3.3 Processo de Wiener

O Processo de *Wiener*, ou Movimento *Browniano*, é um tipo particular de Processo de *Markov*, muito utilizado na física para descrever o movimento de uma partícula que está sujeita a um grande número de pequenos choques moleculares. Grande parte dos modelos desenvolvidos neste livro são baseados neste processo de tempo contínuo.

O Processo de *Wiener* é um processo em tempo contínuo com três propriedades importantes:

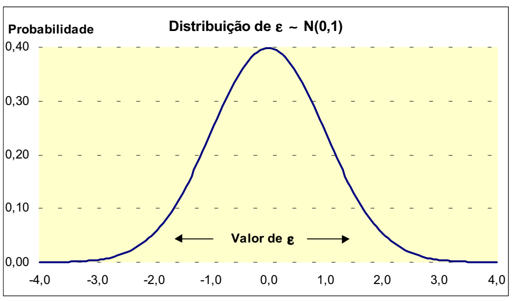
1. É um Processo de *Markov* (muitas vezes o Processo de *Wiener* é considerado como um Processo de *Markov* de tempo contínuo). Assim, tudo que se precisa para fazer uma previsão do valor futuro da variável é a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual.
2. Possui incrementos independentes.
3. Mudanças no processo sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

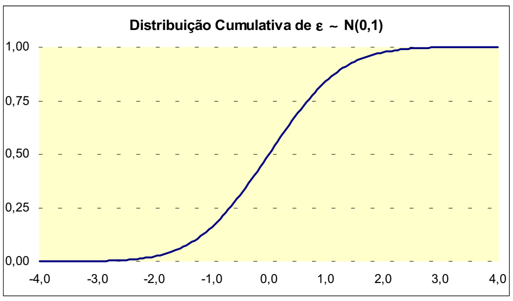
As três propriedades acima descritas podem parecer ser restritivas, pois sabemos, por exemplo, que o preço das ações segue uma distribuição log-normal (preço de uma ação nunca cai abaixo de zero). Para contornarmos este problema, basta modelarmos o logaritmo do preço como um Processo de *Wiener*.

Mais formalmente, considere que agora que z(*t*) seja um Processo de *Wiener*. Então qualquer variação em z, Δz (correspondente a um intervalo de tempo Δ*t*), satisfaz as seguintes condições:

1. A relação entre Δz e Δ*t* é dada por $\tilde{\Delta z} = \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{\Delta t}$, onde $\tilde{\varepsilon}_t \sim N(0,1)$

2. A variável aleatória ε_t não possui correlação serial, isto é, $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$, para $t \neq$ s. Dessa forma, os valores de Δz para dois quaisquer dois intervalos diferentes são independentes, de forma que z(*t*) segue um processo de Markov.





Da propriedade 1 segue que Δz tem distribuição normal com:

Média: $E(\Delta\tilde{z}) = E(\tilde{\varepsilon}\sqrt{\Delta t}) = \sqrt{\Delta t}E(\tilde{\varepsilon}) = 0$

Variância: $Var(\Delta\tilde{z}) = Var(\tilde{\varepsilon}\sqrt{\Delta t}) = \Delta t\,Var(\tilde{\varepsilon}) = \Delta t.1$

$Var(\Delta\tilde{z}) = \Delta t$

Podemos concluir então que os incrementos do Processo de Wiener seguem uma distribuição normal com parâmetros $\Delta\tilde{z} \sim N(0, \Delta t)$

Já a propriedade 2 implica que z(*t*) segue um Processo de *Markov*. Iremos a seguir demonstrar a propriedade 2 que diz que a variável aleatória ε_t não possui correlação serial. Já sabemos do Processo de Wiener que seus incrementos são independentes uns dos outros para intervalos de tempo diferentes. Assim sabemos que

$$Corr(\Delta z_t, \Delta z_s) = 0$$

Mas também sabemos que $Corr(a,b) = \rho_{a,b} = \dfrac{Cov(a,b)}{\sigma_a.\sigma_b}$

Então $Corr(\Delta z_t, \Delta z_s) = \dfrac{Cov(\Delta z_t, \Delta z_s)}{\sqrt{Var(\Delta z_t)}.\sqrt{Var(\Delta z_s)}}$

