Capitulo 2 – Um exemplo discreto simples

1. Incerteza de preço por 2 períodos: (de t = 0 a t = 1)

O problema

Dixit e Pindyck usam um modelo simplificado para demonstrar o conceito de opções reais. O problema consiste numa firma que tem a oportunidade de investir num projeto que produzirá um produto por ano em perpetuidade e sem custos operacionais. O investimento necessário (I) é de \$1600, e o preço no instante zero (P_0) é \$200. Este preço sofre um reajuste único no período $t = 1$ com probabilidades $q = 0.50$ de subir para \$300 e de $1\text{-}q$ de cair para \$100, após o que fixa fixo em perpetuidade. A taxa de retorno sem risco r_f é 10%, e o investimento já produz resultados no instante zero. O risco é totalmente diversificável e independe do resto da economia (não há risco sistemático). O problema pode ser representado graficamente conforme vemos a seguir:

t_0	t_1	t_2	…….	t_n
	P_1=\$300	P_2=300	…….	P_n=300
$q = 0.5$				
P_0 = \$200 I = -\$1600				
	P_1=\$100	P_2=100	…….	P_n=300

Em condições de certeza, podemos utilizar o método do Valor Presente Líquido (VPL). Em condições de incerteza, em alguns casos podemos usar o Valor Esperado do VPL (E(VPL)). Para o nosso exemplo, se o investimento é realizado em $t = 0$, o Valor Esperado do VPL será:

$$E[VPL] = -I + P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(P_1)}{(1+r_f)^i}$$

$$E[VPL] = -1600 + 200 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{200}{(1,1)^i}$$

$$E[VPL] = 600$$

O Valor Esperado é válido, no entanto, apenas se o investidor for neutro a risco. Vamos recalcular o valor do projeto sem opção de adiar, sem fazer esta consideração.

Começamos montando um portfólio ϕ composto do projeto (F_0), uma posição a descoberto de n kits (n P_0), mais o valor do investimento (I) menos o valor recebido no instante t = 0 (P_0) → $\phi_0 = F_0 + (I - P_0) - m\, P_0$

	$\phi_1^+ = F_1^+ - m\, P_1^+$
$\phi_0 = F_0 + (I - P_0) - m\, P_0$	
	$\phi_1^- = F_1^- - m\, P_1^-$

O valor deste portfólio em t = 0 é $\phi_0 = F_0 + 1400 - 200\, m$
O valor deste portfólio em t = 1 é $\phi_1 = F_1 - P_1\, m$. Note que não existe investimento em *t = 1*, pois o investimento foi feito no instante *t = 0* e o projeto já está em andamento. Dependendo se o preço sobe para $P_1^+ = 300$ ou cai para $P_1^- = 100$, teremos:

$$\phi_1^+ = F_1^+ - m\, P_1^+ = 3300 - 300\, m$$
$$\phi_1^- = F_1^- - m\, P_1^- = 1100 - 100\, m$$

Para que este portfólio seja sem risco, obrigamos que $\phi_1^+ = \phi_1^-$:

$$\begin{aligned} \phi_1^+ &= \phi_1^- \\ 3300 - 300\, m &= 1100 - 100\, m \\ 2200 &= 200\, m \\ m &= 11 \end{aligned}$$

Assim, $\phi_1^+ = \phi_1^- = 1100 - 100 \text{ m} = 0$

Ganho com o portfólio ϕ_0 = Rf ϕ_0 (portfólio é sem risco)
Retorno do portfólio = $\phi_1 - \phi_0$ (ganho de capital com o portfólio) - Rf m P_0 (custo de se manter a posição a descoberto. Dessa forma temos:

$$\text{Rf}\, \phi_0 = (\phi_1 - \phi_0) - \text{Rf}\, m\, P_0 \qquad\qquad \text{Rf} = 0.10$$

$$0.10\, (F_0 + (I - P_0) - m\, P_0) = (\phi_1 - (F_0 + (I - P_0) - m\, P_0) - 0{,}10\, m\, P_0$$

$$\phi_1 = 0 \qquad m = 11 \qquad I = 1600 \qquad P_0 = 200$$
$$0.10\, (F_0 + 1400 - 11\ 200) = (0 - (F_0 + 1400 - 11\ 200) - 0{,}10\ 11\ 200$$

$$0.1\, F_0 - 80 = - F_0 + 800 - 220$$
$$1.1\, F_0 = + 660$$
$$F_0 = 600$$

Considerando a opção de adiar o projeto por um período, usamos também um portfólio da seguinte forma:

Começamos por montar um portfólio sem risco ϕ, composto do projeto e n posições a descoberto do kit:

$$\phi_0 = F_0 - n\, P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n\, P_1^+ \\ \phi_1^- = F_1^- - n\, P_1^- \end{cases}$$

O valor deste portfólio em t = 0 é $\phi_0 = F_0 - 200\, n$
O valor deste portfólio em t = 1 é $\phi_1 = F_1 - P_1\, n$.
Dependendo se o preço sobe para $P_1^+ = 300$ ou cai para $P_1^- = 100$, teremos:

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\,P_1^+ = (-1600 + 3300) - 300\,n = 1700 - 300\,n$$
$$\phi_1^- = F_1^- - n\,P_1^- = (-1600 + 1100) - 100\,n = -500 - 100\,n = -\,100\,n$$

Para que este portfólio seja sem risco, obrigamos que $\phi_1^+ = \phi_1^-$:

$$\begin{aligned} \phi_1^+ &= \phi_1^- \\ 1700 - 300\,n &= -\,100\,n \\ 1700 &= 200\,n \\ n &= 8.5 \end{aligned}$$

Assim, $\phi_1^+ = \phi_1^- = -100\,n = -850$

Qual é o ganho de investir no portfólio ϕ_0 ? Como este portfólio é sem risco, o retorno deve ser Rf ϕ_0. Por outro lado, o retorno também será o ganho de capital com o portfólio $(\phi_1 - \phi_0)$, deduzido dos custos de se manter a posição a descoberto do portfólio, que é Rf n P_0. Dessa forma temos:

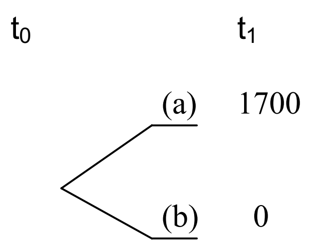
$$\begin{aligned} &Rf\,\phi_0 = (\phi_1 - \phi_0) - Rf\,n\,P_0 \\ &0.10\,(F_0 - 200\,n) = (-850 - (F_0 - 200\,n)) - 0.10\ 8.5\ 200 \\ &0.10\,F_0 - 170 = -850 - F_0 + 1700 - 0.10\ 8.5\ 200 \\ &1.1\,F_0 = 850 \\ &F_0 = 772.73 \end{aligned}$$

Sem flexibilidade para adiar o investimento, o projeto vale \$600. Mas se for possível adiar o projeto por mais um período, o seu valor irá se alterar? Se esperarmos mais um período, duas coisas podem acontecer, ou seja, podem existir dois estados:

Estado (a): Preço sobe
$P_1 = \$300$
$VPL_0 = -1600 + 300 + \sum 300 / (1{,}10)^t = 1700 \rightarrow$ investe

Estado (b): Preço cai
$P_1 = \$100$
$VPL_0 = -1600 + 100 + \sum 100 / (1{,}10)^t = -500 \rightarrow$ não investe

Em $t = 1$, a empresa investirá se ocorrer o estado (a), e não investirá mais no projeto se ocorrer o estado (b). As oportunidades de investimento da empresa então são:



Calculando o Valor Presente do Projeto em t = 0, considerando a opção de adiar o investimento por um período, temos:

$$
\begin{aligned}
VPL_0 &= (0.5 \times 1700 + 0.5 \times 0) / 1.1 \\
&= 850 / 1.1 \\
&= 727{,}73 \qquad\qquad \textbf{equação 2}
\end{aligned}
$$

O valor da flexibilidade de poder adiar o investimento por mais um ano, ou seja, o valor da opção de adiar, é a diferença entre o VPL sem opção e o VPL com opção, no caso, $1727,73.

Outra maneira de analisar o valor da flexibilidade deste projeto é calcular qual o maior investimento que poderíamos aceitar para que o projeto tivesse a flexibilidade de poder ser adiado. Para isso, podemos escrever a equação 2 da seguinte forma:

$$VPL_0 = 0.50\left[-1600 + 300 + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{300}{(1.1)^t}\right]\Big/1.1 \; = 772.27$$

Queremos saber qual o valor do Investimento (I) que faz o VPL_0 ser 600. Substituindo,

$$VPL_0 = 0.50\left[-\bar{I} + 300 + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{300}{(1.1)^t}\right]\Big/1.1 \; = 600$$

$$-\bar{I} + 300 + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{300}{(1.1)^t} = 1320$$

$$\bar{I} = -1020 + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{300}{(1.1)^t} = 1980$$

Isso significa que um projeto inadiável de fabricar kits que tenha um investimento inicial de $1600, tem o mesmo valor que um projeto idêntico, mas que tenha a opção de ser adiado por um período, que requeira um investimento inicial de $1980.

Finalmente, suponha que exista um mercado futuro para os kits, onde o preço futuro para entrega daqui a um ano seja igual ao Valor Esperado do seu preço futuro, ou seja, $200. Esta possibilidade de hedgear altera nossa decisão de investimento hoje? Para fazermos este hedge devemos então vender a futuro nossos kits pelo preço de $200. Quantos kits precisamos vender para neutralizar o risco?

Seja n o numero de kits a vender.
O VPL Esperado das receitas de venda dos kits é = 200 + 200/0,1 = 2200
Se o preço sobe o VPL será 3300, e o valor do hedge será (- n 300)
Se o preço cai o VPL será = 1100, e o valor do hedge será (- n 100)

Queremos eliminar o risco, portanto as duas alternativas tem que dar o mesmo valor:

3300 - n 300 = 1100 - n 100

200 n = 2200
n = 11

Assim, com hedge de n = 11 kits, o VPL será - 1600 + 2200 = 600, idêntico ao VPL sem hedge. Ou seja estaremos melhor esperando e investindo ou não em t = 1 (VPL = 773)

1A. Analogia com as opções do mercado de capitais

A opção de investimento é análoga a uma opção Call (opção de Compra), onde se tem a opção de pagar I para receber um ativo que vale V_0. Calculamos anteriormente que nossa oportunidade de investimento vale \$600 em $t = 0$ e \$772,72 em $t = 1$.

Vamos analisar este projeto utilizando as ferramentas da Teoria das Opções.

Seja F_0 o valor em $t = 0$ da oportunidade de investimento (VPL em $t = 0$)
F_1 o valor desta oportunidade em $t = 1$ (VPL em $t = 1$)

Se os preços subirem F_1 valerá: - 1600 + 300 + 300/0,1 = -1600 + 3300 = 1700
Se os preços caírem F_1 valerá: - 1600 + 100 + 100/0,1 = - 1600 + 1100 = - 500
Neste caso opção não será exercida e F_1 valerá \$0

Queremos achar F_0:
Considere um portfólio composto de uma opção F_0 e "n" kits vendidos a descoberto
O valor deste portfólio em t = 0 é $\phi_0 = F_0 - nP_0$
$\phi_0 = F_0 - n200$
O valor deste portfólio em t = 1 é $\phi_1 = F_1 - nP_1$

t_0 t_1

$\phi_1^+ = F_1^+ - nP_1^+$

$\phi_0 = F_0 - nP_0$

$\phi_1^- = F_1^- - nP_1^-$

Se $P_1^+ = 300$ $\phi_1^+ = F_1^+ - n300$
$\phi_1^+ = 1700 - 300\,n$

Se $P_1^- = 100$ $\phi_1^- = F_1^- - n100$
$\phi_1^- = (500) - 100\,n$
$\phi_1^- = 0 - 100\,n$

Vamos escolher n de tal forma que θ_1 seja um portfólio risk free: $\phi_1^+ = \phi_1^-$

$$\phi_1^+ = \phi_1^-$$
$$1700 - 300\,n = -100\,n \qquad \textbf{equação 4}$$
$$n = 1700/200 = 8{,}5$$

Desta forma ϕ_1 valerá : $1700 - 300(8,5) = -850$

$$-100\,(8,5) = -850$$

$$\phi_1 = 850$$

Agora, vamos calcular o retorno que se obtém com este portfólio. Este retorno é composto por um ganho de capital, $\phi_1 - \phi_0$, menos qualquer pagamento feito para manter a posição curta.

A posição curta é $nP_0 = 8.5 \times \$200 = \$1700$. Dado que ϕ é sem risco, a taxa certa é Rf, e assim, o custo manter a posição será de 0.10 x 1700 = \$170.

Assim, o retorno que se obtém com este portfólio é:

$$\begin{aligned} \text{Retorno} &= (\phi_1 - \phi_0) - 170 \\ &= \phi_1 - (F_0 - 200\,n) - 170 \\ &= -850 - F_0 + 1700 - 170 \\ &= 680 - F_0 \end{aligned}$$

Sendo um portfólio risk free, o retorno deste portfólio deve também ser igual a taxa de aplicação Rf.

$$\begin{aligned} \text{Retorno de investir } \phi_0 \text{ em Rf é:} \quad &= 0{,}10\,\phi_0 \\ &= 0{,}10\,(F_0 - 200\,n) \\ &= 0{,}10\,F_0 - 170 \end{aligned}$$

Igualando:

$$\begin{aligned} 680 - F_0 &= 0{,}1\,F_0 - 170 \qquad \textbf{equação 5} \\ F_0 &= (680 + 170)\,1.1 \\ F_0 &= 772{,}72 \end{aligned}$$

De novo:

- Retorno (ganho) do Portfólio = Ganho de Capital - Custo de manter o Portfólio (Custo da posição curta)
- Mas Portfólio é risk free, então esse retorno também tem que ser igual a uma aplicação a taxa Rf → Retorno (ganho) do Portfólio = Rf ϕ_0

$$\begin{aligned} Rf\,\phi_0 &= \text{Ganho de Capital} - \text{Custo de manter o Portfólio} \\ Rf\,\phi_0 &= (\phi_1 - \phi_0) - Rf\,n\,P_0 \end{aligned}$$

Mas:

$\phi_0 = F_0 - n\,P_0$

$\phi_1 = -100\,n$

Posição curta = $n\,P_0$

$$Rf\,(F_0 - n\,P_0) = \phi_1 - (F_0 - n\,P_0) - Rf\,n\,P_0$$

Mas:

$P_0 = 200$

$n = 8.5$

$Rf = 0.10$

$$0.10\,(F_0 - 200x8.5) = -100x8.5 - F_0 + 200x8.5 \quad - \quad 0.10x8.5x200$$
$$0.10\,F_0 - 170 \quad = -850 - F_0 + 1700 \quad - \quad 170$$
$$1.10\,F_0 \quad = 850$$
$$F_0 \quad = 772,27$$

O valor da oportunidade de investimento = valor da opção de investir = 772,72
O resultado liquido de investir hoje é: -1600 + 2200 = 600
Uma vez investido, nossa opção de postergar desaparece, esta opção vale \$772,72
Então \$772,72 é o custo de oportunidade de investir que perdemos ao investir em $t = 0$

Então investir em t = 0 significa investir 1600 e "perder" 772,72
O custo total de investir hoje é \$2372,72
É maior do que 2200, VP dos nossos FC's

Comentário:
Existe um cuidado que deve ser tomado em relação a notação. Freqüentemente o valor da oportunidade de investimento é referido como sendo o valor da opção, cuidado! No mercado de capitais, o valor da oportunidade de investir-se em uma ação é igual ao valor da opção. Posto que em $t = 0$ o VPL de investir-se em uma ação é Zero, assumindo eficiência de mercado. VPL = Valor da ação - Custo da ação = 0

Em um projeto pode (e deve) existir um VPL $\neq$ 0 em $t = 0$.
O Valor da oportunidade de investir é o VPL e pode ser maior ou menor do que zero.
O Valor da opção será a diferença entre o VPL com e o VPL sem a oportunidade

O que fizemos foi avaliar a oportunidade de podermos investir em kits da fábrica

$$Co \;\begin{array}{l} \nearrow \; C_1^+ \\ \searrow \; C_1^- \end{array}$$

Para avaliar a oportunidade (opção de investir) C no tempo $t = 0$, Co, montamos um portfólio ϕ, formado de uma opção e n partes (kits) da fábrica onde:

$$\phi o = Co - n\,Po \;\begin{array}{l} \nearrow \; \phi_1^+ = C_1^+ - n\,P_1^+ \\ \searrow \; \phi_1^- = C_1^- - n\,P_1^- \end{array}$$

Igualamos ϕ_1^+ a ϕ_1^- de tal forma a podermos determinar n, o qual produz um portfólio ϕ livre de risco, posto ser seu valor constante para qualquer estado P_1^+ ou P_1^-. Sendo o portfólio ϕ livre de risco, seu valor em $t = 1$ deve ser igual ao seu valor em $t = 0$ capitalizado pala taxa Rf mais os custos eventualmente necessários para manter a posição curta nos kits.

