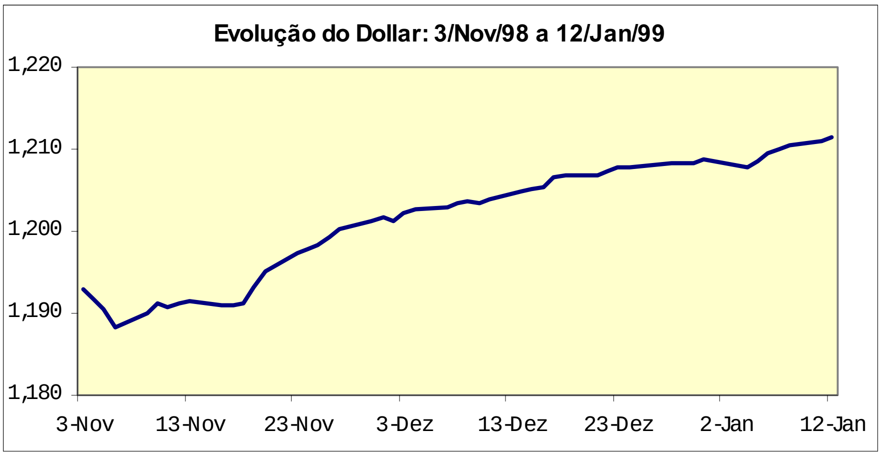
3.7 Processo de Poisson (Jump)

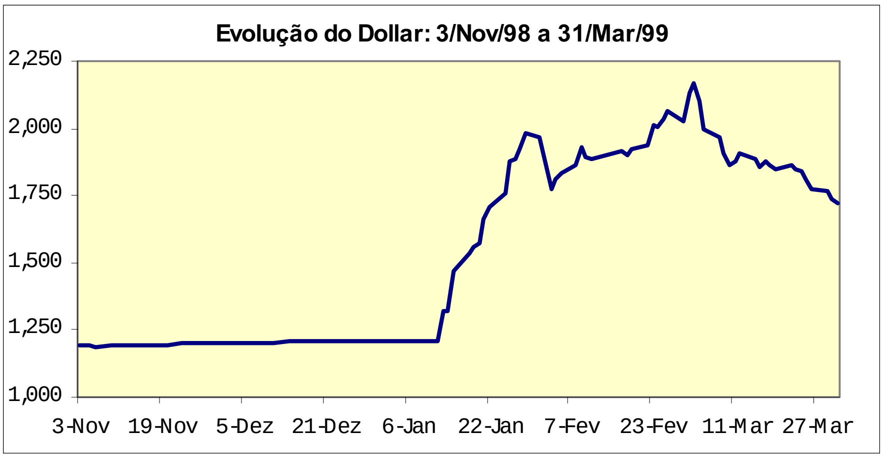
Até o momento modelamos processos estocásticos como sendo funções diferenciáveis de Processos de Wiener, Processos de Wiener Generalizados e Processos de Itô. Estes processos são descrições aproximadas do que realmente acontece no dia a dia das negociações de ativos financeiros com liquidez e alguns tipos de ativos reais.

Mas, por exemplo, se quiséssemos modelar um derivativos sobre a taxa de câmbio US$/R$. Com certeza, encontraríamos problemas quando houveram mudanças na política cambial brasileira. O Dólar comercial para venda (preço de fechamento) no dia 12/01/99 valia R$1,211 e no dia seguinte R$1,319, uma alta de 8,9%, sendo que nos últimos sessenta dias o Dólar tinha uma valorização média frente ao Real de 0,032% ao dia.

Se considerarmos que o dólar vinha seguindo um processo estocástico contínuo como sugere a figura a seguir:



então do dia 12/01 para o dia 13/01 houve uma descontinuidade, pois ocorreu um salto na cotação, como podemos ver na figura a seguir :



Este salto não estava modelado no processo estocásticos e é isso que passaremos a fazer agora.

Um processo estocástico que poderia avaliar a situação ocorrida com o Dólar com maior precisão, deveria modelar a parte contínua e a parte descontínua juntas. A parte contínua poderia ser um processo estocástico contínuo qualquer, já a parte descontínua deveríamos modelar utilizando um processo estocástico discreto. O processo de Poisson encaixa-se perfeitamente para este problema.

Processos de Poisson são processo estocásticos que fazem saltos discretos, mas infreqüentes ao longo do tempo[1]. Os saltos (*jumps*) podem ser de tamanhos fixos ou aleatórios, onde o tempo de chegada dos saltos segue uma distribuição de Poisson. Estes saltos são tambem chamados de eventos. Alguns parâmetros do processo de Poisson são:

- λ é a taxa média de chegada de um evento, durante um intervalo de tempo infinitesimal;
- λdt é a probabilidade de ocorrência de um evento;
- $1-\lambda dt$ é a probabilidade de não ocorrência de um evento;
- u é o tamanho de um salto, pode ser aleatório ou determinístico;
- q representa o Processo de Poisson.

Podemos utilizar o Processo de Poisson de várias maneiras para representar o saltos discretos ao longo do tempo. Talvez a maneira mais simples seja considerarmos um Processo de Poisson Independente (dq) com a probabilidade de ocorrer um evento durante um determinado intervalo de tempo de tamanho infinitesimal dt

$$dq = \begin{cases} 0 \text{ com probablidade } 1-\lambda dt \\ u \text{ com probabilidade } \quad \lambda dt \end{cases}$$

onde a variável u pode ser aleatória $\tilde{u}$.

Seja um evento em que uma variável de estado $x(t)$ tenha um salto cuja amplitude é dada por $\tilde{u}g(x,t)$, onde u representa o salto. Seja x um processo estocástico (onde a única incerteza é dado pela chegada do salto) que possui saltos ao longo do tempo, com amplitude dada por $\tilde{u}g(x,t)$. Então a equação diferencial para o Processo de Poisson é escrita como:

$$dx = \underset{\text{Determinístico}}{dx_{CONTINUO}} + \underset{\text{Estocástico}}{dx_{CONTINUO}} + dx_{DISCRETO}$$

onde

$$\underset{\text{Determinístico}}{dx_{CONTINUO}} = f(x,t)dt \qquad \underset{\text{Estocástico}}{dx_{CONTINUO}} = b(x,t)dt \qquad \text{e} \qquad dx_{DISCRETO} = g(x,t)dq$$

sendo $f(x,t)$, $b(x,t)$ e $g(x,t)$ funções determinísticas e conhecidas, ou seja:

$$dx = f(x,t)dt + b(x,t)dz + g(x,t)dq \qquad \text{Equação 38}$$

[1] Uma boa referência sobre Processo de Poisson é o livro *Continuous Time Finance* de Robert Merton. O capítulo dois e o capítulo nove tratam do assunto. Outra referência em um nível mais básico é o capítulo novo do livro *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives* de Salih N. Neftci. E o livro *The Theory of Stochastic Process* de Cox e Miller, trata o assunto mais detalhadamente.

