3.5 Lema de Ito

Ao estudarmos o processo de Ito, mostramos que este processo era contínuo no tempo, mas não era diferenciável. Se quisermos calcular derivadas de uma função F(x) em relação à x teremos problemas, pois ela não é diferenciável, já que x segue um processo de Ito que também não é diferenciável.

Como exemplo, desejamos calcular o valor de uma opção de investir na exploração de uma mina de cobre, onde o preço do cobre é dado por um movimento geométrico Browniano. Para isso devemos determinar o processo estocástico que o valor da opção segue. Mas para determinarmos esse processo temos de alguma forma poder manipular derivadas e integrais de funções que tem como argumento Processos de Ito. Assim, devemos utilizar um dos principais Lemas do Cálculo Estocástico, o Lema de Ito.

O Lema de Ito, por muitos considerado como uma versão da Expansão de Taylor para o cálculo estocástico é dado pela seguinte expressão:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt \quad + \quad b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz$$

onde $x(t)$ segue um Processo de Ito com parâmetros a(x,t) e b(x,t) e F é uma função de x, no mínimo 2 vezes diferenciável em x, e uma em t.

Considere a diferencial total de uma função dependente de duas variáveis, onde somente os termos de primeira ordem serão utilizados:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

Agora, iremos supor que existem termos de mais alta ordem de x.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(dx)^3 + \cdots \qquad \text{Equação 22}$$

Antes de substituirmos dx na expressão acima, verificaremos como se comportam as potências de dx.

$$\begin{aligned}(dx)^2 &= [a(x,t)dt + b(x,t)dz]^2 \\ (dx)^2 &= a^2(x,t)(dt)^2 + 2a(x,t)b(x,t)dtdz + b^2(x,t)(dz)^2\end{aligned} \qquad \text{Equação 23}$$

Como estamos considerando que dt seja um intervalo de tempo pequeno, então quaisquer potências acima de 1 podem ser desprezadas. Dessa forma, na equação anterior, podemos desprezar a primeira e segunda parcelas, mas não a terceira. Como já sabemos, dz é um incremento de Wiener e é dado por $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$, onde $\varepsilon \sim N(0,1)$. Logo $(dz)^2$ depende de *dt* e não deverá ser desprezado. Então, $(dx)^2$ é dado por

$$(dx)^2 = b^2(x,t)(dz)^2$$

Agora vamos achar o valor esperado e a variância de $(dz)^2$.

$$E[(dz)^2] = E[(\varepsilon_t \sqrt{dt})^2]$$
$$E[(dz)^2] = E(\varepsilon_t^2)dt$$

como já vimos em demonstrações anteriores, $E(\varepsilon^2)=1$, logo

$$E[(dz)^2] = dt$$

e a variância é dada por

$$Var[(dz)^2] = Var(\varepsilon_t^2 dt)$$
$$Var[(dz)^2] = (dt)^2 Var(\varepsilon_t^2)$$

como estabelecemos que $(dt)^2 \rightarrow 0$, então

$$Var[(dz)^2] = 0$$

Como a variância de $(dz)^2$ é zero, então podemos concluir que o valor de $(dz)^2$ é dado por

$$(dz)^2 = dt$$

Substituindo na equação de $(dx)^2$, encontraremos

$$(dx)^2 = b^2(x,t)dt$$

Agora, analisaremos a expressão para $(dx)^3$.

$$(dx)^3 = (dx)^2 dx$$
$$(dx)^3 = [b^2(x,t)dt][a(x,t)dt + b(x,t)dz]$$
$$(dx)^3 = a(x,t)b^2(x,t)(dt)^2 + b^3(x,t)\varepsilon_t(dt)^{3/2}$$

como estamos considerando qualquer potência de *dt* acima de 1 como sendo insignificante, então $(dx)^3 = 0$. Se considerarmos as outras potências de *dx*, $(dx)^4$, $(dx)^5$, ... veremos que em todas as parcelas teremos potências $(dt)^p$, onde $p>1$, ou seja, todas as parcelas são insignificantes e por conseguinte todos as potências de (dx) acima de 2 não serão significantes. Assim nossa expressão para *dF* reduz-se a:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2$$ Equação 24

e substituindo o valor de (dx) e $(dx)^2$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}[a(x,t)dt + b(x,t)dz] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2(x,t)dt$$

separando os termos em *dt*, teremos

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt \quad + \quad b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz$$ Equação 25