$\phi_1 = (Rf + 1)\ \phi o$ + custos
$\phi_1 - \phi_0$ - custos = Rf ϕ_1 que é equivalente a equação 5 acima

Ao invés de montarmos o portfólio composto de *n* kits e uma Call podemos montar um outro portfólio formado por *n* partes da firma toda e uma opção de Investir :

Valor da fábrica (função do preço do kits)

	3300	$C_1^+ = 1700$	Rf=0,10
2200			
	1100	$C_1^- = 0$	X Call = 1600

$\phi 1+ = C1+ - n\ P_1+$ & $\phi 1- = C1- - NP_1-$

$0 - n\ 1100 = 1700 - n\ 3300$
$n = 1700 / 2200 = 0,772727$

Podendo esperar *t = 1*, não tendo investido, temos dois cenários;
a) Existe a opção de investir ou não investir
b) Não existe a opção, você devera investir de qualquer forma em *t = 1*

Podemos obter o Valor Presente Liquido do Projeto com a opção de flexibilidade (defer) por diferentes enfoques;

a) Considerando o custo da posição curta ao se optar por esperar *t = 1*

Considere que os dividendos são repassados imediatamente ao Investidor que emprestou a posição. Devemos pagar dividendos pela posição curta assumida à taxa Rf.
A posição curta é $n\ P_0$ ou seja seu custo é 0,7727 x 2200 x Rf = 1700 x 0,1 = 170
$\phi 1$ - Dividendos = $(1+Rf)\ \phi_0$
- 0,7727 1100 - 170 = 1,1 [C_0 - (0,7727) 2200]
C_0 = [- 0,7727 1100 - 170] / 1,1 + (0,7727) 2200
= [-850 - 170] / 1,1 + 1700 = [-1020] / 1,1 + 1700 = - 927,27 + 1700 = 772,72

b) Por probabilidades neutras ao risco;

Probabilidades neutras ao risco p(3300) + (1-p) 1100 = 2200 (1+Rf)
3300 p + 1100 - 1100 p = 2420
p = (2420 - 1100) / 2200 = 0,6

Só projeto **Sem opção** 0,6 (3300) + 0,4 (1100) = 2420

Projeto + Opção **Com opção** 0,6 (3300 + 1700) + 0,4 (1100 + 0) - 170 = 3270
Lembrar: Se preço subir a opção vale $C_1^+ = 1700$
Se preço cair a opção vale $C_1^- = 0$

b-1) Diferença em Valor Diferença Com e Sem Oportunidade: 3270 - 2420 = 850
VP da diferença de valor: 850 / 1,1 = 772,72

b-2) Diferença de VPL VPL com oportunidade 3270 - 1600 = 1670
VPL sem oportunidade 2424 - 1600 = 820
Diferença 1670 - 820 = 850
VP da diferença de VPL: 850 / 1,1 = 772,72

c) Avaliando diretamente o valor da oportunidade de investir no projeto com a opção de esperar T=1 e então decidir.

Valor da Oportunidade (se não tivéssemos que pagar custos pela short position)

3300 - 1600 = 1700

C_0 = ?

1100 - 1600 = 0

C_0 = [p 1700 + (1-p) 0] / 1,1
= 1020 / 1,1
= 927,27

Valor da Oportunidade com pagamento de custos (dividendos)

3300 - 1600 - custos = 1700 - 170

C_0 = ?

1100 - 1600 - custos = 0 - 170

C_0 = {[p 1700 + (1-p) 0] - 170} / 1,1
= {1020 - 170} / 1,1
= 850 / 1,1 = 772,27

Em qualquer enfoque o valor da opção de flexibilidade será sempre:
$772,27 - $600 = $172,27

1-B Características da opção de investir

Analise de sensibilidade na variável Investimento Inicial I:

Até agora, o custo do investimento I tem sido constante. Qual o valor F_0 do projeto se I for diferente de 1600? Para achar F_0 em função de I, vamos montar um portfólio livre de risco;

No instante zero, sem opção de adiar, $F_0 = -I + 2200$
No instante zero, com opção de adiar, $F_0 = -I + 2372{,}27$

Note que temos descontinuidades em I = 3300 e em I = 1100.
Se I > 3300, o projeto não será executado nunca.

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n\,P_1^+ \\ \phi_1^- = F_1^- - n\,P_1^- \end{cases}$$

O valor deste portfólio em t = 0 é $\phi_0 = F_0 - 200\,n$
O valor deste portfólio em t = 1 é $\phi_1 = F_1 - P_1\,n$

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\,P_1^+ = (-I + 3300) - 300\,n$$
$$\phi_1^- = F_1^- - n\,P_1^- = (-I + 1100) - 100\,n$$

Vamos considerar a hipótese de I > 1100. Nesse caso, teremos $F_1^- = (-I + 1100) \leq 0$, e então $F_1^- = 0$.

$$\phi_1^- = F_1^- - n\,P_1^- = -100\,n$$

Vamos escolher n de tal forma que ϕ_1 seja um portfólio risk free: $\phi_1^+ = \phi_1^-$

$$\begin{aligned} \phi_1^+ &= \phi_1^- \\ (-I + 3300) - 300\,n &= -100\,n \\ -I + 3300 - 300\,n &= -100\,n \\ -I + 3300 &= 200\,n \\ n &= -I/200 + 3300/200 \\ n &= -0{,}005I + 16{,}5 \qquad \textbf{equação 6} \end{aligned}$$

O valor de F_0 é:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= F_1 - P_1\,n \\ \phi_1^+ &= -I + 3300 - 300(-0{,}005I + 16{,}5) = 0{,}5\,I - 1650 \\ \phi_1^- &= 0 - 100(-0{,}005I + 16{,}5) = 0{,}5\,I - 1650 \end{aligned}$$

Base: O retorno do investimento neste portfólio é IGUAL ao ganho de capital menos o custo de manutenção da posição curta a taxa Rf. Como este portfólio é livre de risco, isso é também igual a Rf ϕ_0.

$$Rf.\,\phi_0 = (\phi_1 - \phi_0) - \text{(custos de capital para manutenção da posição curta)}$$
$$\phi_1 = 0{,}5\,I - 1650$$
$$\phi_0 = F_0 - P_0\,n = F_0 - 200\,[-0{,}005I + 16{,}5] = F_0 + I - 3300$$

Custo do capital = $200\,n\,(10\%) = 200\,[-0{,}005I + 16{,}5]\,(10\%) = -0{,}1\,I + 330$

Retorno do investimento $= [0,5\ I - 1650] - [F_0 + I - 3300] - [-0,1\ I + 330]$
$= 0,5\ I - 1650 - F_0 - I + 3300 + 0,1\ I - 330$
$= - 0,4\ I - F_0 + 1320$

Aplicação em Rf $= (0,1)[\ F_0 - P_0\ n]$
$= (0,1)\ [F_0 - 200(-0,005I + 16,5)]$
$= (0,1)\ F_0 + 0,1\ I - 330$

Igualando: $(0,1)\ F_0 + 0,1\ I - 330 = - 0,4\ I - F_0 + 1320$
$1,1\ F_0 = - 0,5\ I + 1650$
$F_0 = - 0,4545\ I + 1500$ **equação 7**

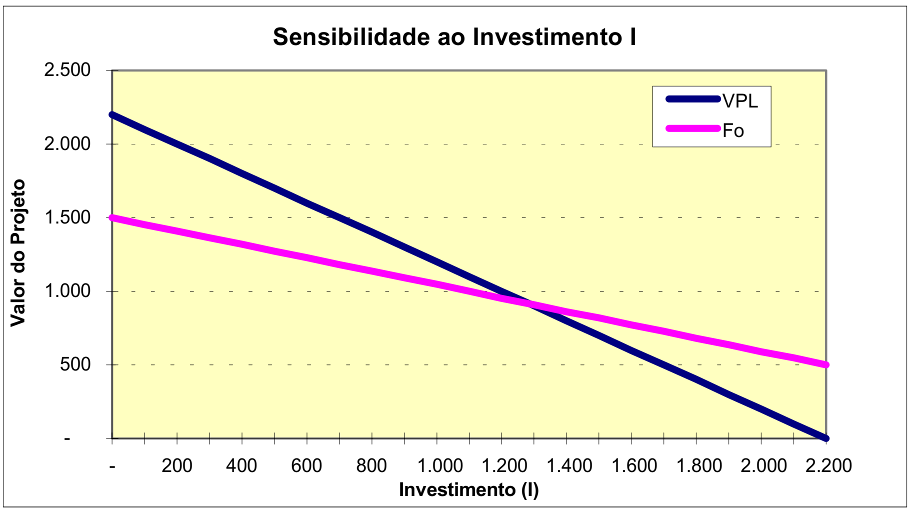
Conclusão:

Valor do projeto com opção de esperar: $F_0 = - 0,4545\ I + 1500$
Valor do projeto sem opção de esperar: $VPL_0 = 2200 - I$
Ponto de indiferença entre investir agora e esperar: $F_0 = VPL_0$
$- 0,4545\ I + 1500 = 2200 - I$
$I = 1283,23$

O projeto terá valores positivos ($F_0 > 0$) se: $- 0,4545\ I + 1500 > 0$
$I < 3300$

Valor Investimento	Valor Projeto com opção: Investe em $t = 1$	Valor Projeto sem considerar opção. Investe em $t = 0$
I = 1283	$F_0 = 916$	$VPL_0 = 2200 - 1283,33 = 916$
I = 1600	$F_0 = 772$	$VPL_0 = 2200 - 1600,00 = 600$
I = 2200	$F_0 = 500$	$VPL_0 = 2200 - 2200,00 = 0$
I = 3300	$F_0 = 0$	$VPL_0 = 2200 - 3300,00 = -1100$

Então: $I > 3300,00$ não investir agora (VPL = -1100), não esperar $F_0 = 0$
$1283,33 < I < 3300,00$ não investir agora $F_0 > VPL_0$
$I < 1283,33$ Investir agora, não esperar pois $VPL_0 > F_0$ (Vide gráfico)



Análise de Sensibilidade do Preço Inicial:

Vamos fixar o Investimento em \$1600, e variar o preço inicial (P_0). As premissas iniciais serão mantidas: ao final do primeiro período o preço pode subir 50% com probabilidade 50% e cair 50% com probabilidade 50%.

t_0		t_1		t_2
		$1{,}5\ P_0$	—	$1{,}5\ P_0$
	0,5			
P_0				
	0,5			
		$0{,}5\ P_0$	—	$0{,}5\ P_0$

Vamos montar um portfólio sem risco, composto de 1 opção de investimento de valor F_0, e *n* ações de valor P_0 a descoberto.

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0$$
$$\phi_1 = F_1 - n\ P_1$$

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n\ P_1^+ \\ \phi_1^- = F_1^- - n\ P_1^- \end{cases}$$

Mas $P_1^+ = 1.5\ P_0$ e $P_1^- = 0.5\ P_0$

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n\ 1.5\ P_0 \\ \phi_1^- = F_1^- - n\ 0.5\ P_0 \end{cases}$$

$$F_1 = -I + P_1 + P_1 / 0.10$$

Se preço subir: $F_1^+ = -1600 + 1.5\ + 1{,}5\ P_0 / 0{,}10$
$F_1^+ = -1600 + 16{,}5\ P_0$

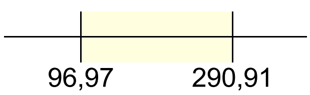
Se preço cair: $F_1^- = -1600 + 0{,}5\ P_0 + 0{,}5\ P_0/0{,}10$
$F_1^- = -1600 + 5{,}5\ P_0$

Vamos considerar primeiro a hipótese de que investiremos se o preço subir (P_1=1.5 P_0):

$F_1^+ = -1600 + 16{,}5\ P_0 > 0$
$P_0 > 1600/16{,}5$
$P_0 > 96{,}97$

mas não será interessante investir se o preço cair (P_1=0.5 P_0):

$F_1^- = -1600 + 5{,}5\ P_0 < 0$
$P_0 < 1600 / 5{,}5$
$P_0 < 290.91$



OBS: Na verdade, esse limite superior não tem nenhum significado, pois se é interessante investir mesmo que o preço caia, é mais interessante investir se o preço subir. F_1^+ sempre será preferível a F_1^-.

Nesse caso, F_1^+ será positivo, e F_1^- será negativo, portanto, o projeto não será executado e F_1^- passará a ter valor zero.

$$F_1^+ = -1600 + 16,5\ P_0$$
$$F_1^- = 0$$

Os portfólios respectivos serão:

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\ 1.5\ P_0$$
$$\phi_1^- = -n\ 0.5\ P_0$$

Igualando o valor de ϕ_1 em ambas situações:

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ &= \phi_1^- \\
-1600 + 16,5\ P_0 - n\ 1,5\ P_0 &= -n\ 0,5\ P_0 \\
-1600 + 16,5\ P_0 - n\ P_0 &= 0 \\
-1600 + 16,5\ P_0 &= n\ P_0 \\
n &= (-1600 + 16,5\ P_0)/P_0 \\
n &= 16,5 - 1600/P_0
\end{aligned}$$

equação 8

O valor de ϕ_1 será:

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ &= F_1 - n\ 1,5\ P_0 \\
&= -1600 + 16,5\ P_0 - (16,5 - 1600/P_0)(1,5)\ P_0 \\
&= -1600 + 16,5\ P_0 - 24,75\ P_0 + 2400 \\
&= 800 - 8,25\ P_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1^- &= -n\ 0,5\ P_0 \\
&= -(16,5 - 1600/P_0)(0,5)P_0 \\
&= -8,25\ P_0 + 800
\end{aligned}$$

Ou seja o mesmo em qualquer cenário, comprovando que o investimento neste portfólio é sem risco. O valor da opção de esperar e investir em $t = 1$, ou seja o VPL de investir em t_1, hoje é:

Lucro de investir em RF = Lucro do portfólio (= retorno - custo)

$$\begin{aligned}
Rf\ \theta_0 &= (\theta_1 - \theta_0) - Rf\ n\ P_0 \\
0,10\ \theta_0 &= \theta_1 - \theta_0 - 0,10\ n\ P_0 \\
0,10\ (F_0 - n\ P_0) &= (800 - 8,25\ P_0) - (F_0 - n\ P_0) - 0,10\ n\ P_0
\end{aligned}$$

$$0,10\ (F_0 - (16,5-1600/P_0)\ P_0) =$$
$$800 - 8,25\ P_0 - (F_0-(16,5-1600/P_0)P_0) - 0,10(16,5-1600/P_0)P_0$$

$$\begin{aligned}
0,10\ F_0 - 1.65\ P_0 + 160 &= 800 - 8,25\ P_0 - F_0 + 16,5\ P_0 - 1600 - 1,65\ P_0 + 160 \\
1,10\ F_0 &= 800 - 8,25\ P_0 + 16,5\ P_0 - 1600 \\
1,10\ F_0 &= -800 + 8,25\ P_0
\end{aligned}$$

$$F_0 = 7,50\ P_0 - 727,27$$

equação 9

Esse é o valor da opção de investir, considerando que só iremos investir em t_1 se o preço subir para 1.5 P_0. Mas vimos que se P_0 for suficientemente baixo, nunca investiremos.

$$F_0 = 7{,}50\ P_0 - 727{,}27 = 0$$
$$P_0 = 727{,}27 / 7.50 = 96{,}97$$

Então, para valores inferiores a $P_0 = 96{,}97$ não vale a pena investir nunca.