Para simplificar, vamos supor que o termo contínuo estocástico *b(x,t) dz* seja zero. Seja então *H*(*x,t*) uma função de *x* e *t* que seja diferenciável. Se quiséssemos saber qual o processo estocástico que esta função segue, a princípio deveríamos aplicar o Lema de Ito. Isto funciona quando o processo estocástico da variável *x* é contínuo. Como já vimos, o processo estocástico para *x* possui uma parte contínua e descontínua, o que impossibilita a aplicação direta do Lema de Ito. Mas, como *H* é função de *x* então podemos considerar que *H* possui uma parte contínua e outra descontínua e a variação de *H* e seu valor esperado podem ser dados por:

$$dH = dH_{CONTINUA} + dH_{DISCRETA}$$
$$E(dH) = E(dH_{CONTINUA}) + E(dH_{DISCRETA})$$

Agora então podemos utilizar o Lema de Ito na parte contínua e analisar o que acontece com a parte contínua. Note que como a parte contínua (*f(x,t) dt*) é determinística, então o Lema de Ito resume-se a aplicação da expansão de Taylor, considerando que $(dt)^2$ e $(dx)^2$ são desprezíveis. Ao contrário do processo de Ito, o termo *dx* não depende de $\sqrt{dt}$, portanto $(dx)^2 = 0$. Aplicando o Lema de Ito para a parte contínua encontraremos:

$$dH_{CONTINUO} = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx_{CONTINUO}$$

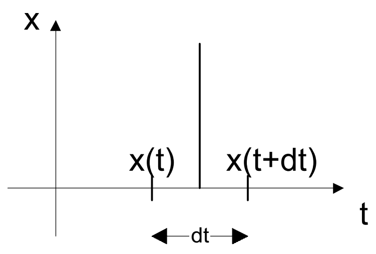
Substituindo o valor de $dx_{CONTINUO} = f(x,t)dt$, temos:

$$dH_{CONTINUO} = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + f(x,t) \frac{\partial H}{\partial x} \right] dt$$

O Valor esperado da parte contínua é dado por

$$E[dH_{CONTINUO}] = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + f(x,t) \frac{\partial H}{\partial x} \right] dt$$

Agora, devemos analisar o que acontece com a parte descontínua. Pelo gráfico a seguir



Se *x*(*t*) é o valor da variável no tempo *t* e considerando que um evento de Poisson ocorra no intervalo (*t, t*+*dt*), então *x*(*t*+*dt*) é

$$x_{t+dt} = x_t + \tilde{u} g(x,t)$$

Agora, $dH_{DISCRETO}$ é a variação de H no intervalo $(t, t+dt)$ e dado por

$$dH_{DISCRETO} = H(x_{t+dt}, t) - H(x_t, t)$$
$$dH_{DISCRETO} = H(x_t + \tilde{u}g(x,t), t) - H(x_t, t)$$

Dada a probabilidade λdt de ocorrer o salto, o valor esperado da mudança em $H(x,t)$ é dado por

$$E(dH_{DISCRETO}) = E\{H[x + \tilde{u}g(x,t), t] - H(x,t)\}$$
$$E(dH_{DISCRETO}) = \lambda\ dt\ E_u\{H[x + \tilde{u}g(x,t), t] - H(x,t)\} + \underbrace{(1-\lambda dt)E_u[H(x,t) - H(x,t)]}_{0}$$
$$E(dH_{DISCRETO}) = \underbrace{\lambda}_{\text{prob de ocorrer o evento}} \quad \underbrace{E_u\{H[x + \tilde{u}g(x,t), t] - H(x,t)\}}_{\text{Valor incremental da mudança}} dt \qquad \text{Equação 40}$$

substituindo na equação para $E(dH_{continuo})$ e $E(dH_{discreto})$ em $E(dH)$, teremos:

$$E(dH) = [\frac{\partial H}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}]dt + E_u\{\lambda[H[x + \tilde{u}g(x,t), t] - H(x,t)]\}dt \qquad \text{Equação 41}$$

Esta equação pode ser utilizada da mesma maneira que utilizamos o Lema de Ito para processo contínuos.

Algumas vezes encontramos combinações de processo contínuos com Poisson. Um exemplo seria um Processo de Ito com Poisson.. A equação diferencial estocástica é dada por

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz + g(x,t)dq$$

Aplicando o lema de Ito e o seu correspondente para o Processo de Poisson e tirando o valor esperado teremos:

$$E(dH) = [\frac{\partial H}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{2}b(x,t)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}]dt + E_u\{\lambda[H[x + ug(x,t), t] - H(x,t)]\}dt$$

Equação 42

Outra maneira de derivar a Equação 42:

Podemos fazer uma combinação de um Processo de Ito (acontece continuamente) e um Processo de Jump, Poisson (que acontece as vezes), considerando que dx comporte-se da maneira: $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz + g(x,t)dq$

Exemplo: Valor Presente do Salário

Suponha um indivíduo que viva em perpetuidade, receba um salário W(t) o qual cresce um valor constante "$\in$" em intervalos aleatórios de tempo. Se λ for a taxa média da chegada destes incrementos, podemos escrever a equação diferencial do salário como:

$$dW = \in \, dq \qquad \text{Equação 43}$$

Onde u = 1 com probabilidade 1. Qual é o valor presente do fluxo de salários esperado deste indivíduo?

Podemos escrever: $VP(W) = E\int_0^{\infty} W(t)\, e^{-\rho t} dt$ onde ρ é a taxa de desconto apropriada para o salário atual. Essa integral nos dá:

$$VP(W) = E\int_0^{\infty} W(t)\, e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} E(W(t))\, e^{-\rho t} dt$$

onde *W(t)* segue um processo de Poisson, e $dW = \in dq$ e onde a probabilidade de ocorrer um aumento no salário (ganho de capital) num espaço de tempo dt é $\lambda \in dt$. Então, num período $t - t_0$ temos:

$$E[W(t)] = E[W_0 + (t-t_0)\, dW]$$
$$E[W(t)] = W_0 + (t-t_0)\, E[dW]$$
$$E[W(t)] = W_0 + (t-t_0)\, \lambda\in$$

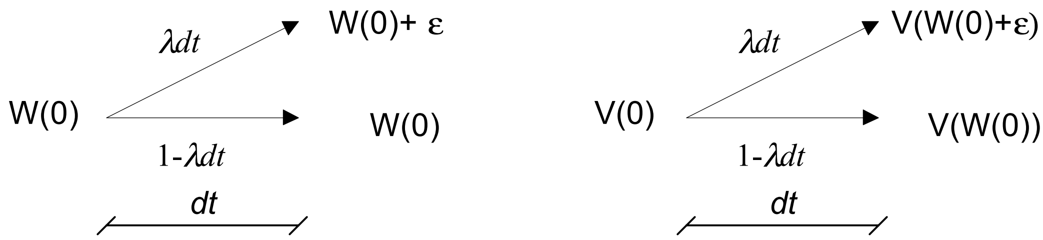
Substituindo na integral, temos:

$$VP(W) = \int_0^{\infty} (W_0 + \lambda(t-t_0) \in)\, e^{-\rho t} dt$$
$$= W_0 \left. \frac{e^{-\rho t}}{-\rho} \right|_0^{\infty} + \lambda \in \int_0^{\infty} \underbrace{(t-t_0)}_{u}\, \underbrace{e^{-\rho t} dt}_{dv}$$
$$= \frac{W_0}{\rho} + \lambda \in (uv - \int v du)$$
$$= \frac{W_0}{\rho} + \lambda \in \left[(t-t_0)\frac{e^{-\rho t}}{-\rho} - \int \frac{e^{-\rho t}}{-\rho} dt \right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{W_0}{\rho} + \lambda \in \left[0 - \left(0 - \frac{e^{-\rho t}}{\rho^2} \right) \right]$$
$$\boxed{VP(W) = \frac{W_0}{\rho} + \frac{\lambda \in}{\rho^2}}$$