Substituindo os valores de Δz, teremos

$$Corr(\Delta z_t, \Delta z_s) = \frac{Cov(\tilde{\varepsilon}_t\sqrt{\Delta t}, \tilde{\varepsilon}_s\sqrt{\Delta t})}{1 \cdot 1} = 0$$

$$Corr(\Delta z_t, \Delta z_s) = \Delta t Cov(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\varepsilon}_s) = 0$$

$$Cov(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\varepsilon}_s) = 0$$

lembrando da definição de covariância que $Cov(a,b) = E\big[(a - E(a))(b - E(b))\big]$ podemos escrever:

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E\{[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)][\varepsilon_s - E(\varepsilon_s)]\} = 0$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E\{[(\varepsilon_t - \quad 0 \quad][\varepsilon_s - \quad 0 \quad]\} = 0$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$$

Agora iremos verificar como o Processo se comporta em um intervalo de tempo longo. Considere um incremento no valor de z durante um intervalo de tempo relativamente longo T.

Mostraremos que $z(T)-z(0)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$, onde $N=\dfrac{T}{\Delta t}$ é o número de intervalo de tempo. Supondo que t = 0, 1, 2, ..., T tenha N intervalos de tempo então

$$
\begin{aligned}
z(1)-z(0) &= \varepsilon_1\sqrt{\Delta t}\\
z(2)-z(1) &= \varepsilon_2\sqrt{\Delta t}\\
z(3)-z(2) &= \varepsilon_3\sqrt{\Delta t}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z(T)-z(T-1) &= \varepsilon_N\sqrt{\Delta t}
\end{aligned}
$$

somando todas essas expressões teremos

$$
\begin{aligned}
z(T)-z(0) &= \varepsilon_1\sqrt{\Delta t}+\varepsilon_2\sqrt{\Delta t}+\varepsilon_3\sqrt{\Delta t}+\ldots+\varepsilon_N\sqrt{\Delta t}\\
z(T)-z(0) &= \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}
\end{aligned}
$$

Equação 4

como os ε_i são independentes uns dos outros, teremos:

$$
\begin{aligned}
E[z(T)-z(0)] &= E[\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}]\\
E[z(T)-z(0)] &= \sum_{i=1}^{N}E[\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}]\\
E[z(T)-z(0)] &= \sum_{i=1}^{N}E(\varepsilon_i)\sqrt{\Delta t}\\
E[z(T)-z(0)] &= 0
\end{aligned}
$$

e agora calcularemos a variância

$$
\begin{aligned}
Var\left[z(T)-z(0)\right] &= Var\left[\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}\right]=Var\left[\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\right]\\
Var\left[z(T)-z(0)\right] &= \Delta t.Var\left[\sum\varepsilon_i\right]
\end{aligned}
$$

Mas sabemos que

$$Var\left[\sum\varepsilon_i\right]=E\left[\sum\varepsilon_i\right]^2-E^2\left[\sum\varepsilon_i\right]$$

e $$E^2\left[\sum\varepsilon_i\right]=E\left[\sum\varepsilon_i\right].E\left[\sum\varepsilon_i\right]=\sum E\left[\varepsilon_i\right].\sum E\left[\varepsilon_i\right]=0$$

Ficamos então com

$$Var\left[\sum\varepsilon_i\right]=E\left[\sum\varepsilon_i\right]^2$$

Lembrando que:

$(x+y+z)^2 =$	$x^2 \quad + xy \quad + xz$	
	$y^2 \quad + xy \qquad\quad + yz$	
	$z^2 \qquad\qquad + xz \quad + yz$	
	$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$	
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$	
	$\sum_i^3 x_i^2 + 2\sum_i^3 \sum_{j=i+1}^3 x_i x_j$	

$$\left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right]^2 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 + 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \varepsilon_i \varepsilon_j \qquad \text{e}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 + 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \varepsilon_i \varepsilon_j\right] = \sum_{i=1}^N \underbrace{E\left[\varepsilon_i^2\right]}_{1} + \underbrace{2\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N E\left[\varepsilon_i \varepsilon_j\right]}_{0} = \sum 1 = N$$