Para que valores de P_0 é melhor investir agora do que adiar? Vamos achar o ponto de equilíbrio entre investir agora e adiar:

- Investir agora significa receber o $VPL_0 = 11\ P_0 - I$
- Adiar significa receber F_0

Igualando os dois, temos:

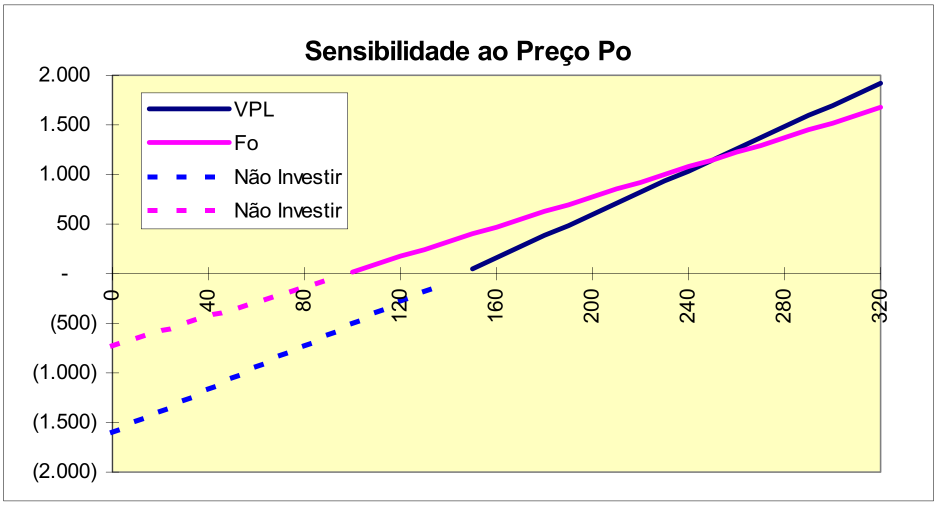
$$VPL_0 = F_0$$
$$11\ P_0 - I = F_0$$
$$11\ P_0 = 1600 + F_0$$
$$11\ P_0 = 1600 + 7{,}50\ P_0 - 727{,}27$$
$$3{,}5\ P_0 = 872{,}7272$$
$$P_0^* = 249{,}35$$

Se $P_0 > 249.35$, então valerá mais a pena investir agora e abandonar a opção de adiar.

Resumo:

$F_0 = 7{,}50\ P_0 - 727{,}27$ e $VPL_0 = 11P_0 - 1600$

Valores de P_0	Valor do Projeto	Decisão
$P_0 < 96{,}9$	$F_0 < 0$ e $VPL_0 < 0$	Não investir nunca
$96{,}96 < P_0 < 249{,}35$	$F_0 > VPL_0$	Adiar e Investir em t_1 se preço subir
$P_0 > 249{,}35$	$VPL_0 > F_0$	Investir agora



Alterando as probabilidades para variação do preço:

Mantendo o investimento I em 1600 o preço P_0 em 200, e colocando F_0 e ϕ_0 em função de q e (1-q) temos:

$\mathbf{t_0}$		$\mathbf{t_1}$		$\mathbf{t_2}$
		1,5 P_0	—	1,5 P_0
	q			
P_0				
	1 - q			
		0,5 P_0	—	0,5 P_0

Vamos montar um portfólio sem risco, composto de 1 opção de investimento de valor F_0, e n ações de valor P_0 a descoberto.

$\phi_0 = F_0 - n\ P_0$

$\phi_1 = F_1 - n\ P_1$

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n\ P_1^+ \\ \phi_1^- = F_1^- - n\ P_1^- \end{cases}$$

Mas $P_1^+ = 1.5\ P_0$ e $P_1^- = 0.5\ P_0$

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^+ = F_1^+ - n\ 1.5\ P_0 \\ \phi_1^- = F_1^- - n\ 0.5\ P_0 \end{cases}$$

$$F_1 = -I + P_1 + P_1 / 0.10$$

Se preço subir: $F_1^+ = -1600 + 1.5\ \ + 1,5\ P_0 / 0,10$

$F_1^+ = -1600 + 16,5\ P_0$

Se preço cair: $F_1^- = -1600 + 0,5\ P_0 + 0,5\ P_0/0,10$

$F_1^- = -1600 + 5,5\ P_0 = -1600 + 5.5\ 200 = -500 = 0$

Os portfólios respectivos serão:

$\phi_1^+ = F_1^+ - n\ 1.5\ P_0$

$\phi_1^- = \ - n\ 0.5\ P_0$

Igualando o valor de ϕ_1 em ambas situações:

$$\begin{aligned} \phi_1^+ &= \phi_1^- \\ -1600 + 16,5\ P_0 - n\ 1,5\ P_0 &= - n\ 0,5\ P_0 \\ -1600 + 16,5\ P_0 - n\ P_0 &= 0 \\ -1600 + 16,5\ P_0 &= n\ P_0 \\ n &= (-1600 + 16,5\ P_0)/P_0 \\ n &= 16,5 - 1600/P_0 = 8,5 \end{aligned}$$

Anteriormente, quando q=0,5, o Valor Esperado do preço em $t = 1$ era igual a $P_0 \rightarrow E(P_1) = P_0$. Nesse caso, o ganho de capital decorrente de aumento de preço era zero, uma vez que a probabilidade do preço subir ou cair eram iguais ($q = 1\text{-}q = 0.5$) $\rightarrow E(P_1) - P_0 = 0$. Agora, no entanto, isso não ocorre porque as probabilidades do preço subir ou descer não são mais simétricas, podendo haver um ganho (ou perda) de capital, dependendo do valor de q. Esse ganho tem que ser considerado.

O preço esperado em $t = 1$ será:

$$E_0(P_1) = q\ 1{,}5\ P_0 + (1\text{-}q)\ 0{,}5\ P_0$$
$$E_0(P_1) = 1{,}5\ q\ P_0 + 0{,}5\ P_0 - 0{,}5\ q\ P_0$$
$$E_0(P_1) = q\ P_0 + 0{,}5\ P_0$$
$$E_0(P_1) = P_0\ (q + 0{,}5)$$

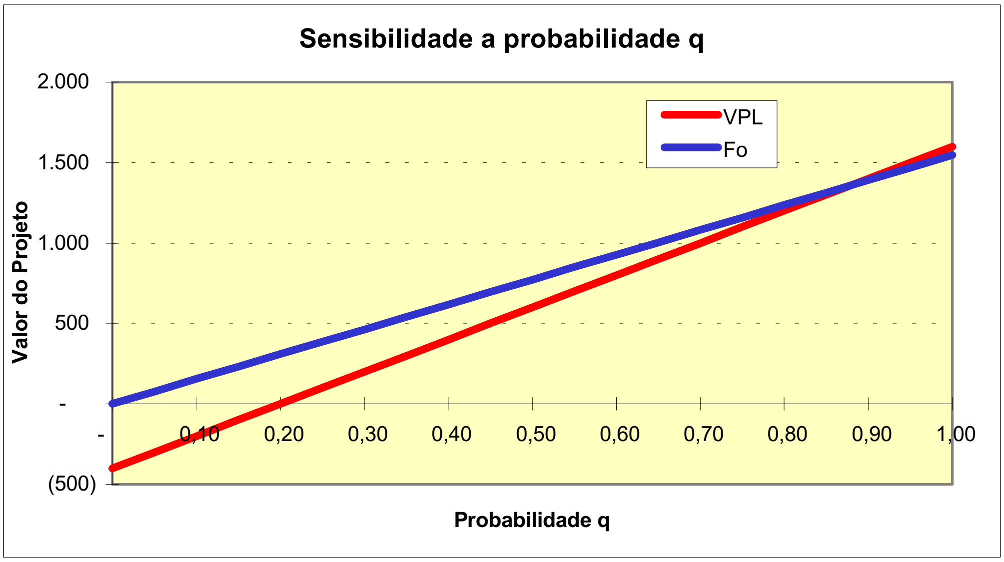
A taxa de ganho de capital por kit será: $\dfrac{E_0(P_1) - P_0}{P_0} = \dfrac{P_0(q+0{,}5) - P_0}{P_0} = q - 0{,}5$

Ganho Rf do investimento no portfólio sem risco ϕ_0 = Rf ϕ_0
Ganho de capital do portfólio $\phi_0 = \phi_1 - \phi_0$
Ganho de capital do aumento de preço, por kit = $(q - 0.5)\ P_0$
No total de kits no portfólio = n
Custo da posição a descoberto do portfólio = Rf n P_0.

$$\text{Rf}\ \phi_0 = (\phi_1 - \phi_0) + (q - 0.5)\ P_0\ n - \text{Rf}\ n\ P_0$$
$$0.10\ (F_0 - n\ P_0) = (-n\ 0.5\ P_0 - (F_0 - n\ P_0)) + (q - 0.5)\ P_0\ n - 0{,}10\ n\ P_0$$
$$1.1\ F_0 = 0.1\ n\ P_0 - n\ 0.5\ P_0 - F_0 + n\ P_0 + q\ P_0\ n - 0.5\ P_0\ n - 0{,}10\ n\ P$$
$$1.1\ F_0 = (0{,}1 - 0{,}5 + 1 + q - 0{,}5 - 0{,}1) n\ P_0$$
$$1.1\ F_0 = q\ n\ P_0$$
$$1.1\ F_0 = q\ \ 8.5\ \ 200$$
$$F_0 = 1545\ q \qquad \textbf{equação 10}$$

ou

$$1.1\ F_0 = q\ n\ P_0$$
$$1.1\ F_0 = (16{,}5 - 1600/P_0)\ q\ P_0$$
$$1.1\ F_0 = 16{,}5\ q\ P_0 - 1600\ q$$
$$F_0 = 15\ q\ P_0 - 1455\ q \qquad \textbf{equação 10}$$



Sensibilidade sobre a volatilidade do Preço P_0

Mantendo q = 50% assim também como todas as outras premissas, queremos calcular o valor do projeto em função da volatilidade do preço no tempo t=1. Inicialmente aumentamos a variacao de P_0 de 50% para 75%.

$$200 \begin{cases} \xrightarrow{0,5} 350 \\ \xrightarrow{0,5} 50 \end{cases}$$

$E_0(P_1) = 0,5\ (350) + 0,5\ (50) = 200 = P_0$ → não há ganho de capital no preço

Criando um portfólio risk free:

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0$$
$$\phi_1 = F_1 - n\ P_1$$

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0 \begin{cases} \phi_1^{+} = F_1^{+} - n\ P_1^{+} \\ \phi_1^{-} = F_1^{-} - n\ P_1^{-} \end{cases}$$

Mas $P_1^{+} = 1.75\ P_0$ e $P_1^{-} = 0.25\ P_0$

$$\phi_0 = F_0 - n\ P_0 \begin{cases} \phi_1^{+} = F_1^{+} - n\ 1.75\ P_0 \\ \phi_1^{-} = F_1^{-} - n\ 0.25\ P_0 \end{cases}$$

$$F_1 = -I + P_1 + P_1 / 0.10$$

Se preço subir: $F_1^{+} = -1600 + 1.75 + 1,75\ P_0 / 0,10$
$F_1^{+} = -1600 + 19,25\ P_0$

Se preço cair: $F_1^{-} = -1600 + 0,25\ P_0 + 0,25\ P_0/0,10$
$F_1^{-} = -1600 + 2,75\ P_0$

Para que $F_1^{-} > 0$, é necessário que $-1600 + 2,75\ P_0 > 0$ → $P_0 > 581,82$ o que não é o caso. Então podemos considerar que se o preço cair, não investiremos em $t = 1$, e $F_1^{-} = 0$.

Igualando $\phi_1^{+} = \phi_1^{-}$ para achar n:

$$-1600 + 19,25\ P_0 - n\ 1,75\ P_0 = -\ n\ 0,25\ P_0$$
$$-1600 + 19,25\ P_0 = n\ 1,5\ P_0$$
$$n = 12,83 - 1066,66 / P_0 \qquad \textbf{equação 11}$$

Desta forma: $\phi_1 = F_1 - n\ P_1$
$\phi_1 = -1600 + 19,25\ P_0 - (12,83 - 1066,66 / P_0)\ 1,75\ P_0$
$\phi_1 = -1600 + 19,25\ P_0 - 22,45\ P_0 + 1866,66$

$\phi_1 = 266{,}66 - 3{,}20\ P_0$

ou $\phi_1 = -(12{,}8333 - 1066{,}66 / P_0)\ 0{,}25\ P_0$

$\phi_1 = -3{,}20\ P_0 + 266{,}66$

O retorno Rf do portfólio será: Rf $\phi_0 = 0.10\ (F_0 - n\ P_0)$

O pagamento da short position será:

$= 0{,}1\ n\ P_0$

$= 0{,}1\ (12{,}83 - 1066{,}66 / P_0)\ P_0$

$= 1{,}28\ P_0 - 106,$

O retorno sobre o portfólio será:

$\phi_1 - \phi_0$ - Custo de manter a short position

$[(266{,}66 - 3{,}20\ P_0) - (F_0 - n\ P_0)] - (1{,}28\ P_0 - 106{,}66)$

$266{,}66 - 3{,}20\ P_0 - F_0 + (12{,}83 - 1066{,}66 / P_0)\ P_0 - 1{,}28\ P_0 + 106{,}66$

$266{,}66 - 3{,}20\ P_0 - F_0 + 12{,}83\ P_0 - 1066{,}66 - 1{,}28\ P_0 + 106{,}66$

$-693{,}33 + 8{,}34\ P_0 - F_0$

Igualando o retorno Rf:

$0.10\ (F_0 - n\ P_0) = -693{,}33 + 8{,}34\ P_0 - F_0$

$0{,}1\ (F_0 - (12{,}83 - 1066{,}66 / P_0)P_0) = -693{,}33 + 8{,}34\ P_0 - F_0$

$0{,}1\ F_0 - 1{,}28\ P_0 + 106{,}66 = -693{,}33 + 8{,}34\ P_0 - F_0$

$1{,}1\ F_0 = 693{,}33 + 8{,}34\ P_0 + 1{,}283\ P_0 - 106{,}66$

$1{,}1\ F_0 = -799{,}99 + 9{,}62\ P_0$

$F_0 = 8{,}75\ P_0 - 727{,}27$ **equação 12**

Se P_0 for \$200, $F_0 = 8{,}759\ (200) - 727{,}27 = 1022{,}70$. Podemos observar que este valor é substancialmente superior ao valor de \$773 encontrado para o caso onde o preço variava de mais ou menos 50%. Porque o aumento na incerteza sobre o incremento do preço aumenta o valor da opção de investir? Porque o upside é incrementado enquanto que o downside fica limitado a zero, posto que a opção não será exercida caso o preço caia.

