separar o expoente de e para que fique na forma $e^Y \cdot e^w$.

$$\begin{aligned}2v^2kY-(Y-u)^2 &= 2v^2kY-(Y-u)^2 + \quad (v^4k^2 - v^4k^2)+(2v^2ku-2v^2ku)\\ &= -v^4k^2+2v^2kY-2v^2ku-(Y-u)^2 \quad +v^4k^2+2v^2ku\\ &= -[v^4k^2-2v^2k(Y-u)+(Y-u)^2] \quad +v^4k^2+2v^2ku\\ &= -[v^2k-(Y-u)]^2 \quad +v^4k^2+2v^2ku\\ &= -[Y-(u+v^2k)]^2 \quad +v^4k^2+2v^2ku\end{aligned}$$

Voltando para a expressão de $E(e^{kY})$ com a igualdade anterior, teremos

$$E(e^{kY}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}}e^{-\frac{[Y-(u+v^2k)]^2}{2v^2}}e^{\frac{v^4k^2+2v^2ku}{2v^2}}dY$$

$$E(e^{kY}) = e^{uk+\frac{v^2k^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}}e^{-\frac{[Y-(u+v^2k)]^2}{2v^2}}dY$$

Agora, considere a seguinte troca de variáveis

$$w = \frac{Y-(u+v^2k)}{v}$$

Derivando esta expressão em relação a Y, encontraremos:

$$\frac{dw}{dY} = \frac{1}{v} \Rightarrow dY = vdw$$

Substituindo ambos os valores na expressão de $E(e^{kY})$, teremos uma nova expressão, mas agora com a integral bastante familiar.

$$E(e^{kY}) = e^{uk+\frac{v^2k^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}}e^{-\frac{w^2}{2}}(vdw)$$

$$E(e^{kY}) = e^{uk+\frac{v^2k^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw}_{1}$$

o integrando nada mais é do que a função densidade de probabilidade para uma variável com distribuição normal padronizada, ou seja com média zero e variância 1. Ao resolvermos esta integral encontraremos o valor 1 que é a área abaixo da curva de densidade de probabilidades. Assim encontramos a seguinte expressão para $E(e^{kY})$:

$$E(e^{kY}) = e^{uk+\frac{v^2k^2}{2}}$$

Voltando com os valores de Y, *u* e *v* definidos anteriormente e fazendo k=1 teremos finalmente

$$E(e^{\ln x_T}) = e^{\ln x_0 + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T + \frac{\sigma^2 T}{2}}$$

$$E(x_T) = e^{\ln x_0} e^{\alpha T - \frac{\sigma^2}{2}T + \frac{\sigma^2 T}{2}}$$

$$\boxed{E(x_T) = x_0 e^{\alpha T}}$$

O cálculo da variância é mais simples. Considere a definição de variância:

$$Var(e^Y) = E[(e^Y)^2] - [E(e^Y)]^2$$
$$Var(e^Y) = E[e^{2Y}] - x_0^2 e^{2\alpha T}$$

para continuarmos, devemos calcular o valor de $E(e^{2Y})$, que é imediato, pois basta substituir k por 2 na equação encontrada na demonstração anterior.

$$E(e^{kY}) = e^{uk + \frac{v^2 k^2}{2}}$$
$$E(e^{2Y}) = e^{2(u+v^2)}$$

Voltando para a expressão da variância teremos:

$$Var(e^Y) = e^{2(u+v)} - x_0^2 e^{2\alpha T}$$

substituindo os valores de *u* e *v* encontraremos:

$$Var(e^{\ln x_T}) = e^{2\ln x_0 + 2\alpha T + \sigma^2 T} - x_0^2 e^{2\alpha T}$$

$$\boxed{Var(x_T) = x_0^2 e^{2\alpha T}(e^{\sigma^2 T} - 1)}$$

Agora, calcularemos o valor esperado de $x(t)$, dado que $x(0)=x_0$ e considerando $\sigma=0$. Esta última suposição nos diz que *x* é totalmente determinístico e podemos prever valores futuros de *x* com certeza. Para isso devemos resolver a seguinte equação diferencial ordinária:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$
$$dx = \alpha x dt$$
$$\frac{dx}{x} = \alpha dt$$
$$dt = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dx}{x}$$