Então

$$Var\left[\sum \varepsilon_i\right] = E\left[\sum \varepsilon_i\right]^2 = N$$

Voltando a equação original da variância, temos:

$$Var\left[z(T) - z(0)\right] = \Delta t . Var\left[\sum \varepsilon_i\right]$$
$$Var\left[z(T) - z(0)\right] = \Delta t . N = T$$
$$Var\left[z(T) - z(0)\right] = T$$

Outra maneira de fazer, lembrando que $Var(a) = E\left[a - E(a)\right]^2$

$$Var[z(T) - z(0)] = E\left\{[z(T) - z(0)] - \underbrace{E[z(T) - z(0)]}_{0}\right\}^2$$

$$Var[z(T) - z(0)] = E\ \ [z(T) - z(0)]^2$$

$$Var[z(T) - z(0)] = E\left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}\right]^2 \qquad i \neq j$$

$$Var[z(T) - z(0)] = E\left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \Delta t + 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \varepsilon_i \varepsilon_j \Delta t\right]$$

$$Var[z(T) - z(0)] = \sum_{i=1}^N E(\varepsilon_i^2)\Delta t + 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N E(\varepsilon_i \varepsilon_j)\Delta t$$

como dito anteriormente, $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$ então podemos eliminar o somatório duplo e chegarmos à expressão

$$Var[z(T) - z(0)] = \sum_{i=1}^{N} E(\varepsilon_i^2)\Delta t$$

vimos também que $E(\varepsilon_i^2) = 1$, e finalmente encontramos

$$Var[z(T) - z(0)] = \sum_{i=1}^{N} \Delta t = N\Delta t = \frac{T}{\Delta t}\Delta t = T$$

$$Var[z(T) - z(0)] = T$$

Com a média e variância de z(T)-z(0) podemos inferir que

$$z(T) - z(0) \sim N(0, T)$$
$$onde \quad N(\mu, \sigma^2)$$

Assim, devemos concluir que o Processo de *Wiener* é um processo estocástico não-estacionário, pois sua variância cresce linearmente com o horizonte de tempo.

Se considerarmos um intervalo de tempo $\Delta t \to 0$, poderemos representar o incremento do Processo de *Wiener* em tempo contínuo:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \qquad \text{Equação 5}$$

$$\begin{cases} E(dz) = 0 \\ Var(dz) = dt \\ \sigma(dz) = \sqrt{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \quad dz \sim N(0, \sqrt{dt})$$

3.3.1. Processo de *Wiener* Generalizado

O Processo de *Wiener* Generalizado, também conhecido como Movimento Browniano com *drift*, para uma variável *x* pode ser definido em termos de *dz* (incremento de *Wiener*) como a seguir:

$$dx = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz \qquad \text{Equação 6}$$

onde

$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim$ N(0,1)

α é conhecido como parâmetro *drift*, e σ como parâmetro de variância, ambos são constantes. Considere um intervalo de tempo Δt, a mudança em *x*, denotada por Δx possui distribuição normal e com os seguintes parâmetros

Média

$$E(\Delta x) = E(\alpha\Delta t + \sigma\Delta z)$$
$$E(\Delta x) = E(\alpha\Delta t) + E(\sigma\Delta z)$$
$$E(\Delta x) = \alpha\Delta t + \sigma E(\Delta z)$$
$$E(\Delta x) = \alpha\Delta t$$

e Variância

$$Var(\Delta x) = E[\Delta x - E(\Delta x)]^2$$
$$Var(\Delta x) = E[\Delta x - \alpha\Delta t]^2$$
$$Var(\Delta x) = E[\alpha\Delta t + \sigma\Delta z - \alpha\Delta t]^2$$
$$Var(\Delta x) = E[\sigma\Delta z]^2$$
$$Var(\Delta x) = E[\sigma^2\varepsilon^2\Delta t]$$
$$Var(\Delta x) = E(\varepsilon^2)\sigma^2\Delta t$$
$$Var(\Delta x) = \sigma^2\Delta t$$

assim $\Delta x \sim N(\alpha\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$.