Agora, suponha por simplicidade que $a(x,t) = 0$ e $\partial F/\partial t = 0$.

$$E(dx) = a(x,t) \qquad\qquad E(dx) = 0$$

e

$$E(dF) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt \quad + \quad b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}E(dz)$$

$$E(dF) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt \neq 0$$

Então teremos $E(dx) = 0$ e $E(dF) \neq 0$. Isto é apenas uma implicação da inequação de Jensen. *E*(*dF*) será positivo se *F* for uma função convexa de *x* ($\partial^2 F/\partial x^2 > 0$) e negativo se *F* for uma função côncava de *x* ($\partial^2 F/\partial x^2 < 0$). Nós já vimos anteriormente que para um Processo de Ito, *dx* varia com $\sqrt{dt}$ e $(dx)^2$ varia com *dt*. Então o efeito da convexidade e concavidade estão presentes na diferencial de *F* e é capturado pelo termo em $\partial^2 F/\partial x^2$.

A inequação de Jensen[1] é uma velha conhecida nossa, pois já utilizamos em Programação Linear, Microeconomia e Teoria da Utilidade. Se $f(x)$ é uma função convexa, então $E[f(x)] \geq f[E(x)]$, e a expectativa existe e é finita. Esta proposição é facilmente demonstrada usando a expansão de Taylor. Para tanto, iremos expandir $f(x)$ ao redor de $\mu = E(x)$.

$$f(x) = f(\mu) + \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu}(x-\mu) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \mu^2}(x-\xi)^2$$

[1] Para uma teoria mais rigorosa a respeito dos conjuntos convexos e funções convexas, recomenda-se o livro *Convex Analysis*, de R. Tyrrell Rockfeller.

onde ξ é algum valor entre x e μ. Como estamos considerando f uma função convexa, então $\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \geq 0$, logo obteremos:

$$f(x) \geq f(\mu) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x - \mu)$$

tomando o valor esperado desta inequação teremos

$$E[f(x)] \geq E[f(\mu) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x - \mu)]$$

$$E[f(x)] \geq f(\mu) + \frac{\partial f}{\partial \mu} E[(x - \mu)]$$

$$E[f(x)] \geq f(\mu) + \frac{\partial f}{\partial \mu}[E(x) - \mu]$$

$$E[f(x)] \geq f[E(x)] + \frac{\partial f}{\partial \mu}[\mu - \mu]$$

$$\boxed{E[f(x)] \geq f[E(x)]}$$

Funções com diversos Processos de Ito

Suponha que F = F(x_1, x_2, x_3, …x_m, t) é uma função do tempo e de m processos de Ito (x_1, x_2, x_3, …x_m), onde

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

$$dx_i = a_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dt + b_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dz_i \qquad \text{Equação 26}$$

$i = 1, 2, 3, …$m.

A correlação ao longo do tempo, para cada par de processos, é dada por $\rho_{dzi\,dzj}\ dt = E(dzi\ dzj)$

Demonstração:

Podemos escrever:	Cov (a, b)	=	$\rho_{ab}\ \sigma(a)\ \sigma(b)$
E também como:	Cov (a, b)	=	E(ab) - E(a) E(b)
Igualando os termos:	E(ab)	=	$\rho_{ab}\ \sigma(a)\ \sigma(b)$ + E(a) E(b)
No nosso caso, temos	E(dz_i dz_j)	=	$\rho_{dzi\,dzj}\ \sigma(dz_i)\ \sigma(dz_j)$ + E(dz_i) E(dz_j)