De outra maneira, podemos considerar *VP(W)* como um ativo que dá um dividendo W (o salário mensal) e o mais um ganho de capital esperado em cada período. Num intervalo de tempo dt temos:

$\rho\, V\, dt \quad = \quad W(t)\, dt \quad + \quad E\,[dV]$

Podemos verificar que E(dV) é:



$$E(dV) = \lambda dt\big(V(W+\in) - V(W)\big) + (1-\lambda dt)\big(V(W) - V(W)\big)$$
$$E(dV) = \lambda dt\big(V(W+\in) - V(W)\big) - 0$$
$$E(dV) = \lambda dt\left(\frac{W}{\rho} + \frac{\in}{\rho} - \frac{W}{\rho}\right)$$
$$E(dV) = \frac{\lambda \in dt}{\rho}$$

Note que não faz diferença se descontarmos o fluxo do instante t + dt, pois como o intervalo de tempo dt é pequeno, este desconto é zero. Em tempo discreto esse desconto será será $\frac{1}{1+\rho dt}$. Sabemos que $\frac{1}{1-a} = \sum_{x=0}^{\infty} a^x$, então podemos substituir a expressão $\frac{1}{1+\rho dt}$ por esta série, onde a = $-\rho\, dt$.

$$\frac{1}{1+\rho\, dt} = \sum_{x=0}^{\infty} \left(-\rho\, dt\right)^x = (-\rho\, dt)^0 + (-\rho\, dt)^1 + (-\rho\, dt)^2 + (-\rho\, dt)^3 + ...$$
$$\frac{1}{1+\rho\, dt} = 1 - \rho\, dt + (\rho\, dt)^2 - (\rho\, dt^3) + ...$$

Os termos de ordem superior tendem a zero e portanto podem ser ignorados. Dessa forma, ficamos com $\frac{1}{1+\rho\, dt} = 1 - \rho\, dt$. Então:

$$E(dV) = (1-\rho dt)\left[\lambda dt\big(V(W+\in) - V(W)\big) + (1-\lambda dt)\big(V(W) - V(W)\big)\right]$$
$$E(dV) = \lambda dt\big(V(W+\in) - V(W)\big) - \rho\lambda dt^2\big(V(W+\in) - V(W)\big)$$
$$E(dV) = \lambda dt\big(V(W+\in) - V(W)\big) - 0$$
$$E(dV) = \lambda dt\left(\frac{W}{\rho} + \frac{\in}{\rho} - \frac{W}{\rho}\right)$$
$$E(dV) = \frac{\lambda \in dt}{\rho}$$

Substituindo na equação:

$$\rho\, V\, dt \quad = \quad W(t)\, dt \quad + \quad \lambda \in dt / \rho$$

$$V\, dt \quad = \quad W(t)\, dt / \rho \; + \quad \lambda \in dt / \rho^2$$

Dividindo tudo por *dt*:

$$VP(W) = \frac{W_0}{\rho} + \frac{\lambda \in}{\rho^2}$$

$V \quad = \quad$ perpetuidade $\; + \;$ ganho de capital

Exemplo: Valor de uma Máquina

Uma máquina produz um lucro constante π enquanto opera. Não requer manutenção, mas em algum momento ela irá parar e terá que ser substituída. Se λ é a taxa de chegada de uma parada e ρ é a taxa de desconto, qual o valor da máquina?

O valor da máquina segue o processo:

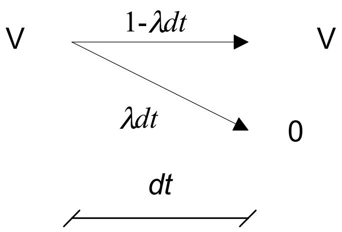
$$dV = -Vdq$$

onde o evento é u = 1 com probabilidade de ocorrência igual a 1. A equação de retorno do ativo é dada por:

Retorno = Lucro c/Máquina Operando + Custo de Comprar Nova Máquina

$$E(dV) = (1 - \lambda dt)(V - V) + \lambda dt(0 - V)$$

$$E(dV) = -\lambda V dt$$



Então:

$$\rho V dt = \pi dt + E(dV)$$

$$\rho V dt = \pi dt - \lambda V dt$$

eliminando *dt* encontraremos:

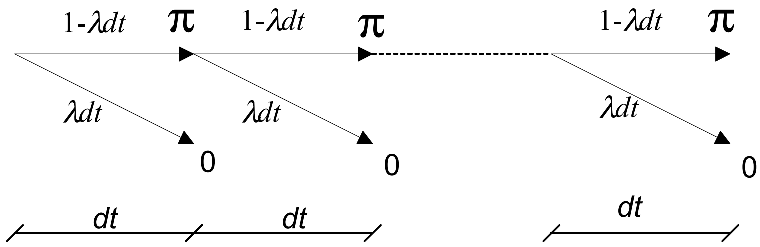
$$(\rho + \lambda) V = \pi$$

$$V = \frac{\pi}{\rho + \lambda}$$

Podemos fazer também:

$$V = E \int_0^\infty \pi(t)\, e^{-\rho t} dt = \int_0^\infty E(\pi(t))\, e^{-\rho t} dt$$

Qual é o Valor Esperado de π? Considerando que existe uma probabilidade λdt da máquina parar num tempo dt, e (1-λdt) da máquina continuar operando e gerando um lucro π, num período de tempo t, teremos:



$$E(\pi) = (1-\lambda dt)^n \pi + (1-(1-\lambda dt)^n).\,0$$
$$E(\pi) = (1-\lambda dt)^n \pi$$

Sabemos que $e^a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

Então, podemos escrever: $\left(1-\lambda dt\right)^n = \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}$.

Substituindo na integral, temos:

$$V = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\pi\, e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty \pi\, e^{-(\rho+\lambda)t}dt$$
$$V = \pi \left.\frac{e^{-(\rho+\lambda)}}{-(\rho+\lambda)}\right|_0^\infty = \pi\left[0 - \frac{1}{-(\rho+\lambda)}\right]$$
$$V = \frac{\pi}{\rho+\lambda}$$

3.8 Equação de Kolmogorov

Se $x(t)$ é um processo estocástico particular e seu valor atual é x_o, qual a probabilidade de x se encontrar dentro de um certo intervalo (a,b) depois de um de tempo t? Ou qual a probabilidade de x(t) chegar a x1 dentro de um tempo $t \leq T$? Para respondermos a essa pergunta devemos saber como a distribuição de probabilidades de x evolui ao longo do tempo e isto pode ser feito usando a equação de Kolmogorov.

Considere o Movimento Aritmético Browniano

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$

usando a aproximação do Movimento Browniano por meio do *Random Walk*, teremos:

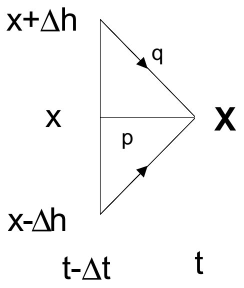
- n é o número de passos e é dado por $n = t/\Delta t$;
- p é a probabilidade de subida ($+\Delta h$);
- q é a probabilidade de descida ($-\Delta h$);

- Δh é escolhido de modo a Var(x_t-x_o) independer de Δt;
- a função densidade de probabilidade para a transição é dada por $\phi(x_o, x_t; x, t)$.