Podemos calcular o preço critico inicial P_0* que seja suficiente para investir-se imediatamente ao invés de esperar-se;

O custo total é: $1600 + F_0$

O valor do projeto é: $P_0 + E1(P_0)/0{,}1 = 11\ P_0$

O break even será quando o custo for igual ao valor: $1600 + F_0 = 11\ P_0$

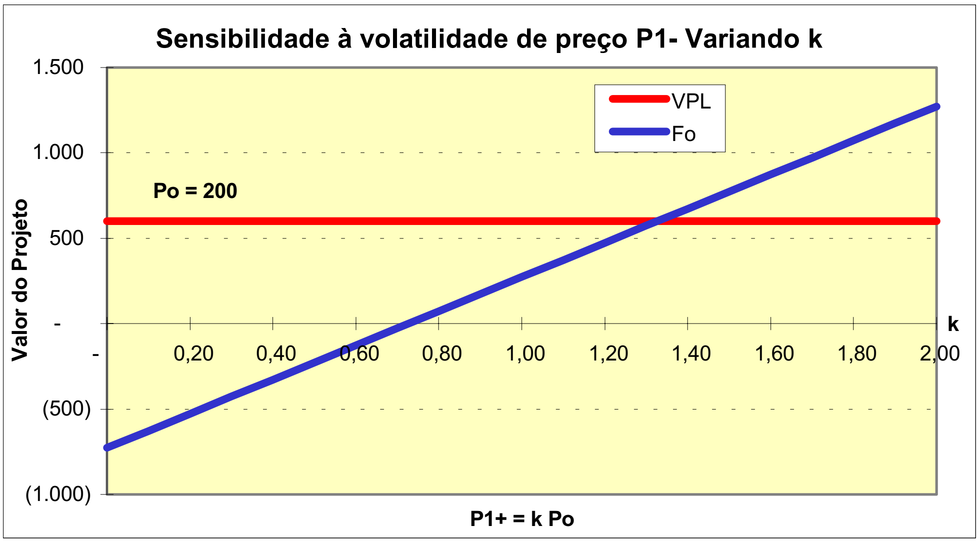
no cenário atual onde: $F_0 = 8{,}75\ P_0 - 727{,}27$

Resolvendo: $1600 + 8{,}5_0 - 727{,}27 = 11\ P_0$

$2{,}25\ P_0 = 872{,}72$

$P_0 = 387{,}87$

Podemos observar que esse valor é bastante superior ao preço de \$249 obtido anteriormente. Se o valor da opção maior agora (F_0 é maior), o custo de investir agora é maior, incentivando portanto a espera.



Colocando F_0 em função do incremento k do aumento de preço no instante t=1, onde k é o incremento para cima e (2-k) o de descida.

Criando um portfólio risk free:

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0$$
$$\phi_1 = F_1 - n\,P_1$$

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^{+} = F_1^{+} - n\,P_1^{+} \\ \phi_1^{-} = F_1^{-} - n\,P_1^{-} \end{cases}$$

Mas $P_1^{+} = k\,P_0$ $\qquad$ $P_1^{-} = (2 - k)\,P_0$

$F_1^{+} = -1600 + 11\,k\,P_0$ $\qquad$ $F_1^{-} = 0$

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0 \quad \begin{cases} \phi_1^{+} = F_1^{+} - n\,k\,P_0 \\ \phi_1^{-} = 0 - n\,(2 - k)\,P_0 \end{cases}$$

Igualando $\phi_1^{+} = \phi_1^{-}$

$$F_1^{+} - n\,k\,P_0 = - n\,(2 - k)\,P_0$$
$$-1600 + 11\,k\,P_0 - n\,k\,P_0 = - n\,(2 - k)\,P_0$$

$$\boxed{n = \frac{1600 - 11kP_0}{2P_0(1-k)}}$$

Retorno do Portfolio:

$$Rf\,\phi_0 = \phi_1 - \phi_0 - Rf\,n\,P_0$$
$$0{,}10\;\phi_0 = - n\,(2 - k)\,P_0 - (F_0 - n\,P_0) - 0{,}10\,n\,P_0$$

$F_0 = 5\ k\ P_0 - 727,27$

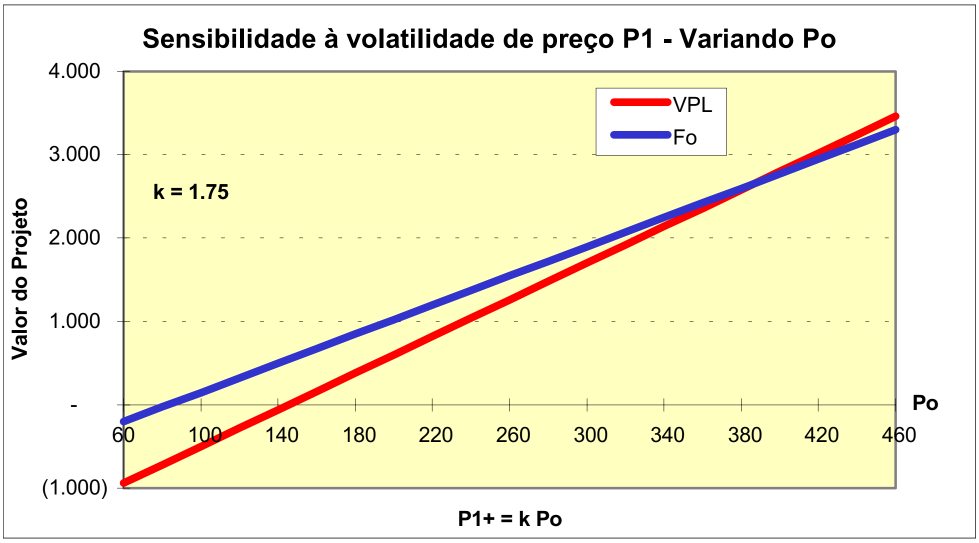
Essa fórmula foi usada para gerar o gráfico Excel acima.

Vamos agora fixar o k em k = 1.75 P_0, e variar o P_0. A fórmula de F_0 (Valor do projeto com opção de adiar) fica:

$F_0 = 727,27 – 8.75\ P_0$

A fórmula do VPL (valor do projeto sem opção de adiar) fica:

$VPL = -1600 + 11\ P_0$



Bad News Principle

Podemos complicar as coisas um pouco mais fazendo variar tanto a probabilidade *q* quanto o tamanho dos movimento de aumento ou redução de preço variem. Com isso, podemos determinar como as "boas notícias" (up) ou "más notícias" (down) separadamente afetam o preço crítico P_0*. Veremos que P_0* depende somente no tamanho do movimento down não no movimento up. A razão é que a habilidade de evitar conseqüências das "bad news" é que nos leva a esperar. Lembre-se que o preço crítico P_0* é o preço em que o investidor se torna indiferente entre investir em $t = 0$ ou em $t = 1$.

Suponha que o preço inicial é P_0, porem no período 1 o preço torna-se:

$P_1 =$ $(1+u)\,P_0$ com probabilidade q

$(1-d)\,P_0$ com probabilidade $1 - q$

$(1+u)\,P_0$

q

P_0

$1-q$

$(1+u)\,P_0$

Considerando um investimento I, o VPL de investir imediatamente seria:

$$VPL = -I + P_0 + q\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(1+u)P_0}{1.1^t} + (1-q)\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(1-d)P_0}{1.1^t}$$

$$VPL = -I + P_0 + q(1+u)10P_0 + (1-q)(1-d)10P_0$$

$$VPL = -I + 10\big[q(1+u) + (1-q)(1-d)\big]P_0$$

$$VPL = -I + 10\big[1{,}1 + q(u+d) - d\big]P_0$$ **equação 13**

Se decidirmos esperar para investir em t =1, o VPL seria:

VPL $= \dfrac{1}{1+Rf}$ {melhor situação no tempo 1}

$= \dfrac{1}{1+Rf}$ {Valor Esperado t =1, considerando opção de não investir tb}

$= \dfrac{1}{1+Rf}$ {q max [0, -I + 11 (1+u) P_0] + (1-q) max [0, -I + 11(1-d) P_0]}

equação 14

O ponto de indiferença de P_0^* entre investir agora ou esperar é:

VPL Investe agora = VPL Esperar para investir

$$-I + 10\big[1{,}1 + q(u+d) - d\big]P_0 = \frac{1}{1.1}\{q\max(0,-I+11(1+u)P_0 + (1-q)\max(0,-I+11(1-d)P_0\}$$

Vamos analisar os possíveis valores para P_0. Quando P_0 for muito baixo, não valerá a pena investir nunca. Quando P_0 for muito grande, será mais vantajoso investir logo em t_0. Existe uma faixa de P_0 em que será mais vantajoso esperar para investir em t_1 do que investir logo em t_0, e sabemos que nesta faixa, só haverá investimento em t_1 se o preço subir. Se o preço descer, o projeto não será executado e o seu valor será zero. Podemos afirmar que o ponto de equilíbrio P_0^* de investir agora e adiar se encontra nesta faixa, portanto, podemos simplificar a equação 14:

$$VPL = \frac{q}{1+Rf}\{-I + 11\,(1+u)\,P_0\} \qquad \textbf{equação 15}$$

e a igualdade fica:

$$-I + 10\left[1{,}1 + q(u+d) - d\right]P_0 = \frac{q}{1.1}\{-I + 11(1+u)P_0\}$$

$$-I + 11P_0 + 10q(u+d)P_0 - 10dP_0 = -\frac{Iq}{1.1} + 10q(1+u)P_0$$

$$-I + 11P_0 + 10quP_0 + 10qdP_0 - 10dP_0 = -\frac{Iq}{1.1} + 10qP_0 + 10quP_0$$

$$11P_0 + 10quP_0 + 10qdP_0 - 10dP_0 - 10qP_0 - 10quP_0 = I - \frac{Iq}{1.1}$$

$$P_0 = \frac{I(1.1-q)}{1.1(11 + 10qd - 10d - 10q)}$$

$$P_0^* = I \cdot \frac{0.1}{1.1}\left[\frac{0.1 + (1-q)}{0.1 + (1-q)(1-d)}\right] \qquad \textbf{equação 16}$$

Observar que a equação 16 não depende de *u* nem *q*, depende apenas do tamanho do movimento para baixo *d* e da probabilidade disso acontecer (1-*q*). Note também que quanto maior o *d*, maior o valor de P_0^*, ou seja, aumentar o incentivo para esperar. Ou seja o que faz a diferença para a decisão de investimento é o tamanho do down side.

Nota: Dixit usou Valor Esperado para calcular o VPL do projeto. Vimos que isto não é correto se o investidor não for neutro a risco. A maneira correta de calcular o valor do projeto é usar os argumentos de que a arbitragem será zero.

Primeiro criamos um portfolio ϕ_0 tal que $\phi_0 = F_0 - n\,P_0$.
No tempo $t = 1$, teremos $\phi_1 = F_1 - n\,P_1$

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\,P_1^+ = -I + 11\,P_1^+ - n\,P_1^+$$

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0$$

$$\phi_1^- = F_1^- - n\,P_1^- = -n\,P_1^-$$

Para que este portfolio não tenha risco, é necessário que $\phi_1^+ = \phi_1^-$:

$$\phi_1^+ = \phi_1^-$$

$$-I + 11\,P_1^+ - n\,P_1^+ = -n\,P_1^-$$

$$-n\,(P_1^+ - P_1^-) = I - 11\,P_1^+$$

Mas

$P_1^+ = (1+u)\, P_0$ com probabilidade q

$P_1^- = (1-d)\, P_0$ com probabilidade $1 - q$

Então

$$n\,((1+u)\, P_0 - (1-d)\, P_0) = 11\, P_1^+ - I$$

$$\boxed{n = \frac{11 P_1^+ - I}{P_0 (u+d)}} \quad \text{e} \quad \phi_1^+ = \phi_1^- = - n\, P_1^-$$

Ganho com portfolio ϕ_0:

a) Retorno livre de risco = $Rf\, \phi_0 = 0{,}10\, (F_0 - n\, P_0)$
b) Ganho de Capital = $\phi_1 - \phi_0 = - n\, P_1^- - (F_0 - n\, P_0) = - n\, P_1^- - F_0 + n\, P_0$
c) Ganho de Capital no preço do kit = $E(P_1) - P_0 = [q\, P_1^+ + (1-q)\, P_1^-] - P_0$
d) Custo da posição short = $Rf\, n\, P_0 = 0{,}10\, n\, P_0$

$$a = b + c - d$$

$$0{,}10\, (F_0 - n\, P_0) = - n\, P_1^- - F_0 + n\, P_0 + [q\, P_1^+ + (1-q)\, P_1^-] - P_0 - 0{,}10\, n\, P_0$$

$$1{,}10\, F_0 = n\, q\, P_1^+ - n\, q\, P_1^-$$

$$1{,}10\, F_0 = n\, q\, (P_1^+ - P_1^-)$$

$$F_0 = \frac{n\, q\, P_0 (u+d)}{1{,}1}$$

Substituindo o n :

$$F_0 = \frac{11 P_1^+ - I}{P_0 (u+d)} \cdot \frac{q\, P_0 (u+d)}{1{,}1}$$

$$\boxed{F_0 = \frac{q}{1{,}1}\left(-I + 11(1+u) P_0\right)} \qquad \textbf{equação 15}$$

Estendendo o modelo para 3 períodos

Veremos que no caso em que a incerteza dura três períodos, a opção de adiar o investimento até $t = 1$ ou $t = 2$ aumenta o valor do projeto. Da mesma forma que antes, o valor do investimento é I, a taxa R_f é 10% por período, o preço inicial é P_0, a probabilidade q do preço subir entre um período e outro é q = 0,5 e o preço também se altera em saltos discretos de 50% para mais ou para menos, conforme o estado observado da natureza naquele período. No gráfico a seguir podemos observar o comportamento possível dos preços em cada período.

$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$ $t=n$

$P_2^{++} = 2{,}25\ P_0$ .... $2{,}25\ P_0$

$P_1^{+}=1{,}5\ P_0$

P_0 $P_2^{+-} = 0{,}75\ P_0$ .... $0{,}75\ P_0$

$P_1^{-}=0{,}5\ P_0$

$P_2^{--} = 0{,}25\ P_0$ .... $0{,}25\ P_0$

O Valor Esperado dos Fluxos de Caixa futuros em cada período é:

$VP_0 = 11P_0 = 11\ P_0$		$VP_2^{++} = 11\ P_2^{++} = 24.75\ P_0$	
$VP_1^{+} = 11\ P_1^{+} = 16.5\ P_0$		$VP_2^{+-} = 11\ P_2^{+-} = 8.25\ P_0$	
$VP_1^{-} = 11\ P_1^{-} = 5.5\ P_0$		$VP_2^{-+} = 11\ P_2^{-+} = 8.25\ P_0$	
		$VP_2^{--} = 11\ P_2^{--} = 2.75\ P_0$	

Dixit e Pindyck propõe resolver o problema de achar o valor do projeto nestas condições utilizando o mesmo método adotado anteriormente, análogo ao métodos das opções financeiras, que envolve a criação de um portfólio livre de risco composto do projeto mais n posições a descoberto do produto, determinando-se o valor n que elimina o risco do portfólio. Em seguida iguala-se o retorno R_f deste portfólio ao seu retorno total, composto do ganho esperado de capital, mais os ganhos de dividendos, menos os custos incorridos na manutenção deste portfólio por um período. Com isso acha-se o valor do projeto no período inicial. A diferença neste caso, é que como temos três períodos, é preciso trabalhar de trás para frente período a período e por partes, até chegar ao instante zero que queremos valorar.

Começamos com premissa inicial de que em $t = 1$ o preço subiu para P_1^{+}, e P_0 é tal que será vantagem investir se o preço subir em $t = 2$ e não investir se o preço cair:

$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$

$P_2^{++} = 2{,}25\ P_0$ ....