Aplicando integral em ambos os lados da equação teremos

$$\int_0^t du = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dk}{k}$$

$$t - 0 = \frac{1}{\alpha} \ln(k)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\alpha t = \ln(x) - \ln(x_0)$$

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \ln(e^{\alpha t})$$

$$\ln(x) = \ln(x_0 e^{\alpha t})$$

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$$

Assim, $E(x_t) = x_0 e^{\alpha t}$. Note que o valor esperado de x_T para o caso determinístico é o mesmo que o valor esperado para o caso aleatório. E, obviamente, a variância não será a mesma para ambos os casos.

O valor esperado e a variância de $x(t)$ poderão ser utilizados para calcular o valor presente descontado esperado de $x(t)$ sobre algum período de tempo. Como exemplo, temos:

$$E[\int_0^\infty x(t) e^{-rt} dt] = \int_0^\infty x_0 e^{-(r-\alpha)t} dt = \frac{x_0}{r - \alpha} \qquad \text{Equação 14}$$

Esta fórmula será útil mais tarde quando necessitarmos calcular o valor presente descontado de fluxo de lucro que segue um Movimento Geométrico Browniano.

Do mesmo modo que fizemos com o Movimento Browniano, iremos agora dar alguns exemplos de MGB. Utilizaremos parâmetros compatíveis com os parâmetros do NYSE, par exemplificar.

α = Drift Rate = 9% a.a.
σ = Variância = 20% a.a.

Com a equação 15 a seguir, foi montado o gráfico 3.3 que mostra 3 caminhos possíveis calculados com intervalo de tempo Δt igual a 1 mês. A equação do MGB fica:

$$\Delta x = \alpha x \Delta t + \sigma x \Delta z$$

$$x_t - x_{t-1} = \alpha x_{t-1} \Delta t + \sigma x_{t-1} \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

$$x_t = x_{t-1} + 0.09 x_{t-1} \Delta t + 0.20 x_{t-1} \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

Como os dados disponíveis estão em períodos de um mês, ao invés de um ano, dividimos o Δt original, que é de um ano, por 12.

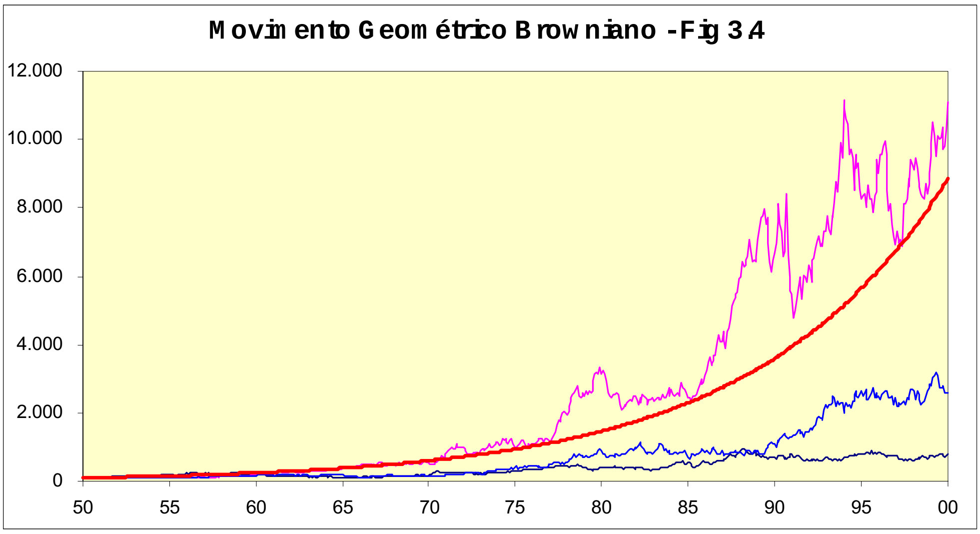
$\alpha\Delta t$ = 0.09 (1/12) = 0.007500
$\sigma\Delta t$ = 0.20 ($\sqrt{1/12}$) = 0.057735