Lembrando que E(dz) = 0, ficamos com $E(dz_i\ dz_j) = \rho_{ij}\ .\sigma_{dzi}\ \sigma_{dzj}$

$$\rho_{dzi\,dzj} = \frac{E(dzi\ dzj)}{\sigma_{dzi}\ \sigma_{dzj}}$$

Mas $\sigma\ dz = \sqrt{Var(dz)} = \sqrt{dt}$, então $\rho_{dzi\,dzj} = \frac{E(dzi\ dzj)}{\sqrt{dt}\sqrt{dt}}$ e

$$\boxed{\rho_{ij}\ dt = E(dz_i\ dz_j)}$$

Outra maneira de fazer é verificando que $Cov(dz_i, dz_i) = \rho_{ij}\ \sigma_i.\sigma_j$ e

$$Cov(dz_i, dz_j) = E(dz_i.dz_j) - \underbrace{E(dz_i).E(dz_j)}_{0}$$

$$\begin{aligned}Cov(dz_i, dz_j) &= Cov(\varepsilon_i\sqrt{dt}, \varepsilon_j\sqrt{dt}) = dt\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\\ &= dt\ [E(\varepsilon_i.\varepsilon_j) - E(\varepsilon_i).E(\varepsilon_j)]\\ &= dt\ E(\varepsilon_i.\varepsilon_j)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\rho_{ij}\ \sigma_i.\sigma_j &= \rho_{ij}\ \sqrt{Var(dz_i).Var(dz_j)}\\ &= \rho_{ij}\ \sqrt{Var(\varepsilon_i\sqrt{dt}).Var(\varepsilon_j\sqrt{dt})}\\ &= \rho_{ij}\ \sqrt{dt^2\ \underbrace{Var(\varepsilon_i)}_{1}.\underbrace{Var(\varepsilon_j)}_{1}}\\ &= \rho_{ij}\ dt\end{aligned}$$

Igualando, ficamos com:

$$\rho_{ij}\ dt = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\ dt$$

$$\rho_{ij}\ dt = E(dz_i, dz_j)$$

Pelo Lema de Ito a diferencial dF será:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}dx_3 + ...+ + \frac{\partial F}{\partial x_m}dx_m + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}dx_1 dx_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + ...$$

$$\boxed{dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j}$$

Equação 27

Agora vamos substituir os dx_i (equação 26) na equação 27:

Preliminares: (i = j)

$$dx_i = a_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dt + b_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dz_i$$

$$(dx_i)^2 = \left[a_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dt + b_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dz_i\right]^2$$

$$(dx_i)^2 = a_i^2(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dt^2 + 2a_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t).$$
$$b_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dtdz_i + b_i^2(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dz_i^{\ 2}$$

Desprezando os termos *dt* de ordem maior que 1, ficamos com:

$$(dx_i)^2 = b_i^2(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, t)dt$$

$i \neq$ j

$$dx_i dx_j = \left[a_i(x_1, x_2, ..., x_m, t)dt + b_i(x_1, x_2, ..., x_m, t)dz_i\right] \cdot$$
$$\left[a_j(x_1, x_2, ..., x_m, t)dt + b_j(x_1, x_2, ..., x_m, t)dz_j\right]$$

Desconsiderando os termos em *dt* elevado a potências > 1

$$dx_i dx_j = b_i(x_1, x_2, ..., x_m, t) \cdot b_j(x_1, x_2, ..., x_m, t)\ dz_i \cdot dz_j$$
$$dx_i dx_j = b_i(x_1, x_2, ..., x_m, t) \cdot b_j(x_1, x_2, ..., x_m, t)\ \rho_{dzi\ dzj} dt$$

Podemos agora substituir os termos na expressão de dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_i a_i(x_1, ., x_m, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_i b_i(x_1, ., x_m, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} +$$
$$\frac{1}{2} \sum_j \rho_{ij} b_i(x_1, ., x_m, t)\ b_j(x_1, ., x_m, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_i b_i(x_1, ., x_m, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} dz_i$$

Equação 28

Movimentos Brownianos Correlacionados:

Seja a função: F(x,y) = xy onde x e y seguem um MGB

$dx = \alpha_x\, x\, dt + \sigma_x\, x\, dz_x$

$dy = \alpha_y\, y\, dt + \sigma_y\, y\, dz_y$

Com correlação $\rho\, dt = E(dz_x\, dz_y)$

Queremos achar o processo seguido por F(x,y)

a) Cálculo do processo seguido por F(x,y), usando equação 27

$dx = \alpha_x\, x\, dt + \sigma_x\, x\, dz_x$

$dy = \alpha_y\, y\, dt + \sigma_y\, y\, dz_y$

$(dx^2) = \sigma_x^2\, x^2\, dt$

$(dy^2) = \sigma_y^2\, y^2\, dt$

$(dx\, dy) = (\alpha_x\, x\, dt + \sigma_x\, x\, dz_x)\ (\alpha_y\, y\, dt + \sigma_y\, y\, dz_y)$