Com isso podemos escrever:

$$\text{Prob}\left[a \leq x(t) \leq b \quad |x(t_0) = x_0\right] = \int_{u=a}^{u=b} \phi(x_0, t_0; x, t)\, du$$

No intervalo de tempo t-Δt o ponto x pode ser atingido ou vindo pela esquerda (incrementando $x\Delta h$) ou pela direita (decrementando x+Δh). Isso pode ser escrito em termos da função densidade de probabilidades da seguinte maneira:



$$\phi(x_0, t_0; x, t) = p\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) + q\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t) \qquad \text{Equação 44}$$

Usando Taylor para expandir $\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t)$ ao redor de $\phi(x_0, t_0; x, t)$ encontraremos:

$$\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) = \phi(x_0, t_0; x, t) - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \ldots$$

desprezando os termos de dt com potência acima de 1, teremos:

$$\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) = \phi(x_0, t_0; x, t) - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Fazendo a mesma expansão para $\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t)$, encontraremos

$$\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t) = \phi(x_0, t_0; x, t) - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Voltando com os dois valores anteriores na expressão de $\phi(x_0, t_0; x, t)$, encontraremos:

$$\phi(x_0, t_0; x, t) = (p + q)\phi(x_0, t_0; x, t) - (p + q)\Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} - (p - q)\Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(p + q)(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

lembrando que $p + q = 1, \quad p - q = \dfrac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t} \quad e \quad \Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$ teremos:

$$\phi(x_0, t_0; x, t) = \phi(x_0, t_0; x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)(\sigma\sqrt{\Delta t})\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\Delta t})^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x_0,t_0;x,t) - \alpha\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\phi(x_0,t_0;x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta t\phi(x_0,t_0;x,t) \quad \text{dividindo por } \Delta t$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x_0,t_0;x,t) - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\phi(x_0,t_0;x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,t_0;x,t) \qquad \text{Equação 45}$$

Esta é a equação de Kolmogorov para o Movimento Browniano com *drift*. Esta é uma equação de avanço que descreve a evolução da função densidade de probabilidade $\phi(x_0,t_0;x,t)$ a partir de ($x_{o,}$ t_o) até um valor futuro (x,t).

A equação de avanço de Kolmogorov para o Processo generalizado de Ito é dado por:

$dx = \mathrm{a}(x,t)dt + b(x,t)dz$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(x,t)\phi(x_0,t_0;x,t)] - \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(x,t)\phi(x_0,t_0;x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,t_0;x,t) \qquad \text{Equação 46}$$

Da mesma maneira que encontramos as equações de avanço de Kolmogorov, podemos encontrar a equação de retardo que descreve a evolução da função densidade de probabilidade $\phi(x_0,t_0;x,t)$ a partir de ($x_,$ t) até (x_o,t_o).

Exemplo: Distribuição de longo prazo para Recursos Renováveis.

Em alguns caso, estaremos interessados nas características da distribuição da variável estocástica no longo prazo (steady state). Note que nem todos os processos estocásticos terão distribuições de probabilidades que convergirão para um steady state - o MGB não em, mas o processo de reversão a media converge. Se este steady state existe, ele geralmente pode ser obtido usando a equação de avanço de Kolmogorov, que neste caso, se reduz a uma equação diferencial ordinária, pois fica independente do tempo.

Vamos derivar a distribuição de um movimento browniano estacionário de longo prazo, entre barreiras superior e inferior, a partir da equação 45:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x_0,t_0;x,t) - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\phi(x_0,t_0;x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,t_0;x,t)$$

Agora, esta distribuição é independente do valor inicial de x, e também do tempo. Ficamos com:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(x) - \alpha\phi'(x) = 0$$

que é a mesma equação (36) encontrada anteriormente, mas agora de forma bem mais simples.

Um outro processo estocástico, um pouco mais complicado, é o que descreve a evolução do estoque de um recurso natural renovável $x(t)$, sujeito a uma taxa de exploração $q(x)$, que pode ser função de x. Vamos supor inicialmente que a volatilidade do processo é constante e igual a σ.

$$dx = [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]\, dt + \sigma\, dz \qquad \text{Equação 54}$$

Aqui, $\mathrm{f}(x)$ é a função de crescimento do recurso natural (uma floresta, peixes, etc.), e é côncava, com $\mathrm{f}(x_{min}) = \mathrm{f}(x_{max}) = 0$ e $\mathrm{f}(x) > 0$ para $x_{min} < x < x_{max}$.

Embora $x(t)$ evolva estocasticamente, seria interessante saber a função de probabilidade de x no equilíbrio de longo prazo. Partindo da equação de avanço de Kolmogorov para o Processo generalizado de Ito (equação 46):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(x,t)\phi(x_0,t_0;x,t)] - \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(x,t)\phi(x_0,t_0;x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,t_0;x,t)$$

No equilíbrio de longo prazo, x não depende do seu valor inicial, nem do tempo. Simplificando e integrando uma vez, e representando a função de densidade estacionária como $\phi_\infty(x)$, ficamos com:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\phi_\infty(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial\phi_\infty(x)}{\partial x}[f(x) - q(x)]$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial\phi_\infty(x)}{\partial x} = [f(x) - q(x)]\phi_\infty(x)$$

Também

$$\frac{d\phi_\infty(x)}{\phi_\infty(x)} = \frac{2}{\sigma^2}[f(x) - q(x)]dx$$

$$\ln\phi_\infty(x) = \frac{2}{\sigma^2}[f(x) - q(x)]x + C$$

$$\phi_\infty(x) = e^{\frac{2}{\sigma^2}[f(x) - q(x)]x + C}$$

$$\boxed{\phi_\infty(x) = m\, e^{\frac{2}{\sigma^2}[f(x) - q(x)]x}}$$

onde m é uma constante que faz com que $\int_0^\infty \phi_\infty(x)dx = 1$

Agora podemos recalcular a equação, considerando que a volatilidade σ varia com $x \rightarrow \sigma(x)$.

Revisto até aqui

-------- --------- --------------- ------------------- ------------------------- ------------------

Equação de Retardo de Kolmogorov

$$\theta(x,t) \begin{cases} \xrightarrow{p} \theta(x + \Delta h, t + \Delta t) \\ \xrightarrow{q} \theta(x - \Delta h, t + \Delta t) \end{cases}$$

Ao longo do intervalo de tempo que vai de "$t + \Delta t$", para traz, ate "t" o processo pode partir de x para dois lugares, subindo do ponto x (com probabilidade p) para atingir "$x + \Delta h$", ou descendo do ponto x (com probabilidade q) para atingir o ponto "$x - \Delta h$", então:

θ (xo, to | x,t) = p θ (xo, to | $x + \Delta h$, $t + \Delta t$) + q θ (xo, to | $x - \Delta h$, $t + \Delta t$)

Expansão termo a termo:

$\theta(\text{xo},\text{to}|\ x{+}\Delta h,\ t{+}\Delta t) = \theta(\text{xo, to}\ |\ x,\ t) + (\partial\theta/\partial\text{to})(\Delta t) + (\partial\theta/\partial\text{xo})(\Delta h) + ½(\partial^2\theta/\partial\text{xo}^2)(\Delta h)^2$

$\theta(\text{xo},\text{to}|\ x{-}\Delta h,\ t{+}\Delta t) = \theta(\text{xo, to}\ |\ x,\ t) +(\partial\theta/\partial\text{to})(\Delta t) + (\partial\theta/\partial\text{xo})(-\Delta h) + ½(\partial^2\theta/\partial\text{xo}^2)(-\Delta h)^2$