$$x_t = x_{t-1} + 0.09 x_{t-1} \Delta t + 0.20 x_{t-1}\, \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$
$$x_t = x_{t-1} + 0.09 x_{t-1} \frac{1}{12} + 0.20 x_{t-1}\, \varepsilon_t \sqrt{\frac{1}{12}}$$
$$x_t = x_{t-1} + 0.0075 x_{t-1} + 0{,}057735 x_{t-1}\, \varepsilon_t$$

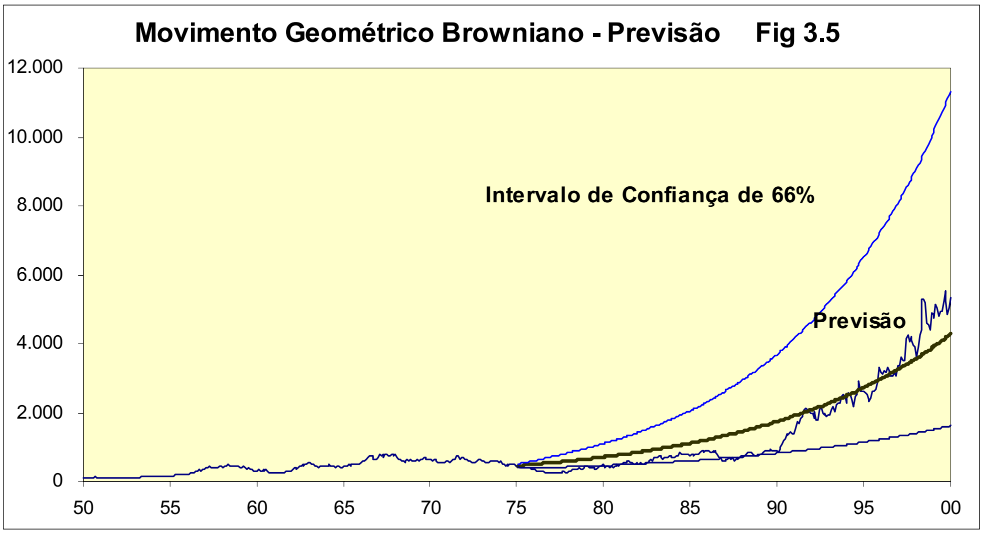
$$x_t = 1.0075 x_{t-1} + 0{,}057735 x_{t-1}\, \varepsilon_t \qquad \text{Equação 15}$$

Começaremos o caminho em 1950 e x_{1950} = 100 e calcularemos também teremos a linha de tendência, obtida quando $\varepsilon_t = 0$, isto é, a parte determinística do processo:

$$x_t = 1.0075 x_{t-1}$$



O gráfico 3.5 mostra a previsão ótima para este processo. Como anteriormente, um caminho será gerado de 1950 até 1974 e então as previsões para $x(t)$ serão feitas até 2000. Como o MGB é um Processo de *Markov*, então ele segue a propriedade de *Markov* que diz que somente o valor atual de $x(t)$ é necessário para realizar as previsões para o futuro.