Outra maneira de calcular a variância:

$$Var(\Delta x) = Var[\alpha\Delta t + \sigma\Delta z]$$
$$Var(\Delta x) = Var[\alpha\Delta t] + 2Cov[\alpha\Delta t, \sigma\Delta z] + Var[\sigma\Delta z]$$

Mas

Var($\alpha\Delta t$) = 0 → $\alpha\Delta t$ constante

$$2Cov[\alpha\Delta t, \sigma\Delta z] = E\left[\underbrace{(\alpha\Delta t - E(\alpha\Delta t))}_{0}(\sigma\Delta z - E(\sigma\Delta z))\right] = 0$$

Então:

$$Var(\Delta x) = Var[\sigma\Delta z] = \sigma^2 Var\left[\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right]$$
$$Var(\Delta x) = \sigma^2\Delta t Var[\varepsilon]$$
$$Var(\Delta x) = \sigma^2\Delta t$$

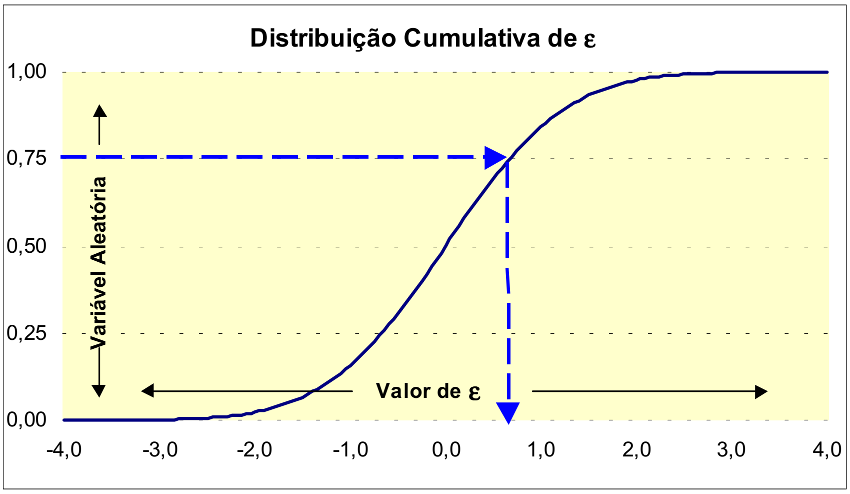
Como exemplo, considere α = 0.2 por ano e σ = 1.0 por ano um caminho aleatório seguindo o Processo de *Wiener* Generalizado. Este caminho mostra uma variação ao longo de 50 anos no preço de uma commodity qualquer. O intervalo de tempo dos dados e do gráfico é de 1 mês, portanto, devemos dividir o intervalo de tempo anual em 12 meses (Δt/12) . Logo a equação que modela este caminho é dada por:

$$\Delta x = \alpha\Delta t + \sigma\Delta z$$

$$x_t - x_{t-1} = \quad 0{,}2 \cdot \frac{\Delta t}{12} \quad + \quad 1{,}0 \cdot \varepsilon_t \cdot \sqrt{\frac{\Delta t}{12}} \qquad \text{Equação 7}$$

$$x_t = x_{t-1} + \quad 0.016667\Delta t \quad + \quad 0.2887 \cdot \varepsilon_t . \Delta t$$

onde $\Delta t = 1$ e $x_0 = 0$. O Valor de ε é o resultado da inserção de uma variável aleatória entre (0,1) na Distribuição Normal Padrão Cumulativa, conforme gráfico a seguir:



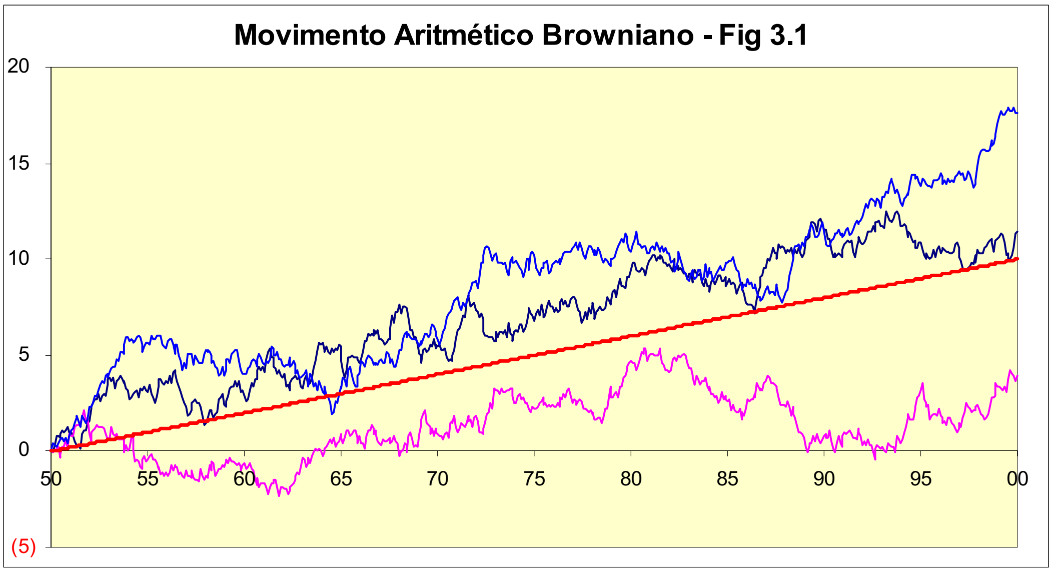
A figura 3.1 mostra 3 caminhos gerados utilizando a equação de x_t e a linha de tendência, isto é, a equação de x_t quando $\varepsilon_t = 0$.

OBS: $dz = \varepsilon\sqrt{dt} \rightarrow \quad \Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

$\Delta x = \alpha\Delta t + \sigma\, \Delta z$

α = \$0,20 /ano $\quad \Delta t$ = 1 mês = 1/12 ano

Δx = 0,20 /ano . ano /12 = 0,20 /12 + $\sigma\Delta z$



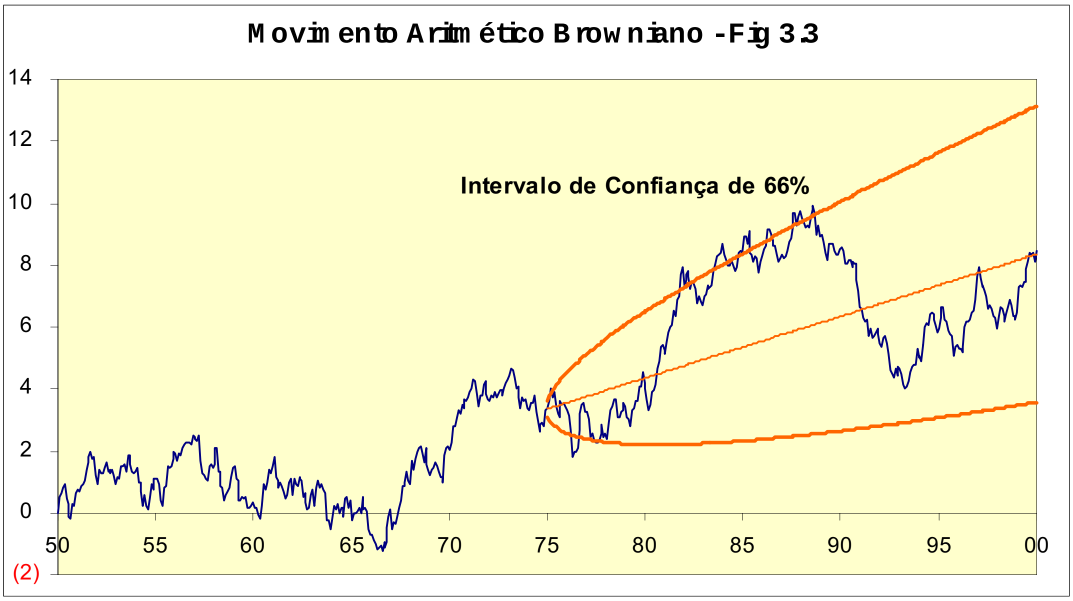
Agora, iremos supor que a equação de x_t irá gerar um caminho para o seguinte intervalo de tempo (1950,1974). A partir de Dez/1974 iremos prever a variação dos preços até 2000. Pela propriedade de *Markov*, somente o valor de x_t para dezembro de 1974 é necessário para modelar a previsão. Assim o valor estimado de x_T para um tempo T meses a frente de Dez/74 ($\hat{x}_{1974+T}$) é dado por:

$$E[x_{1974+T}] = E[x_{1974} + \Delta x_T]$$
$$E[x_{1974+T}] = x_{1974} + E[\alpha \Delta t + \sigma \Delta z]$$
$$E[x_{1974+T}] = x_{1974} + E\left[0{,}01667\ T + 0{,}2887 \varepsilon \sqrt{T}\right]$$
$$E[x_{1974+T}] = x_{1974} + 0{,}01667\ T$$
$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0{,}01667\ T$$

Podemos também modelar esta previsão utilizando um intervalo de confiança, de por exemplo 66%, aí teremos a seguinte equação

$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + \alpha \cdot T \quad \pm \quad z_{66\%} \cdot \sigma\, \varepsilon \sqrt{T}$$
$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.016667 \cdot T \pm z_{66\%} \cdot 0.2887 \cdot \sqrt{T}$$
$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.016667 \cdot T \pm 0.9557 \cdot 0.2887 \cdot \sqrt{T}$$
$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.016667 \cdot T \pm 0.2759 \cdot \sqrt{T}$$

A figura abaixo mostra os caminhos, agora com valores previstos a partir de janeiro de 1975, com um intervalo de confiança de 66%.



Das duas figuras anteriores, nós podemos observar que no longo prazo a tendência de crescimento é dominante, já no curto prazo a volatilidade do processo é dominante.

3.3.2. Representação de Caminho Aleatório de Movimento Browniano

Nós mostramos no item anterior que o Processo de *Wiener*, também conhecido como Movimento *Browniano* é regido pela seguinte equação:

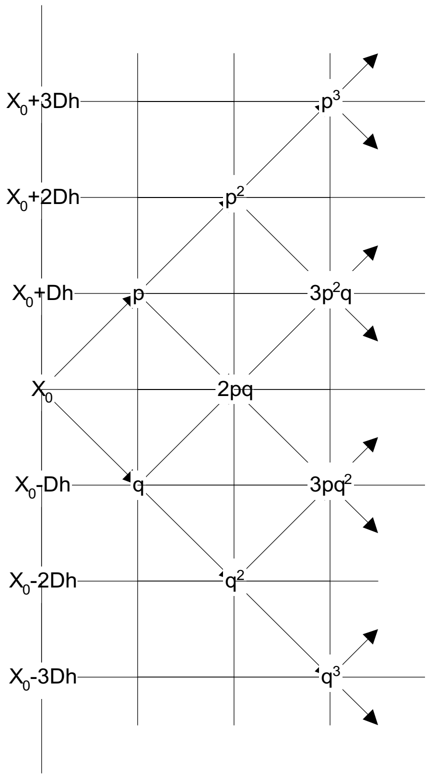
$$dx = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz,$$

onde

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \text{ e } \varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Agora, mostraremos que o Processo de *Wiener* pode ser obtido como limite contínuo de um caminho aleatório (*Random Walk*) discreto.

Discretizaremos o tempo em períodos de comprimento Δt e, em cada período, a variável move-se para cima ou para baixo. A probabilidade de subida é p e de descida $q=1-p$. A figura a seguir mostra os valores possíveis de x em cada um dos períodos, assumindo que começa em x_0. Observe que de um período para outro, Δx é uma variável aleatória que pode assumir os valores $\pm\,\Delta h$.