Substituindo:

θ (xo, to | x,t) = p [θ (xo, to | x, t) + $(\partial\theta/\partial\text{to})(\Delta t) + (\partial\theta/\partial\text{xo})(\Delta h) + ½(\partial^2\theta/\partial\text{xo}^2)(\Delta h)^2$]
+ q [θ (xo, to | x, t) +$(\partial\theta/\partial\text{to})(\Delta t) + (\partial\theta/\partial\text{xo})(-\Delta h) + ½(\partial^2\theta/\partial\text{xo}^2)(-\Delta h)^2$]

Simplificando:

θ (xo, to | x,t) = p [θ (xo, to | x, t) + $(\partial\theta/\partial\text{to})(\Delta t) + (\partial\theta/\partial\text{xo})(\Delta h) + ½(\partial^2\theta/\partial\text{xo}^2)(\Delta h)^2$]
+ q [θ (xo, to | x, t) +$(\partial\theta/\partial\text{to})(\Delta t) + (\partial\theta/\partial\text{xo})(-\Delta h) + ½(\partial^2\theta/\partial\text{xo}^2)(-\Delta h)^2$]

Exemplo: Processo Ornstein-Uhlenbeck de Reversão à Media

$dx = \eta\ (u - x)\ dt + \sigma\ dz.$

Para simplificar façamos $\underline{x} = u = 0$

$dx = -\eta\ x\ dt + \sigma\ dz.$ **Equação 48**

Calculo da Espectancia e da Variância por MGF:

Função geradora de Momentos

$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\ dx$

Escrever a MGF da seguinte forma:

$M(\theta,t) = E(e^{-\theta x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x}\ \theta\ (\text{xo, to}|\ x,\ t)\ dx$ **Equação 49**

Primeiro Momento:

$\partial M/\partial t = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial\theta/\partial t)\ e^{-\theta x}\ dx$ **Equação 50**

A equação de Kolmogorov nos fornece: $\partial\theta/\partial t$

$\partial\theta/\partial t = -\ a(x,t)\ \partial\theta/\partial x + ½\ (\partial^2\theta/\partial x^2)\ b^2(x,t)$

Onde: $-\ a(x,t) = \eta x$ $b^2(x,t) = \sigma^2$

Então: $\partial\theta/\partial t = -\ \eta\ x\ (\partial\theta/\partial x) + ½\ \sigma^2\ (\partial^2\theta/\partial x^2)$ **Equação 51**

Substituindo na equação 50:

$dM(\theta,t)/dt = \int_{-\infty}^{\infty} (- \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x) + ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2))\, e^{-\theta x}\; dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} - \eta\theta\, (\partial\theta/\partial x) e^{-\theta x}\, dx \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2)\, e^{-\theta x}\, dx$

Integral por partes: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Primeiro Termo: $\int_{-\infty}^{\infty} - \eta\theta\, (\partial\theta/\partial x) e^{-\theta x}\, dx$

$- \eta \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, (\partial\theta/\partial x) e^{-\theta x}\, dx$

$= - \eta\theta \int_{-\infty}^{\infty} (\partial\theta/\partial x) e^{-\theta x}\, dx \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} ½\, \sigma^2\, (\theta/\theta)\, (\partial^2\theta/\partial x^2)\, e^{-\theta x}\, dx$

$= - \eta\theta \int_{-\infty}^{\infty} (\partial\theta/\partial x) e^{-\theta x}\, dx \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} ½\, (\sigma^2/\theta)\, (\partial^2\theta/\partial x^2)\, \theta\, e^{-\theta x}\, dx$

$= - \eta\theta \int_{-\infty}^{\infty} (\partial\theta/\partial x) e^{-\theta x}\, dx \;+\; ½\, (\sigma^2/\theta)\, (\partial^2\theta/\partial x^2) \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{-\theta x}\, dx$

$dM(\theta,t)/dt = - \eta\, \theta\, (\partial M/\partial\theta) + ½\, \sigma^2\, \theta^2\, M$ **Equação 52**

De outra forma:

Função geradora de Momentos: $M(\theta(x,t),t) = E(e^{t\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\theta}\, \theta\, dx$

Primeiro Momento: $dM(t)/dt = M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{t\theta}\, \partial\theta/\partial t\, dx$

Onde: $\partial\theta/\partial t = - \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x) + ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2)$

$dM(t)/dt = \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{t\theta}\, [- \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x) + ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2)]\, dx$

$dM(t)/dt = \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{t\theta}\, [- \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x)]\, dx \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, e^{t\theta}\, [½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2)]\, dx$

$dM(t)/dt = \int_{-\infty}^{\infty} - \eta\, \theta^2\, e^{t\theta}\, (\partial\theta/\partial x)\, dx \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} ½\, \sigma^2\, \theta\, e^{t\theta}\, (\partial^2\theta/\partial x^2)\, dx$

Segundo Momento $d^2M(t)/dt = M''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{tx}\, f(x)\, dx$

Situação:

Equação 52: $\partial M / \partial t = - \eta\, \theta\, (\partial M/\partial\theta) + ½\, \sigma^2\, \theta^2\, M$

Condições de Contorno: $M(0,t) = 1$

$-M_\theta\, (0,0) = xo$

$Var\, [x(0)] = M_{\theta\theta}\, (0,0) - xo^2 = 0$

Resultado: $M(\theta,t) = \exp\, (\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, 1 - xo\theta\, e^{-\eta t} + (½\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}]$

RESOLVENDO A DIFERENCIAL Equação 53:

$\partial M / \partial t = - \eta\, \theta\, (\partial M/\partial\theta) + ½\, \sigma^2\, \theta^2\, M$ **Equação 52**

Isolar a primitiva:

$\partial M / \partial t + \eta\, \theta\, (\partial M/\partial\theta) = ½\, \sigma^2\, \theta^2\, M$

Sistema Auxiliar:

$dt / 1 = d\theta / \eta\theta = dM / ½\, \sigma^2\, \theta^2\, M$

De $dt/1 = d\theta / \eta\theta$ De $d\theta/\eta\theta = dM/½\sigma^2\theta^2 M$ De $dt/1 = dM / ½\, \sigma^2\, \theta^2\, M$

Integrando $[½\sigma^2/\eta](\theta)d\theta = (1/M)dM$ $[½\, \sigma^2\, \theta^2]\, dt = (1/M)\, dM$

$\eta t = \text{Ln}\theta + C1$ $[\frac{1}{2}\sigma^2/\eta]\ \theta^2/2 = \text{Ln M} + C2$ $[\frac{1}{2}\ \sigma^2\ \theta^2]\ t = \text{Ln M} + C3$
$(C1)\exp[\eta t] = \theta$ $(C2)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] = M$ $(C3)\exp[\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 t] = M$
$C1 = \theta/\exp[\eta t]$ $C2 = M/\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]$ $C3 = M/\exp[\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 t]$

PODEMOS ESCREVER A SOLUÇÃO GERAL:
$\theta/\exp[\eta t] = \{M/\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}\ \alpha + \beta$
$\{M/\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}\ \alpha = \theta/\exp[\eta t] - \beta$
$M = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha \exp[\eta t] - \beta \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