$= \alpha_x\, \alpha_y\, xy\, dt^2 + \sigma_x \alpha_y\, xy\, dt\, dz_x + \alpha_x\, \sigma_y\, xy\, dt\, dz_y + \sigma_x\, \sigma_y\, xy\, dz_x\, dz_y$

$= \sigma_x\, \sigma_y\, xy\, dz_x\, dz_y$

$= \sigma_x\, \sigma_y\, xy\, \rho\, dt$

$(\partial F/\partial x) = y$ $\qquad (\partial F/\partial y) = x$

$\partial^2 F/(\partial x^2) = 0$ $\qquad \partial^2 F/(\partial y^2) = 0$

$\partial^2 F/(\partial x\, \partial y) = 1$ $\qquad \partial^2 F/(\partial y\, \partial x) = 1$

$(\partial F/\partial t) = 0$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 +^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}dy\,dx$$

$$dF = \quad 0 \quad + \quad ydx + \quad xdy \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \frac{1}{2}dx\,dy \quad + \frac{1}{2}dy\,dx$$

$$dF = ydx + xdy + dx\,dy$$

Equação 30

Substituindo os valores de *dx* e *dy*, temos:

$$
\begin{aligned}
dF &= y\,dx + x\,dy + (dx\,dy) \\
&= y[\alpha_x x\,dt + \sigma_x x\,dz_x] + x[\alpha_y y\,dt + \sigma_y y\,dz_y] + \sigma_x \sigma_y xy\,\rho\,dt \\
&= \alpha_x xy\,dt + \sigma_x xy\,dz_x + \alpha_y xy\,dt + \sigma_y xy\,dz_y + \sigma_x \sigma_y xy\,\rho\,dt \\
&= \alpha_x F\,dt + \sigma_x F\,dz_x + \alpha_y F\,dt + \sigma_y F\,dz_y + \sigma_x \sigma_y F\,\rho\,dt \\
\\
&= (\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x \sigma_y \rho) F\,dt + (\sigma_y dz_y + \sigma_x dz_x) F
\end{aligned}
$$

Equação 31

Conclusão: F multiplica ambos os termos, implicando em que F segue um MGB

b) Cálculo do processo seguido por G = Log (F) (usando Equação 24)

$$dG = (\partial G/\partial F)\ dF + \tfrac{1}{2}(\partial^2 G/\partial F^2)\ (dF)^2$$

Precisamos de:

$$
\begin{aligned}
(\partial G/\partial F) &= 1/F \\
(\partial^2 G/(\partial F^2) &= -1/F^2 \\
(dF)^2 &= [(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x \sigma_y \rho) F\,dt + (\sigma_y dz_y + \sigma_x dz_x) F]^2 \\
&= [(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)Fdt]^2 + 2(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)Fdt\,(\sigma_y dz_y + \sigma_x \sigma z_x)F \\
&\qquad + [(\sigma_y dz_y + \sigma_x dz_x)F]^2
\end{aligned}
$$

Eliminando o termo $[(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)Fdt]^2$ por causa de dt^2

$$= 2(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)Fdt\,(\sigma_y dz_y + \sigma_x \sigma z_x)F + [(\sigma_y dz_y + \sigma_x dz_x)F]^2$$

Eliminando o termo $[2(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)Fdt\,(\sigma_y dz_y + \sigma_x \sigma z_x)F\,]$ por causa de $dt^{3/2}$

$$
\begin{aligned}
&= F^2\,[(\sigma_y dz_y)^2 + 2\sigma_y dz_y \sigma_x dz_x + (\sigma_x dz_x)^2] \\
&= F^2\,[(\sigma_y^2)(dz_y)^2 + 2\sigma_y dz_y \sigma_x dz_x + (\sigma_x^2)(dz_x)^2] \\
&= F^2\,[(\sigma_y^2)\,dt + 2\sigma_y\sigma_x\,\rho\,dt + (\sigma_x^2)\,dt] \\
&= (\sigma_y^2 + 2\sigma_y\sigma_x\,\rho + \sigma_x^2]\,F^2\,dt
\end{aligned}
$$