Para criar o modelo de previsão, utilizamos a equação para o valor esperado de $x(t)$ demonstrada anteriormente:

$$E(x_t) = x_0 e^{\alpha t}$$
$$E(x_{1974+T}) = x_{1974} e^{\alpha T}$$

como α é um parâmetro dado por unidade de tempo anual e T está em unidade de tempo mensal, então para compatibilizar as unidades devemos fazer:

$$E(x_{1974+T}) = x_{1974} e^{\frac{\alpha}{12}T}$$

como α=0.09 ao ano, então α=0.09/12=0.0075 ao mês. Logo, a equação para o valor esperado de $x(t)$ a partir de janeiro de 1975 é dado por:

$$E(x_{1974+T}) = x_{1974} e^{0.0075T}$$
$$E(x_{1974+T}) = x_{1974} (e^{0.0075})^T$$
$$E(x_{1974+T}) = x_{1974} (1.007528)^T$$

Podemos também fazer nossas previsões utilizando um intervalo de confiança. Supondo um intervalo de confiança de 66%, então o limite superior e inferior do intervalo de confiança é dado por

$$x_{1974} e^{\alpha t} \pm \tau_{66\%} \sqrt{x_{1974}^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)}$$
$$x_{1974} e^{\alpha t} (1 \pm \tau_{66\%} \sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1})$$

usando a seguinte igualdade

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

e fazendo $x = \sigma^2 t$, ficamos com:

$$e^{\sigma^2 t} = 1 + \sigma^2 t + \frac{\sigma^4 t^2}{2!} + \frac{\sigma^6 t^3}{3!} + \cdots$$

Considerando que $\sigma < 1$ e t é pequeno, podemos ignorar os termos de ordem superior, ficando com uma expressão aproximada:

$$e^{\sigma^2 t} = 1 + \sigma^2 t$$
$$e^{\sigma^2 t} - 1 = \sigma^2 t$$

E assim encontramos

$$x_{1974} e^{\alpha t} (1 \pm \tau_{66\%} \sqrt{\sigma^2 t})$$
$$x_{1974} e^{\alpha t} (1 \pm \tau_{66\%} \sigma \sqrt{t})$$

usando novamente a identidade para e^x encontraremos

$$x_{1974} e^{\alpha t} e^{\pm \tau_{66\%} \sigma \sqrt{t}}$$

Substituindo os valores de α, σ e considerando $\tau_{66\%}$=1, encontraremos os limites inferiores e superiores:

$$x_{1974} (1.007528)^T (1.0594)^{\pm \sqrt{T}}$$

3.4.2. Processo de Reversão para a Média

Como visto nas figuras do Movimento Geométrico Browniano, este processo tende a divergir para longe do seu ponto de partida original. Em alguns casos, esta é uma característica desejada, como em preços de ativos especulativos, mas em outros não. Preços de commodities como o cobre ou o óleo tendem a estar relacionado com o custo marginal de produção de longo prazo. Isto significa que no curto prazo o preço do petróleo, por exemplo, pode subir ou descer aleatoriamente, mas no longo prazo ele tende a voltar para o custo marginal de produção. Logo o preço do petróleo ou do cobre devem seguir o *processo de reversão para* a *média*.

A Equação Diferencial Estocástica que define este processo, também conhecida com processo de Orntein-Uhlenbeck, é dada por:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \qquad \text{Equação 16}$$

onde *dz* é um incremento de *Wiener*, η é a velocidade da reversão e $\bar{x}$ é o nível normal de *x* (o nível para o qual *x* tende a reverter). O processo de reversão para a média é um Processo de Markov, mas não possui incrementos independentes. Isto fica claro ao notarmos que a variação esperada em *x* depende da diferença entre *x* e $\bar{x}$. Assim, se *x* é maior (menor) do que $\bar{x}$, então é mais provável uma queda (subida) no próximo intervalo curto de tempo.

Do mesmo modo como foi feito para o outros processos, iremos calcular a média e a variância de *dx*.