CONFERENCIA: DIFERENCIANDO PARA ELIMINAR CONSTANTES α e β
$M = \theta \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) / \alpha \exp(\eta t) - \beta \exp(\sigma^2\theta^2 / 4\eta) / \alpha$
$\partial M/\partial\theta = p = \{[\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)]\exp(-\eta t) - \beta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\}(1/\alpha)$
$\partial M/\partial t = q = \theta \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\ \alpha \exp(-\eta t) / \alpha$
$= - \eta\ \theta \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) \exp(-\eta t) / \alpha$
Então:
$\alpha = [- \eta\ \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] / q]$
$p = \{[\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)]\exp(-\eta t) - \beta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\}(1/\alpha)$
$= \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t)/\alpha + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t)/\alpha - \beta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)/\alpha$

$\beta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)/\alpha = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t)/\alpha + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t)/\alpha - p$
$\beta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t) + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t) - \alpha\, p$
$\beta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t) + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t) - \alpha\, p$

$\beta = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t)/(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)$
$+ \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\exp(-\eta t)/(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)$
$- \alpha\, p/(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)$

$\beta = \exp(-\eta t)/(\sigma^2\theta/2\eta) + \theta\exp(-\eta t) - \alpha\, p/(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)$

Substituindo α e β na equação M para eliminar as constantes e simplificando :
$M = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\exp[\eta t] - \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]\}/ \alpha$
$M = \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\ \{\theta /\exp[\eta t] - \beta\}/ \alpha$
$M = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] /\alpha \exp[\eta t] - \beta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha$

Primeiro termo:
$\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] /\alpha \exp[\eta t]$
$\alpha = [- \eta\ \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] / q]$
$\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] /[- \eta\ \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] / q] \exp[\eta t]$
$\theta\, q \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] /- \eta\ \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] \exp[\eta t]$
$q\ /- \eta$
$\partial M/\partial t\ (1/-\eta)$

Segundo Termo:
$\beta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha$
$\beta = \exp(-\eta t)/(\sigma^2\theta/2\eta) + \theta\exp(-\eta t) - \alpha\, p/(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)$

$\{\exp(-\eta t)/(\sigma^2\theta/2\eta) + \theta\exp(-\eta t) - \alpha\, p/(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\}\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha$
$\{\exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / (\sigma^2\theta/2\eta)\alpha$
$+ \theta\exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha$
$- p \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] /(\sigma^2\theta/2\eta)\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\}$

$\{\exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / (\sigma^2\theta/2\eta)\alpha + \theta \exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha - p/(\sigma^2\theta/2\eta)\}$

$\alpha = [- \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] / q]$

Segundo termo A
$\exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha(\sigma^2\theta/2\eta)$
$q \exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/ - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] (\sigma^2\theta/2\eta)$
$q / - \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)$
$\partial M/\partial t / - \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)$

Segundo Termo B
$\theta \exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha$
$\theta \exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / [- \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] / q]$
$\theta\, q \exp(-\eta t)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]$
$q\ / - \eta$
$\partial M/\partial t\ (1/-\eta)$

Segundo Termo C
$p/(\sigma^2\theta/2\eta)$
$\partial M/\partial\theta = p$
$\partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)$

Fechando o Segundo Termo:
$\partial M/\partial t / - \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta) + \partial M/\partial t\ (1/-\eta) - \partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)$

Unindo o Primeiro e o Segundo Termo:
$M = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] /\alpha \exp[\eta t] - \beta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha$
$M = \partial M/\partial t\ (1/-\eta) - \{\partial M/\partial t / (- \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) + \partial M/\partial t\ (1/-\eta) - \partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)\}$
$M = \partial M/\partial t\ (1/-\eta) - \partial M/\partial t / (- \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) - \partial M/\partial t\ (1/-\eta) + \partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)$
$M = - \partial M/\partial t / (- \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) + \partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)$
$\partial M/\partial t / (- \eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) = - M + \partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)$
$\partial M/\partial t / (\eta\, \theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) = M - \partial M/\partial\theta /(\sigma^2\theta/2\eta)$
$\partial M/\partial t = M\ (\eta\theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) - \partial M/\partial\theta\ (\eta\theta(\sigma^2\theta/2\eta))/(\sigma^2\theta/2\eta)$
$\partial M/\partial t = M\ (\eta\theta\ (\sigma^2\theta/2\eta)) - \partial M/\partial\theta\ (\eta\theta)$
$\partial M/\partial t = M\ (\sigma^2\theta^2/2) - \partial M/\partial\theta\ (\eta\theta)$ **Confere com Equação 52**

CONFERENCIA: DIFERENCIANDO Eq 53

$M(\theta,t) \quad = \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta) \{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\}$

Derivando em relação a θ:

Derivadas termo a termo:

$\{\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\}' = [\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)$

$\{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\} = \{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\theta^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\theta^2 e^{-2\eta t}\}$

$\{1 - xo\theta e^{-\eta t} + ½\, xo^2\theta^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\theta^2 e^{-2\eta t}\}' = \{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$

Derivada de $fg = f'g + f g'$

$M_\theta(\theta,t) \quad = [\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\} +$
$\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta) \{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$

Derivando em relação a *t*:

$M_t(\theta,t) \quad = \{\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta) (-xo\, \theta\, e^{-\eta t})\}' + \{\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)[½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\}'$
$= \{\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\, xo\, \theta\, \eta t\}e^{-\eta t} + \{\exp(\sigma^2 \theta^2/4\eta)[½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2(-\eta t)e^{-2\eta t}$

CALCULO DA SOLUÇÃO PARTICULAR:

Nossa primitiva, já confirmada é:

$M(\theta,t) = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\exp[\eta t] - \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]\}/ \alpha$

Primeira Condição de Contorno:

$M(0,t) \quad = \quad 1$

$M(0,t) = (0) \exp[\sigma^2(0)/4\eta]/\alpha \exp[\eta t] - \beta \exp[\sigma^2(0) / 4\eta] / \alpha$

$M(0,t) = - \beta / \alpha = 1$

Segunda condição de Contorno:

$M = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha \exp[\eta t] - \beta \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$M = A - B$

$\partial M/\partial\theta = \partial A/\partial\theta - \partial B/\partial\theta$

$A = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha \exp[\eta t]$

$\partial A/\partial\theta = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\alpha \exp[\eta t]\}' = \{\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] + \theta(\sigma^2\theta/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}/\alpha \exp[\eta t]$

$= \{\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] + (\sigma^2\theta^2/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}/\alpha \exp[\eta t]$

$B = \beta \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$\partial B/\partial\theta = \{\beta \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha\}' = \beta (\sigma^2\theta / 2\eta) \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$M_\theta = \{\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] + (\sigma^2\theta^2/2\eta) \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}/\alpha \exp[\eta t] - \beta (\sigma^2\theta/2\eta) \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]/\alpha$

$M_\theta(0,0) = -xo$

$M_\theta = \{\exp[\sigma^2(0)/4\eta] + (\sigma^2(0)^2/2\eta)\exp[\sigma^2(0)^2/4\eta]\}/\alpha \exp[\eta(0)] - \beta(\sigma^2(0)/2\eta)\exp[\sigma^2(0)^2/4\eta]/\alpha$

$M_\theta = 1/\alpha = -xo$

Terceira Condição de Contorno:

$M = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha \exp[\eta t] \quad - \quad \beta \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$M = A - B$

$M' = A' - B'$

$M'' = A'' - B''$

$A = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / \alpha \exp[\eta t]$

$A' = \{\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] + (\sigma^2\theta^2/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}/\alpha \exp[\eta t]$