Voltando e substituindo:

$$
\begin{aligned}
dG &= (\partial G/\partial F)\ dF + \tfrac{1}{2}(\partial^2 G/\partial F^2)\ (dF)^2 \\
dG &= (1/F)\ dF + \tfrac{1}{2}(-1/F^2)(dF)^2 \\
dG &= (1/F)\,F[(\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)dt + (\sigma_y\,dz_y + \sigma_x dz_x)] \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}(-1/F^2)(\sigma_y^2 + 2\sigma_y\sigma_x\,\rho + \sigma_x^2]\,F^2\,dt \\
dG &= (\alpha_x + \alpha_y + \sigma_x\sigma_y\rho)dt + (\sigma_y\,dz_y + \sigma_x dz_x) - \tfrac{1}{2}(\sigma_y^2 + 2\sigma_y\sigma_x\,\rho + \sigma_x^2]\,dt \\
dG &= \alpha_x dt + \alpha_y dt + \sigma_x\sigma_y\rho dt + \sigma_y\,dz_y + \sigma_x dz_x - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 dt - \sigma_y\sigma_x\,\rho\,dt - \tfrac{1}{2}\sigma_x^2 dt
\end{aligned}
$$

$dG \quad = \alpha_x dt + \alpha_y dt + \sigma_y\, dz_y + \sigma_x dz_x - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 dt - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2 dt$

$dG \quad = (\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2)dt + \sigma_y\, dz_y + \sigma_x dz_x$ **Equação 32**

Pela Equação 32 podemos observar que G segue um MAB:

Media (dG)= $(\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2)\, dt$ instantânea

E ao longo do intervalo de tempo T

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T(\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2)\, dt \\
&= (\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2) \int_0^T dt \\
&= (\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2)\, t|_0^T \\
&= (\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2)\, (T - 0) \\
&= (\alpha_x + \alpha_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y^2 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x^2)\, T
\end{aligned}
$$

Variância (dG) $= (\sigma_y\, dz_y + \sigma_x\, dz_x)^2$

$$
\begin{aligned}
&= (\sigma_y^2)(dz_y)^2 + 2\sigma_y dz_y \sigma_x dz_x + (\sigma_x^2)(dz_x)^2 \\
&= (\sigma_y^2)\, dt + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\, dt + (\sigma_x^2)\, dt \\
&= (\sigma_y^2)\, dt + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\, dt + (\sigma_x^2)\, dt \qquad \text{instantânea}
\end{aligned}
$$

E ao longo do intervalo de tempo T

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T [(\sigma_y^2)\, dt + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\, dt + (\sigma_x^2)\, dt] \\
&= \int_0^T(\sigma_y^2)\, dt + \int_0^T 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\, dt + \int_0^T(\sigma_x^2)\, dt \\
&= (\sigma_y^2) \int_0^T dt + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho \int_0^T dt + (\sigma_x^2) \int_0^T dt \\
&= (\sigma_y^2)\, t|_0^T + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\;\; t|_0^T + (\sigma_x^2)\;\; t|_0^T \\
&= (\sigma_y^2)\, (T - 0) + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\, (T - 0) + (\sigma_x^2)\, (T - 0) \\
&= (\sigma_y^2)\, T + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho\, T + (\sigma_x^2)\, T \\
&= (\sigma_y^2 + 2\sigma_y\sigma_x\, \rho + \sigma_x^2)\, T
\end{aligned}
$$

Exemplo: Valor Presente Descontado

Seja uma função F(x) = x^θ, onde x segue MGB ($dx = \alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz$). Qual o Valor Presente (t=0) de um fluxo $x^\theta(t)$ descontado em perpetuidade continua (t=0 ate t=∞)?