Cálculo da Média e Variância:

Definimos uma variável $w = f(x,t)$:

$$w = (x - \bar{x})\, e^{\eta(t - t_0)}$$

Calculando o incremento dw:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 + ..$$

Mas: $\frac{\partial w}{\partial x} = e^{\eta(t-t_0)}$ $\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = (x - \bar{x}) e^{\eta(t-t_0)}.\eta$ $\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

Então: $dw = e^{\eta(t-t_0)}.(\eta\,(\bar{x} - x)\,dt + \sigma\,dz) + (x - \bar{x}) e^{\eta(t-t_0)}.\eta.dt$

$$dw = e^{\eta(t-t_0)}.\eta\,(\bar{x} - x)\,dt + e^{\eta(t-t_0)}.\sigma\,dz + (x - \bar{x}) e^{\eta(t-t_0)}.\eta.dt$$

$$\boxed{dw = e^{\eta(t-t_0)}.\sigma\,dz}$$

Sabemos que dw tem distribuição Normal, pois o termo estocástico é função apenas de dz.

$$dw \sim N(0, e^{2\eta(t-t_0)}.\sigma^2\,dt)$$
$$w_t - w_0 \sim N(0, e^{2\eta(t-t_0)}.\sigma^2\,dt)$$
$$w_t \sim N(w_0, e^{2\eta(t-t_0)}.\sigma^2\,dt)$$

$$E(dw) = 0$$
$$E(w_t) = w_0 = (x_0 - \bar{x})\, e^{\eta(t_0 - t_0)}$$
$$E(w_t) = (x_0 - \bar{x})$$

Média: Para calcularmos E(x_t) precisamos achar a relação entre x_t e w_t.

$$w_t = (x_t - \bar{x})\, e^{\eta(t-t_0)}$$
$$\ln w_t = \ln\left[(x_t - \bar{x})\, e^{\eta(t-t_0)}\right]$$
$$\ln w_t = \ln(x_t - \bar{x}) + \ln(e^{\eta(t-t_0)})$$
$$\ln w_t = \ln(x_t - \bar{x}) + \eta(t - t_0)$$
$$\ln(x_t - \bar{x}) = \ln w_t - \eta(t - t_0)$$
$$x_t - \bar{x} = e^{\ln w_t - \eta(t-t_0)}$$

$$\boxed{x_t = \bar{x} - w_t.e^{-\eta(t-t_0)}}$$

Calculando agora E(x):

$$E(x_t) = E\left[\bar{x} - w_t.e^{-\eta(t-t_0)}\right]$$
$$E(x_t) = \bar{x} - E\left[w_t\right] e^{-\eta(t-t_0)}$$
$$E(x_t) = \bar{x} - w_0.e^{-\eta(t-t_0)}$$

$$\boxed{E(x_t) = \bar{x} - (x_0 - \bar{x}).e^{-\eta(t-t_0)}} \qquad \text{Equação 17}$$

Variância:

$$Var(w_t) = Var(w_t - w_0)$$
$$Var(w_t) = Var(w_t - w_{t-\Delta t} + w_{t-\Delta t} - w_{t-2\Delta t} + ... + w_{t-(N-1)\Delta t} - w_0)$$
$$Var(w_t) = Var(w_t - w_{t-\Delta t}) + Var(w_{t-\Delta t} - w_{t-2\Delta t}) + ... + Var(w_{t-(N-1)\Delta t} - w_0)$$
$$Var(w_t) = \sum_1^N Var(\Delta w_t) = \int_{t_0}^t Var(dw_t)$$

Mas:

$$Var(dw) = Var(e^{\eta(t-t_0)}.\sigma\, dz) = e^{2\eta(t-t_0)}.\sigma^2 \underbrace{Var(dz)}_{dt}$$
$$Var(dw) = e^{2\eta(t-t_0)}.\sigma^2 dt$$

Substituindo

$$Var(w_t) = \int_{t_0}^t e^{2\eta(t-t_0)}.\sigma^2 dt = \left.\frac{\sigma^2 e^{2\eta(t-t_0)} - \sigma^2}{2\eta}\right|_{t_0}^t$$
$$Var(w_t) = \frac{\sigma^2(e^{2\eta(t-t_0)} - 1)}{2\eta}$$

Queremos Var (x_t)

$$Var(x_t) = Var(\bar{x} - w_t.e^{-\eta(t-t_0)})$$
$$Var(x_t) = e^{-2\eta(t-t_0)} Var(w_t)$$