A''
$=\{(\sigma^2\theta/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]+(\sigma^2\theta/\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]+(\sigma^2\theta^2/2\eta)(\sigma^2\theta/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}/\alpha\exp[\eta t$
$]$

$B = \beta \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$B' = \beta (\sigma^2\theta / 2\eta) \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$B'' = \beta (\sigma^2/ 2\eta) \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha + \beta (\sigma^2\theta /2\eta)(\sigma^2\theta /2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$M'' = \{(\sigma^2\theta/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] + (\sigma^2\theta/\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]$
$+ (\sigma^2\theta^2/2\eta)(\sigma^2\theta/2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]\}/\alpha\exp[\eta t]$
$- \beta (\sigma^2/ 2\eta) \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha - \beta (\sigma^2\theta /2\eta)(\sigma^2\theta /2\eta)\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta] / \alpha$

$M'' = M_{\theta\theta}(0,0) = xo^2 = \{(\sigma^2(0)/2\eta)\exp[\sigma^2(0)^2/4\eta] + (\sigma^2(0)/\eta)\exp[\sigma^2(0)^2/4\eta] + (\sigma^2(0)^2/2\eta)(\sigma^2(0)/2\eta)\exp[\sigma^2(0)^2/4\eta]\}/\alpha\exp[\eta(0)]$
$- \beta (\sigma^2/ 2\eta) \exp[\sigma^2(0)^2 / 4\eta] / \alpha - \beta (\sigma^2(0) /2\eta)(\sigma^2(0)/2\eta)\exp[\sigma^2(0)^2/ 4\eta]/\alpha$

$M'' = M_{\theta\theta}(0,0) = xo^2 = \{0\}/\alpha\exp[\eta(0)] - \beta (\sigma^2/ 2\eta) / \alpha$

Resumindo:

$M = - \beta / \alpha = 1$ então $\beta = - M\alpha$

$M_\theta (0,0) = 1/\alpha = -xo$

$M_{\theta\theta}(0,0) = xo^2 = - \beta (\sigma^2/ 2\eta)/\alpha$

$\alpha = 1/(-xo)$

$xo^2 = - \beta (\sigma^2/ 2\eta)(-xo)$

$(xo)(xo) = - \beta (\sigma^2/ 2\eta)(xo)(-1)$

$(xo) = \beta (\sigma^2/ 2\eta)$

$\beta = 2 \eta xo / \sigma^2$

$M = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\exp[\eta t] - \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]\}/ \alpha$

$M = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\exp[\eta t] - \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]\}(-xo)$

$M = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\exp[\eta t] - (2 \eta xo / \sigma^2) \exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]\}(-xo)$

$M = \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \{\theta \exp[-\eta t] - (2 \eta xo / \sigma^2)\}(-xo)$

$M = \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \{- xo\, \theta \exp[-\eta t] + xo (2 \eta xo / \sigma^2)\}$

$M = \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \{- xo\, \theta e^{-\eta t} + 2 \eta xo^2 / \sigma^2\}$

INCOMPLETO: FALTA ENCONTRAR A SOLUÇÃO PARTICULAR

Tentativa por outras condições de contorno:

CALCULO DA SOLUÇÃO PARTICULAR:

Nossa primitiva, já confirmada é:

$M = \{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]/\exp[\eta t] - \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]\}/ \alpha$

$M = \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha - \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]/\alpha$

Primeira condição:

$\partial\theta/\partial t = - \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x) + ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2) + \eta\theta$

$\partial M/\partial t =$

$\theta' \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha + \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta]' \exp[-\eta t]/\alpha + \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]'/\alpha$

$\theta' \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha + \theta\, [\sigma^2\theta/2\eta]\theta' \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha$

$+ (- \eta\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha)$

$(- \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x) + ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2) + \eta\theta) \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha + \theta\, [\sigma^2\theta/2\eta]\, (- \eta\, \theta\, (\partial\theta/\partial x)$
$+ ½\, \sigma^2\, (\partial^2\theta/\partial x^2) + \eta\theta) \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha + (- \eta\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha)$

$- \beta\exp[\sigma^2\theta^2 / 4\eta]/\alpha$

$\{\theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha\}'$

$= - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha$

$t=0 \quad = - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta(0)]/\alpha = xo$

$= - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] = \alpha\, xo$

$\alpha \quad = - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] / xo$

Segunda Condição

$\partial M/\partial t \quad = - \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha$

$\partial^2 M/\partial t^2 \quad = \{- \eta\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t]/\alpha \}'$

$= - \eta^2\, \theta \exp[\sigma^2\theta^2/4\eta] \exp[-\eta t] / \alpha =$

Verificação da equação 17: Partindo da equação 53

$M(\theta,t) \quad = \exp(\sigma^2\, \theta^2 / 4\, \eta)\, \{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2\, e^{-2\eta t}\}$

Derivadas termo a termo:

$\{\exp(\sigma^2\, \theta^2 / 4\, \eta)\}' = [\sigma^2\, \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2\, \theta^2 / 4\, \eta)$

$\{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2\, e^{-2\eta t}\} = \{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\theta^2\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}\}$

$\{1 - xo\theta e^{-\eta t} + ½\, xo^2\theta^2\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\theta^2 e^{-2\eta t}\}' = \{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$

Derivada de fg = f 'g + f g '

$M_\theta(\theta,t) \quad = [\sigma^2\, \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2\, \theta^2 / 4\, \eta)\{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2\, e^{-2\eta t}\} +$
$\exp(\sigma^2\, \theta^2 / 4\, \eta)\, \{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$

Fazendo $\theta = 0$

$M_\theta(0,t) \quad = \quad \{ - xo\, e^{-\eta t} \}$

$E[x(t)] = -M_\theta(0,t)$
$E[x(t)] = xo\, e^{-\eta t}$
Verdade quando $u = 0$

INCOMPLETO: Como fazer para quando $u \neq 0$?

Verificação da equação 18:
Calculo de $M_{\theta\theta}(\theta,t)$

Partindo de:

$$M_\theta(\theta,t) = [\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\} + \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta) \{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$$

Derivada termo a termo:

$f1 = \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)$
$f1' = \{\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\}' = [\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)$

$f2 = \{1 - xo\, \theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\}$
$f2' = \{1 - xo\theta e^{-\eta t} + ½\, xo^2\theta^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\theta^2 e^{-2\eta t}\}'$
$= \{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$

$f3 = [\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)$
$f3' = \{[\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\}'$
$= [\sigma^2/2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta) + [\sigma^2 \theta / 2\eta]^2 \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)$

$f4 = \{-xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$
$f4' = \{-xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}' = \{xo^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/2\eta)\, e^{-2\eta t}\}$

Voltando e substituindo:

$$\begin{aligned} M_{\theta\theta}(\theta,t) &= (f3\, f2 + f1\, f4)' \\ &= (f3\, f2)' + (f1\, f4)' \\ &= f3'\, f2 + f3\, f2' + f1' f4 + f1\, f4' \end{aligned}$$

$M_{\theta\theta}(\theta,t) =$

$$\{[\sigma^2/2\eta] \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta) + [\sigma^2\theta/2\eta]^2 \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\}\{1 - xo\theta\, e^{-\eta t} + [½\, xo^2 - (\sigma^2/4\eta)]\theta^2 e^{-2\eta t}\}$$
$$+ \{[\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\}\{ - xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$$
$$+ \{[\sigma^2 \theta / 2\eta] \exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\} \{-xo\, e^{-\eta t} + ½\, xo^2\, 2\theta\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/4\eta)\, 2\theta\, e^{-2\eta t}\}$$
$$+ \{\exp(\sigma^2 \theta^2 / 4 \eta)\} \{xo^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/2\eta)\, e^{-2\eta t}\}$$