Sabemos que

$$E\int_0^\infty F(x(t)e^{-rt}dt = \frac{x_0}{r-\alpha}$$

Calculo de α:

Por Lema de Ito:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 \qquad \text{Equação 24}$$

Precisamos de:

$dx \quad = \quad \alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz$

$(dx)^2 \quad = \quad \sigma^2\, x^2\, dt$
$(\partial F/\partial x) \quad = \quad \theta\, x^{(\theta-1)}$
$(\partial F/\partial t) \quad = \quad 0$
$(\partial^2 F/\partial x^2) \quad = \quad \theta\,(\theta-1)\, x^{(\theta-2)}$

Substituindo temos:

$dF = (\partial F/\partial x)\, dx + (\partial F/\partial t)\, dt + ½\,(\partial^2 F/\partial x^2)\,(dx)^2$
$dF = (\theta\, x^{(\theta-1)})\, dx + (0)\, dt + ½\,(\theta\,(\theta-1)\, x^{(\theta-2)})\,(dx)^2$
$dF = (\theta\, x^{(\theta-1)})\, dx + ½\,(\theta\,(\theta-1)\, x^{(\theta-2)})\,(dx)^2$
$dF = (\theta\, x^{(\theta-1)})\,(\alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz) + ½\,(\theta\,(\theta-1)\, x^{(\theta-2)})\,\sigma^2\, x^2\, dt$
$dF = \alpha\,\theta\, x\, x^{(\theta-1)}\, dt + \sigma\,\theta\, x\, x^{(\theta-1)}\, dz + ½\,\theta\,(\theta-1)\; x^2\, x^{(\theta-2)}\,\sigma^2\, dt$
$dF = \alpha\,\theta\, x^{\theta}\, dt + \sigma\,\theta\, x^{\theta}\, dz + ½\,\theta\,(\theta-1)\; x^{\theta}\,\sigma^2\, dt$
$dF = [\alpha\,\theta\, dt + \sigma\,\theta\, dz + ½\,\theta\,(\theta-1)\,\sigma^2\, dt]\, F$
$dF = [\alpha\,\theta + ½\,\theta\,(\theta-1)\,\sigma^2]\, F\, dt + \sigma\,\theta\, F\, dz$ **Equação 33**

Conclusão: $\alpha_{F(x\theta,t)} = [\alpha\,\theta + ½\,\theta\,(\theta-1)\,\sigma^2]$
Observamos pela Equação 33 que F segue uma MGB

Podemos substituir 33 em 12 em pré14 para acharmos E $[F(x^{\theta},t)]$, fluxo de x^{θ} no tempo t:

$E\,[F(x^{\theta},t)] \quad = \quad F(x^{\theta},0)\, \exp(\alpha_{F(x\theta,t)}\,,\; t)$
$E\,[F(x,t)] \quad = \quad F(x,0)\, \exp((\alpha\,\theta + ½\,\theta\,(\theta-1)\,\sigma^2)\, t)$ **Equação 34**

O Valor presente deste fluxo em perpetuidade é:

Lembrando que o VP de uma perpetuidade é: FC / (r - g)
O VP de $x^{\theta}(0)$ em perpetuidade é:

$x^{\theta}(0) / (r - \alpha_{F(x\theta,t)})$
onde $\alpha_{F(x\theta,t)} = (\alpha\,\theta + ½\,\theta\,(\theta-1)\,\sigma^2)$
$x^{\theta}(0) / [r - \alpha\,\theta - ½\,\theta\,(\theta-1)\,\sigma^2]$

Isto é válido desde que o denominador seja positivo.

3.6 Distribuições e Barreiras de Longo Prazo

Seja x uma variável estocástica que segue um Movimento Browniano, onde $x(0)=x_0$ então temos:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$
$$x_t - x_0 \sim N(\alpha t, \sigma^2 t)$$
$$x_t \sim N(x_0 + \alpha t, \sigma^2 t)$$

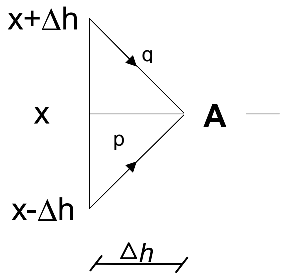
Queremos analisar o que acontece no longo prazo com x_t se impusermos restrições a sua livre movimentação por todo o espaço, ou seja, se impusermos uma barreira superior a qual x_t é impedido de ultrapassar. Esta barreira será chamada de $\bar{x}$. O efeito da barreira na variável x_t é o seguinte:

- Se tempo t, x assumir um valor entre as barreiras superior $\bar{x}$ e inferior $\underline{x}$, as barreiras não terão nenhum impacto sobre o valor de x_t.
- Se tempo t, x assumir um valor acima de $\bar{x}$, então ele se refletirá na barreira e no tempo $t+1$ estará no mesmo nível que estava em t.
- Isso significa que se x_t se encontrar em $\bar{x} - \Delta h$ e tentar se mover um passo Δh para cima, ele voltará exatamente para $\bar{x} - \Delta h$.
- Se por outro lado, x_t já estiver na barreira superior $\bar{x}$ e tentar se mover um passo Δh para cima, ele voltará exatamente para $\bar{x}$, e continuará na barreira.
- Da mesma forma, imporemos uma barreira inferior $\underline{x}$.

Existem muitas aplicações deste processo na economia. Uma destas aplicações é quando temos x é o preço de uma *commodity*, este preço estará sujeito a uma barreira superior quando novas firmas entram no mercado e a uma barreira inferior quando firmas saem.

O que acontece com x se ele segue este processo por um longo período de tempo? Este processo segue a propriedade de Markov, então logo que uma das barreiras é atingida, o efeito do ponto inicial (x_0) desaparece. Além disso espera-se que este processo seja estacionário no longo prazo, pois ele vai e volta sempre entre duas barreiras. Assim seria interessante se pudéssemos calcular a densidade de probabilidade desta distribuição.

Considere a seguinte representação de Caminho Aleatório (*Random Walk*). Existem duas possibilidades da variável x_t assumir o valor A. Uma delas é estar Δh abaixo de A e subir para A, o que, no Random Walk, tem uma probabilidade p de ocorrer. Outra é estar Δh acima de A e descer, o que tem uma probabilidade q de ocorrer.



onde p e q são dados por: (lembrando que $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$)

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\right)$$

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\right)$$

Considerando uma distribuição de probabilidades estacionária, teremos:

$$\phi(x) = p\phi(x - \Delta h) + q\phi(x - \Delta h) \qquad \text{Equação 35}$$

Substituindo o valor de p e q e expandindo o lado direito da Equação usando Taylor, teremos:

$$\phi(x) = p\left[\phi(x) - \Delta h\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x) + \frac{1}{3!}(\Delta h)^3\phi'''(x)...\right] +$$
$$q\left[\phi(x) + \Delta h\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x) + \frac{1}{3!}(\Delta h)^3\phi'''(x).....\right]$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h)[\phi(x) - \Delta h\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x) + ...] +$$
$$+\frac{1}{2}(1 - \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h)[\phi(x) + \Delta h\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x) + ...]$$

colocando os termos de mesma derivada juntos, teremos

$$\phi(x) = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h)\phi(x) + [-\frac{1}{2}\Delta h - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^2 + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^2]\phi'(x)$$
$$+[\frac{1}{4}(\Delta h)^2 + \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^3 + \frac{1}{4}(\Delta h)^2 - \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^3]\phi''(x) + ...$$

$$\phi(x) = \phi(x) - \frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^2\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x) + ...$$

Lembrando-se que potência acima de 2 para Δh significam potências acima de 1 para Δt e por isso serão desprezadas. Além disso, podemos cancelar $\phi(x)$ em ambos os lados da equação e dividir $(\Delta h)^2$, ficando com:

$$\phi''(x) - \frac{2\alpha}{\sigma^2}\phi'(x) = 0 \qquad \text{Equação 36}$$

Fazendo $\gamma = 2\alpha / \sigma^2$, ficamos com $\phi''(x) = \gamma\, \phi'(x)$, logo a solução da equação diferencial ordinária será:

$$\frac{d\phi'(x)}{dx} = \gamma\, \phi'(x)$$

$$\frac{d\phi'(x)}{\phi'(x)} = \gamma\, dx \qquad \Rightarrow \int \frac{d\phi'(x)}{\phi'(x)} = \int \gamma\, dx + C$$

$$\ln \phi'(x) = \gamma\, x + C \qquad \Rightarrow \phi'(x) = e^{\gamma x + C}$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = e^{\gamma x + C} \qquad \Rightarrow \int d\phi(x) = \int e^{\gamma x + C} dx$$

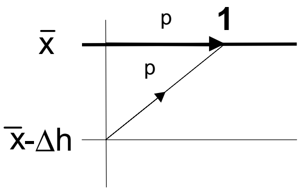
$$\phi(x) = \frac{e^{\gamma x + C}}{\gamma} + B \qquad \Rightarrow \phi(x) = \frac{e^{C}}{\gamma} e^{\gamma x} + B$$

$$\boxed{\phi(x) = A e^{\gamma x} + B}$$

onde A e B são constantes que ainda deverão ser determinadas utilizando as condições de contorno.