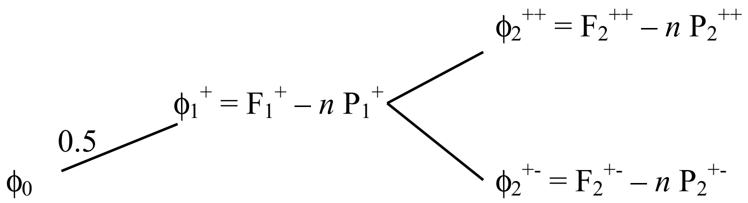
0.5

$P_1^{+} =1{,}5\ P_0$

0.5 0.5

P_0 $P_2^{+-} = 0{,}75\ P_0$ ....

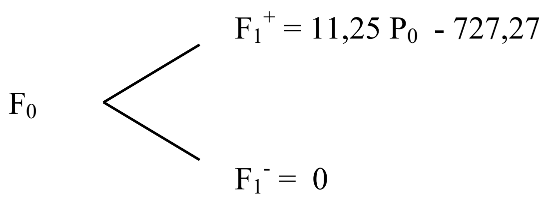
Montamos um portfólio $\phi_0 = F_0 - n\ P_0$, onde o valor a determinar é o valor do projeto F_1^+:



Analisando o que ocorre entre o período 1 e 2, achamos os valores de $F_2^{++} = -1600 + 24{,}75\ P_0$ e $F_2^{+-} = 0$, e seguindo o roteiro acima estabelecido, a partir daí chegamos a $n = 16.5 - \dfrac{1600}{1.5P_0}$ e $F_1^+ = 11.25\ P_0 - 727.27$, que é o valor do Projeto em $t = 1$ com opção de esperar. Podemos ver que o P_0 que faz com que não seja interessante investir em $t = 1$, se o preço subir é o valor que faz com que $F_1^+ < 0$, ou seja, $P_0 < 64{,}65$. Observando que o valor do projeto em $t = 1$, sem opção de adiar por mais um período é $VPL_1^+ = -1600 + 16.5\ P_0$, podemos calcular para que valores de P_0 será melhor investir imediatamente. Para isso, basta fazermos $VPL_1^+ > F_1^+$,

obtendo o valor de $P_0 > 166.23$. Portanto, concluímos que se o preço subir em $t = 1$, deve-se investir imediatamente se $P_0 > 166.23$, e adiar a decisão para $t = 2$ se $P_0 < 166.23$.

Repetindo esta mesma análise para a outra parte da árvore, onde assumimos que o preço caiu para P_1^- em $t = 1$, calculamos valor F_1^- do projeto em $t = 1$ com opção de esperar supondo que P_0 é tal que investiremos se o preço subir em $t = 2$ e não investiremos se ele cair, e o valor encontrado desta forma é $F_1^- = 3.75\ P_0 - 727.27$. Neste caso, apenas não investiremos em $t = 1$ se $F_1^- < 0$, o que só ocorrerá se $P_0 < 193{,}94$. Na hipótese de que o preço subiu em $t = 1$, já calculamos o valor de F_1^+. Se $64{,}65 < P_0 \leq 166{,}23$, sabemos que $F_1^- = 0$.



Nesse caso, já podemos calcular, utilizando o mesmo método do portfólio sem risco, o valor do projeto no instante $t = 0$, que será dado por $F_0 = 5{,}11P_0 - 330{,}58$. A outra alternativa possível é de que $166{,}23 < P_0 \leq 193{,}94$, e nesse caso adiamos a decisão para $t = 1$ e investimos se o preço subiu. Temos $F_1^- = 0$ e $F_1^+ = 16{,}5\ P_0 - 1600$, que é o valor do projeto sem opção de adiar para $t = 2$, e encontramos o valor de $F_0 = 7{,}5P_0 - 727{,}27$.

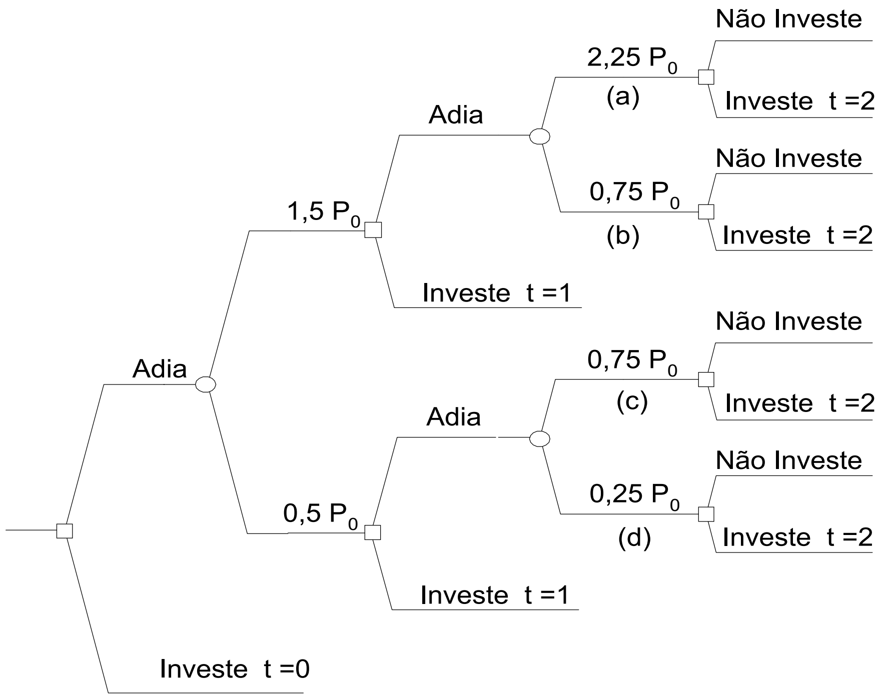
Se $P_0 > 193{,}94$, adiamos o investimento para $t = 1$, e se o preço subiu, investimos logo. Se o preço caiu, adiamos a decisão por mais um período. Neste caso, $F_1^+ = 16{,}5\ P_0 - 1600$, que é o valor do projeto sem opção de adiar para $t = 2$, e $F_1^- = 3{,}75\ P_0 - 727{,}27$ é o valor já calculado anteriormente. Nessas condições, o valor do projeto será $F_0 = 9{,}2P_0 - 1057{,}85$. Existe, no entanto, a hipótese de se investir imediatamente em $t = 0$, que tem um valor de $11\ P_0 - 1600$. Comparando-se este valor com o valor do projeto com opção de adiar calculado acima, vemos que para $P_0 > 301{,}19$, vale mais a pena investir em $t = 0$.

Resumindo os resultados obtidos na tabela a seguir, observa-se que teremos diferentes regras para o valor do projeto, dependendo do valor inicial de P_0.

$P_0 \leq 64,65$	$F_0 = 0$	Não investir nunca, mesmo que preço suba em *t = 1* e *t* =2
$64,65 < P_0 \leq 166,23$	$F_0 = 5,11P_0 - 330,58$	Adia investimento para 2. Investe apenas se subiu em 1 e em 2
$166,23 < P_0 \leq 193,94$	$F_0 = 7,5\ P_0\ -\ 727,27$	Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo. Se cair, não investe nunca.
$193,94 < P_0 \leq 301,19$	$F_0 = 9,2P_0 - 1057,85$	Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo. Se cair em 1, adia.
$P_0 > 301,19$	$V_0 = 11P_0 - 1600$	Investe em *t = 0*.

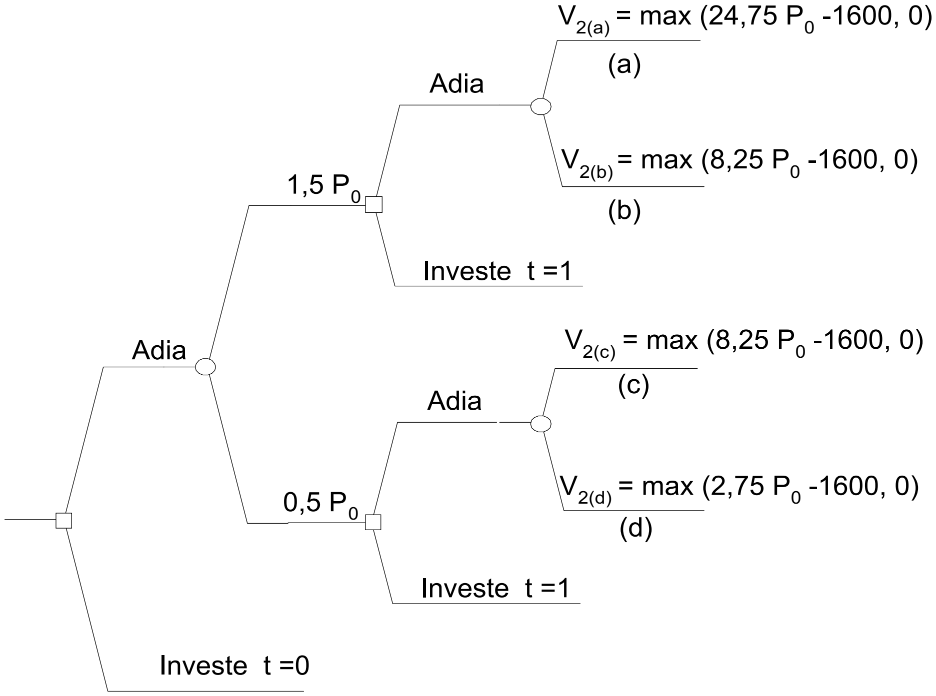
Solução através das Ações de Arrow e Debreu

Adotaremos os mesmos ativos de mercado descritos anteriormente, onde os valores calculados foram $V_a = 5/11$ e $V_b = 5/11$ em todas as nossas análises. Adotaremos F_t para designar o valor no instante *t* do projeto com opção de adiar, e V_t o seu valor em *t* quando esta opção não existe. Para uma melhor visualização do problema de dois períodos, montamos a árvore de decisão que abrange todas os possíveis estados e as decisões correspondentes:



Para achar o valor do projeto no instante 0, começamos pelo último período, onde já não existe mais incerteza e o valor do projeto será simplesmente o valor presente líquido dos seus fluxos de caixa futuros, ou zero, caso este valor seja negativo. Para tanto, consideramos primeiro a hipótese de que o preço sobe em *t = 1* e que o valor de P_0 é tal que será mais interessante adiar a decisão do investimento para *t* =2, onde um dos dois estados, (a) ou (b) irá ocorrer. Nesse caso, ocorrendo o estado (a), o valor do projeto neste instante será $V_{2(a)} = \max(24,75P_0 - 1600, 0)$, e ocorrendo o estado (b), o valor do projeto será $V_{2(b)}$ = max (

8,25 P_0 – 1600, 0). Da mesma forma, se o preço cair em $t = 1$ e P_0 for tal que seja mais interessante adiar a decisão do investimento para $t = 2$, o valor do projeto será $V_{2(c)} = \max(8{,}25\, P_0 - 1600, 0)$ se ocorrer o estado (c) e $V_{2(b)} = \max(2{,}75\, P_0 - 1600, 0)$ se ocorrer o estado (d). Assim a árvore de decisão ficará:



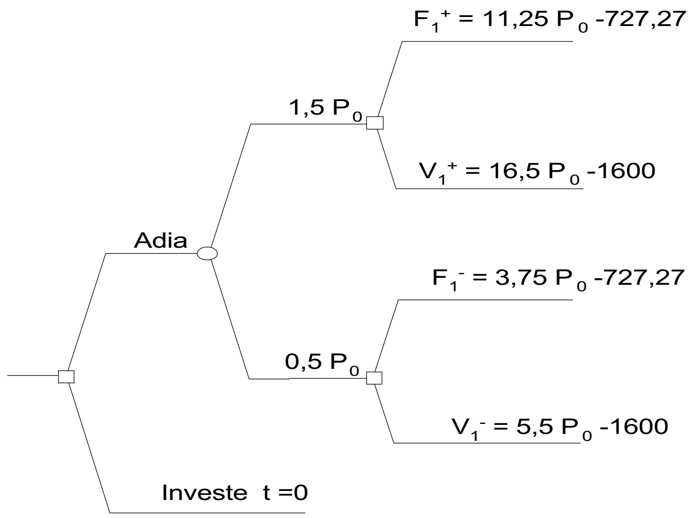
Verificamos que o valor de P_0 que torna viável o investimento $V_{2(a)}$ é $P_0 > 64{,}65$, o que significa que abaixo deste valor nunca investiremos neste projeto. Se ocorrer o estado (b), o investimento $V_{2(b)}$ não será realizado se $P_0 < 193{,}94$. Portanto, para a faixa de $64{,}5 < P_0 < 193{,}94$ teremos a seguinte situação no instante 2:

$$F_1^+ \begin{cases} V_{2(a)} = 24{,}75\, P_0 - 1600 \\ V_{2(b)} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para F_1^+ obtemos $\mathbf{F_1^+ = 11{,}25\, P_0 - 727{,}27}$. O valor de P_0 que torna viável o investimento $V_{2(c)}$ é $P_0 > 193{,}94$. Se ocorrer o estado (b), o investimento $V_{2(d)}$ não será realizado se $P_0 < 581{,}82$. Portanto, na faixa de $193{,}94 < P_0 < 581{,}82$ teremos a seguinte situação no instante 2:

$$F_1^- \begin{cases} V_{2(c)} = 8{,}25\, P_0 - 1600 \\ V_{2(d)} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para F_1^- obtemos $\mathbf{F_1^- = 3{,}75\, P_0 - 727{,}27}$. Com isso obtivemos o valor de adiar o projeto em $t = 1$, e com essas informações o problema de valoração se restringe aos tempos $t = 0$ e $t = 1$, conforme a seguir:



Como vimos anteriormente, F_1^+ é o valor do projeto em $t = 1$ se o preço subiu e se optarmos por adiar a decisão de investimento até o instante $t = 2$, enquanto que V_1^+ é o valor de se investir imediatamente em $t = 1$. O valor de P_0 que fará com que seja melhor adiar é a solução de $F_1^+ > V_1^+$, que nos dá $P_0 < 166{,}23$.

Da mesma forma, F_1^- é o valor do projeto em $t = 1$ se o preço caiu e se optarmos por adiar a decisão de investimento até o instante $t = 2$, enquanto que V_1^- é o valor correspondente de se investir imediatamente em $t = 1$. Fazendo $F_1^- > V_1^-$, vemos que será mais interessante adiar a decisão do projeto se o preço caiu em $t = 1$ do que investir imediatamente sempre que $P_0 < 498{,}70$. Por outro lado, observamos também que o valor de adiar se o preço caiu em $t = 1$, F_1^-, só é positivo para valores de $P_0 > 193{,}94$. Então, para valores de P_0 abaixo deste limite nunca investiremos se o preço cair em $t = 1$.

Podemos agora definir a fórmula de valoração do projeto para cada intervalo possível de P_0. Vimos anteriormente que se $P_0 < 64{,}65$, é melhor nunca investir, pois mesmo que o cenário mais otimista ocorra, o valor do projeto será negativo.

O próximo intervalo a analisar é $64{,}65 < P_0 < 166{,}23$. Verificamos que neste caso, o projeto será adiado se o preço subiu em $t = 1$, mas não será realizado nunca se caiu, e portanto, as alternativas existentes são:

$$F_0 \begin{cases} V_{1(a)} = 11{,}25\ P_0 - 727{,}27 \\ V_{1(b)} = 0 \end{cases}$$

de onde obtemos $\mathbf{F_0 = 5{,}11\ P_0 - 330{,}58.}$

Se $166{,}23 < P_0 < 193{,}94$, é melhor investir imediatamente em $t = 1$ se o preço subiu e continua não sendo interessante investir se o preço caiu. O problema nesse caso será:

$$F_0 \begin{cases} V_{1(a)} = 16{,}5\ P_0 - 1600 \\ V_{1(b)} = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{F_0 = 7{,}5\ P_0 - 727{,}27}$$

Se $P_0 > 193{,}94$, investiremos imediatamente em $t = 1$ se o preço subiu e que adiaremos a decisão de investir se o preço caiu.

$$F_0 \begin{cases} V_{1(a)} = 16{,}5\ P_0 - 1600 \\ V_{1(b)} = 3{,}75\ P_0 - 727{,}27 \end{cases}$$

Resolvendo para F_0 achamos $\mathbf{F_0 = 9{,}2\ P_0 - 1057{,}85}$.