Substituindo Var (w_t)

$$Var(x_t) = e^{-2\eta(t-t_0)} \cdot \frac{\sigma^2(e^{2\eta(t-t_0)} - 1)}{2\eta}$$
$$Var(x_t) = \frac{\sigma^2 e^{-2\eta(t-t_0)}(e^{2\eta(t-t_0)} - 1)}{2\eta}$$

$$\boxed{Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta(t-t_0)})} \qquad \text{Equação 18}$$

Quando ***t*→∞**, o valor esperado tende para:

$$\lim_{T\to\infty} E(x_T) = \lim_{T\to\infty}[\bar{x} + (x_0 - \bar{x})\frac{1}{e^{\eta T}}]$$

$$= \bar{x} + (x_0 - \bar{x})\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{e^{\eta T}}]$$

quando T→∞, $e^{\eta T}$→∞ e $(x_0 - \bar{x})\frac{1}{e^{\eta T}} \to 0$. Assim teremos

$$\lim_{T\to\infty} E(x_T) = \bar{x}$$

Do mesmo modo, quando ***t*→∞**, a variância tende para

$$\lim_{T\to\infty} Var(x_T) = \lim_{T\to\infty}[\frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta T})]$$

$$\lim_{T\to\infty} Var(x_T) = \frac{\sigma^2}{2\eta}\lim_{T\to\infty}[(1 - e^{-2\eta T})]$$

$$\lim_{T\to\infty} Var(x_T) = \frac{\sigma^2}{2\eta}$$

Quando **η→∞**, encontraremos:

$$\lim_{\eta\to\infty} E(x_T) = \lim_{\eta\to\infty}[\bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta T}]$$

$$\lim_{\eta\to\infty} E(x_T) = \bar{x} + \underbrace{(x_0 - \bar{x})\lim_{\eta\to\infty} e^{-\eta T}}_{0}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} E(x_T) = \bar{x}$$

e para a variância

$$\lim_{\eta\to\infty} Var(x_T) = \lim_{\eta\to\infty}(\frac{\sigma^2}{2\eta})\lim_{\eta\to\infty}(1 - e^{-2\eta T})]$$

$$\lim_{\eta\to\infty} Var(x_T) = 0 \cdot (1 - 0) = 0$$

Estes valores nos indicam que, mesmo momentaneamente, *x* não pode desviar-se de $\bar{x}$.

Agora vamos analisar como a variância se comporta quando **η→0**.

$$\lim_{\eta\to 0} Var(x_T) = \lim_{\eta\to 0}[\frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta T})]$$

Analisando primeiro a parcela do exponencial, e lembrando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Como *x*→0, então as potência de *x* acima de 1 terão impacto insignificante no valor final da expressão. Assim, podemos simplificar a expressao para:

$$e^x = 1 + x$$

como estamos considerando $x = -2\eta T$, então

$$e^{-2\eta T} = 1 - 2\eta T$$

$$2\eta T = 1 - e^{2\eta T}$$

substituindo esses valores na equação de $Var(x_T)$, teremos finalmente

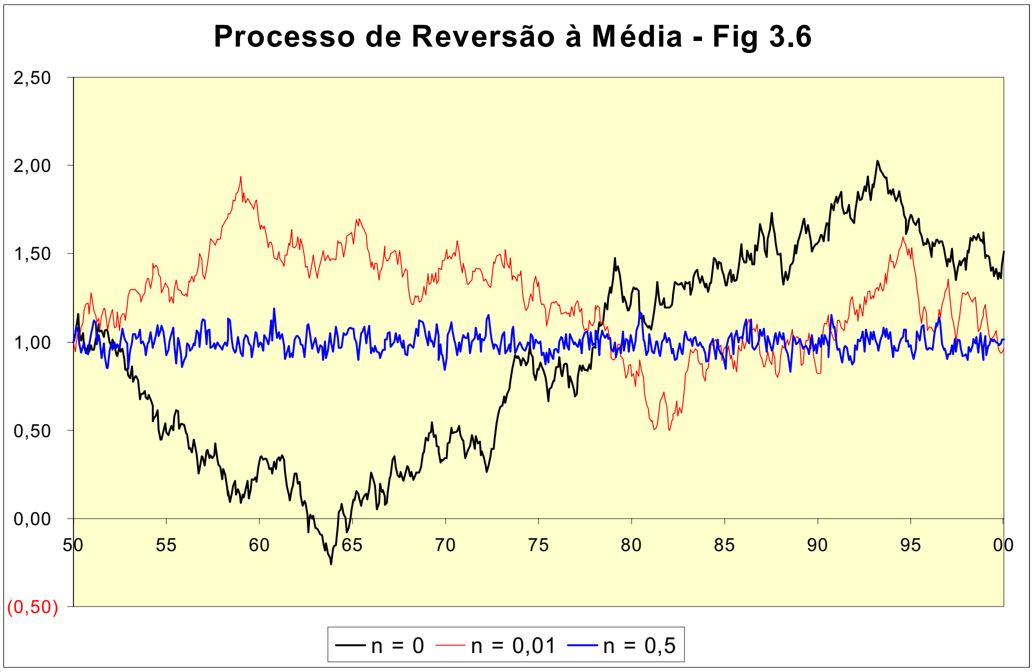
$$\lim_{\eta \to 0} Var(x_T) = \lim_{\eta \to 0} [\frac{\sigma^2}{2\eta}(2\eta T)]$$

$$\lim_{\eta \to 0} Var(x_T) = \lim_{\eta \to 0} [\sigma^2 (T)]$$

$$\lim_{\eta \to 0} Var(x_T) = \sigma^2 T$$

Assim, podemos concluir que quando **η→0**, o Processo de Reversão à Média tende para o Movimento Browniano Simples. Uma outra maneira de verificar esta conclusão é substituir η por zero na equação do Processo de Reversão para a Média, com isso teremos a equação do Movimento Browniano.

Uma outra característica interessante do processo de reversão para a média é o parâmetro η. Este parâmetro indica a velocidade com que o processo tende a voltar para o valor médio. Normalmente, o processo de reversão para a média pode tomar um caminho que se desvie da média de longo prazo. Como vimos no parágrafo anterior este desvio tende a ser revertido em determinado momento, e o processo volta para a sua média de longo prazo. Esta volta pode ser demorada ou mais rápida dependendo de η. Quanto menor η mais demorada será o caminho de volta. Esta característica torna-se clara ao analisarmos o gráfico a seguir. Neste gráfico, plotamos 3 curvas que representam o processos de reversão para a média com três valores de η diferentes, 0, 0.01 e 0.5. Foram usados os valores de σ = 0,05 a.m., $\underline{x}$ =1 e x_0 = 1.



Para criar o modelo de previsão, utilizamos a equação para o valor esperado de $x(t)$ demonstrada anteriormente (Equação 17), considerando um η = 0,02:

$$E(x_T) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta T}$$
$$E(x_{1980+T}) = \bar{x} + (x_{1980} - \bar{x})e^{-\eta T}$$

Como η é um parâmetro mensal, assim como T, nenhum ajuste mais é necessário. Dado que $\bar{x} = 1$, e η = 0,02, ficamos com:

$$E(x_{1980+T}) = 1 + (x_{1980} - 1)e^{-0,02T}$$

Para calcularmos um intervalo de confiança de 66%, o limite superior e inferior do intervalo de confiança será dado por:

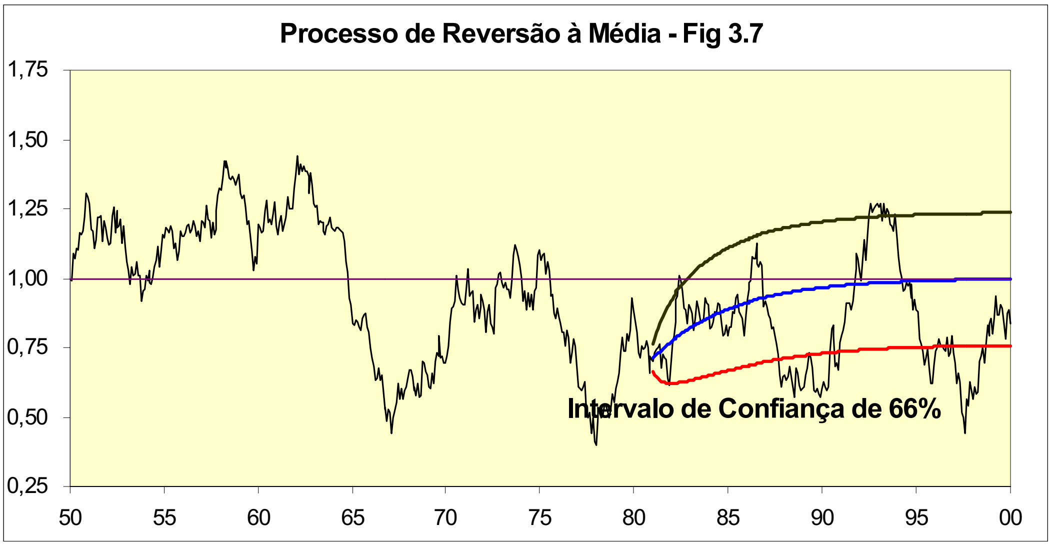
$$E(x) \pm z_{66\%}.\sigma$$

Assim: $$1 + (x_{1980} - 1)e^{-\eta T} \pm z_{66\%}.\sigma.\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta T}}{2\eta}}$$

Substituindo os valores de z = 0,9557, σ = 0,05 e η = 0,02, encontramos os limites inferiores e superiores:

$$1 + (x_{1980} - 1)e^{-0,02T} \pm 0,04779.\sqrt{\frac{1 - e^{-0,04T}}{0,04}}$$

O gráfico com a previsão e o correspondente intervalo de confiança está a seguir:



A equação 16 é a versão de tempo continuo do processo autoregressivo de primeira ordem (AR). Especificamente, a equação 16 é o caso aonde $\Delta t \Rightarrow 0$ do seguinte processo Auto-Regressive (AR):

$$x_t - x_{t-1} = \underline{x}\,(1 - e^{-\eta}) + (e^{-\eta} - 1)x_{t-1} + \in_t \qquad \text{Equação 19}$$

aonde $\in_t$ é normalmente distribuída com média zero e desvio padrão $\sigma_\in$ dada por:

$$\sigma_\in^2 = (\sigma^2 / 2\eta)\,(1 - e^{-2\eta})$$

Então podemos estimar os parâmetros da equação 16, ($dx = \eta\,(\underline{x} - x)\,dt + \sigma dz$), usando informações de tempo discreto (que são as únicas informações disponíveis) pela regressão:

$$x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \in_t$$

E então calculando $\underline{x} = -a/b$, $\eta = -\log.\,(1 + b)$, e

$$\sigma = \sigma_\in \sqrt{\frac{\ln(1+b)}{(1+b)^2 - 1}}$$

Aonde $\sigma_\in$ é o erro padrão da regressão.

É fácil generalizar a equação 16. Por exemplo, espera-se que $x(t)$ reverta para a média $\underline{x}$, mas com a taxa da variância crescendo com x. Assim pode-se usar o seguinte processo:

$$dx = \eta\,(\underline{x} - x)\,dt + \sigma\,x\,dz \qquad \text{Equação 20}$$

Alternativamente , mudanças proporcionais na variável pode ser modelada como um simples processo de reversão para a média. Isto é equivalente a descrever $x(t)$ pelo processo:

$$dx = \eta\,x\,(\underline{x} - x)\,dt + \sigma\,x\,dz \qquad \text{Equação 21}$$

Vamos examinar as implicações destes diferentes processos de reversão para a média para decisões de investimentos mais adiante.