Fazendo $\theta = 0$

$$M_{\theta\theta}(0,t) = \{[\sigma^2/2\eta] + 0 + 0 + \{xo^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/2\eta)\, e^{-2\eta t}\}$$

Finalmente:

$\mathrm{Var}[x(t)] = E[x(t)^2] - [E(x(t))]^2$

Onde: $E[x(t)^2] = [\sigma^2/2\eta] + xo^2 e^{-2\eta t} - (\sigma^2/2\eta)\, e^{-2\eta t}$

$[E(x(t))]^2 = [xo\, e^{-\eta t}]^2 = xo^2 e^{-2\eta t}$

$$\begin{aligned}\text{Var}[x(t)] &= (\sigma^2/2\eta) \quad + xo^2\, e^{-2\eta t} - (\sigma^2/2\eta)\, e^{-2\eta t} - xo^2\, e^{-2\eta t} \\ &= (\sigma^2/2\eta) \quad - (\sigma^2/2\eta)\, e^{-2\eta t} \\ &= (\sigma^2/2\eta)\, [1 - e^{-2\eta t}]\end{aligned}$$

Testando se a derivada de eq 53 fornece a eq 52

$$M(\theta,t) = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, 1 \;-\; xo\theta\, e^{-\eta t} \;+\; (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}]$$

$$\partial\, M(\theta,t)/\, \partial\theta \quad = \quad f\,'g + f\, g'$$

$$f\,'g \quad = 2\, \theta\, \sigma^2/4\eta\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, 1 \;-\; xo\theta\, e^{-\eta t} \;+\; (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}]$$

$$f\, g' \quad = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, - \;\; xo\, e^{-\eta t} \;+\; 2\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}]$$

$$\partial\, M(\theta,t)/\, \partial\theta \quad = \; 2\, \theta\, \sigma^2/4\eta\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, 1 \;-\; xo\theta\, e^{-\eta t} \;+\; (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] + \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, - \;\; xo\, e^{-\eta t} \;+\; 2\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}]$$

$$\partial\, M(\theta,t)/\, \partial\theta \quad = \; \theta\, \sigma^2/\, 2\eta\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, \{[\, 1 \;-\; xo\theta\, e^{-\eta t} \;+\; (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] + [- xo\, e^{-\eta t} \;+\; 2\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}]\}$$

$$\begin{aligned}\partial\, M(\theta,t)/\, \partial t &= \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\, - (-\eta)\, xo\theta\, e^{-\eta t} \;+\; (-2\eta)\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] \\ &= \tfrac{1}{2}\, \sigma^2\, \theta^2\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [\eta xo\theta\, e^{-\eta t}\, (2/\sigma^2\, \theta^2) - 2\eta(2/\sigma^2\, \theta^2)\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] \\ &= \tfrac{1}{2}\, \sigma^2\, \theta^2\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (4\eta/\sigma^2\,)\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\, e^{-2\eta t}] \\ &= \tfrac{1}{2}\, \sigma^2\, \theta^2\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (2\eta\, xo^2/\sigma^2 - 1)\, e^{-2\eta t}]\end{aligned}$$

Testar se fecha com a equação 52:

$\tfrac{1}{2}\;\; \sigma^2\, \theta^2\, M - \eta\, \theta\, \partial M/\partial\theta = \partial M/\partial t$

$\tfrac{1}{2}\;\; \sigma^2\, \theta^2\, M = \eta\, \theta\, \partial M/\partial\theta + \partial M/\partial t$

$M = (2/\sigma^2\, \theta^2)\;\{\eta\, \theta\, \partial M/\partial\theta + \partial M/\partial t\}$

$M = (2/\sigma^2\, \theta^2)(\eta\, \theta\, \partial M/\partial\theta) \;+ (2/\sigma^2\, \theta^2)(\partial M/\partial t)$

$M = (2/\sigma^2\, \theta^2)(\eta\, \theta\, (\theta\, \sigma^2/\, 2\eta\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, \{[\, 1 \;-\; xo\theta\, e^{-\eta t} \;+\; (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] + [- xo\, e^{-\eta t} \;+\; 2\, (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}]\}) \;+ (2/\sigma^2\, \theta^2)(\tfrac{1}{2}\, \sigma^2\, \theta^2\, \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (2\eta\, xo^2/\sigma^2 - 1)\, e^{-2\eta t}])$

$M = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\{[1 - xo\theta\, e^{-\eta t} \;+ (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] + [- xo\, e^{-\eta t} \;+ 2(\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}]\} \;+ \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (2\eta\, xo^2/\sigma^2 - 1)\, e^{-2\eta t}]$

$M = \{\exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)[1 - xo\theta\, e^{-\eta t} \;+ (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] + \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)[- xo\, e^{-\eta t} \;+ 2(\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}]\} \;+ \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (2\eta\, xo^2/\sigma^2 - 1)\, e^{-2\eta t}]$

$M = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)[1 - xo\theta\, e^{-\eta t} \;+ (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] + \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)[- xo\, e^{-\eta t} \;+ 2(\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}] \;+ \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (2\eta\, xo^2/\sigma^2 - 1)\, e^{-2\eta t}]$

$M = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)[1 - xo\theta\, e^{-\eta t} \;+ (\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\, e^{-2\eta t}] - \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)[xo\, e^{-\eta t} \;- 2(\tfrac{1}{2}\, xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\, e^{-2\eta t}] \;+ \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\, [2\eta xo\, e^{-\eta t}/\sigma^2\, \theta - (2\eta\, xo^2/\sigma^2 - 1)\, e^{-2\eta t}]$

$[xo\ e^{-\eta t} - 2(½\ xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\ e^{-2\eta t}] = [2\eta xo\ e^{-\eta t}/\sigma^2\,\theta - (2\eta\ xo^2/\sigma^2 - 1)\ e^{-2\eta t}]$
$xo\ e^{-\eta t} - 2(½\ xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta\ e^{-2\eta t} = 2\eta xo\ e^{-\eta t}/\sigma^2\,\theta - (2\eta\ xo^2/\sigma^2 - 1)\ e^{-2\eta t}$

fazendo : $2\ \eta\ /\sigma^2\ \theta = 1$
Pois $2\ \eta = \sigma^2\ \theta$
$2\eta xo\ e^{-\eta t}/\sigma^2\ \theta$ = $xo\ e^{-\eta t}$
$(2\eta\ xo^2/\sigma^2 - 1)\ \theta\ /\ \theta e^{-2\eta t}$ =
$(2\eta\ xo^2/\sigma^2\ \theta - 1/\theta)\ \theta\ e^{-2\eta t}$ = $2\ \eta\ /\ \sigma^2\ \theta\ (\ xo^2 - \sigma^2/2\eta)\ e^{-2\eta t}$
= $(\ xo^2 - \sigma^2/2\eta)\ e^{-2\eta t}$

Onde $M = \exp(\sigma^2\theta^2/4\eta)\ [1 - xo\theta\ e^{-\eta t} + (½\ xo^2 - \sigma^2/4\eta)\theta^2\ e^{-2\eta t}]$ c.*q*.d.