Vimos que se $P_0 > 498{,}70$, será melhor investir logo em t = 1 se o preço cair, o que nos daria ainda outra regra de valoração para o projeto para esta faixa de P_0. No entanto, fica claro que haverá um valor mínimo para P_0 acima do qual será melhor investir logo no instante inicial $t = 0$. Este valor pode ser calculado comparando-se o valor de se investir em $t = 0$ que é $\mathbf{V_0 = 11\ P_0 - 1600}$, com a fórmula da faixa mais alta de P_0, que é $\mathbf{F_0 = 9{,}2\ P_0 - 1057{,}85}$. O ponto de equilíbrio que torna o investimento imediato em $t = 0$ mais interessante é obtido fazendo-se $V_0 > F_0$, que nos dá um valor de $P_0 > 301{,}19$. Assim, a hipótese aventada anteriormente de se investir em $t = 1$ se o preço cair nunca irá ocorrer. Pode-se verificar também que se fizermos esta comparação com a fórmula $\mathbf{F_0 = 7{,}5\ P_0 - 727{,}27}$ para a faixa de $166{,}23 < P_0 < 193{,}94$, achamos um valor de equilíbrio de $P_0 > 249{,}35$, o que é inconsistente com a premissa de que $166{,}23 < P_0 < 193{,}94$. Dessa forma, o valor do projeto será dados por $\mathbf{V_0 = 11\ P_0 - 1600}$ se $P_0 > 301{,}19$.

Podemos observar claramente que estes resultados são idênticos aos resultados obtidos pelo método das opções financeiras utilizado por Dixit e Pindyck.

2- Estendendo o modelo para 3 períodos;

Incerteza durando 3 períodos

Valor da opção de investir dado que pode-se investir em $t = 0$, aguardar até $t = 1$ ou aguardar ate t=2.

Árvore dos Preços:

t = 0   ***t = 1***   **t=2**   **t=*n***

$P_2^{++} = 2{,}25\ P_0$ .... $2{,}25\ P_0$

0.50

$P_1^{+}=1{,}5\ P_0$

0.50   0.5

P_0 $P_2^{+-} = 0{,}75\ P_0$ .... $0{,}75\ P_0$

0.5   0.5

$P_1^{-}=0{,}5\ P_0$

0.5

$P_2^{--} = 0{,}25\ P_0$ .... $0{,}25\ P_0$

Valor Presente dos Fluxos de Caixa futuros

$VP_0\ (FC) = P_0 + P_0 / 0.10 = 11\ P_0$

$VP_1^{+} = 11\ P_1^{+} = 11\ 1.5\ P_0 = 16.5\ P_0$

$VP_1^{-} = 11\ P_1^{-} = 11\ 0.5\ P_0 = 5.5\ P_0$

$VP_2^{++} = 11\ P_2^{++} = 11\ 1.5\ \ 1.5\ P_0 = 24.75\ P_0$

$VP_2^{+-} = 11\ P_2^{+-} = 11\ 1.5\ \ 0.5\ P_0 = 8.25\ P_0$

$VP_2^{-+} = 11\ P_2^{-+} = 11\ 0.5\ \ 1.5\ P_0 = 8.25\ P_0$

$VP_2^{--} = 11\ P_2^{--} = 11\ 0.5\ \ 0.5\ P_0 = 2.75\ P_0$

Árvore dos VP(FC):

t = 0   ***t = 1***   **t=2**   **t=*n***

$24{,}75\ P_0$ .... $24{,}75\ P_0$

0.5

$16{,}5\ P_0$

0.5   0.5

$11P_0$ $8{,}25\ P_0$ .... $8{,}25\ P_0$

0.5   0.5

$5{,}5\ P_0$

0.5

$2{,}75\ P_0$ .... $2{,}75\ P_0$

Criamos um portfólio livre de risco composto pela opção de adiar o investimento mais um período. Após isto, igualamos o retorno Rf deste portfólio ao seu esperado ganho de Capital + ganhos de dividendos. Achar F_0, o valor da opção no tempo t = 0. Temos três períodos, então vamos trabalhar por partes e de trás para frente.

Dados do problema: Valor do investimento inicial I =$1600. A taxa Rf é 10% por período. Existem varia hipóteses possíveis, e cada uma dela terá um valor diferente. Analisaremos cada uma delas individualmente.

1) Assumimos que P0 é tal que será vantagem investir se o preço subir em t=2 e não investir se o preço cair.

Premissa inicial: Preço subiu para $P_1^+ = 1,5\ P_0$

t = 0 ***t = 1*** **t=2**

$P_2^{++} = 2,25\ P_0$ ....

0.5

$P_1^+ = 1,5\ P_0$

0.5 0.5

P_0 $P_2^{+-} = 0,75\ P_0$ ....

Monta um portfolio $\phi_0 = F_0 - n\ P_0$

$\phi_2^{++} = F_2^{++} - n\ P_2^{++}$

$\phi_1^+ = F_1^+ - n\ P_1^+$

0.5

ϕ_0 $\phi_2^{+-} = F_2^{+-} - n\ P_2^{+-}$

Queremos calcular o valor de F_1^+. Note que como agora temos mais um período, não podemos calcular o valor de F_1^+ diretamente, pois existe incerteza sobre o comportamento futuro do preço e também existe a opção de adiar o investimento até o período t=3. Mas podemos calcular o valor de F_2^{++} e F_2^{+-}.

$$F_2^{++} = -1600 + 24,75\ P_0$$
$$F_2^{+-} = -1600 + 8.25\ P_0$$

A oportunidade de investir no projeto no tempo t=2 se o preço subiu em *t = 1* e caiu em t=2, terá valor negativo se:

$$F_2^{+-} = -1600 + 8.25\ P_0 < 0$$
$$8.25\ P_0 < 1600$$
$$P_0 < 193,94$$

Nesse caso, $F_2^{+-} = 0$, pois o projeto não será realizado.

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\ P_1^+ = F_1^+ - n\ 1.5\ P_0$$

$$\phi_2^{++} = F_2^{++} - n\ P_2^{++} = -1600 + 24.75\ P_0 - n\ 2.25\ P_0$$
$$\phi_2^{+-} = F_2^{+-} - n\ P_2^{+-} = 0 - n\ 0.75\ P_0$$

$$\phi_2^{++} = -1600 + 24.75\ P_0 - n\ 2.25\ P_0$$

$$\phi_1^{+} = F_1^{+} - 1.5\ n\ P_0$$

$$\phi_2^{+-} = \quad - n\ 0.75\ P_0$$

Para que este portfolio seja sem risco, é necessário que o seu valor em t=3 seja o mesmo, independente do estado, ou seja, que $\phi_2^{++} = \phi_2^{+-}$.

$$\phi_2^{++} = \phi_2^{+-}$$
$$-1600 + 24.75\ P_0 - n\ 2.25\ P_0 = - n\ 0.75\ P_0$$
$$1.5\ n\ P_0 = 24.75\ P_0 - 1600$$
$$n = (24.75\ P_0 - 1600) / 1.5\ P_0$$

$$\boxed{n = 16.5 - \frac{1600}{1.5 P_0}}$$

Então: $\phi_2^{++} = \phi_2^{+-} = \phi_2^{+} = - n\ 0.75\ P_0$

Igualando os ganhos Rf com o ganhos de capital, menos custos mais dividendos (neste caso não tem dividendos) do portfolio ϕ_1^{+}, temos:

Ganhos R_f: $R_f\ \phi_1^{+} = 0{,}10\ \phi_1^{+}$ onde $\phi_1^{+} = F_1^{+} - n\ P_1^{+}$
Ganho de Capital: $\phi_2^{+} - \phi_1^{+}$
Custo da posição short: $R_f\ n\ P_1^{+} = 0.10\ n\ 1.5\ P_0$

$$0{,}10\ \phi_1^{+} = (\phi_2^{+} - \phi_1^{+}) - 0.10\ n\ 1.5\ P_0$$
$$1{,}10\ (F_1^{+} - n\ P_1^{+}) = - n\ 0.75\ P_0 - 0.10\ n\ 1.5\ P_0$$
$$1{,}10\ F_1^{+} - 1.1\ 1.5\ n\ P_0^{+} = - 0.90\ n\ P_0$$
$$1{,}10\ F_1^{+} = 0.75\ n\ P_0$$
$$F_1^{+} = \frac{0.75 P_0}{1.1}\left(16.5 - \frac{1600}{1.5 P_0}\right)$$

$F_1^{+} = 11.25\ P_0 - 727.27$ → Valor do Projeto em *t = 1* com opção de esperar
$VPL_1^{+} = -1600 + 16.5\ P_0$ → Valor do Projeto em *t = 1* sem opção de esperar

Para que valores de P_0 será melhor investir imediatamente?

$$VPL_1^{+} > F_1^{+}$$
$$-1600 + 16.5\ P_0 > 11.25\ P_0 - 727.27$$
$$P_0 > 166.23$$

Portanto, se o preço subir em *t = 1*, deve-se investir imediatamente se $P_0 > 166.23$, e adiar a decisão para t=2 se $P_0 < 166.23$.

Vamos agora analisar a outra parte da árvore:

t = 0 ***t = 1*** **t=2** **t=*n***

$11P_0$ 0.5 $5{,}5\ P_0$

0.5 $8{,}25\ P_0$ .... $8{,}25\ P_0$

0.5 $2{,}75\ P_0$ .... $2{,}75\ P_0$

Monta um portfolio $\phi_0 = F_0 - n\ P_0$

ϕ_0

$\phi_1^- = F_1^- - n\ P_1^-$

$\phi_2^{-+} = F_2^{-+} - n\ P_2^{-+}$

$\phi_2^{--} = F_2^{--} - n\ P_2^{--}$

Queremos calcular o valor de F_1^-. Vimos anteriormente que no caso de apenas 1 período, temos:

$$F_1^- = -1600 + 5.5\ P_0$$

Este valor será negativo para $P_0 < 290.90$, caso em que o projeto não seria executado, se não houvesse opção de adiar por mais um período.

$$F_2^{-+} = -1600 + 8{,}25\ P_0$$
$$F_2^{--} = -1600 + 2.75\ P_0$$

A oportunidade de investir no projeto no tempo t=2 se o preço caiu em $t = 1$ e caiu em t=2, terá valor negativo se:

$$F_2^{--} = -1600 + 2.75\ P_0 < 0$$
$$2.75\ P_0 < 1600$$
$$P_0 < 581{,}8$$

Nesse caso, $F_2^{--} = 0$, pois o projeto não será realizado.

$$\phi_1^- = F_1^- - n\ P_1^- = F_1^- - n\ 0.5\ P_0$$
$$\phi_2^{-+} = F_2^{-+} - n\ P_2^{-+} = -1600 + 8.25\ P_0 - n\ 0.75\ P_0$$
$$\phi_2^{--} = F_2^{+-} - n\ P_2^{+-} = 0 - n\ 0.25\ P_0$$

$\phi_1^- = F_1^- - 0.5\ n\ P_0$

$\phi_2^{-+} = -1600 + 8.25\ P_0 - n\ 0.75\ P_0$

$\phi_2^{--} = - n\ 0.25\ P_0$

Para que este portfolio seja sem risco, é necessário que o seu valor em t=3 seja o mesmo, independente do estado, ou seja, que $\phi_2^{-+} = \phi_2^{--}$.

$$\phi_2^{-+} = \phi_2^{--}$$

$$-1600 + 8.25\ P_0 - n\ 0.75\ P_0 \quad = - n\ 0.25\ P_0$$

$$0.5\ n\ P_0 = 8.25\ P_0 - 1600$$

$$n = (8.25\ P_0 - 1600) / 0.5\ P_0$$

$$\boxed{n = 17 - \frac{3200}{P_0}}$$

Então: $\phi_2^{-+} = \phi_2^{--} = \phi_2^{-} = - n\ 0.25\ P_0$

Igualando os ganhos Rf com o ganhos de capital, menos custos mais dividendos (neste caso não tem dividendos) do portfolio ϕ_1^{+}, temos:

Ganhos Rf: $Rf\ \phi_1^{-} = 0{,}10\ \phi_1^{-}$ onde $\phi_1^{-} = F_1^{-} - n\ P_1^{-}$
Ganho de Capital: $\phi_2^{-} - \phi_1^{-}$
Custo da posição short: $Rf\ n\ P_1^{-} = 0.10\ n\ 0.5\ P_0$

$$0{,}10\ \phi_1^{-} = (\phi_2^{-} - \phi_1^{-}) - 0.10\ n\ 0.5\ P_0$$

$$1{,}10\ (F_1^{-} - n\ P_1^{-}) = - n\ 0.25\ P_0 - 0.10\ n\ 0.5\ P_0$$

$$1{,}10\ F_1^{+} - 1.1\ 1.5\ n\ P_0^{+} = - 0.90\ n\ P_0$$

$$1{,}10\ F_1^{+} = 0.25\ n\ P_0$$

$$F_1^{-} = \frac{0.25 P_0}{1.1}\left(16.5 - \frac{3200}{P_0}\right)$$

$F_1^{-} = 3.75\ P_0 - 727.27$ → Valor do Projeto em $t = 1$ com opção de esperar
$VPL_1^{-} = -1600 + 5.5\ P_0$ → Valor do Projeto em $t = 1$ sem opção de esperar

Quando não será interessante investir em t=1 se o preço cai?

$$F_1^{-} < 0$$

$$3.75\ P_0 - 727.27 < 0$$

$$P_0 < 193{,}94$$

Se $P_0 < 193{,}94$ e o preço cair em t=1, então não irá investir nunca

Definimos até agora três intervalos de P0, a saber:

P0 < 64.65	Não investe nunca, mesmo que suba em 1 e 2
64.65 < P0 < 166	Adia investimento para 2. Investe apenas se subiu em 1 e em 2.
166 < P0 < 193,94	Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo.
193,94 < P0 < ?	Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo. Se cair em 1, adia.

Na primeira hipótese o valor do projeto é zero

Vamos analisar a segunda hipótese:
64.65 < P0 < 166 Adia investimento para 2. Investe apenas se subiu em 1 e em 2.

Neste caso temos que $F_1^- = 0$ e:

$F_1^+ = 11{,}25\ P_0\ - 727{,}27$

q=0,5

F_0

$F_1^- =\ 0$

Montando o portfolio sem risco

$\phi_1^+ = F_1^+ - n\ P_1^+ = 11{,}25\ P_0\ - 727{,}27 - 1{,}5\ n\ P_0$

$\phi_0 = F_0 - n\ P_0$

$\phi_2^{--} = F_1^- - n\ P_1^- = -n\ 0.5\ P_0$

Escolhendo n de tal forma que ϕ_1 seja um portfólio livre de risco:

$$\phi_1^+ \quad = \quad \phi_1^-$$
$$11{,}25\ P_0\ - 727{,}27 - 1{,}5\ n\ P_0 \ = = -n\ 0.5\ P_0$$
$$n\ P_0 \quad = \quad 11{,}25\ P_0 - 727{,}27$$

$$\boxed{n = 11{,}25 - \frac{727{,}27}{P_0}}$$

O retorno do portfólio tem que ser igual ao ganho do investimento a taxa livre de risco.