Condições de Contorno

Uma das condições é determinada pelo o que ocorre quando x_t atinge uma das barreiras. Através da figura a seguir analisaremos o caso da barreira superior.



Note que para atingir o ponto 1 podemos fazê-lo de duas maneiras: A primeira é saindo de $\bar{x}$ com probabilidade p de subida; e a segunda é vindo de $\bar{x} - \Delta h$, com probabilidade de subida p. Na primeira possibilidade, a barreira não permite que a posição $x+\Delta h$ seja atingida, mantendo na mesma posição, $\bar{x}$, para voltar a $\bar{x} - \Delta h$ no instante seguinte. Na segunda, x assume o valor de $\bar{x}$. Assim, podemos escrever:

$$\phi(\bar{x}) = p\phi(\bar{x}) + p\phi(\bar{x} - \Delta h)$$

Aplicando Taylor na segunda parcela do lado direito da equação teremos:

$$\phi(\bar{x}) = p\phi(\bar{x}) + p\left[\phi(\bar{x}) - \Delta h \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}\right]$$

substituindo o valor de *p* temos:

$$\begin{aligned}
(1-2p)\phi(\bar{x}) \quad &= -p\Delta h \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}p(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \\
-\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h \phi(\bar{x}) \quad &= -\frac{1}{2}\Delta h \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^2 \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{4}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^3 \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}
\end{aligned}$$

Desprezamos o termo em Δh^3 e agrupamos os demais termos em função de Δh.

$$-\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h \phi(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\Delta h \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^2 \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{4}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}\frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}\right](\Delta h)^2 + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\phi(\bar{x})\right]\Delta h = 0$$

Note que *Δh* é função de $\sqrt{dt}$, e Δh^2 é função de *dt*, de forma que para que esta igualdade seja verificada, ambos os termos tem que ser igual a zero.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma^2}\frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} &= 0 \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \quad - \quad \frac{\alpha}{\sigma^2}\phi(\bar{x}) \quad &= 0
\end{aligned}$$

Pegando apenas a equação de baixo, podemos escrever:

$$\phi'(\bar{x}) - \frac{2\alpha}{\sigma^2}\phi(\bar{x}) = 0$$

$$\phi'(\bar{x}) = K\phi(\bar{x})$$

$$\frac{d\phi(\bar{x})}{dx} = K\phi(\bar{x})$$

$$\frac{d\phi(\bar{x})}{\phi(\bar{x})} = Kdx$$

Integrando em ambos os lados, temos:

$$\int \frac{d\phi(\bar{x})}{\phi(\bar{x})} = \int Kdx + C$$

$$\ln \phi(\bar{x}) = K\bar{x} + C$$

$$\phi(\bar{x}) = e^{K\bar{x}+C} = C_1 e^{K\bar{x}}$$

A solução geral encontrada anteriormente, era $\phi(x) = Ae^{\gamma x} + B$. Substituindo a solução geral nesta equação de contorno, verificamos que B = 0. Para encontrarmos o valor de A basta utilizarmos a propriedade de que o somatório das probabilidades entre as barreiras inferior e superior é igual a unidade:

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \phi(x)\, dx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} Ae^{\gamma x} dx = 1$$

$$A \left. \frac{e^{\gamma x}}{\gamma} \right|_{\underline{x}}^{\bar{x}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{\gamma}{e^{\gamma \bar{x}} - e^{\gamma \underline{x}}}$$

substituindo em $\phi(x)$ teremos:

$$\phi(x) = \gamma \frac{e^{\gamma x}}{e^{\gamma \bar{x}} - e^{\gamma \underline{x}}}$$ Equação 37