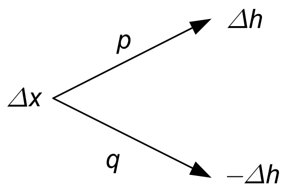


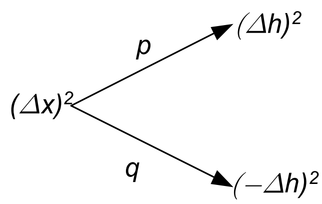
$$E(x_1) = p(x_0 + \Delta h) + (1-p)(x_0 - \Delta h)$$
$$E(x_1) = px_0 + p\Delta h + (1-p)x_0 - (1-p)\Delta h$$
$$E(x_1) = (p+1-p)x_0 + (p+1-p)\Delta h$$
$$E(x_1) = (p+1-p)x_0 + (p-1+p)\Delta h$$
$$E(x_1) = x_0 + (p-q)\Delta h$$
$$E(x_1 - x_0) = (p-q)\Delta h$$
$$E(\Delta x) = (p-q)\Delta h$$

Agora podemos calcular $E[(\Delta x)^2]$

$$E[(\Delta x)^2] = p(\Delta h)^2 + (1-p)(-\Delta h)^2$$
$$E[(\Delta x)^2] = (p+1-p)(\Delta h)^2$$
$$E[(\Delta x)^2] = (\Delta h)^2$$

Também:





$$E[\Delta x] = p\Delta h + q(-\Delta h) = (p-q)\Delta h$$

$$E[(\Delta x)^2] = p(\Delta h)^2 + q(-\Delta h)^2$$
$$E[(\Delta x)^2] = (p+q)(\Delta h)^2 = (\Delta h)^2$$

Com os valores acima podemos calcular $Var(\Delta x)$:

$$Var(\Delta x) = E\{[\Delta x - E(\Delta x)]^2\}$$
$$Var(\Delta x) = E\{(\Delta x)^2 - 2\Delta x E(\Delta x) + [E(\Delta x)]^2\}$$
$$Var(\Delta x) = E[(\Delta x)^2] - 2E(\Delta x)E(\Delta x) + [E(\Delta x)]^2$$
$$Var(\Delta x) = E[(\Delta x)^2] - [E(\Delta x)]^2$$
$$Var(\Delta x) = (\Delta h)^2 - [(p-q)(\Delta h)]^2$$
$$Var(\Delta x) = [1-(p-q)^2](\Delta h)^2$$

Lembrando que: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Temos: $\quad 1-(p-q)^2 = (p+q)^2 - (p-q)^2$
$= (p+q+p-q)\,(p+q-(p-q))$
$= 2p.2q = 4pq$

Entao: $\quad Var(\Delta x) = 4pq(\Delta h)^2 \qquad$ Equação 8

Se considerarmos um intervalo de tempo t com $n = t/\Delta t$, podemos calcular a média e variância de uma distribuição binomial para x_t - x_0. Considere a representação de *Random Walk* anterior. Tomando o Valor Esperado de cada intervalo, podemos obter:

$$E[x_1 - x_0] = E[\Delta x] = (p-q)\Delta h$$
$$E[x_2 - x_1] = E[\Delta x] = (p-q)\Delta h$$
$$E[x_3 - x_2] = E[\Delta x] = (p-q)\Delta h$$
....
$$E[x_t - x_{t-1}] = E[\Delta x] = (p-q)\Delta h$$

Somando cada uma das parcelas, obteremos

$$E[x_1 - x_0] + E[x_2 - x_1] + ...E[x_t - x_{t-1}] = n(p-q)\Delta h$$
$$E[x_1] - E[x_0] + E[x_2] - E[x_1] + ...E[x_t] - E[x_{t-1}] = n(p-q)\Delta h$$
$$E[x_t] - E[x_0] = n(p-q)\Delta h$$
$$E[x_t - x_0] = n(p-q)\Delta h$$

$$E(x_t - x_0) = t(p-q)\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

A variância de x_t - x_0 pode ser obtida se considerarmos

$$x_t - x_0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + ... + \Delta x_N$$