Ganho livre de risco = ganho de capital - custos da manutenção da posição curta

$$R_f\,\phi_0\ =\ (\phi_1 - \phi_0) - R_f\, n\ P_0$$
$$0{,}10\ \phi_0\ =\ \phi_1 - \phi_0 - 0{,}10\ n\ P_0$$
$$1{,}10\ \phi_0\ =\ - 0{,}50\ n\ P_0\ - 0{,}10\ n\ P_0$$
$$1{,}10\ \phi_0\ =\ - 0{,}50\ n\ P_0\ - 0{,}10\ n\ P_0$$
$$1{,}1\ F_0 - 1{,}1\ n\ P_0 = - 0{,}60\ n\ P_0$$
$$1{,}1\ F_0\ =\ 0{,}50\ n\ P_0$$
$$1{,}1\ F_0\ =\ 0{,}50\ [11{,}25 - 727{,}27\ /\ P_0]\ P_0$$

$$\boxed{F_0 = 5{,}11 P_0 - 330{,}58}$$

Vamos analisar a terceira hipótese:

166 < P0 < 194 Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo.

Neste caso, temos que $F_1^- = 0$ e F_1^+ é o valor do projeto sem opção de adiar para t = 2

$F_1^+ = 16{,}5\ P_0\ - 1600$

q=0,5

F_0

$F_1^- =\ 0$

Montando o portfolio sem risco

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\,P_1^+ = 16{,}5\,P_0 - 1600 - 1{,}5\,n\,P_0$$

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0$$

$$\phi_2^{--} = F_1^- - n\,P_1^- = -n\,0.5\,P_0$$

Escolhendo n de tal forma que ϕ_1 seja um portfólio livre de risco:

$$\phi_1^+ = \phi_1^-$$

$$16{,}5\,P_0 - 1600 - 1{,}5\,n\,P_0 = -n\,0.5\,P_0$$

$$n\,P_0 = 16{,}5\,P_0 - 1600$$

$$\boxed{n = 16{,}5 - \frac{1600}{P_0}}$$

O retorno do portfólio tem que ser igual ao ganho do investimento a taxa livre de risco.

Ganho livre de risco = ganho de capital - custos da manutenção da posição curta

$$R_f\,\phi_0 = (\phi_1 - \phi_0) - R_f\,n\,P_0$$

$$0{,}10\,\phi_0 = \phi_1 - \phi_0 - 0{,}10\,n\,P_0$$

$$1{,}10\,\phi_0 = -0{,}50\,n\,P_0 - 0{,}10\,n\,P_0$$

$$1{,}10\,\phi_0 = -0{,}50\,n\,P_0 - 0{,}10\,n\,P_0$$

$$1{,}1\,F_0 - 1{,}1\,n\,P_0 = -0{,}60\,n\,P_0$$

$$1{,}1\,F_0 = 0{,}50\,n\,P_0$$

$$1{,}1\,F_0 = 0{,}50\,[16{,}5 - 1600 / P_0]\,P_0$$

$$\boxed{F_0 = 7{,}5P_0 - 727{,}27}$$

Vamos analisar a terceira hipótese:

193,94 < P0 < ? Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo. Se cair em 1, adia.

Neste caso, temos que F_1^+ é o valor do projeto sem opção de adiar para t = 2

$$F_1^+ = 16{,}5\,P_0 - 1600$$

$$F_0 \quad q=0{,}5$$

$$F_1^- = 3{,}75\,P_0 - 727{,}27$$

Montando o portfolio sem risco

$$\phi_1^+ = F_1^+ - n\,P_1^+ = 16{,}5\,P_0 - 1600 - 1{,}5\,n\,P_0$$

$$\phi_0 = F_0 - n\,P_0$$

$$\phi_2^{--} = F_1^- - n\,P_1^- = 3{,}75\,P_0 - 727{,}27 - n\,0.5\,P_0$$

Escolhendo n de tal forma que ϕ_1 seja um portfólio livre de risco:

$$\phi_1^+ = \phi_1^-$$
$$16{,}5\ P_0 - 1600 - 1{,}5\ n\ P_0 = 3{,}75\ P_0 - 727{,}27 - n\ 0.5\ P_0$$
$$n\ P_0 = (16{,}5 - 3{,}75)\ P_0 - 1600 + 727{,}27$$

$$\boxed{n = 12{,}75 - \frac{872{,}73}{P_0}}$$

O retorno do portfólio tem que ser igual ao ganho do investimento a taxa livre de risco.

Ganho livre de risco = ganho de capital - custos da manutenção da posição curta

$$R_f\ \phi_0 = (\phi_1 - \phi_0) - R_f\ n\ P_0$$
$$0{,}10\ \phi_0 = \phi_1 - \phi_0 - 0{,}10\ n\ P_0$$
$$1{,}10\ \phi_0 = 16{,}5\ P_0 - 1600 - 1{,}5\ n\ P_0 - 0{,}10\ n\ P_0$$
$$1{,}1\ F_0 = 16{,}5\ P_0 - 1600 - 0{,}5\ n\ P_0$$
$$1{,}1\ F_0 = (16{,}5 - 6{,}38) - 0{,}50\ [12{,}75 - 872{,}73 / P_0]\ P_0$$
$$1{,}1\ F_0 = 10{,}13\ P_0 - 1163{,}64$$

$$\boxed{F_0 = 9{,}2 P_0 - 1057{,}85}$$

Sem opção de adiar, em t = 0 o projeto vale 11 P_0 - 1600. Comparando-se este valor com o valor do projeto com opção de adiar, achamos os valores de P_0 para os quais vale mais a pena investir imediatamente em t = 0.

$$11\ P_0 - 1600 > 9{,}2\ P_0 - 1057{,}85$$
$$1{,}8\ P_0 > 542{,}15$$
$$P_0 > 301{,}19$$

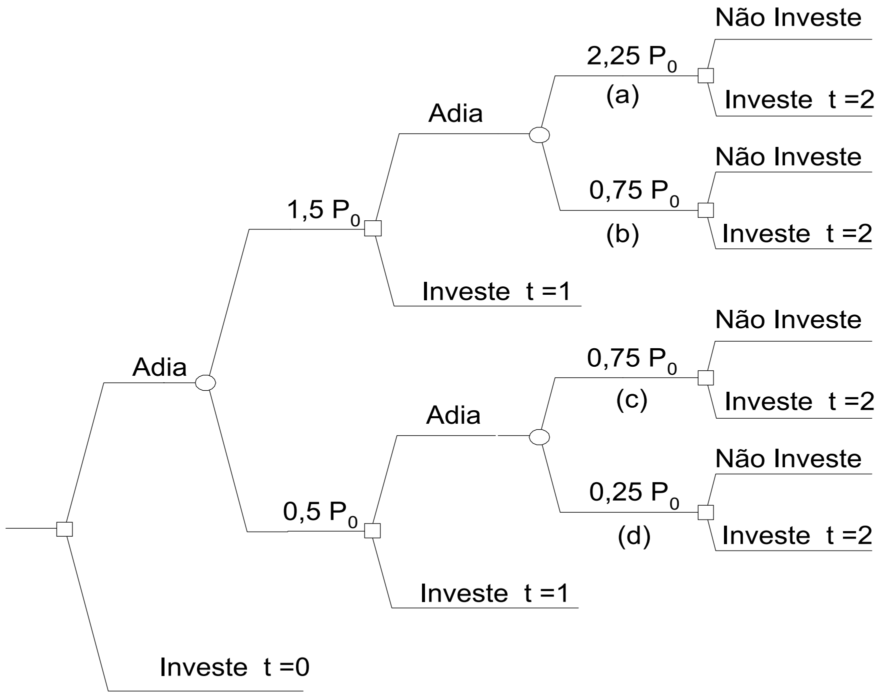
O limite superior de P0 é então 301,19, acima do qual a melhor alternativa é investir imediatamente em t = 0.

Resumindo os resultados obtidos na tabela a seguir, observa-se que teremos diferentes regras para o valor do projeto, dependendo do valor inicial de P_0.

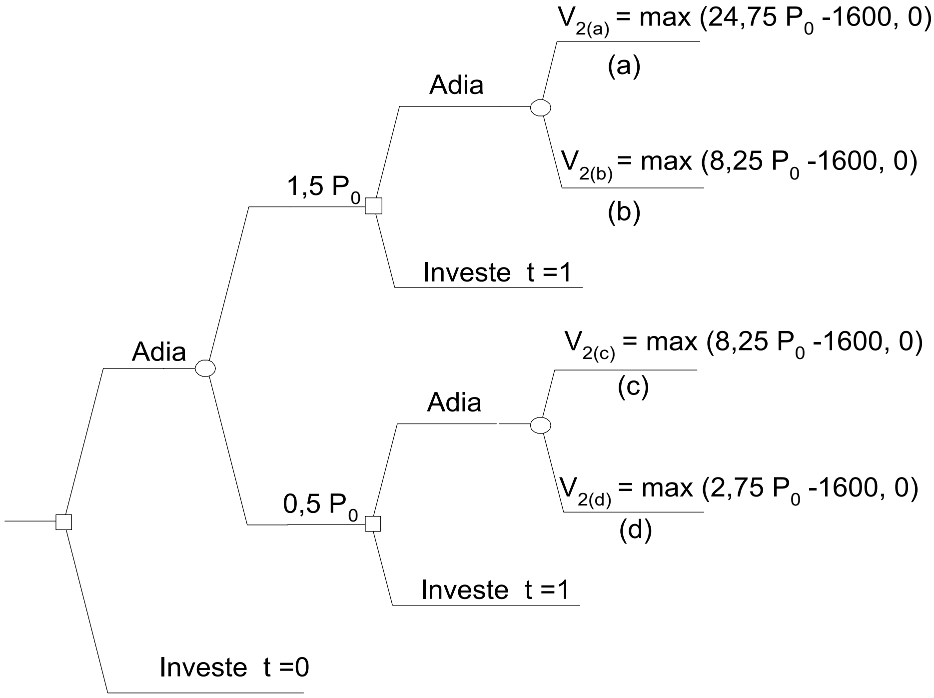
$P_0 \le 64{,}65$	$F_0 = 0$	Não investir nunca, mesmo que preço suba em *t = 1* e *t* =2
$64{,}65 < P_0 \le 166{,}23$	$F_0 = 5{,}11 P_0 - 330{,}58$	Adia investimento para 2. Investe apenas se subiu em 1 e em 2
$166{,}23 < P_0 \le 193{,}94$	$F_0 = 7{,}5\ P_0 - 727{,}27$	Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo. Se cair, não investe nunca.
$193{,}94 < P_0 \le 301{,}19$	$F_0 = 9{,}2 P_0 - 1057{,}85$	Adia investimento para 1. Se subir em 1, investe logo. Se cair em 1, adia.
$P_0 > 301{,}19$	$V_0 = 11 P_0 - 1600$	Investe em *t = 0*.

Solução através das Ações de Arrow e Debreu

Adotaremos os mesmos ativos de mercado descritos anteriormente, onde os valores calculados foram $V_a = 5/11$ e $V_b = 5/11$ em todas as nossas análises. Adotaremos F_t para designar o valor no instante *t* do projeto com opção de adiar, e V_t o seu valor em *t* quando esta opção não existe. Para uma melhor visualização do problema de dois períodos, montamos a árvore de decisão que abrange todas os possíveis estados e as decisões correspondentes:



Para achar o valor do projeto no instante 0, começamos pelo último período, onde já não existe mais incerteza e o valor do projeto será simplesmente o valor presente líquido dos seus fluxos de caixa futuros, ou zero, caso este valor seja negativo. Para tanto, consideramos primeiro a hipótese de que o preço sobe em $t = 1$ e que o valor de P_0 é tal que será mais interessante adiar a decisão do investimento para $t = 2$, onde um dos dois estados, (a) ou (b) irá ocorrer. Nesse caso, ocorrendo o estado (a), o valor do projeto neste instante será $V_{2(a)} = \max(24{,}75P_0 - 1600, 0)$, e ocorrendo o estado (b), o valor do projeto será $V_{2(b)} = \max(8{,}25\,P_0 - 1600, 0)$. Da mesma forma, se o preço cair em $t = 1$ e P_0 for tal que seja mais interessante adiar a decisão do investimento para $t = 2$, o valor do projeto será $V_{2(c)} = \max(8{,}25\,P_0 - 1600, 0)$ se ocorrer o estado (c) e $V_{2(b)} = \max(2{,}75\,P_0 - 1600, 0)$ se ocorrer o estado (d). Assim a árvore de decisão ficará:



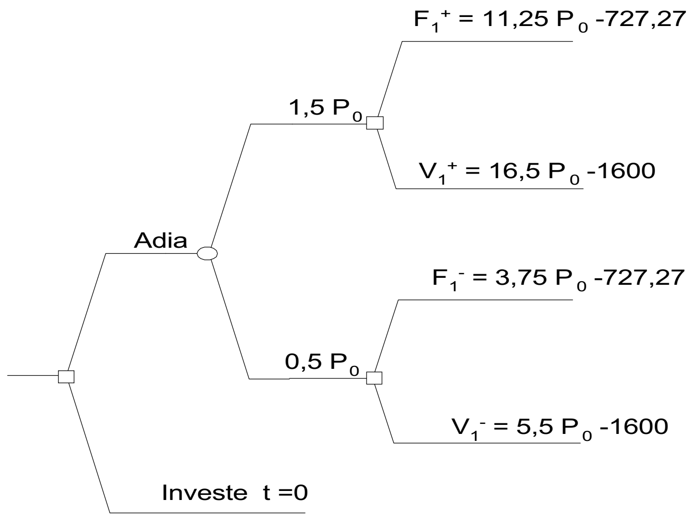
Verificamos que o valor de P_0 que torna viável o investimento $V_{2(a)}$ é $P_0 > 64,65$, o que significa que abaixo deste valor nunca investiremos neste projeto. Se ocorrer o estado (b), o investimento $V_{2(b)}$ não será realizado se $P_0 < 193,94$. Portanto, para a faixa de $64,5 < P_0 < 193,94$ teremos a seguinte situação no instante 2:

$$F_1^+ \left\langle \begin{array}{l} V_{2(a)} = 24,75\ P_0 - 1600 \\ V_{2(b)} = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo para F_1^+ obtemos $\mathbf{F_1^+ = 11,25\ P_0\ - 727,27}$. O valor de P_0 que torna viável o investimento $V_{2(c)}$ é $P_0 > 193,94$. Se ocorrer o estado (b), o investimento $V_{2(d)}$ não será realizado se $P_0 < 581,82$. Portanto, na faixa de $193,94 < P_0 < 581,82$ teremos a seguinte situação no instante 2:

$$F_1^- \left\langle \begin{array}{l} V_{2(c)} = 8,25\ P_0 - 1600 \\ V_{2(d)} = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo para F_1^- obtemos $\mathbf{F_1^- = 3,75\ P_0\ - 727,27}$. Com isso obtivemos o valor de adiar o projeto em $t = 1$, e com essas informações o problema de valoração se restringe aos tempos $t = 0$ e $t = 1$, conforme a seguir:



Como vimos anteriormente, F_1^+ é o valor do projeto em $t = 1$ se o preço subiu e se optarmos por adiar a decisão de investimento até o instante $t = 2$, enquanto que V_1^+ é o valor de se investir imediatamente em $t = 1$. O valor de P_0 que fará com que seja melhor adiar é a solução de $F_1^+ > V_1^+$, que nos dá $P_0 < 166{,}23$.

Da mesma forma, F_1^- é o valor do projeto em $t = 1$ se o preço caiu e se optarmos por adiar a decisão de investimento até o instante $t = 2$, enquanto que V_1^- é o valor correspondente de se investir imediatamente em $t = 1$. Fazendo $F_1^- > V_1^-$, vemos que será mais interessante adiar a decisão do projeto se o preço caiu em $t = 1$ do que investir imediatamente sempre que $P_0 < 498{,}70$. Por outro lado, observamos também que o valor de adiar se o preço caiu em $t = 1$, F_1^-, só é positivo para valores de $P_0 > 193{,}94$. Então, para valores de P_0 abaixo deste limite nunca investiremos se o preço cair em $t = 1$.

Podemos agora definir a fórmula de valoração do projeto para cada intervalo possível de P_0. Vimos anteriormente que se $P_0 < 64{,}65$, é melhor nunca investir, pois mesmo que o cenário mais otimista ocorra, o valor do projeto será negativo.

O próximo intervalo a analisar é $64{,}65 < P_0 < 166{,}23$. Verificamos que neste caso, o projeto será adiado se o preço subiu em $t = 1$, mas não será realizado nunca se caiu, e portanto, as alternativas existentes são:

$$F_0 \begin{cases} V_{1(a)} = 11{,}25\ P_0 - 727{,}27 \\ V_{1(b)} = 0 \end{cases}$$

de onde obtemos $\mathbf{F_0 = 5{,}11\ P_0 - 330{,}58}$.

Se $166{,}23 < P_0 < 193{,}94$, é melhor investir imediatamente em $t = 1$ se o preço subiu e continua não sendo interessante investir se o preço caiu. O problema nesse caso será:

$$F_0 \begin{cases} V_{1(a)} = 16{,}5\ P_0 - 1600 \\ V_{1(b)} = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{F_0 = 7{,}5\ P_0 - 727{,}27}$$

Se $P_0 > 193{,}94$, investiremos imediatamente em $t = 1$ se o preço subiu e que adiaremos a decisão de investir se o preço caiu.

$$F_0 \begin{array}{l} \nearrow V_{1(a)} = 16{,}5\ P_0 - 1600 \\ \searrow V_{1(b)} = 3{,}75\ P_0 - 727{,}27 \end{array}$$

Resolvendo para F_0 achamos $\mathbf{F_0 = 9{,}2\ P_0 - 1057{,}85}$.

Vimos que se $P_0 > 498{,}70$, será melhor investir logo em t = 1 se o preço cair, o que nos daria ainda outra regra de valoração para o projeto para esta faixa de P_0. No entanto, fica claro que haverá um valor mínimo para P_0 acima do qual será melhor investir logo no instante inicial $t = 0$. Este valor pode ser calculado comparando-se o valor de se investir em $t = 0$ que é $\mathbf{V_0 = 11\ P_0 - 1600}$, com a fórmula da faixa mais alta de P_0, que é $\mathbf{F_0 = 9{,}2\ P_0 - 1057{,}85}$. O ponto de equilíbrio que torna o investimento imediato em $t = 0$ mais interessante é obtido fazendo-se $V_0 > F_0$, que nos dá um valor de $P_0 > 301{,}19$. Assim, a hipótese aventada anteriormente de se investir em $t = 1$ se o preço cair nunca irá ocorrer. Pode-se verificar também que se fizermos esta comparação com a fórmula $\mathbf{F_0 = 7{,}5\ P_0 - 727{,}27}$ para a faixa de $166{,}23 < P_0 < 193{,}94$, achamos um valor de equilíbrio de $P_0 > 249{,}35$, o que é inconsistente com a premissa de que $166{,}23 < P_0 < 193{,}94$. Dessa forma, o valor do projeto será dados por $\mathbf{V_0 = 11\ P_0 - 1600}$ se $P_0 > 301{,}19$.

Podemos observar claramente que estes resultados são idênticos aos resultados obtidos pelo método das opções financeiras utilizado por Dixit e Pindyck.

3- Incerteza sobre o custo

Retornando ao exemplo de 2 períodos. Para observarmos os efeitos da incerteza sobre o custo de investimento, Io, consideremos constante o valor dos kits em \$200. Incerteza sobre os custos são tipicamente provenientes de incerteza sobre os custos dos inputs e incerteza sobre regulamentações governamentais.

Consideremos que

$$I_o = \$1.600 \quad \begin{cases} I_1 = 2.400 \\ I_1 = 800 \end{cases}$$

Devemos investir hoje (*t = 0*) ou aguardar ate o próximo período (*t = 1*)?

VPL ingênuo:

$$\begin{aligned} VPLo &= - E[Io] + 2.200 \\ &= - \{(½)\, 2400 + (½)\, 800\} + 2.200 \\ &= - 1.600 + 2.200 = 600 \end{aligned}$$

VPL ajustado a existência da opção, i.e. podendo não realizar o projeto se VPL1 < 0.

VPL1 (Se I1=2400)	= - 2.400 + 2.200	=	-200	Valor Zero
VPL1 (Se I1=800)	= - 800 + 2.200	=	1.400	Valor \$1.400

$$\begin{aligned} E[VPL1] &= \{(½)[- 2.400 + 2.200] + (½)[- 800 + 2.200]\} \\ E[VPL1] &= \{(½)[- \$0] + (½)[- 800 + 2.200]\} \\ E[VPLo] &= \{(½)[- \$0] + (½)[- 800 + 2.200]\}/1.1 \\ &= 700 / 1.1 = \$636 \end{aligned}$$

equação 17

Conclusão:
VPL esperando é \$636, sem esperar é \$600.
Esperar é a estratégia correta. Porque?
Porque a opção de espera tem valor e o valor da opção de espera é \$36.

Outro enfoque: Podemos olhar incerteza sobre custo de outra forma. Suponha que haja incerteza sobre os custos. Porem desta vez você pode investir uma pequena parcela em mais estudos. Se os estudos e mostrarem favoráveis você pode concluir os investimentos. Caso contrario você pode abandonar sem recuperar o investimento feito porem sem investir mais. Outro exemplo é você iniciar a obra pautado por um determinado custo, podendo abandonar o projeto caso custos adicionais inviabilizem um VPL positivo.

Exemplo: Suponha que o preço do kit seja sempre \$200 com certeza. Para construir a fábrica você deve investir \$1000. Porem existe uma chance igual a 50% de uma necessidade adicional de mais \$3000 para completar a obra.

Observe: Existe uma chance de 50% de não ser necessário mais capital e 50% de necessitar mais \$3000: 50% (\$0,00) + 50% (\$3.000)
O custo esperado desta fábrica será:
E(I) = \$1000 + [½ (\$0,00) + ½ (\$3000)] = 1000 + 1500 = 2500

O valor presente dos FC's continua o mesmo $2.200
O VPL ingênuo seria: VPL = - 2.500 + 2.200 = -300 NEGATIVO, não investir

E quanto a possibilidade de abandonar o projeto se ocorrer a necessidade de investir mais $3000? Não foi considerado pelo VPL ingênuo. Vamos refazer, desta vez considerando esta opção:

VPL = - 1000 + {½ [0 + 2200] + ½ [-3000 + 2200]}
= - 1000 + ½ 2200 = 100 POSITIVO, sim investir

Conclusão: Se existir a opção de poder não completar o projeto, devemos investir na primeira fase, i.e. investir $1000.

4- Incerteza Sobre As Taxas De Juros

Agora o incerto é a taxa de juros, em nosso caso a taxa para desconto dos FC's do projeto. Suponha que as taxas podem variar do período $t = 0$ para $t = 1$ podendo subir de 10% para 15% ou cair para 5%, com uma probabilidade de 50%. Assuma que o custo do projeto (Io) é $2000.

Consideração inicial para solucionar o problema de acordo com o Dixit
A taxa de desconto para o FC de $t = 0$ é 10% certo, o tempo é que é zero.
A taxa de desconto para o FC de $t = 1$ é 10% certo, o tempo é 1
A taxa de desconto para o FC de t=2 em diante e que pode variar

O Valor em $t = 1$ dos FC's é: $2.200 descontando a 10%.
$1.533 descontando a 15%
$4.200 descontando a 5%
As contas?

$t = 0$	$t = 1$	t=2	t=3	t=4	…	t=∞
200	200	200	200	200		200

Fazendo pelo valor presente de uma perpetuidade, em $t = 0$ seria Vo = FC / k

Taxa de 10%	200 + 200 / 1,1 + {200 / 0,1}/1,1	=	
	200 + 181,81818 + 2000 /1,1	=	
	200 + 181,81818 + 1.818,1818	=	2.200,00
Taxa de 15%	200 + 200 / 1,1 + {200 / 0,15}/1,1	=	
	200 + 181,8181 + 1.333,33 / 1,1	=	
	200 + 181,8181 + 1.212,1212	=	1.593,93
Taxa de 5%	200 + 200 / 1,1 + {200 / 0,05}/1,1	=	4.200,00
	200 + 181,8181 + 4.000 / 1,1	=	
	200 + 181,8181 + 3636,36	=	4.018,18

O valor em $t = 1$ seria V1

Taxa de 10%	200 + {200 / 0,1}	=	
	200 + 2000	=	2.200,00
Taxa de 15%	200 + {200 / 0,15}	=	
	200 + 1.333,33	=	1.533,33
Taxa de 5%	200 + {200 / 0,05}	=	
	200 + 4.000	=	4.200,00

Atenção:
O Valor em t =1 com incerteza é maior do que o valor em $t = 1$ sem incerteza
Observe que o E(FC1) é: ½ \$1533 + ½ \$4200 = \$2866,50
\$2.866,50 é maior do que \$2.200

Porque?: Porque o VP dos FC's é uma função convexa da taxa de juros.
Desigualdade de Jensen:
Se "x" é VA e f(x) é uma função convexa de "x" então E[f(x)] > f(E[x])
Isto significa que a media continua a mesma, mas a variância cresce.

Quanto valeria a opção de poder esperar um período para então decidir pelo investimento?

Sem Incerteza
Se não existisse incerteza em relação aos juros, o VPL de investir hoje seria:
VPLo = -2000 + 2200 = 200 **equação 18**
ATENÇÃO: DIFERENTE DO LIVRO

Se esperarmos ate o ano que vem para investirmos o VPL hoje seria:
VPL1 = -2000 + 2200 = 200
VPLo = 200 / 1,1 = 181,81
Menor! Porque? Porque perdemos o primeiro FCo = \$200

As contas: O Valor do projeto em $t = 1$ é o mesmo Valor do projeto em $t = 0$, variação é zero. A diferença foi devido a:

Colocamos em aplicação Rf os \$2000 do investimento e obtivemos	\$2.200
Perdendo o FCo que valeria \$200 x 1,1 em $t = 1$	-\$220
Pagamos o investimento	-\$2.000
Diferença final em $t = 1$	-\$20
Diferença final em $t = 0$	-\$18,18

Então o resultado em $t = 0$ será: + \$200 - \$18,18 = +\$181,81

Com Incerteza
Existindo incerteza quanto aos juros, se investíssemos hoje o VPL seria:
VPLo = - Io + FCo + E[V1]
= -2000 + 200 + {(½)1.533,33 + (½)4.200}/1,1
= -2000 + 200 + {2.866,66}/1,1
= -2000 + 200 + 2.606.06
= 806,06 **equação 19**

Se existir a opção de esperarmos ate o próximo período antes de decidirmos sobre o investimento, poderemos observar os cenários futuros antes de decidir. Teríamos dois cenários a saber:

Valor do Projeto
Valor do Projeto, caso os juros forem para 15% é $1.533,33, ou seja menor que Io
Valor do Projeto, caso os juros forem para 5% é $4.200, ou seja maior que Io

VPL do projeto
Observe que se os juros subirem VPL = - 2000 + ½ 1533 = -1233,50
Observe que se os juros caírem VPL = - 2000 + ½ 4200 = + 100,00

Obviamente, tendo a opção de esperar, somente investiríamos (exerceríamos a opção) se os juros caíssem para 5%. Lembrando que a probabilidade desta queda é de 50%, temos;

VPL1 = (½) [-2.000 + 4.200]
VPLo = (½) [-2.000 + 4.200] / 1,1
= 1.100 / 1,1 = 1.000 **equação 20**

5- Economias De Escala Versus Flexibilidade

É mais barato fazer uma industria com grande capacidade desde o inicio do que ir adicionando capacidade adicional aos poucos. O problema é que é mais arriscado.

Consideremos o exemplo de uma empresa geradora de energia elétrica que observe no mercado uma demanda atual de 100MW e uma demanda incremental no segundo ano de mais 100MW.

Existem duas alternativas para construção de usinas termoeletricas geradoras;

A- Implementar uma única geradora a carvão com 200 MW com um custo de $180 milhões. Custo operacional $19 milhões/ano por cada 100MW produzidos. Esta usina tem a característica de produzir apenas 100MW no primeiro ano, podendo produzir 200MW somente no segundo ano.

B- Implementar uma geradora a óleo com capacidade de 100 MW a um custo de capital de $100 milhões. Custo operacional $20 milhões/ano por cada 100MW produzidos. No ano seguinte seria construída uma outra Usina idêntica.

Suposições iniciais; Existe crescimento de demanda, as geradoras tem vida eterna, a taxa de desconto apropriada ao risco é 10%. Os preços do carvão por serem pouco voláteis são considerados constantes. Os preços do óleo pode variar uma única vez partindo de $20 em $t = 0$, para $30 ou $10 milhões em $t = 1$

Qual é a melhor alternativa? Em perpetuidade

Vamos calcular os custos de uma e de outra, considere que existem custos no ano zero:

Usina A- Custos = 180 + 19 + 19/(0,1) + {19 + [19/(0,1)]} / (1+0,1)

= 180 + 19 + 190 + 17,27 + 172,72 =579 **equação 21**

Usina B- Custos = 100 + 20 + 20/0,1 + 100/1,1 + 20/1,1 + [20/(0,1)] /(1,1)

= 100 + 20 + 200 + 90,90 + 18,18 + 181,81 = 610,89

Usina A apresenta menores custos. **equação 22**

Alternativa diferente: Suponha produção inicial de 100MW através de uma usina tipo B, Incluindo a opção de expandir para 200MW a produção em bom cenário pela construção de uma usina tipo A (carvão) . Ou expandir para 200MW a produção em mau cenário pela construção de uma usina tipo B (óleo).

Cálculo do custo desta alternativa:

Construção da Usina B inicial: 100 + 20 + 20/0,1

Exercendo a opção de construir Usina A: ½ $\{[180 + 19 + 19/0,1]/1,1 - 90/(1,1)^2\}$

Exercendo a opção de construir Usina B: ½ {100/1,1 + 10/1,1 + (10/0,1)/1,1}

Custo Total: 100 + 20 + 200 + 139,62 + 95,45 = 555,07 **equação 23**

Observe que este custo é menor que os anteriores

Podemos calcular qual o custo de construção da Usina A, que faria indiferença entre optar pela estratégia de esperar ou construir logo a usina A. Ou seja o custo de A que faz a opção ter valor zero.

Custo da Usina A: Ia + 19 + [19/0,1] + 19/1,1 + [19/0,1]/1,1 =

Ia + 19 + 190 + 19/1,1 + 190/1,1 = Ia + 399

Custo da fazer Usina B e depois fazer A ou B:

100 + 20 + 20/0,1

+ ½ $\{[Ia + 19 + 19/0,1]/1,1 - (½)\ Ia/(1,1)^2\}$

+ ½ {100/1,1 + 10/1,1 + (10/0,1)/1,1}

320 + ½ [0,909 Ia - ½ 0,8264 Ia] + 95 + 95,45 = 0,24793 Ia + 510,45

Finalmente podemos obter o custo Ia que iguala o custo das duas opções:

Ia + 399 = 0,24793 Ia + 510,45

0,752067 Ia = 111,45

Ia = 148,1916 milhões

Conclusão: O preço da Usina a carvão deveria ser no máximo 143 milhões para que pudéssemos ignorar a opção de flexibilidade.

Planta de 200 MW a carvão custa 180

2 Plantas de 100 MW a óleo custam 100 cada, 200 no total

Portanto o preço de uma usina a carvão deveria ser menor do que 75% do preço de duas usinas a óleo para fazer lucrativa o abandono da flexibilidade dada por duas usinas a óleo.