Como os incrementos são independentes, isto é, os Δt são iid, ρ = 0, e matriz var/covar só terá valores na diagonal, e então podemos aplicar $Var(\circ)$ e obtermos:

$$Var(x_t - x_0) = Var(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + ... + \Delta x)$$
$$Var(x_t - x_0) = Var(\Delta x_1) + Var(\Delta x_2) + Var(\Delta x_3) + ... + Var(\Delta x)$$
$$Var(x_t - x_0) = 4pq(\Delta h)^2 + 4pq(\Delta h)^2 + 4pq(\Delta h)^2 + ... + 4pq(\Delta h)^2$$
$$Var(x_t - x_0) = 4npq(\Delta h)^2$$

substituindo o valor de n teremos:

$$Var(x_t - x_0) = t(4pq)\frac{(\Delta h)^2}{\Delta t}$$

Seria interessante se pudéssemos escolher valores de p, q, Δh e Δt tal que a média e variância de x_t - x_0 permanecessem inalteradas e fossem independentes destes valores. Além disso gostaríamos de atingir a equação $dx = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz$ no limite, quando Δt → 0, e onde $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Estabelecendo o seguinte valor para Δh:

$$\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t} \qquad \text{Equação 9}$$

podemos em seguida calcular os valores de p e q que satisfazem:

$$E(\Delta x) = (p-q)\Delta h = \alpha\Delta t$$
$$(p-q)\sigma\sqrt{\Delta t} = \alpha\Delta t$$
$$(2p-1)\sigma\sqrt{\Delta t} = \alpha\Delta t$$
$$2p-1 = \frac{\alpha\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}$$

$$p = \frac{1}{2}[1+\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}] \qquad q = \frac{1}{2}[1-\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}] \qquad \text{Equação 10}$$

teremos

$$p-q = \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t} = \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h$$

Substituindo os valores acima nas equações encontradas para a média e variância de x_t - x_0, além do valor de Δh poderemos encontrar:

$$E(x_t - x_0) = t(\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h)\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{t\alpha\sigma^2\Delta t}{\sigma^2\Delta t} = \alpha t$$

e

$$Var(x_t - x_0) = \frac{t}{\Delta t}[1-(\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h)^2](\Delta h)^2$$
$$Var(x_t - x_0) = \frac{t}{\Delta t}[1-(\frac{\alpha}{\sigma^2}\sigma\sqrt{\Delta t})^2](\sigma^2\Delta t)$$
$$Var(x_t - x_0) = \frac{t}{\Delta t}[1-(\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\Delta t)](\sigma^2\Delta t)$$
$$Var(x_t - x_0) = \sigma^2 t\,[1-(\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\Delta t)]$$

Se trabalharmos com intervalos de tempo infinitamente pequenos, ou seja, se levarmos $\Delta t \to 0$, encontraremos

$$\lim_{\Delta t \to 0} Var(x_t - x_0) = \sigma^2 t$$

Ao compararmos estes valores com os parâmetros do Movimento Browniano, veremos que são os mesmos, onde α é o parâmetro *drift* e σ o parâmetro de variância. Note que no limite ambos, a variância e a média de (x_t - x_0), são independentes de p, q, Δh e Δt.

Assim pudemos mostrar que quando o intervalo de tempo tende para zero, o *Random Walk* tende para o Movimento Browniano, preservando a equação $\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t}$. A relação entre Δh e Δt não é arbitrária, é uma maneira de não termos a variância de (x_t - x_0) dependendo do número de passos, mas sim, dependendo de t. Com isto, fica claro o motivo pelo qual na equação do Movimento Browniano *dx* depende da raiz quadrada de *dt* e não de *dt* somente.

Uma propriedade interessante do Movimento Browniano é que quando $\Delta t \to 0$, a distância total percorrida em qualquer intervalo de tempo torna-se infinita. Como vimos anteriormente

$$x_t - x_{t-1} = |\Delta x| = \Delta h$$

e

$$E(|\Delta x|) = \Delta h$$

logo o comprimento total esperado do caminho para um intervalo de tempo de comprimento t é dado por:

$$n\Delta h = \frac{t}{\Delta t}\Delta h = t\sigma \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta t}}$$

Quando $\Delta t \to 0$ então o comprimento total esperado do caminho tende para o infinito. Do mesmo modo,

$$\Delta x \to \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \Delta x = +\Delta h \\ -\infty & \text{se} \quad \Delta x = -\Delta h \end{cases}$$

Assim, podemos confirmar a forma de um caminho que segue um movimento Browniano, como nas figuras 2 e 3, possuem muitas subidas e descidas e são pontiagudos (não são diferenciáveis).